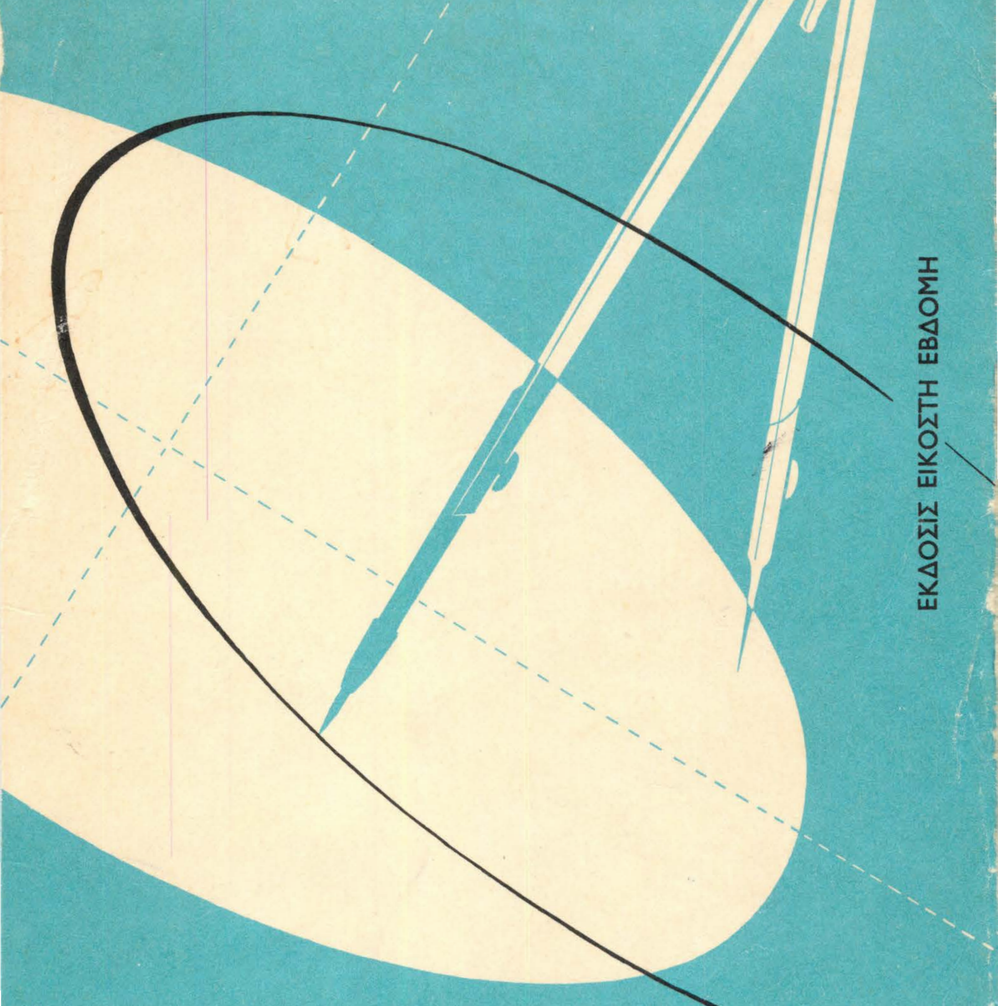
ΠΕΤΡΟΥ Γ. ΤΟΓΚΑ

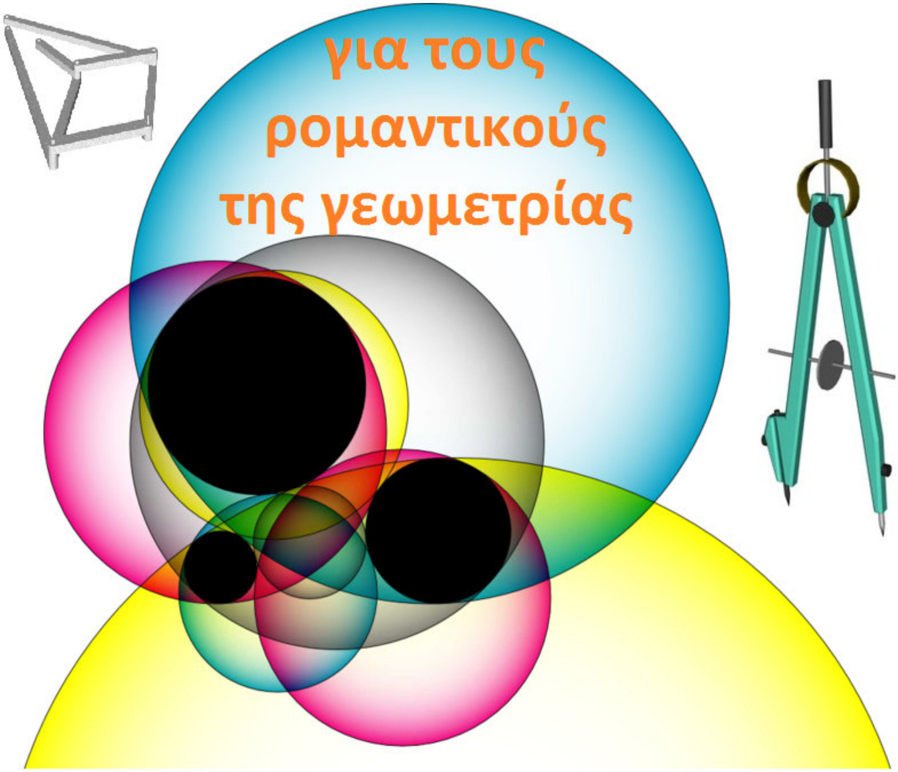
ΕΠΙΤΙΜΟΥ ΔΙΕΥΘΥΝΤΟΥ ΤΗΣ ΒΑΡΒΑΚΕΙΟΥ ΠΡΟΤΥΠΟΥ ΣΧΟΛΗΣ
ΤΟΥ ΔΙΔΑΣΚΑΛΕΙΟΥ ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ
Τ. ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΕΥΕΛΠΙΔΩΝ



ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΔΙΑ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΑΣ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ, ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ ΑΝΩΤΑΤΩΝ ΣΧΟΛΩΝ ΤΟΥ ΚΡΑΤΟΥΣ,
ΦΟΙΤΗΤΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΛΠ.

ΕΚΔΟΣΙΣ ΕΙΚΟΣΤΗ ΕΒΔΟΜΗ



https://parmenides52.blogspot.gr/

ΠΕΤΡΟΥ Γ. ΤΟΓΚΑ
ΕΠΙΤΙΜΟΥ ΔΙΕΥΘΥΝΤΟΥ ΤΗΣ ΒΑΡΒΑΚΕΙΟΥ ΠΡΟΤΥΠΟΥ ΣΧΟΛΗΣ
ΤΟΥ ΔΙΔΑΣΚΑΛΕΙΟΥ ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ
Τ. ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΕΥΕΛΠΙΔΩΝ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ, ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ ΔΙΑ ΤΑΣ ΑΝΩΤΑΤΑΣ ΣΧΟΛΑΣ ΤΟΥ ΚΡΑΤΟΥΣ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΕΙΚΟΣΤΗ ΕΒΔΟΜΗ
ΒΕΛΤΙΩΜΕΝΗ ΚΑΙ ΕΠΗΥΞΗΜΕΝΗ

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ
"ΠΕΤΡΟΥ Γ. ΤΟΓΚΑ Ο.Ε."
ΙΠΠΟΚΡΑΤΟΥΣ 4 - ΤΗΛ. 3626.816
ΑΘΗΝΑΙ (143)

Κάθε γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως.



Ἐκτύπωσις: Γραφικαὶ Τέχναι, Ι. ΜΑΚΡΗΣ Α.Ε.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΤΗΣ ΠΡΩΤΗΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ

Ὁ πόθος μου ἀφ' ἑνός, ὅπως ὁλοκληρώσω τὴν συγγραφικήν μου ἐργασίαν ἐπὶ τῶν κλάδων τῶν Μαθηματικῶν, τῶν διδασκομένων σήμερον εἰς τὰ Σχολεῖα τῆς Μέσης Ἐκπαιδεύσεως, ἀφ' ἑτέρου ἡ εὐμενὴς ὑποδοχή, τῆς ὁποίας ἔτυχον ὅλα τὰ βιβλία μου, ἰδιαιτέρως δὲ τὸ τελευταίως τεθὲν εἰς κυκλοφορίαν **«Εὐθύγραμμος Τριγωνομετρία»**, μὲ ὤθησαν εἰς τὴν συγγροφὴν τοῦ ἀνὰ χεῖρας βιβλίου **«Θεωρητικὴ Γεωμετρία»**.

Κατὰ τὴν συγγραφὴν τοῦ παρόντος βιβλίου ἔλαβον πρὸ ὀφθαλμῶν, ὄχι μόνον σχετικὰ βιβλία ἰδικῶν μας καὶ ξένων συγγραφέων, ἀλλὰ πρὸ παντὸς εἶχον ὡς ὁδηγὸν τὴν πεῖραν, τὴν ὁποίαν ἀπεκόμησα κατὰ τὴν πολυετῆ διδασκαλίαν μου εἰς τὰ Γυμνάσια καὶ Πρακτικὰ Λύκεια, πρὸ παντὸς δὲ εἰς τὴν Βαρβάκειον Πρότυπον Σχολήν, ὡς καὶ τὰς ἀνάγκας τῶν ὑποψηφίων διὰ τὰς ἀνωτάτας Σχολὰς τοῦ Κράτους.

Οὕτω ἔκρινα σκόπιμον διὰ τὴν ἐπιτυχεστέραν καὶ μᾶλλον ἐπαγωγὸν διδασκαλίαν τῆς Θεωρητικῆς Γεωμετρίας νὰ ἀκολουθήσω τὰς ἑξῆς κατευθύνσεις :

Αἱ ἀποδείξεις ὅλων τῶν θεωρημάτων εἶναι πλήρεις καὶ σαφεῖς κατὰ τὸ πρότυπον τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, χωρὶς ὑπονοούμενα ἢ παραπομπάς. Εἰς τὴν καινοτομίαν αὐτὴν προέβην, διότι εἶχον διαπιστώσει ἀπὸ πολλοῦ, μετὰ πόσης δυσκολίας οἱ μαθηταὶ διατυπώνουν τὰς σκέψεις των ἐπὶ τῶν ἀποδείξεων τῶν γεωμετρικῶν προτάσεων, πόσα δὲ κενά, ἀσαφείας καὶ ἀνακριβείας παρουσιάζουν, προκειμένου νὰ διαρθρώσουν τὴν ἀπόδειξιν ἑνὸς θεωρήματος ἢ τὴν λύσιν μιᾶς γεωμετρικῆς ἀσκήσεως. Ἂς μοῦ ἐπιτραπεῖ, ἐπὶ τοῦ προκειμένου, νὰ φρονῶ, ὅτι ἡ καινοτομία αὐτὴ δὲν εἶναι εἰς βάρος τῆς αὐτενεργείας τῶν μαθητῶν, ἡ ὁποία καλλιεργεῖται ἀπὸ τὸν δεξιοτέχνην, ἐμπευσμένον καὶ ἐνθουσιώδη διδάσκαλον ἀφ' ἑνὸς καὶ ἀπὸ τὴν λύσιν τῶν ἀσκήσεων ἀφ' ἑτέρου. Ἄλλως τε πρέπει νὰ συνηθίσουν οἱ μαθηταὶ πρῶτον νὰ **ἀκριβολογοῦν** καὶ κατόπιν νὰ **αὐτενεργοῦν**.

Ἡ σταθερά μας μέριμνα κατὰ τὴν συγγραφὴν τοῦ βιβλίου αὐτοῦ, ὑπῆρξε νὰ καταστήσωμεν τὸν ἀναγνώστην του ἱκανὸν νὰ κατανοῇ τὸ πνεῦμα τῆς ἀποδείξεως τῶν θεωρημάτων, διαφωτίζοντες τὴν θεωρίαν διὰ μιᾶς ἐφαρμογῆς ἢ διὰ μιᾶς παρατηρήσεως. Ἀναφέρομεν ὡς παραδείγματα τὰς § 25, 46, 78, 133—135, κλπ. ὅπου γίνεται λόγος περὶ τῆς ἰσότητος τῶν σχημάτων, περὶ τῆς ἐννοίας τῆς γωνίας, περὶ τοῦ μέτρου τῆς γωνίας, περὶ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν περιπτώσεων τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων καὶ τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων κλπ.

Ὡς πρὸς τὴν ὕλην καὶ τὴν διάταξιν αὐτῆς προσεπαθήσαμεν νὰ συμμορφωθῶμεν πρὸς τὰ ἰσχύοντα προγράμματα, τὰ καθορίζοντα τὴν ὕλην τῶν Γυμνασίων καὶ Πρακτικῶν Λυκείων. Εἰς πολλὰ ὅμως σημεῖα ἠκολουθήσαμεν ἄλλην διάταξιν ὕλης, ἡ ὁποία, κατὰ τὴν γνώμην μας, ἦτο πλέον

ἐπωφελὴς διὰ τὴν ἁπλούστευσιν πολλῶν θεωρημάτων. Οὕτω:

Εἰσάγομεν ἀπὸ τοῦ I κεφαλαίου τοῦ πρώτου βιβλίου τὴν στοιχειώδη σπουδὴν τῆς περιφερείας ἑνὸς κύκλου, διὰ νὰ κατανοήσουν, ἀπὸ τῆς πρώτης στιγμῆς, οἱ μαθηταὶ τὴν ἔννοιαν τῆς γωνίας καὶ τοῦ μέτρου αὐτῆς. εἰσάγομεν τὰ ἀντίστροφα θεωρήματα τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων, διότι δι' αὐτῶν διευκολύνεται ἡ κατανόησις καὶ ἡ ἁπλούστευσις πολλῶν θεωρημάτων καὶ ἐπιτυγχάνεται εὐχερέστερον ἡ λύσις πλείστων ἀσκήσεων.

Παρεμβάλλομεν εἰς τὰ οἰκεῖα μέρη γραφικὰ προβλήματα, ἀναγράφοντες τὰς μεθόδους τῆς κατασκευῆς καθέτων εὐθειῶν, διχοτόμων γωνιῶν κλπ. διὰ τοῦ διαβήτου καὶ τοῦ κανόνος, εὐθὺς ὡς ἡ ἔννοια αὐτῶν διδαχθῇ, δηλ. ἀπὸ τοῦ πρώτου βιβλίου. Οὕτω ἀποφεύγομεν τὸ ἄτοπον νὰ ὁμιλοῦμεν περὶ καθέτων εὐθειῶν, παραλλήλων, μέσων εὐθειῶν, τόξων γωνιῶν κλπ. καὶ νὰ διδάσκεται ὁ τρόπος τῆς κατασκευῆς αὐτῶν μετὰ πολὺν χρόνον.

Εἰς τὴν Στερεομετρίαν προτάσσομεν τὸ κεφάλαιον τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, διὰ νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ διερεύνησις τῶν ἀσκήσεων τοῦ κεφαλαίου τῶν καθέτων εὐθειῶν καὶ ἐπιπέδου καὶ διὰ νὰ χρησιμεύσῃ ὡς ἔρεισμα διὰ τὸν ἐπακριβωμένον ὁρισμὸν τῆς καθέτου εὐθείας ἐπὶ ἐπίπεδον, ὁ ὁποῖος διευκολύνει κατὰ πολὺ τὴν ἀπόδειξιν ἀρκετῶν θεωρημάτων.

Τὴν λεπτὴν καὶ σπουδαιοτάτην ἔννοιαν τῶν γεωμετρικῶν τόπων εἰσάγομεν ἀμέσως ἀπὸ τοῦ I βιβλίου § 162—164. Διὰ νὰ κατανοήσουν δὲ οἱ μαθηταὶ τελείως τὴν ἔννοιαν τοῦ γεωμετρικοῦ τόπου ἀναγράφομεν λεπτομερῶς, εἰς χωριστὰ θεωρήματα καὶ προβλήματα, ὅπου παρουσιάζεται ἡ εὐκαιρία, τὸν τρόπον τῆς εὑρέσεως τῆς φύσεως τοῦ γεωμετρικοῦ τόπου τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν κοινὴν ἰδιότητα (§ 216—220, 271, 298—300). Οὕτω οἱ μαθηταὶ δύνανται νὰ κατανοήσουν ἀκόπως τὴν λύσιν τῶν γεωμετρικῶν προβλημάτων, διὰ τῆς χρήσεως τῶν γεωμετρικῶν τόπων, τὴν ὁποίαν ἀναγράφομεν εἰς τὸ δεύτερον βιβλίον καὶ εἰς τὸ κεφάλαιον τῆς Ἀναλύσεως καὶ Συνθέσεως

Αἱ πολυπληθεῖς ἀσκήσεις (2875), αἱ ὁποῖαι ἀναγράφονται εἰς τὸ βιβλίον αὐτό, ἔχουν χωρισθῇ εἰς τρεῖς κατηγορίας.

Εἰς τὴν πρώτην κατηγορίαν ὑπάγονται αἱ ἀσκήσεις, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἀναγραφῇ ἀμέσως μετὰ τὴν ἀπόδειξιν ἑνὸς θεωρήματος, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἁπλαῖ καὶ ἔχουν σκοπὸν νὰ ἐμπεδώσουν τὴν διδασκαλίαν τοῦ θεωρήματος καὶ νὰ ἐξασκήσουν τὴν αὐτενέργειαν τῶν μαθητῶν. Ὡς πρὸς τὰς ἀσκήσεις αὐτὰς ἔχομεν τὴν γνώμην, ὅτι πρέπει νὰ δίδωνται ὑπὸ τοῦ καθηγητοῦ εἰς τοὺς μαθητὰς ***ἀμέσως*** μετὰ τὴν διδασκαλίαν τοῦ θεωρήματος καὶ νὰ λύωνται, ὑπὸ τῶν μαθητῶν, ἐντὸς τῆς αἰθούσης τῆς παραδόσεως.

Εἰς τὴν δευτέραν κατηγορίαν ὑπάγονται αἱ ἀσκήσεις, αἱ ὁποῖαι εἶναι κατά τι δυσκολώτεραι τῶν πρώτων καὶ τῶν ὁποίων ἡ λύσις στηρίζεται εἰς τὴν γνῶσιν δύο ἢ περισσοτέρων θεωρημάτων ἢ Γεωμετρικῶν προτάσεων, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀποδειχθῇ προηγουμένως.

Τέλος εἰς τὴν τρίτην κατηγορίαν ὑπάγονται αἱ ἀσκήσεις, αἱ ὁποῖαι ἀναγράφονται εἰς τὸ τέλος ἑκάστου Κεφαλαίου ἢ ἑκάστου Βιβλίου. Αἱ ἀσκήσεις αὐταὶ ἀναγράφονται χάριν τῶν μαθητῶν τῶν Πρακτικῶν Λυκείων

καὶ τῶν ὑποψηφίων διὰ τὰς ἀνωτάτας Σχολὰς τοῦ Κράτους

Κατὰ ταῦτα αἱ ἀσκήσεις, αἱ περιεχόμεναι εἰς τὸ βιβλίον αὐτό, εἶναι διατεταγμέναι κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε νὰ μὴ ἀπογοητεύουν τὸν ἀρχάριον, νὰ ἱκανοποιοῦν τὸν προκεχωρημένον καὶ νὰ εὐχαριστοῦν τὸν πεπειραμένον μαθητήν.

Οὕτω συττεταγμένον τὸ παρὸν βιβλίον εὐελπιστῶ, ὅτι θὰ τύχῃ τῆς αὐτῆς ὑποδοχῆς ἐκ μέρους τῶν κ.κ. Συναδέλφων καὶ νὰ καταστῇ χρησιμώτατον βοήθημα, τόσον εἰς τοὺς μαθητὰς τῶν Γυμνασίων καὶ Πρακτικῶν Λυκείων, ὅσον καὶ εἰς τοὺς μὲ Μαθηματικὰ καὶ ἰδιαιτέρως μὲ τὴν Γεωμετρίαν ἀσχολουμένους σπουδαστάς.

Ἀθῆναι τῇ 20ῇ Φεβρουαρίου 1947

ὁ Συγγραφεὺς
Π. Γ. ΤΟΓΚΑΣ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΤΗΣ ΔΕΥΤΕΡΑΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ

Ἡ δευτέρα ἔκδοσις διαφέρει τῆς πρώτης κατὰ τὴν διάταξιν τῆς ὕλης κλπ.

Οἱ Γεωμετρικοὶ τόποι ἀναγράφονται εἰς ἰδιαίτερον κεφάλαιον.

Διὰ τὰ διευκολύνωνται οἱ μαθηταὶ εἰς τὴν αὐτενεργὸν λύσιν τῶν ἀσκήσεων παρεθέσαμεν παραπλεύρως πολλῶν ἀσκήσεων καὶ τὸ σχετικὸν σχῆμα των.

Ἀθῆναι τῇ 15ῃ Αὐγούστου 1951

ὁ Συγγραφεὺς
Π. Γ. ΤΟΓΚΑΣ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΤΗΣ ΤΡΙΤΗΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ

Ἡ τρίτη ἔκδοσις τῆς Γεωμετρίας συμπληρώνει τὰς δύο προηγουμένας ἐκδόσεις καὶ οὕτω τὸ βιβλίον αὐτὸ δύναται νὰ θεωρηθῇ τέλειον ἀπὸ πάσης ἀπόψεως.

Εἰς τὴν ἔκδοσιν αὐτὴν δίδεται ὁ νέος ὁρισμὸς τῆς γωνίας, ἐξηγοῦνται μερικαὶ ἔννοιαι, ὅπως: ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἢ πρέπει καὶ ἀρκεῖ, ἀναγράφεται ἡ μέθοδος τοῦ Simson διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ μεικτογράμμων σχημάτων κλπ.

Ἐπειδὴ εἰς ὅλας τὰς ἀνωτέρας Σχολὰς τοῦ Κράτους δίδονται προβλήματα, ἀναφερόμενα εἰς ὕλην τοῦ Συμπληρώματος τῆς Γεωμετρίας, ἡ νέα ἔκδοσις περιλαμβάνει εἰς ἰδιαίτερον κεφάλαιον τὰς μεθόδους: Μεταφορά, Στροφή, Συμμετρία.

Ἐν Ἀθήναις τῇ 26ῃ Μαΐου 1957

ὁ Συγγραφεὺς
Π. Γ. ΤΟΓΚΑΣ

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ι. Πρῶται ἔννοιαι καὶ ὁρισμοὶ

1. Ὄγκος καὶ ἐπιφάνεια ἑνὸς σώματος. Κάθε ὑλικὸν ἀντικείμενον, κάθε σῶμα καταλαμβάνει μέσα εἰς τὸ ἄπειρον διάστημα, ποὺ μᾶς περιβάλλει, ἕνα χῶρον.

*Ὁ χῶρος αὐτός, ποὺ καταλαμβάνει ἕνα σῶμα μέσα εἰς τὸ ἄπειρον διάστημα, καλεῖται **ὄγκος** αὐτοῦ.*

Π.χ. τὸ κενόν, ποὺ σχηματίζεται εἰς ἕνα τοῖχον, ὅταν ἀποσπάσωμεν ἀπὸ αὐτὸν ἕνα λίθον, παριστάνει τὸν ὄγκον τοῦ λίθου.

Ὁ ὄγκος ἑνὸς σώματος εἶναι ἀναγκαστικῶς πεπερασμένος· αὐτὸ *τὸ πέρας τοῦ σώματος, ποὺ χωρίζει τὸ σῶμα, ἀπὸ τὸ γύρω διάστημα, ποὺ τὸ περιβάλλει, ὀνομάζεται **ἐπιφάνεια** τοῦ σώματος.*

Δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν τὴν ἐπιφάνειαν ἑνὸς σώματος, ἑνὸς ξυλίνου χάρακος, π.χ., ὡς ἕνα λεπτὸν ἐπίχρισμα βερνικίου, τὸ ὁποῖον περιβάλλει τὸν χάρακα καὶ τὸ ὁποῖον χωρίζει τὸ ξύλον ἀπὸ τὸν γύρω ἀέρα.

2. Σχῆμα ἑνὸς σώματος. Παρατηροῦντες τὰ διάφορα ὑλικὰ σώματα, π.χ., μίαν ξυλίνην κασετίναν, ἕνα τετράδιον, ἕνα βῶλον, διακρίνομεν, ὅτι τὰ σώματα αὐτὰ δὲν τελειώνουν ἐξωτερικῶς κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον.

*Ὁ τρόπος κατὰ τὸν ὁποῖον τελειώνει ἐξωτερικῶς ἕνα σῶμα καλεῖται **σχῆμα** αὐτοῦ.*

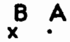
3. Γραμμαί. *Τὰ πέρατα μιᾶς ἐπιφανείας ἢ καὶ μέρους αὐτῆς λέγονται **γραμμαί.***

Π.χ. τὰ ἄκρα τοῦ πίνακος, τοῦ θρανίου, ἑνὸς φύλλου τετραδίου, ἑνὸς μεταλλικοῦ νομίσματος εἶναι γραμμαί.

4. Σημεῖα. *Τὰ ἄκρα μιᾶς γραμμῆς ἢ τὰ ἄκρα μέρους αὐτῆς λέγονται **σημεῖα**.*

Δύο γραμμαὶ δύνανται νὰ τέμνωνται εἰς ἕνα ἢ περισσότερα ***σημεῖα***. Ὥστε ἡ τομὴ δύο γραμμῶν εἶναι ***σημεῖον***. Διὰ τοῦτο παριστάνομεν τὸ σημεῖον μὲ τὴν τομὴν δύο μικρῶν γραμμῶν *(Σχ. 1)*.

Δυνάμεθα ἐξ ἄλλου νὰ νοήσωμεν ἕνα σημεῖον, χωρὶς νὰ τὸ θεωρήσωμεν ὡς τομὴν δύο γραμμῶν: ἕνας κόκκος ἄμμου, πάρα πολὺ λεπτός, μᾶς δίδει τὴν ἔννοιαν ἑνὸς σημείου.



Σχ. 1.

Διὰ τοῦτο τὸ σημεῖον τὸ παριστάνομεν μὲ μίαν τελείαν, πλησίον τῆς ὁποίας θέτομεν ἕνα γράμμα. Π.χ., λέγομεν τὸ σημεῖον Α *(Σχ. 1)*.

5. Γενίκευσις τῆς ἐννοίας τῶν γραμμῶν καὶ τῶν ἐπιφανειῶν. Δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν ἀκόμη, ὅτι: *κάθε σημεῖον, τὸ ὁποῖον κινεῖται εἰς τὸ διάστημα, παράγει μίαν γραμμήν.*

Ἡ τροχιά, τὴν ὁποίαν γράφει μία σφαῖρα ὅπλου, ἢ ἕνας λίθος ἐκσφενδονιζόμενος, μᾶς δίδουν τὴν εἰκόνα τῆς γραμμῆς.

Ἡ μύτη ἑνὸς μολυβιοῦ, ἡ ὁποία μετατίθεται ἐπὶ τοῦ χάρτου, χαράσσει μίαν γραμμήν.

Ὥστε: *τὸ σύνολον τῶν διαδοχικῶν θέσεων, τὰς ὁποίας λαμβάνει ἕνα σημεῖον κατὰ τὴν κίνησίν του, εἶναι μία **γραμμή**.*

Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι: *κάθε γραμμή, ἡ ὁποία κινεῖται εἰς τὸ διάστημα, παράγει μίαν **ἐπιφάνειαν**.*

Ἕνα λεπτὸν σύρμα, τὸ ὁποῖον διαιρεῖ ἕνα τεμάχιον βουτύρου, παράγει μίαν ἐπιφάνειαν, ἡ ὁποία τὸ χωρίζει εἰς δύο τεμάχια.

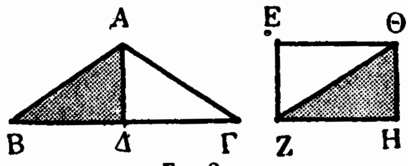
Παρατήρησις. Τὰ σημεῖα, αἱ γραμμαί, αἱ ἐπιφάνειαι δύνανται νὰ ἐξετάζωνται ἀνεξαρτήτως τῶν ὑλικῶν σωμάτων, εἰς τὰ ὁποῖα ἀνήκουν. Πρέπει νὰ θεωρῶμεν τὴν ἐπιφάνειαν, τὴν γραμμὴν χωρὶς πάχος, τὸ δὲ σημεῖον χωρὶς πάχος καὶ χωρὶς ἔκτασιν.

6. Γεωμετρικὰ σχήματα. Τὰ σημεῖα, αἱ γραμμαί, αἱ ἐπιφάνειαι ἑνὸς σχήματος λέγονται ***στοιχεῖα*** τοῦ σχήματος. Τὸ σύνολον τῶν στοιχείων ἑνὸς σχήματος λέγεται ***γεωμετρικὸν σχῆμα***.

Τὰ γεωμετρικὰ σχήματα καὶ τὰς ἰδιότητας αὐτῶν ἐξετάζει ἡ ***Γεωμετρία***.

7. Ἴσα σχήματα. *Δύο σχήματα λέγονται **ἴσα**, ὅταν τὸ ἕνα τιθέμενον ἐπὶ τοῦ ἄλλου καταλλήλως, ἐφαρμόζουν καὶ ἀποτελοῦν ἕνα μόνον σχῆμα.*

8. Ἰσοδύναμα σχήματα. Τὰ σχήματα ΑΒΓ καὶ ΕΖΗΘ *(Σχ. 2)* ἀκέραια ὡς εἶναι, δὲν ἐφαρμόζουν. Τὸ μέρος ὅμως ΑΒΔ ἐφαρμόζει ἐπὶ τοῦ μέρους ΘΖΗ, καὶ τὸ μέρος ΑΔΓ ἐπὶ τοῦ ΖΕΘ. Τὰ τοιαῦτα σχήματα καλοῦμεν ***ἰσοδύναμα*** ἢ ***ἴσα κατὰ μέρη***.



Σχ. 2.

Ὥστε: *Δύο σχήματα λέγονται ἰσοδύναμα, ὅταν ἐφαρμόζουν κατὰ μέρη.*

9. Σκοπὸς τῆς Γεωμετρίας. Ἡ Γεωμετρία σπουδάζει τὰ γεωμετρικὰ σχήματα ἀπὸ ἀπόψεως τοῦ *σχήματός* των, τῆς *ἐκτάσεώς* των καὶ τῶν σχέσεων, αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουν μεταξύ των.

10. Γεωμετρικαὶ ἐκφράσεις. Ἡ Γεωμετρία, κατὰ τὴν ἐξέτασιν τῶν ἰδιοτήτων τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων, προχωρεῖ μὲ συλλογισμούς, ποὺ στηρίζονται εἰς τὴν λογικήν.

Ὁ συλλογισμὸς ἢ οἱ συλλογισμοί, ποὺ κάμνομεν διὰ νὰ βεβαιωθῶμεν, ὅτι μία πρότασις εἶναι ἀληθής, λέγεται ***ἀπόδειξις***.

Κάθε πρότασις, τῆς ὁποίας ἡ ἀλήθεια γίνεται φανερὰ διὰ τῆς ἀποδείξεως, λέγεται ***θεώρημα***.

Κάθε πρότασις, ἡ ὁποία πηγάζει, ὡς συμπέρασμα ἀπὸ προηγούμενον θεώρημα, λέγεται ***πόρισμα***.

Ἡ ἀπόδειξις μιᾶς προτάσεως στηρίζεται εἰς ἄλλας προτάσεις, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἀποδειχθῇ, ἐκεῖναι εἰς ἄλλας προηγουμένας καὶ οὕτω καθεξῆς. Εἶναι φανερόν, ὅτι οὕτω καταλήγομεν εἰς μερικὰς ἀρχικὰς προτάσεις, τοὺς ***ὁρισμούς***, ἢ εἰς ἄλλας προτάσεις, ποὺ δὲν μποροῦν νὰ ἀποδειχθοῦν ἢ καὶ δὲν ἔχουν ἀνάγκην ἀποδείξεως, διότι εἶναι φαναραὶ ἀφ' ἑαυτῶν ἢ *δεχόμεθα* αὐτὰς ὡς ἀληθεῖς. Αἱ τοιαῦται προτάσεις λέγονται ***ἀξιώματα***.

Π.χ., αἱ προτάσεις:

Κάθε σχῆμα δύναται ν' ἀλλάξῃ θέσιν, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ.

Κάθε μέρος εἶναι ὁμοειδὲς πρὸς τὸ ὅλον.

Δύο σχήματα ἴσα πρὸς τρίτον εἶναι καὶ μεταξύ των ἴσα, εἶναι ἀξιώματα.

II. Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ

11. Εὐθεῖα γραμμή. Ἡ ἁπλουστέρα ἀπὸ ὅλας τὰς γραμμὰς εἶ-

ναι ἡ ***εὐθεῖα γραμμή***, ἢ ἁπλῶς ἡ ***εὐθεῖα***. Δὲν δυνάμεθα νὰ δώσωμεν τὸν ὁρισμὸν τῆς εὐθείας (*). Ἕνα τεντωμένον νῆμα μᾶς δίδει τὴν εἰκόνα μιᾶς εὐθείας (*Σχ. 3*).

Σχ. 3.

12. Ἀξιώματα τῆς εὐθείας. Ἐνῶ δὲν δυνάμεθα νὰ δώσωμεν τὸν ὁρισμὸν τῆς εὐθείας, ἐν τούτοις ὅλοι γνωρίζομεν, ὅτι ἀπὸ ἕνα σημεῖον εἰς ἄλλο δυνάμεθα νὰ χαράξωμεν μίαν καὶ μόνον εὐθεῖαν. Ὥστε:

I. ***Δύο σημεῖα ὁρίζουν τὴν θέσιν μιᾶς καὶ μόνον εὐθείας.***



Σχ. 4.

Οὕτω τὰ σημεῖα A καὶ B (*Σχ. 4*) ὁρίζουν τὴν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα A καὶ B. Θὰ λέγωμεν: ἡ *εὐθεῖα AB*.

Ἀπὸ τὴν πρότασιν I συνάγομεν ἀμέσως τὰς κάτωθι τρεῖς προτάσεις:

1η. ***Δύο εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα, συμπίπτουν καὶ ἀποτελοῦν μίαν μόνον εὐθεῖαν.***

2α. ***Δύο διάφοροι εὐθεῖαι μόνον ἕνα κοινὸν σημεῖον δύνανται νὰ ἔχουν.***

Διότι, ἐὰν εἶχον δύο κοινὰ σημεῖα, θὰ συνέπιπτον καὶ θὰ ἀπετέλουν μίαν καὶ μόνον εὐθεῖαν.

3η. ***Δύο εὐθεῖαι δύνανται νὰ ἐφαρμόσουν ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης, ὥστε νὰ ἀποτελέσουν μίαν εὐθεῖαν.***

Ἐπίσης εἶναι φανερόν, ὅτι:

II. ***Μία εὐθεῖα δύναται νὰ ἐκταθῇ πέραν τῶν δύο ἄκρων της, χωρὶς νὰ παύσῃ νὰ εἶναι εὐθεῖα.***



Σχ. 5.

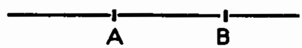
Διὰ τοῦτο, ὅταν λέγωμεν: ἡ *εὐθεῖα AB*, θὰ ἐννοοῦμεν ἀδιαφόρως ἢ μίαν ἀπεριόριστον εὐθεῖαν, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα A καὶ B ἢ μίαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία ἔχει ἄκρα τὰ σημεῖα A καὶ B.

13. Χάραξις εὐθείας. Διὰ νὰ χαράξωμεν μίαν εὐθεῖαν ἐπὶ τοῦ πίνακος ἢ ἐπὶ ἑνὸς φύλλου χάρτου, χρησιμοποιοῦμεν τὸν *κανόνα* (χάρακα). Ὁ κανὼν εἶναι μία λεπτὴ σανίς, τῆς ὁποίας αἱ ἀκμαὶ (κόψεις) παριστάνουν εὐθείας γραμμάς. Ὁ τρόπος τῆς χρησιμοποιήσεως τοῦ κανόνος, πρὸς χάραξιν μιᾶς εὐθείας, εἶναι γνωστὸς εἰς ὅλους.

(*) Ὁ Εὐκλείδης ὁρίζει τὴν εὐθεῖαν ὡς ἑξῆς: «*Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτοῦ σημείοις κεῖται*».

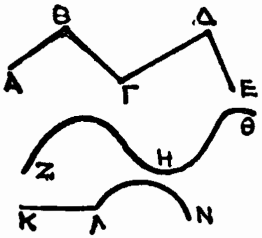
Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος δυνάμεθα νὰ χαράξωμεν μίαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα ἢ καὶ νὰ προεκτείνωμεν μίαν εὐθεῖαν.

14. Εὐθύγραμμον τμῆμα. *Ἕνα μέρος ΑΒ μιᾶς εὐθείας (Σχ. 6), τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ δύο σημείων της Α καὶ Β λέγεται* ***εὐθύγραμμον τμῆμα*** *ἢ* ***τμῆμα εὐθείας.***



Σχ. 6.

15. Τεθλασμένη γραμμή. Ἡ γραμμὴ ΑΒΓΔΕ *(Σχ. 7)* ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ διαδοχικὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ἀλλὰ δὲν εἶναι εὐθεῖα γραμμή· εἶναι ***τεθλασμένη γραμμή.*** Ὥστε:



Σχ. 7.

Τεθλασμένη γραμμὴ *λέγεται ἡ γραμμή, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ πολλὰ εὐθύγραμμα τμήματα, χωρὶς ὅμως αὐτὰ νὰ ἀποτελοῦν εὐθεῖαν.*

Τὰ σημεῖα Β, Γ, Δ εἶναι αἱ *κορυφαὶ* τῆς τεθλασμένης γραμμῆς καὶ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ εἶναι αἱ *πλευραὶ* αὐτῆς.

16. Καμπύλη γραμμή. Ἡ γραμμὴ ΖΗΘ *(Σχ. 7)* δὲν εἶναι οὔτε εὐθεῖα, οὔτε τεθλασμένη· εἶναι ***καμπύλη γραμμή.*** Γενικῶς:

Καμπύλη γραμμὴ *λέγεται ἡ γραμμή, τῆς ὁποίας κανένα μέρος δὲν εἶναι εὐθεῖα.*

Μία καμπύλη γραμμὴ εἶναι ***κλειστή,*** ἐὰν τὰ ἄκρα της συμπίπτουν.

17. Μεικτὴ γραμμή. *Μία γραμμή, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθύγραμμα τμήματα καὶ καμπύλας γραμμάς, λέγεται* ***μεικτὴ γραμμή.***

Π.χ. ἡ γραμμὴ ΚΛΜΝ *(Σχ. 7)* εἶναι μεικτὴ γραμμή.

III. Εἴδη ἐπιφανειῶν

18. Ἐπίπεδον. Ἡ ἁπλουστέρα ἀπὸ ὅλας τὰς ἐπιφανείας εἶναι *ἡ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια* ἢ ἁπλῶς τὸ *ἐπίπεδον.*

Εἰκόνα τοῦ ἐπιπέδου μᾶς δίδουν: ἡ ἐπιφάνεια τῶν ὑαλοπινάκων, ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς τραπέζης, καλῶς πλανισμένης, ἡ ἐπιφάνεια τῶν ἠρεμούντων ὑδάτων, κλπ.

Γενικῶς: *Μία ἐπιφάνεια εἶναι* ***ἐπίπεδος,*** *ὅταν ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία*

συνδέει δύο τυχόντα σημεῖα τῆς ἐπιφανείας, κεῖται ὁλόκληρος ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας.

Ὅλαι αἱ ἐπίπεδοι ἐπιφάνειαι, τὰς ὁποίας συναντῶμεν εἰς τὴν πρᾶξιν, εἶναι περιωρισμέναι. Εἰς τὴν Γεωμετρίαν ὅμως τὸ ἐπίπεδον πρέπει νὰ θεωρῆται, ὅτι ἐκτείνεται ἐπ' ἄπειρον πρὸς ὅλας τὰς διευθύνσεις.

Δύο τυχόντα ἐπίπεδα δύνανται νὰ ταυτισθοῦν καθ' ὅλην τὴν ἔκτασίν των· ὅταν δύο ἐπίπεδα ταυτισθοῦν, δυνάμεθα νὰ ὀλισθαίνωμεν, ἀδιακόπως, τὰ ἐπίπεδα, τὸ ἕνα ἐπὶ τοῦ ἄλλου.

Δύο ἐπίπεδα δύνανται νὰ ταυτισθοῦν καὶ ὅταν τὸ ἕνα ἐξ αὐτῶν ἀντιστραφῇ προηγουμένως.

Παραδεχόμεθα ὅτι: ***Ἐὰν δύο ἐπίπεδα ἔχουν τρία κοινὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, τὰ ἐπίπεδα αὐτὰ ταυτίζονται καὶ ἀποτελοῦν ἕνα ἐπίπεδον.***

(Ἡ πρότασις αὐτὴ θὰ ἀποδειχθῇ βραδύτερον εἰς ἄλλο κεφάλαιον).

19. Ἐπίπεδον σχῆμα. *Ἕνα σχῆμα λέγεται* ***ἐπίπεδον σχῆμα,*** *ὅταν ὅλα τὰ στοιχεῖα του κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.*

20. Τεθλασμένη ἐπιφάνεια. *Μία ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐπιπέδους ἐπιφανείας, χωρὶς νὰ εἶναι ὅλη ἐπίπεδος, λέγεται* ***τεθλασμένη ἐπιφάνεια.***

Π χ. Οἱ συνεχόμενοι τοῖχοι μιᾶς αἰθούσης ἀποτελοῦν τεθλασμένην ἐπιφάνειαν.

21. Καμπύλη ἐπιφάνεια. *Μία ἐπιφάνεια λέγεται* ***καμπύλη ἐπιφάνεια,*** *ὅταν κανένα μέρος της δὲν εἶναι ἐπίπεδον.*

Π.χ. τὸ τόπι, τὸ αὐγό, οἱ σωλῆνες κλπ. ἔχουν καμπύλην ἐπιφάνειαν.

22. Μεικτὴ ἐπιφάνεια. *Μία ἐπιφάνεια λέγεται* ***μεικτὴ ἐπιφάνεια,*** *ὅταν ἀποτελῆται ἀπὸ ἐπίπεδον καὶ καμπύλην ἐπιφάνειαν.*

23. Διαίρεσις τῆς Γεωμετρίας. Ἡ Γεωμετρία διαιρεῖται εἰς δύο μέρη.

1ον. Εἰς τὴν ***Ἐπίπεδον Γεωμετρίαν*** ἢ ***Ἐπιπεδομετρίαν,*** ἡ ὁποία ἐξετάζει τὰς ἰδιότητας τῶν ἐπιπέδων σχημάτων.

2ον. Εἰς τὴν ***Στερεομετρίαν*** ἢ ***Γεωμετρίαν τοῦ Χώρου,*** ἡ ὁποία ἐξετάζει τὰς ἰδιότητας τῶν σχημάτων, τῶν ὁποίων τὰ στοιχεῖα δὲν κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

ΕΠΙΠΕΔΟΜΕΤΡΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

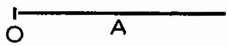
Η ΕΥΘΕΙΑ ΓΡΑΜΜΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'

ΕΥΘΕΙΑΙ ΚΑΙ ΓΩΝΙΑΙ

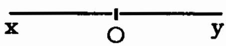
1. Εὐθύγραμμα τμήματα

24. Ἡμιευθεῖα. Ἡ εὐθεῖα ΟΑ *(Σχ. 8)*, ἡ ὁποία ἔχει ἀρχὴν τὸ σημεῖον Ο καὶ ἐκτείνεται πέραν τοῦ Α λέγεται ***ἡμιευθεῖα.***



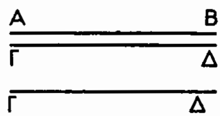
Σχ. 8.

Ἕνα σημεῖον Ο *(Σχ. 9)*, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ μιᾶς ἀπεριορίστου εὐθείας xy, ὁρίζει δύο ἡμιευθείας Ox καὶ Oy. Τὸ σημεῖον Ο ὀνομάζεται ***ἀρχὴ*** τῶν ἡμιευθειῶν αὐτῶν.



Σχ. 9.

25. Σύγκρισις δύο εὐθυγρ. τμημάτων. Διὰ νὰ συγκρίνωμεν δύο εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ θέτομεν τὸ ἕνα ἐπὶ τοῦ ἄλλου, π.χ. τὸ ΓΔ ἐπὶ τοῦ ΑΒ οὕτως, ὥστε τὰ ἄκρα Α καὶ Γ νὰ συμπέσουν· ἔπειτα παρατηροῦμεν τίνα θέσιν θὰ λάβῃ, ἐπὶ τοῦ ΑΒ, τὸ ἄλλο ἄκρον Δ τοῦ ΓΔ. Τὸ ἄκρον Δ δύναται νὰ καταλάβῃ μίαν ἀπὸ τὰς κάτωθι θέσεις:

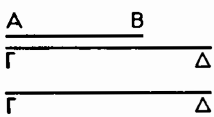


Σχ. 10.

1ον. Ἐὰν τὸ Δ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Β, τότε τὰ δύο εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι *ἴσα (Σχ. 10).* Τὸ ἐξαγόμενον τῆς συγκρίσεως αὐτῆς τὸ ἐκφράζομεν μὲ τὴν ἰσότητα:

εὐθ. τμ. ΑΒ=εὐθ. τμ. ΓΔ	ἢ ἁπλῶς	ΑΒ=ΓΔ.

2ον. Ἐὰν τὸ Δ πέσῃ πέραν τοῦ Β *(Σχ. 11)*, τότε τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ εἶναι *μικρότερον* τοῦ ΓΔ καὶ τὸ ἐξαγόμενον τῆς συγκρίσεως αὐτῆς τὸ ἐκφράζομεν μὲ τὴν ἀνισότητα:

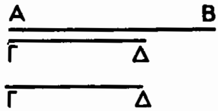


Σχ. 11.

εὐθ. τμ.ΑΒ<εὐθ. τμ.ΓΔ	ἢ ἁπλῶς	ΑΒ<ΓΔ

·

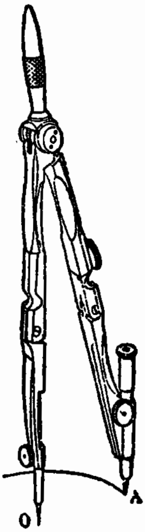
3ον. Ἐὰν τὸ Δ πέσῃ μεταξὺ τῶν Α καὶ Β *(Σχ. 12)*, τότε τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ εἶναι *μεγαλύτερον* τοῦ ΓΔ. Τὸ ἐξαγόμενον τῆς συγκρίσεως αὐτῆς τὸ ἐκφράζομεν μὲ τὴν ἀνισότητα :



Σχ. 12.

| εὐθ. τμ. ΑΒ>εὐθ. τμ. ΓΔ | ἢ ἁπλῶς ΑΒ>ΓΔ |

Σημείωσις. Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαβήτου *(Σχ. 13)*, ὡς εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς πρακτικῆς Γεωμετρίας, συγκρίνομεν ταχύτερον καὶ εὐκολώτερον δύο εὐθύγραμμα τμήματα καὶ εὑρίσκομεν, ἐὰν αὐτὰ εἶναι ἴσα ἢ ἄνισα καὶ ποῖον ἐξ αὐτῶν εἶναι τὸ μεγαλύτερον.

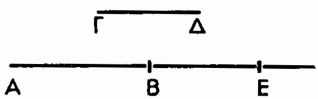


Σχ. 13.

26. Ἀξίωμα ἀνισότητος. ***Τὰ αὐτὰ σχήματα δὲν δύνανται νὰ εἶναι ἴσα καὶ ἄνισα.***

27. Ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων εὐθυγράμμων τμημάτων. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ προσθέσωμεν τὰ δύο εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ.

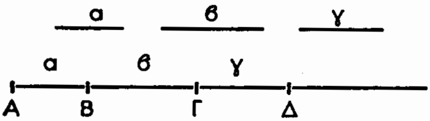
Πρὸς τοῦτο προεκτείνομεν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ *(Σχ. 14)* καὶ λαμβάνομεν ἀπὸ τοῦ Β καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως αὐτῆς, ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ΒΕ ἴσον μὲ τὸ ΓΔ· τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΕ λέγεται *ἄθροισμα* τῶν δύο τμημάτων ΑΒ καὶ ΓΔ. Δηλ. εἶναι :



Σχ. 14.

| ΑΕ=ΑΒ+ΒΕ | ἢ | ΑΕ=ΑΒ+ΓΔ |

Διὰ νὰ προσθέσωμεν πολλὰ εὐθύγραμμα τμήματα, εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων τμημάτων, ἔπειτα εἰς τὸ ἄθροισμα αὐτὸ προσθέτομεν τὸ τρίτον εὐθύγραμμον τμῆμα καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρις, ὅτου προσθέσωμεν διαδοχικῶς ὅλα τὰ εὐθύγραμμα τμήματα.



Σχ. 15.

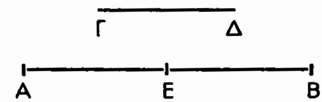
Οὕτω τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων α, β, γ, *(Σχ. 15)*, εἶναι τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΔ. Δηλ. εἶναι

| ΑΔ=ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ | ἢ | ΑΔ=α+β+γ |

Παραδεχόμεθα, ὅτι τὸ ἄθροισμα πολλῶν εὐθυγράμμων τμημάτων

εἶναι τὸ αὐτό, καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν προσθέσωμεν τὰ εὐθύγραμμα αὐτὰ τμήματα.

28. Διαφορὰ δύο εὐθυγράμμων τμημάτων. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν δύο εὐθυγράμμων τμημάτων π.χ. τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ, *(Σχ. 16)* λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ μεγαλυτέρου τμήματος ΑΒ καὶ ἀπὸ τοῦ ἑνὸς τῶν ἄκρων του, ἔστω τοῦ Α, ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΕ



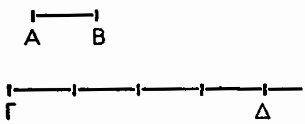
Σχ. 16.

ἴσον μὲ τὸ ΓΔ· τὸ ἀπομένον εὐθύγραμμον τμῆμα ΕΒ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν δύο δοθέντων εὐθυγράμμων τμημάτων· ἤτοι εἶναι

$$\boxed{AB-AE=EB} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{AB-\Gamma\Delta=EB}$$

Ὥστε: *Διαφορὰ δύο εὐθυγράμμων τμημάτων εἶναι ἕνα τρίτον εὐθύγραμμον τμῆμα, τὸ ὁποῖον προστιθέμενον εἰς τὸ μικρότερον δίδει ὡς ἄθροισμα τὸ μεγαλύτερον.*

29. Γινόμενον ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ ἕνα ἀκέραιον ἀριθμόν. Λέγομεν, ὅτι ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα εἶναι *διπλάσιον, τριπλάσιον, τετραπλάσιον, ... νυπλάσιον* ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ, ἂν εἶναι ἄθροισμα 2, 3, 4,..., ν εὐθυγράμμων τμημάτων ἴσων μὲ τὸ ΑΒ.



Σχ. 17.

Οὕτω, τὸ γινόμενον: εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ×4, τὸ ὁποῖον γράφεται ἁπλούστερον ΑΒ×4 ἢ 4ΑΒ, σημαίνει, ὅτι πρέπει νὰ σχηματίσωμεν τὸ ἄθροισμα 4 εὐθυγράμμων τμημάτων ἴσων μὲ τὸ ΑΒ.

Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΓΔ *(Σχ. 17)* παριστάνει τὸ γινόμενον 4ΑΒ, δηλ. εἶναι ΓΔ=4ΑΒ.

30. Πηλίκον δύο εὐθυγράμμων τμημάτων. Λέγομεν, ὅτι ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα εἶναι *τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον, τὸ τέταρτον,... τὸ νυοστὸν* ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ, ἂν τὸ ΑΒ εἶναι τὸ ἄθροισμα 2, 3, 4 . . . . ν εὐθυγράμμων τμημάτων ἴσων μὲ τὸ πρῶτον.

Οὕτω τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ *(Σχ. 17)* εἶναι τὸ τέταρτον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΓΔ· δηλ. εἶναι

$$\boxed{AB=\frac{1}{4}\cdot\Gamma\Delta} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{AB=\frac{\Gamma\Delta}{4}}$$

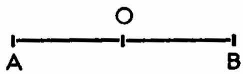
Κατωτέρω θὰ ἴδωμεν πῶς διαιροῦμεν ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα εἰς 2, 3, 4,.... ν ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα.

Παρατήρησις. Αἱ ἰδιότητες τῆς ἰσότητος καὶ ἀνισότητος δύο

ἀριθμῶν ἢ μεγεθῶν ἰσχύουν καὶ διὰ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα καὶ γενικῶς δι' ὅλα τὰ Γεωμετρικὰ σχήματα. Π.χ.

Ἐὰν εἰς ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα προστεθοῦν ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα, τὰ ἀθροίσματα εἶναι ἴσα· κλπ. κλπ.

31. Μέσον εὐθυγράμμου τμήματος. Ἔστω ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ *(Σχ. 18)* καὶ Ο ἕνα σημεῖον αὐτοῦ.



Σχ. 18.

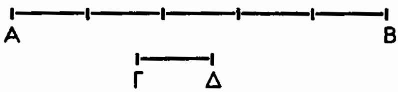
Ἐὰν εἶναι ΟΑ=ΟΒ, τὸ σημεῖον Ο λέγεται ***μέσον*** τοῦ ΑΒ.

Ὥστε: ***Μέσον*** *εὐθυγράμμου τμήματος ὀνομάζομεν τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον διαιρεῖ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα εἰς δύο ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα.*

32. Μέτρησις εὐθυγράμμων τμημάτων. Ὅταν λέγωμεν, ὅτι θὰ *μετρήσωμεν* ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ σημαίνει, ὅτι θὰ τὸ συγκρίνωμεν πρὸς ἕνα ἄλλο εὐθύγραμμον τμῆμα ΓΔ, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ὡς *μονάδα μετρήσεως*, διὰ νὰ ἴδωμεν πόσας φορὰς τὸ τμῆμα αὐτὸ περιέχει τὴν μονάδα.

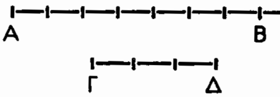
Διὰ νὰ συγκρίνωμεν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ φέρομεν τὸ ΓΔ ἐπὶ τοῦ ΑΒ τόσας φοράς, ὅσας εἶναι δυνατόν. Κατὰ τὴν σύγκρισιν αὐτὴν τρεῖς περιπτώσεις δύνανται νὰ παρουσιασθοῦν:

1ον. Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΓΔ περιέχεται εἰς τὸ ΑΒ 2, 3, 4,... ν φοράς. Ἔστω ὅτι τὸ ΓΔ περιέχεται εἰς τὸ ΑΒ *(Σχ. 19)* 5 φοράς· λέγομεν τότε, ὅτι τὸ ***μέτρον*** τοῦ ΑΒ εἶναι ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς 5.



Σχ. 19.

2ον. Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΓΔ δὲν περιέχεται εἰς τὸ ΑΒ κατὰ ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν φορῶν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν διαιροῦμεν τὸ ΓΔ εἰς ἴσα μέρη καὶ παρατηροῦμεν, ἂν ἕκαστον τῶν ἴσων αὐτῶν μερῶν τοῦ ΓΔ περιέχεται ἀκριβῶς εἰς τὸ ΑΒ κατὰ ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν φορῶν.



Σχ. 20.

Ἔστω, ὅτι διῃρέσαμεν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΓΔ εἰς τρία ἴσα μέρη *(Σχ. 20)* καὶ ὅτι τὸ ἕνα ἀπὸ αὐτὰ τὰ τρία ἴσα μέρη, δηλαδὴ τὸ *ἓν τρίτον* τοῦ ΓΔ, περιέχεται εἰς τὸ ΑΒ, 7 φοράς· λέγομεν τότε, ὅτι τὸ ***μέτρον*** τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ εἶναι ὁ κλασματικὸς ἀριθμὸς $\frac{7}{3}$.

Γενικῶς: ἐὰν τὸ νυοστὸν μέρος τοῦ ΓΔ περιέχεται μ φορὰς εἰς τὸ

ΑΒ, τὸ ***μέτρον*** τοῦ ΑΒ εἶναι ὁ κλασματικὸς ἀριθμὸς $\frac{\mu}{\nu}$, ὅταν **λάβωμεν** ὡς μονάδα μετρήσεως τὸ ΓΔ.

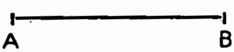
3ον. Δὲν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν ν τοιοῦτον, ὥστε ἂν διαιρέσωμεν τὸ ΓΔ εἰς ν ἴσα μέρη, τὸ ἕνα ἀπὸ αὐτὰ τὰ ἴσα μέρη, νὰ περιέχεται ἀκριβῶς εἰς τὸ ΑΒ κατὰ ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν φορῶν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ δὲν ἔχει ***κοινὸν μέτρον*** *μὲ τὴν μονάδα* ΓΔ, τὴν ὁποίαν ἐξελέξαμεν.

33. Μῆκος εὐθυγράμμου τμήματος. *Τὸ μέτρον ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος λέγεται καὶ μῆκος αὐτοῦ.*

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰ μήκη τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων χρησιμοποιοῦμεν, ὡς μονάδα μετρήσεως τὸ κοινὸν μέτρον, ἢ τὰς ὑποδιαιρέσεις του: τὸ ἑκατοστόμετρον (ἑκ.), τὸ χιλιοστόμετρον ἢ τὰ πολλαπλάσιά του.

Διὰ νὰ μετρήσωμεν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, εἰς ἕνα γεωμετρικὸν σχέδιον, χρησιμοποιοῦμεν τὸ *ὑποδεκάμετρον*, δηλ. ἕνα κανόνα πλατύν, ὁ ὁποῖος εἶναι διῃρημένος ἀπὸ 0 μέχρι 20 ἑκατοστόμετρα.

34. Ἀπόστασις δύο σημείων. Ἔστωσαν δύο σημεῖα Α καὶ Β *(Σχ. 21)* καὶ ΑΒ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα, ποὺ συνδέει αὐτά.

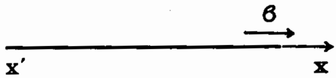


Σχ. 21.

Τὸ μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ λέγεται ***ἀπόστασις*** *τῶν σημείων Α καὶ Β.*

Ἐνίοτε ὡς ἀπόστασιν δύο σημείων θεωροῦμεν ἁπλῶς καὶ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα, τὸ ὁποῖον συνδέει τὰ σημεῖα αὐτά.

35. Ἄξων. Ἔστω μία ἀπεριόριστος εὐθεῖα x′x. Ἕνα κινητὸν σημεῖον δύναται νὰ διανύσῃ τὴν εὐθεῖαν αὐτήν, εἴτε κατὰ τὴν φορὰν τοῦ βέλους β, εἴτε κατ' ἀντίθετον φοράν.



Σχ. 22.

Διὰ νὰ διακρίνωμεν τὰς δύο αὐτὰς φορὰς μεταξύ των, δίδομεν εἰς μίαν ἐξ αὐτῶν, αὐθαιρέτως, τὸ ὄνομα *θετικὴ φορά*, ὁπότε ἡ ἄλλη θὰ ὀνομασθῇ *ἀρνητικὴ φορά*. Συνήθως ὡς θετικὴν φορὰν λαμβάνομεν τὴν φορὰν ἐκ τοῦ x′ πρὸς τὸ x καὶ ὡς ἀρνητικὴν τὴν φορὰν ἐκ τοῦ x πρὸς τὸ x′.

Ἡ ἀπεριόριστος εὐθεῖα x′x, ἐπὶ τῆς ὁποίας ἔχει ὁρισθῇ ἡ ***θετικὴ*** *φορὰ καὶ κατὰ συνέπειαν καὶ ἡ ἀρνητικὴ φορά, λέγεται* ***ἄξων ἢ προσανατολισμένη εὐθεῖα.***

36. Διάνυσμα. Ἐπὶ μιᾶς ἀπεριορίστου εὐθείας x′x *(Σχ. 23)*,

λαμβάνομεν δύο σημεῖα Α καὶ Β. Τὰ σημεῖα Α καὶ Β ὁρίζουν ἐπὶ τῆς x'x ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ ὀνομάσωμεν, ἀδιαφόρως, εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ ἢ ΒΑ.



Σχ. 23.

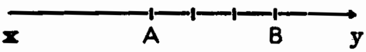
Ἐὰν ὅμως ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ εὐθύγραμμον αὐτὸ τμῆμα διανύεται ἀπὸ ἕνα κινητόν, τὸ ὁποῖον ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὸ Α καὶ φθάνει εἰς τὸ Β, τότε τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ διαφέρει ἀπὸ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΒΑ, ποὺ διανύεται ἀπὸ ἕνα κινητόν, τὸ ὁποῖον ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὸ Β καὶ φθάνει εἰς τὸ Α.

Τὰ εὐθύγραμμα αὐτὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΒΑ, τὰ ὁποῖα διανύονται ἀπὸ ἕνα κινητὸν κατά τινα φορὰν λέγονται ***διανύσματα***.

Τὸ σημεῖον ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἐκκινεῖ τὸ κινητὸν διὰ νὰ διανύσῃ ἕνα διάνυσμα λέγεται ***ἀρχὴ*** *τοῦ διανύσματος*, τὸ δὲ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον φθάνει τὸ κινητὸν λέγεται ***τέλος*** *τοῦ διανύσματος*, καὶ ἡ φορά, τὴν ὁποίαν ἀκολουθεῖ τὸ κινητὸν κατὰ τὴν κίνησίν του, λέγεται ***φορὰ*** τοῦ διανύσματος.

Π.χ. τὸ διάνυσμα ΑΒ *(Σχ. 23)*, τὸ ὁποῖον παρίσταται διὰ τοῦ $\overrightarrow{AB}$ ἔχει ἀρχὴν τὸ σημεῖον Α, τέλος τὸ σημεῖον Β καὶ φορὰν τὴν ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β, ἐνῶ τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{BA}$ ἔχει ἀρχὴν τὸ Β, τέλος τὸ Α καὶ φορὰν τὴν ἐκ τοῦ Β πρὸς τὸ Α.

Τὸ μέτρον ἢ ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ ἑνὸς διανύσματος $\overrightarrow{AB}$. *τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ ἑνὸς ἄξονος εἶναι ἕνας ἀλγεβρικὸς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀπόλυτον τιμὴν τὸ μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος καὶ σημεῖον + ἢ —, καθόσον τὸ διάνυσμα ἔχει τὴν θετικὴν φορὰν ἢ τὴν ἀρνητικὴν φορὰν τοῦ ἄξονος.*



Σχ. 24.

Ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ ἑνὸς διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ παρίσταται διὰ τοῦ $\overline{AB}$.

Οὕτω *(Σχ. 24)*: $\overline{AB}=+3$ καὶ $\overline{BA}=-3$.

Ἀσκήσεις

1. (3)[*]. Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ΧΨ λαμβάνομεν κατὰ σειρὰν τὰ σημεῖα Α,Β,Γ,Δ. 1ον. Νὰ δειχθῇ, ὅτι ΑΓ+ΒΔ=ΑΔ+ΒΓ. 2ον. Ἐὰν Μ εἶναι τὸ μέσον τοῦ ΑΒ καὶ Ν τὸ μέσον τοῦ ΓΔ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $MN=\frac{A\Gamma+B\Delta}{2}$.

---

[*] Ὁ δεύτερος ἀριθμός, ὁ εὑρισκόμενος ἐντὸς παρενθέσεως, δηλώνει τὸν αὔξοντα ἀριθμὸν τῶν λύσεων τῶν ἀσκήσεων, αἱ ὁποῖαι ἀναγράφονται εἰς τὸ βιβλίον «Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα Γεωμετρίας».

2. (5). Δίδονται τρία σημεῖα Α, Β, Γ, μιᾶς εὐθείας ΧΨ καὶ Ο τὸ μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

1ον. Ἐὰν τὸ σημεῖον Γ κεῖται ἐκτὸς τοῦ τμήματος ΑΒ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἶναι

$$ΑΟ=\frac{ΓΑ-ΓΒ}{2},\quad ΓΟ=\frac{ΓΑ+ΓΒ}{2}.$$

2ον. Ἐὰν τὸ σημεῖον Γ κεῖται μεταξὺ τῶν Ο καὶ Β, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$ΑΟ=\frac{ΓΑ+ΓΒ}{2},\quad ΓΟ=\frac{ΓΑ-ΓΒ}{2}.$$

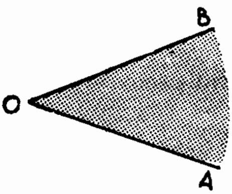
3. (8). Ἐπὶ ἑνὸς πίνακος ἔχουν σημειωθῇ πέντε σημεῖα, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας. Πόσας εὐθείας ὁρίζουν τὰ σημεῖα αὐτά; Νὰ γενικεύσετε τὸ ζήτημα διὰ ν σημεῖα.

4. (10). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν κατὰ σειρὰν τρία σημεῖα Α, Β, Γ καὶ τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι ΑΒ=10 ἑκ. καὶ ΒΓ=6 ἑκ. Ἐὰν Μ, Ν, Ρ εἶναι τὰ μέσα τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τμήματα ΜΝ καὶ ΑΡ ἔχουν τὸ αὐτὸ μέσον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου αὐτοῦ ἀπὸ τὸ σημεῖον Α.

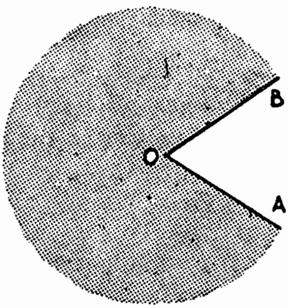
5. (11). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ΧΨ λαμβάνομεν τὰ σημεῖα Α, Ο, Β. Ἐὰν ΟΑ=α καὶ ΟΒ=β, ὅπου α>β, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου Ο ἀπὸ τὸ μέσον Μ τοῦ ΑΒ. Νὰ ἐξετασθοῦν δύο περιπτώσεις, καθ' ὅσον τὸ Ο δὲν κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Β ἢ κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Β.

2. Γωνίαι

37. Γωνία. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Ο ἑνὸς ἐπιπέδου φέρομεν δύο ἡμιευθείας ΟΑ καὶ ΟΒ *(Σχ. 25, 26)*. Τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, τὸ



Σχ. 25.—Ἐξέχουσα γωνία.



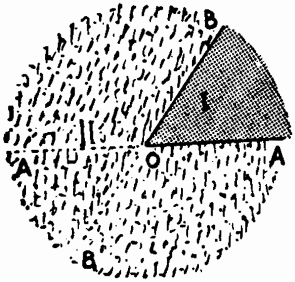
Σχ. 26.—Εἰσέχουσα γωνία.

ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν ἡμιευθειῶν αὐτῶν λέγεται ***γωνία***.

Ὥστε: ***Γωνία** λέγεται τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ δύο ἡμιευθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν κοινὴν ἀρχήν.*

Τὸ κοινὸν σημεῖον Ο τῶν δύο ἡμιευθειῶν λέγεται ***κορυφὴ*** τῆς γωνίας, αἱ δὲ δύο ἡμιευθεῖαι λέγονται ***πλευραὶ*** τῆς γωνίας.

Αἱ ἡμιευθεῖαι ΟΑ καὶ ΟΒ χωρίζουν τὸ ἐπίπεδον εἰς δύο μέρη Ι καὶ ΙΙ *(Σχ. 27)*. Ἕκαστον τῶν μερῶν αὐτῶν, κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμόν, λέγεται γωνία.



Σχ. 27.

Ἐὰν προεκτείνωμεν τὴν πλευρὰν ΟΑ (εἴτε τὴν ΟΒ) τῆς γωνίας Ι πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς, ὁλόκληρος ἡ γωνία Ι κεῖται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ἀπεριορίστου εὐθείας ΟΑ. Αἱ προεκτάσεις τῶν ἡμιευθειῶν ΟΑ καὶ ΟΒ πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς Ο δὲν εἰσέρχονται ἐντὸς τῆς γωνίας Ι. Ἡ γωνία αὐτὴ λέγεται ***ἐξέχουσα γωνία*** ἢ ***κυρτὴ γωνία.***

(Π.χ. ἡ γωνία τοῦ σχήματος 25 εἶναι ἐξέχουσα γωνία).

Τουναντίον ἡ γωνία ΙΙ, εἰς τὴν ὁποίαν αἱ προεκτάσεις τῶν πλευρῶν της εἰσέρχονται ἐντὸς αὐτῆς λέγεται ***εἰσέχουσα γωνία*** ἢ ***μὴ κυρτὴ γωνία.***

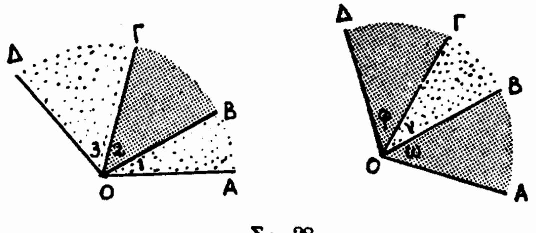
(Ἡ γωνία τοῦ σχήματος 26, εἶναι εἰσέχουσα γωνία).

Κατωτέρω, ἐκτὸς ἐναντίας δηλώσεως, θὰ θεωροῦμεν ὡς γωνίαν τὸ μέρος Ι τοῦ ἐπιπέδου, δηλ. τὴν ἐξέχουσαν γωνίαν.

38. Ὀνομασία μιᾶς γωνίας. Διὰ τὰ ὀνομάσωμεν τὴν γωνίαν, τὴν ὁποίαν ὁρίζουν αἱ ἡμιευθεῖαι ΟΑ καὶ ΟΒ λέγομεν: ἡ γωνία ΑΟΒ ἢ ἡ γωνία ΒΟΑ ἢ ἁπλούστερον ἡ γωνία Ο καὶ γράφομεν:

$$\text{γων.}AOB, \text{ εἴτε } A\widehat{O}B, \text{ εἴτε } \widehat{O}.$$

Ὅταν ἀπαγγέλλωμεν μίαν γωνίαν μὲ τρία γράμματα, πρέπει νὰ θέτωμεν τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς της εἰς τὸ μέσον.



Σχ. 28.

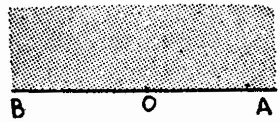
Ὅταν πολλαὶ γωνίαι ἔχουν τὴν αὐτὴν κορυφήν, *(Σχ. 28)* τοποθετοῦμεν συνήθως ἐντὸς αὐτῆς καὶ πλησίον τῆς κοινῆς κορυφῆς ἀπὸ ἕνα δείκτην ἢ ἕνα μικρὸν γράμμα τῆς ἀλφαβήτου.

Π.χ. λέγομεν: ἡ *γωνία* O_1, ἡ *γωνία* O_2, ἡ *γωνία* O_3 *(Σχ. 28)* καὶ γράφομεν $\widehat{O}_1$, $\widehat{O}_2$, $\widehat{O}_3$.

Ὁμοίως λέγομεν: ἡ *γωνία ν (Σχ. 27)*, ἡ *γωνία φ*, ἡ *γωνία ω* καὶ γράφομεν: γων.ν, γων.φ, γων.ω ἢ $\widehat{\nu}$, $\widehat{\varphi}$, $\widehat{\omega}$.

39. Πεπλατυσμένη γωνία. ***Πεπλατυσμένη γωνία*** *λέγεται ἡ γωνία, τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ εἶναι ἡ μία προέκτασις τῆς ἄλλης (Σχ. 29).*

Π.χ. ἡ γωνία $A\widehat{O}B$ *(Σχ. 29)* εἶναι πεπλατυσμένη γωνία.



Σχ. 29.

40. Γωνία μηδέν. ***Μηδὲν γωνία,*** *λέγεται ἡ γωνία, τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ συμπίπτουν.*

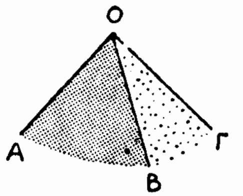


Σχ. 30.

Π.χ. ἡ γωνία ΑΟΒ *(Σχ. 30)* εἶναι μηδὲν γωνία.

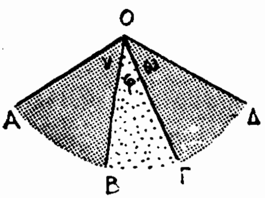
41. Ἐφεξῆς γωνίαι. Ἔστωσαν αἱ γωνίαι ΑΟΒ καὶ ΒΟΓ *(Σχ. 31)*, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὴν αὐτὴν κορυφὴν Ο, κοινὴν τὴν πλευρὰν ΟΒ καὶ τὰς ἄλλας πλευρὰς ΟΑ καὶ ΟΓ ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς πλευρᾶς ΟΒ. Αἱ γωνίαι αὐταὶ λέγονται ***ἐφεξῆς γωνίαι.*** Ὥστε:

Δύο γωνίαι λέγονται ***ἐφεξῆς,*** *ὅταν ἔχουν τὴν αὐτὴν κορυφήν, μίαν κοινὴν πλευρὰν καὶ τὰς δύο ἄλλας πλευρὰς ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς πλευρᾶς.*



Σχ. 31.

42. Διαδοχικαὶ γωνίαι. Ἐὰν πολλαὶ γωνίαι κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ καθεμία ἀπὸ αὐτὰς εἶναι ἐφεξῆς γωνία τῆς προηγουμένης της, τότε αἱ γωνίαι αὐταὶ λέγονται ***διαδοχικαὶ γωνίαι.***



Σχ. 32.

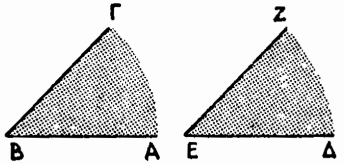
Π.χ. αἱ γωνίαι ω, ν, φ, *(Σχ. 32)* εἶναι διαδοχικαὶ γωνίαι.

43. Σύγκρισις γωνιῶν. Διὰ νὰ συγκρίνωμεν δύο γωνίας ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ *(Σχ. 33)* μεταξύ των, ὡς πρὸς τὸ μέγεθός των, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Λαμβάνομεν τὴν μίαν γωνίαν, π.χ. τὴν ΔΕΖ καὶ τὴν θέτομεν ἐπὶ τῆς ἄλλης γωνίας ΑΒΓ οὕτως, ὥστε ἡ κορυφὴ Ε νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς κορυφῆς Β καὶ ἡ πλευρὰ ΕΔ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΑ, ἡ δὲ πλευρὰ ΕΖ νὰ πέσῃ πρὸς τὸ μέρος πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ πλευρὰ ΒΓ.

Ἔπειτα παρατηροῦμεν ποίαν θέσιν θὰ λάβῃ ἡ πλευρὰ ΕΖ, ὡς πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ:

1ον. Γωνίαι ἴσαι. Ἐὰν ἡ πλευρὰ ΕΖ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ, τότε λέγομεν, ὅτι αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι *ἴσαι*. Τὸ ἐξαγόμενον τῆς συγκρίσεως αὐτῆς δηλώνομεν μὲ τὴν ἰσότητα:



Σχ. 33.

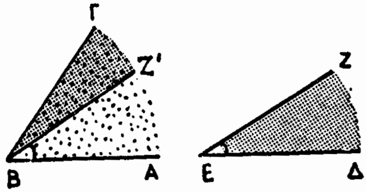
γων.ΑΒΓ=γων.ΔΕΖ

ἢ

$\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Gamma=\Delta\widehat{\mathrm{E}}\mathrm{Z}$

2ον. Γωνίαι ἄνισοι. α') Ἐὰν ἡ πλευρὰ ΕΖ πέσῃ ἐντὸς τῆς γωνίας ΑΒΓ *(Σχ. 34)* καὶ λάβῃ τὴν θέσιν ΒΖ', τότε ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι *μεγαλυτέρα* ἀπὸ τὴν γωνίαν ΔΕΖ.

Τὸ ἐξαγόμενον τῆς συγκρίσεως αὐτῆς δηλώνομεν μὲ τὴν ἀνισότητα:



Σχ. 34.

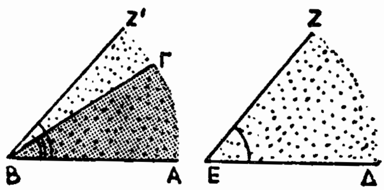
γων.ΑΒΓ>γων.ΔΕΖ

ἢ

$\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Gamma>\Delta\widehat{\mathrm{E}}\mathrm{Z}$

β') Ἐὰν ἡ πλευρὰ ΕΖ *(Σχ. 35)* πέσῃ ἐκτὸς τῆς γωνίας ΑΒΓ, τότε ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι *μικροτέρα* τῆς γωνίας ΔΕΖ.

Τὸ ἐξαγόμενον τῆς συγκρίσεως αὐτῆς δηλώνομεν μὲ τὴν ἀνισότητα:



Σχ. 35.

γων.ΑΒΓ<γων.ΔΕΖ

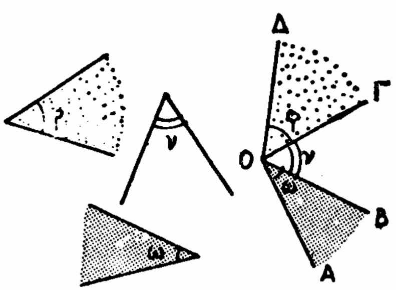
ἢ

$\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Gamma<\Delta\widehat{\mathrm{E}}\mathrm{Z}$

44. Ἄθροισμα γωνιῶν.

Διὰ νὰ προσθέσωμεν πολλὰς γωνίας ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Καθιστῶμεν τὰς δοθείσας γωνίας διαδοχικὰς καὶ ἡ γωνία, ἡ ὁποία ἔχει πλευρὰς τὰς δύο ἐξωτερικὰς πλευρὰς τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν, εἶναι τὸ *ἄθροισμα* τῶν δοθεισῶν γωνιῶν.



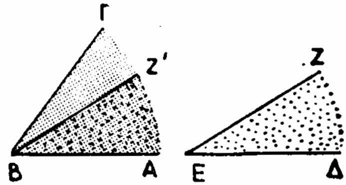
Σχ. 36.

Π.χ. ἡ γωνία ΑΟΔ *(Σχ. 36)*, εἶναι ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ω, ν, φ· ἤτοι εἶναι $\widehat{AO\Delta}=\widehat{AOB}+\widehat{BO\Gamma}+\widehat{\Gamma O\Delta}$ ἢ $\widehat{AO\Delta}=\widehat{\omega}+\widehat{\nu}+\widehat{\varphi}$.

Σημ. Παραδεχόμεθα, ὅτι τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε γωνιῶν εἶναι τὸ αὐτό, καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν προσθέσωμεν τὰς γωνίας.

45. Διαφορὰ δύο γωνιῶν. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν δύο γωνιῶν, π.χ. τῶν ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ *(Σχ. 37)* ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Λαμβάνομεν τὴν μικροτέραν γωνίαν ΔΕΖ καὶ τὴν θέτομεν ἐπὶ τῆς ΑΒΓ οὕτως, ὥστε ἡ κορυφὴ Ε νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς κορυφῆς Β καὶ ἡ πλευρὰ ΕΔ ἐπὶ τῆς ΒΑ· ἐπειδὴ ἡ γωνία ΔΕΖ εἶναι μικροτέρα τῆς γωνίας ΑΒΓ, ἡ πλευρὰ ΕΖ θὰ πέσῃ ἐντὸς τῆς γωνίας ΑΒΓ καὶ ἔστω ὅτι θὰ λάβῃ τὴν θέσιν ΒΖ'. Ἡ γωνία Ζ'ΒΓ εἶναι ἡ *διαφορὰ* τῶν γωνιῶν ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ· ἤτοι εἶναι

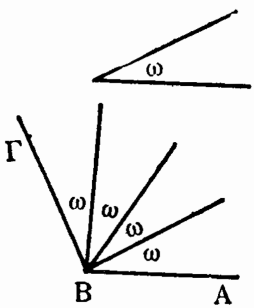


Σχ. 37.

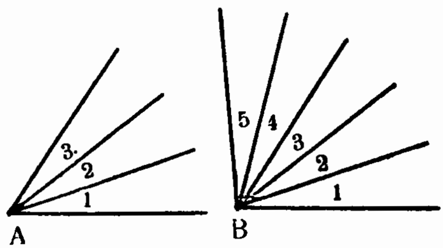
$$\widehat{AB\Gamma}-\widehat{\Delta EZ}=\widehat{Z'B\Gamma}$$

46. Πολλαπλασιασμὸς μιᾶς γωνίας ἐπὶ ἕνα ἀκέραιον ἀριθμόν. Ὁ πολλαπλασιασμὸς μιᾶς γωνίας ἐπὶ ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν γίνεται, ὅπως ὁ πολλαπλασιασμὸς ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ ἀκέραιον ἀριθμὸν (§ 29).

Οὕτω ἡ γωνία ΑΒΓ *(Σχ. 38)* εἶναι τετραπλασία τῆς γωνίας ω· δηλ. εἶναι: $\widehat{AB\Gamma}=4\widehat{\omega}$.



Σχ. 38.



Σχ. 39.

Ἀντιστρόφως εἶναι $\widehat{\omega}=\dfrac{\widehat{AB\Gamma}}{4}$.

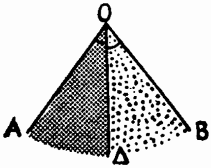
Ἡ γωνία ω εἶναι ἕνα *ὑποπολλαπλάσιον* ἢ *διαιρέτης* τῆς γωνίας ΑΒΓ.

Ἐὰν θεωρήσωμεν μίαν γωνίαν Α διῃρημένην εἰς τρία ἴσα μέρη

(Σχ. 39) καὶ λάβωμεν 5 ἀπὸ αὐτὰ τὰ ἴσα μέρη, θὰ σχηματίσωμεν μίαν γωνίαν Β ἴσην μὲ τὰ $\frac{5}{3}$ τῆς γωνίας Α· δηλ. θὰ εἶναι

$$\widehat{B}=\frac{5}{3}\widehat{A}.$$

47. Διχοτόμος μιᾶς γωνίας. Ἔστω ἡ γωνία ΑΟΒ *(Σχ. 40)*. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας αὐτῆς φέρομεν μίαν εὐθεῖαν ΟΔ, κειμένην μεταξὺ τῶν πλευρῶν της. Ἐὰν αἱ δύο σχηματιζόμεναι γωνίαι ΑΟΔ καὶ ΔΟΒ εἶναι ἴσαι, ἡ ἡμιευθεῖα ΟΔ λέγεται ***διχοτόμος*** τῆς γωνίας ΑΟΒ.



Σχ. 40.

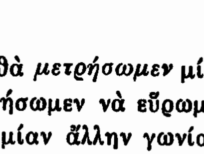
Ὥστε: ***Διχοτόμος γωνίας*** *λέγεται ἡ ἡμιευθεῖα, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας καὶ χωρίζει αὐτὴν εἰς δύο ἴσας γωνίας.*

Ἐὰν ἡ ΟΔ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΟΒ, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$A\widehat{O}\Delta=\Delta\widehat{O}B=\frac{1}{2}A\widehat{O}B.$$

48. Ὀρθὴ γωνία. *Τὸ ἥμισυ μιᾶς πεπλατυσμένης γωνίας λέγεται* ***ὀρθὴ γωνία.***

Π.χ. ἐὰν ἡ ΟΓ διχοτομῇ τὴν πεπλατυσμένην γωνίαν ΑΟΒ, αἱ ἴσαι γωνίαι ΑΟΓ καὶ ΓΟΒ εἶναι ὀρθαὶ γωνίαι. *(Σχ. 41)*.



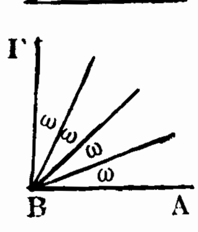
Σχ. 41.

Γράφομεν: $A\widehat{O}\Gamma=\Gamma\widehat{O}B=1$ ὀρθή.

Εἶναι προφανὲς ὅτι:

48΄. *Ὅλαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι.*
(ὡς ἡμίση ἴσων πεπλατυσμένων γωνιῶν).

49. Μέτρησις γωνιῶν. Ὅταν λέγωμεν, ὅτι θὰ *μετρήσωμεν* μίαν γωνίαν σημαίνει, ὅτι θὰ ζητήσωμεν νὰ εὕρωμεν πόσας φορὰς αὕτη περιέχει μίαν ἄλλην γωνίαν, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ὡς *μονάδα*. Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος θὰ προκύψῃ ἐκ τῆς συγκρίσεως αὐτῆς λέγεται *μέτρον* τῆς δοθείσης γωνίας.



Σχ. 42.

Π.χ. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ μετρήσωμεν τὴν γωνίαν ΑΒΓ *(Σχ. 42)*. Λαμβάνομεν ὡς μονάδα μετρήσεως μίαν γωνίαν, ἔστω τὴν ω. Ὑποθέτομεν π.χ., ὅτι ἡ γωνία ΑΒΓ περιέχει ἀκριβῶς 4 φορὰς τὴν γωνίαν ω. Τότε τὸ *μέτρον* τῆς γωνίας ΑΒΓ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 4 καὶ γράφομεν $A\widehat{B}\Gamma=4$.

Συνήθως, ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν γωνιῶν λαμβάνομεν τὴν *ὀρθὴν γωνίαν*.

Ἡ ὀρθὴ γωνία διαιρεῖται εἰς 90 ἴσας γωνίας, ἑκάστη τῶν ὁποίων ὀνομάζεται : *μοῖρα* (°).

Ἡ μοῖρα διαιρεῖται εἰς 60 *πρῶτα λεπτὰ* (′) καὶ ἕκαστον πρῶτον λεπτὸν εἰς 60 *δεύτερα λεπτὰ* (″). Οὕτω εἶναι

$$1 \text{ ὀρθ} = 90^\circ, \quad 1^\circ = 60', \quad 1' = 60''.$$

Μια γωνία 25 μοιρῶν 35 πρώτων λεπτῶν καὶ 48 δευτέρων λεπτῶν γράφεται 25° 35′ 48″.

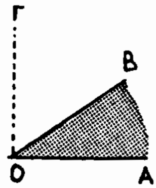
Ἐπίσης μία ὀρθὴ γωνία διαιρεῖται εἰς 100 ἴσας γωνίας, ἑκάστη τῶν ὁποίων ὀνομάζεται : *βαθμὸς* (ᵞ).

Ὁ βαθμὸς διαιρεῖται εἰς 10, 100, 1000,... ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται ἀντιστοίχως *δέκατα, ἑκατοστά, χιλιοστά,*. . . . τοῦ βαθμοῦ.

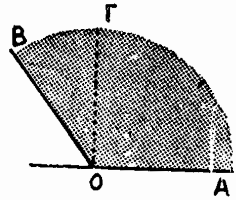
50. Ὀξεῖα γωνία. *Μία γωνία λέγεται* ***ὀξεῖα***, *ἐὰν εἶναι μικροτέρα μιᾶς ὀρθῆς γωνίας.*

Π.χ. ἡ γωνία ΑΟΒ *(Σχ. 43)* εἶναι ὀξεῖα γωνία, διότι εἶναι μικροτέρα τῆς ὀρθῆς γωνίας ΑΟΓ.

51. Ἀμβλεῖα γωνία. *Μία γωνία λέγεται* ***ἀμβλεῖα***, *ἐὰν εἶναι μεγαλυτέρα μιᾶς ὀρθῆς γωνίας, ἀλλὰ μικροτέρα μιᾶς πεπλατυσμένης γωνίας.*



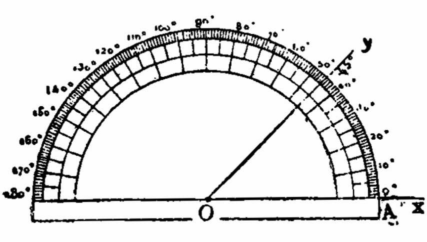
Σχ. 43.



Σχ. 44.

Π.χ. ἡ γωνία ΑΟΒ *(Σχ. 44)* εἶναι ἀμβλεῖα γωνία, διότι εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὀρθῆς γωνίας ΑΟΓ.

52. Πρακτικὴ χάραξις καὶ κατασκευὴ τῶν γωνιῶν. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ μέτρον μιᾶς γωνίας, ἡ ὁποία ἔχει σημειωθῇ ἐπὶ τοῦ χάρτου, χρησιμοποιοῦμεν τὸ *μοιρογνωμόνιον (Σχ. 45)*. Τὸ μοιρογνωμόνιον εἶναι μία πεπλατυσμένη γωνία, ἡ ὁποία ἔχει διαιρεθῇ εἰς 180°· ἔχει κατασκευασθῇ ἀπὸ μίαν λεπτὴν μεταλλίνην πλάκα ἢ ἀπὸ διαφανῆ πάσταν καὶ συνήθως ἔχει σχῆμα ἡμικυκλίου (ἥμισυ ἑνὸς κύκλου).



Σχ. 45.

Ἡ κορυφὴ τῆς πεπλατυσμένης γωνίας λέγεται *κέντρον* τοῦ μοιρογνωμονίου.

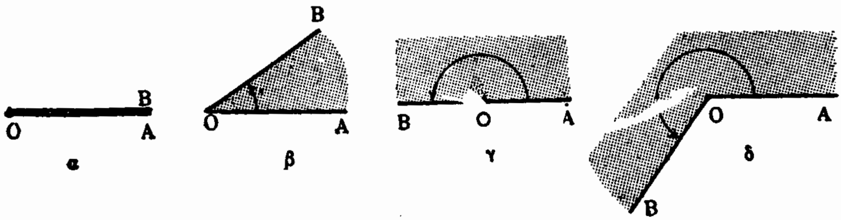
Διὰ νὰ μετρήσωμεν μίαν γωνίαν, π.χ. τὴν γωνίαν xOy, μὲ τὸ μοιρογνωμόνιον, τοποθετοῦμεν τὸ κέντρον τοῦ μοιρογνωμονίου εἰς τὴν κορυφὴν O τῆς γωνίας καὶ τὴν ἀκτῖνα του OA ἐπὶ μιᾶς ἐκ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας, ἔστω τῆς Ox· ἔπειτα διαβάζομεν τὸν ἀριθμὸν τῆς διαιρέσεως τοῦ μοιρογνωμονίου, ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἄλλην πλευρὰν Oy τῆς γωνίας. Π.χ. ἐὰν ἡ πλευρὰ Oy διέρχεται ἀπὸ τὴν διαίρεσιν 45°, ἡ γωνία xOy εἶναι 45°

Ἀντιστρόφως. Μὲ τὸ μοιρογνωμόνιον δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν μίαν γωνίαν, τῆς ὁποίας δίδεται τὸ μέτρον.

Π.χ. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν μίαν γωνίαν 45°, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ τὴν κορυφήν της εἰς ἕνα σημεῖον O μιᾶς δοθείσης εὐθείας x.

Τοποθετοῦμεν τὸ κέντρον τοῦ μοιρογνωμονίου εἰς τὸ σημεῖον O, καὶ τὴν ἀκτῖνα του OA ἐπὶ τῆς εὐθείας x· εὑρίσκομεν ἔπειτα ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας τοῦ μοιρογνωμονίου τὴν διαίρεσιν τῶν 45° καὶ σημειώνομεν πλησίον αὐτῆς ἕνα σημεῖον B. Παραμερίζομεν ἔπειτα τὸ μοιρογνωμόνιον καὶ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν OBy, ἡ ὁποία σχηματίζει μὲ τὴν Ox μίαν γωνίαν xOy ἴσην μὲ 45°.

53. Γενίκευσις τῆς ἐννοίας τῆς γωνίας. Δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν, ὅτι μία γωνία, π.χ. ἡ γωνία AOB *(Σχ. 46)* σχηματίζεται



Σχ. 46.

ἀπὸ μίαν κινητὴν ἡμιευθεῖαν OB, ἡ ὁποία ταυτίζεται κατ' ἀρχὰς μὲ μίαν σταθεράν, κατὰ τὴν θέσιν, ἡμιευθεῖαν OA, στρέφεται ἔπειτα περὶ τὸ O, κατὰ τὴν φορὰν τοῦ βέλους καὶ σταματᾷ εἰς τὴν θέσιν OB.

Ἐννοεῖται, ὅτι κατὰ τὴν στροφήν της, ἡ ἡμιευθεῖα OB δὲν πρέπει νὰ ἐξέλθῃ τοῦ ἐπιπέδου της.

Ἡ ἡμιευθεῖα OA λέγεται *ἀρχικὴ πλευρὰ* τῆς γωνίας AOB καὶ ἡ OB *τελικὴ πλευρὰ* αὐτῆς.

Ἐὰν ἡ τελικὴ πλευρὰ OB συμπίπτῃ μὲ τὴν ἀρχικὴν OA, *(Σχ. 46α)*, ἡ γωνία AOB εἶναι μηδέν.

Ἐὰν ἡ τελικὴ πλευρὰ ΟΒ στρεφομένη περὶ τὸ Ο, ἀπομακρύνεται ἀπὸ τὴν ἀρχικὴν πλευρὰν ΟΑ, ἡ γωνία ΑΟΒ *(Σχ. 46β)* αὐξάνει. Ἐξ αὐτοῦ συνάγομεν, ὅτι τὸ μέγεθος μιᾶς γωνίας ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ ἄνοιγμα τῶν πλευρῶν της καὶ ὄχι ἀπὸ τὸ μῆκος των, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ὑποτεθῇ ἀπεριόριστον.

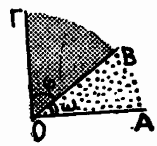
Ἐὰν ἡ ΟΒ, στρεφομένη περὶ τὸ Ο, φθάσῃ εἰς τὴν θέσιν ΟΒ *(Σχ. 46γ)*, προέκτασιν τῆς ΟΑ, τότε ἔχομεν μίαν πεπλατυσμένην γωνίαν ΑΟΒ.

Ἐὰν ἡ ΟΒ, στρεφομένη περὶ τὸ Ο, ὑπερβῇ τὴν ΟΒ, προέκτασιν τῆς ΟΑ, τότε αἱ σχηματιζόμεναι γωνίαι εἶναι *εἰσέχουσαι γωνίαι.*

54. Συμπληρωματικαὶ γωνίαι. *Δύο ὀξεῖαι γωνίαι λέγονται* ***συμπληρωματικαὶ γωνίαι,*** *ὅταν τὸ ἄθροισμά των εἶναι ἴσον μὲ μίαν ὀρθὴν γωνίαν, ἢ μὲ 90° ἢ μὲ 100 βαθμούς.*

Ἑκάστη τῶν δύο αὐτῶν γωνιῶν εἶναι τὸ ***συμπλήρωμα*** τῆς ἄλλης.

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τῶν συμπληρωματικῶν γωνιῶν συνάγομεν ὅτι:



Σχ. 47.

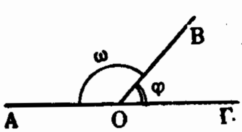
55. ***Ἐὰν δύο ἐφεξῆς γωνίαι εἶναι συμπληρωματικαί, αἱ μὴ κοιναὶ πλευραί των σχηματίζουν μίαν ὀρθὴν γωνίαν*** *(Σχ. 47).*

56. Παραπληρωματικαὶ γωνίαι. *Δύο γωνίαι λέγονται* ***παραπληρωματικαὶ γωνίαι,*** *ὅταν τὸ ἄθροισμά των εἶναι ἴσον μὲ μίαν πεπλατυσμένην γωνίαν· (δηλ. μὲ 2 ὀρθὰς γωνίας ἢ μὲ 180° ἢ μὲ 200 βαθμούς).*

Ἐὰν αἱ δύο παραπληρωματικαὶ γωνίαι δὲν εἶναι καὶ αἱ δύο ὀρθαί, τότε ἡ μία εἶναι ὀξεῖα καὶ ἡ ἄλλη ἀμβλεῖα. Ἑκάστη ἐξ αὐτῶν εἶναι τὸ ***παραπλήρωμα*** τῆς ἄλλης.

57. Ἀξίωμα. ***Ὅταν δύο γωνίαι ἔχουν τὴν αὐτὴν συμπληρωματικήν, ἢ τὴν αὐτὴν παραπληρωματικὴν γωνίαν, αἱ γωνίαι αὐταὶ εἶναι ἴσαι.***

58. Θεώρημα. ***Ἐὰν αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ δύο ἐφεξῆς γωνιῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, αἱ ἐφεξῆς αὐταὶ γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί.***



Σχ. 48.

Τοῦτο ἐξάγεται ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἀθροίσματος δύο γωνιῶν: Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΓΟΒ καὶ ΒΟΑ *(Σχ. 48)* εἶναι ἡ πεπλατυσμένη γωνία ΓΟΑ. Ἑπομένως αἱ γωνίαι αὐταὶ ἔχουν ἄθροισμα ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς γωνίας· δηλ. αἱ γωνίαι ΓΟΒ καὶ ΒΟΑ εἶναι παραπληρωματικαὶ γωνίαι.

59. Ὑπόθεσις καὶ συμπέρασμα μιᾶς προτάσεως. Ἡ προηγουμένη πρότασις:

«Ἐὰν αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ δύο ἐφεξῆς γωνιῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, αἱ γωνίαι αὐταὶ εἶναι παραπληρωματικαί»,

εἶναι μία πρότασις, τῆς ὁποίας ἡ ἀλήθεια γίνεται φανερὰ διὰ τῆς ἀποδείξεως· δηλ. εἶναι ἕνα ***θεώρημα.***

Τὸ θεώρημα αὐτὸ ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μέρη:

1ον. Ἀπὸ τὴν *ὑπόθεσιν:* ***Ἐὰν αἱ μὴ κοινάι πλευραὶ δύο ἐφεξῆς γωνιῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας.***

καὶ 2ον ἀπὸ τὸ *συμπέρασμα:* ***Αἱ ἐφεξῆς αὐταὶ γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί.***

Γενικῶς: Κάθε θεώρημα ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μέρη: ἀπὸ τὴν *ὑπόθεσιν* καὶ ἀπὸ τὸ *συμπέρασμα.*

Ἡ *ὑπόθεσις* εἶναι τὸ σύνολον τῶν προτάσεων, τὰς ὁποίας παραδεχόμεθα, ὅτι ὑφίστανται ἢ τῶν προτάσεων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἤδη ἀποδειχθῆ.

Τὸ *συμπέρασμα* εἶναι μία πρότασις, τῆς ὁποίας ἡ ἀλήθεια ὀφείλει νὰ προκύψῃ, λογικῶς, ἀπὸ τὴν ὑπόθεσιν.

60. Θεώρημα *(ἀντίστροφον).* ***Ἐὰν δύο ἐφεξῆς γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί, αἱ μὴ κοιναὶ πλευραί των κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς.***

Ἐπειδὴ αἱ δύο γωνίαι ΓΟΒ καὶ ΒΟΑ *(Σχ. 48)* εἶναι παραπληρωματικαί, τὰ ἄθροισμά των ΓΟΑ εἶναι μία πεπλατυσμένη γωνία. Ἑπομένως, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς πεπλατυσμένης γωνίας (§ 39), αἱ πλευραὶ ΟΓ καὶ ΟΑ εἶναι ἡ μία προέκτασις τῆς ἄλλης.

61. Ἀντίστροφοι προτάσεις. Εἰς τὸ θεώρημα (§ 58) ἡ ὑπόθεσις ἦτο: ***Ἐὰν αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ δύο ἐφεξῆς γωνιῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας.***

Τὸ δὲ συμπέρασμα ἦτο: ***Αἱ ἐφεξῆς αὐταὶ γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί.***

Εἰς τὸ θεώρημα (§ 60) ἡ ὑπόθεσις ἦτο: ***Ἐὰν δύο ἐφεξῆς γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί.***

Τὸ δὲ συμπέρασμα ἦτο: ***Αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ τῶν δύο αὐτῶν ἐφεξῆς γωνιῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας.***

Εἰς τὰ δύο αὐτὰ θεωρήματα παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ὑπόθεσις τοῦ ἑνὸς εἶναι συμπέρασμα τοῦ ἄλλου.

Τὰ τοιαῦτα θεωρήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ ὑπόθεσις τοῦ ἑνὸς εἶναι

συμπέρασμα τοῦ ἄλλου λέγονται ***ἀντίστροφα θεωρήματα.***

Γενικῶς: *Δύο προτάσεις λέγονται* ***ἀντίστροφοι,*** *ὅταν ἡ ὑπόθεσις τῆς μιᾶς εἶναι συμπέρασμα τῆς ἄλλης καὶ ἀντιστρόφως.*

Τὸ θεώρημα τῆς § 58 λέγεται: ***εὐθὺ θεώρημα,*** ἢ ***εὐθεῖα πρότασις.***

Ὅταν ἀποδειχθῇ ἕνα θεώρημα δὲν εἶναι βέβαιον, ὅτι καὶ τὸ ἀντίστροφόν του εἶναι ἀληθές. Χρειάζεται ἰδιαιτέρα ἀπόδειξις διὰ νὰ βεβαιωθῶμεν, ὅτι τὸ ἀντίστροφον ἀληθεύει.

Τὰ κάτωθι παραδείγματα θὰ μᾶς δείξουν, ὅτι τὰ ἀντίστροφα πολλῶν προτάσεων δὲν εἶναι ἀληθῆ.

Παραδείγματα: *1ον.* ***Εὐθεῖα πρότασις.*** Οἱ μαθηταὶ τῆς τάξεως αὐτῆς εἶναι νέοι ἡλικίας ἀπὸ 13 ἕως 15 ἐτῶν.

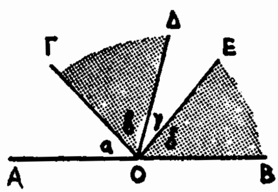
Ἀντίστροφος πρότασις. Οἱ νέοι, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἡλικίαν ἀπὸ 13 ἕως 15 ἐτῶν, εἶναι μαθηταὶ τῆς τάξεως αὐτῆς. Ἡ πρότασις αὐτὴ εἶναι *ἐσφαλμένη.*

2ον. ***Εὐθεῖα πρότασις.*** Ὅλαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Ἀντίστροφος πρότασις. Ὅλαι αἱ ἴσαι γωνίαι, εἶναι ὀρθαί. Ἡ πρότασις αὐτὴ εἶναι *ἐσφαλμένη.*

62. Πορίσματα. ***1ον. Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὴν παραπληρωματικὴν μιᾶς γωνίας ἀρκεῖ νὰ προεκτείνωμεν τὴν μίαν ἐκ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς της.***

2ον. Ἐὰν ἀπὸ τυχὸν σημεῖον μιᾶς εὐθείας φέρωμεν ἡμιευθείας πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας αὐτῆς, τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων διαδοχικῶν γωνιῶν εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς γωνίας.



Σχ. 49.

Πράγματι, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἀθροίσματος πολλῶν γωνιῶν θὰ εἶναι *(Σχ. 49).*

$$\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}+\widehat{\gamma}+\widehat{\delta}=A\widehat{O}B \qquad (1)$$

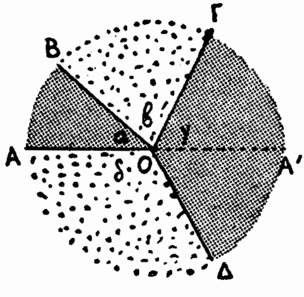
Ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΟΒ εἶναι πεπλατυσμένη, θὰ εἶναι ἴση μὲ δύο ὀρθὰς γωνίας. Ἡ ἰσότης λοιπὸν (1) γίνεται

$$\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}+\widehat{\gamma}+\widehat{\delta}=2 \text{ ὀρθ.}$$

3ον. Ἐὰν ἀπὸ τυχὸν σημεῖον φέρωμεν ὁσασδήποτε ἡμιευθείας, τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων διαδοχικῶν γωνιῶν εἶναι ἴσον μὲ 4 ὀρθάς.

Ἔστω τὸ σημεῖον Ο *(Σχ. 50)* καὶ αἱ ἡμιευθεῖαι ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὰς γωνίας α, β, γ, δ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}+\widehat{\gamma}+\widehat{\delta}=4$ ὀρθ.



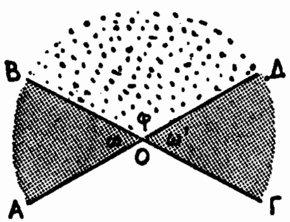
Σχ. 50.

Πράγματι· προεκτείνομεν τὴν ΑΟ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Ο. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν, ποὺ σχηματίζονται ἄνω τῆς εὐθείας ΑΟΑ′ εἶναι ἴσον μὲ 2 ὀρθάς. Ἐπίσης τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν, ποὺ σχηματίζονται κάτω τῆς ΑΟΑ′ εἶναι ἴσον μὲ 2 ὀρθάς. Ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν, ποὺ σχηματίζονται γύρω ἀπὸ τὸ Ο εἶναι ἴσον μὲ 4 ὀρθάς. Ὥστε θὰ εἶναι $\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}+\widehat{\gamma}+\widehat{\delta}=4$ ὀρθ.

63. Κατὰ κορυφὴν γωνίαι. *Δύο γωνίαι λέγονται **κατὰ κορυφήν**, ὅταν ἔχουν κοινὴν κορυφὴν καὶ αἱ πλευραὶ τῆς μιᾶς γωνίας εἶναι προεκτάσεις τῶν πλευρῶν τῆς ἄλλης.*

Π.χ. αἱ γωνίαι ΑΟΒ καὶ ΓΟΔ *(Σχ. 51)* εἶναι κατὰ κορυφὴν γωνίαι. Ἐπίσης καὶ αἱ γωνίαι ΑΟΓ καὶ ΒΟΔ εἶναι κατὰ κορυφὴν γωνίαι.

64. Θεώρημα. ***Δύο κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι.***



Σχ. 51.

Ὑπόθ.	$\widehat{\omega}$ καὶ $\widehat{\omega}'$ κατὰ κορυφὴν γωνίαι
Συμπέρ.	$\widehat{\omega}=\widehat{\omega}'$

Ὑπόθεσις. Ἔστωσαν αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι ΑΟΒ=ω καὶ ΓΟΔ=ω′ *(Σχ. 51)*.

Συμπέρασμα. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\widehat{\omega}=\widehat{\omega}'$.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ ἡ ΑΟΔ εἶναι εὐθεῖα, αἱ ἐφεξῆς γωνίαι ω καὶ φ εἶναι παραπληρωματικαὶ (§ 58). Ἐπίσης, ἐπειδὴ ἡ ΒΟΓ εἶναι εὐθεῖα, αἱ ἐφεξῆς γωνίαι ω′ καὶ φ εἶναι παραπληρωματικαί. Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ γωνίαι ω καὶ ω′ ἔχουν τὴν αὐτὴν παραπληρωματικὴν γωνίαν φ· ἄρα αἱ γωνίαι ω καὶ ω′ εἶναι ἴσαι (§ 57).

Ἀσκήσεις

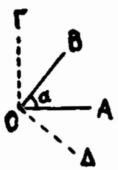
6. (17). Δίδονται αἱ γωνίαι $\alpha=75^\circ$, $\beta=135^\circ$, $\gamma=40^\circ\,24'\,30''$, $\delta=124^\circ\,2'\,48''$. 1ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ συμπληρωματικαὶ τῶν γωνιῶν α καὶ γ. 2ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παραπληρωματικαὶ τῶν γωνιῶν β καὶ δ. 3ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ καὶ ἡ διαφορὰ $\delta-\gamma$.

7. (21). Ἡ διαφορὰ δύο παραπληρωματικῶν γωνιῶν εἶναι 96°. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκάστη γωνία ;

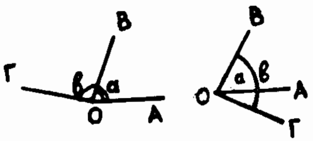
8. (22). Ἡ διαφορὰ δύο συμπληρωματικῶν γωνιῶν εἶναι 1/4 τῆς ὀρθῆς γωνίας. Πρὸς πόσα μέρη τῆς ὀρθῆς ἰσοῦται ἑκάστη γωνία ;

9. (23). Δίδεται μία γωνία ΑΟΒ ἴση μὲ $43^\circ\,17'\,24''$. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο φέρομεν τὴν ἡμιευθεῖαν ΟΓ κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΑ καὶ κειμένην πρὸς τὸ μέρος τῆς ΟΒ καὶ ἔπειτα τὴν ἡμιευθεῖαν ΟΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΒ καὶ κειμένην πρὸς τὸ μέρος τῆς ΟΑ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία ΓΟΔ.

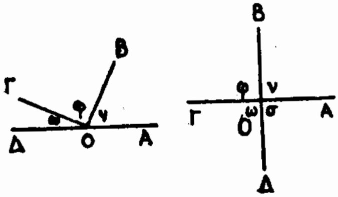
10. (26). Τρεῖς ἡμιευθεῖαι ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ ἄγονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο. Ἐὰν εἶναι γων.ΑΟΒ$=\frac{3}{4}$ὀρθ., γων.ΒΟΓ$=98^\circ\,12'\,48''$, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μέτρον τῆς γωνίας ΓΟΑ εἰς μοίρας. Νὰ ἐξετασθοῦν δύο περιπτώσεις σχήματος.



Σχ. ἀσκ. 9.



Σχ. ἀσκ. 10.



Σχ. ἀσκ. 11.

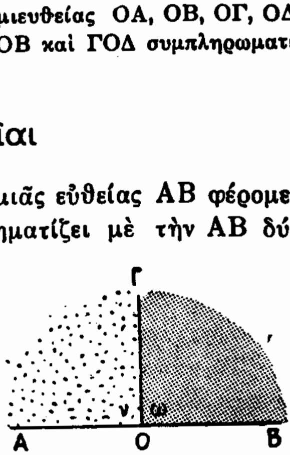
11. (28). Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Ο φέρομεν τὰς ἡμιευθείας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ. Ἐὰν ἡ γωνία ΒΟΓ εἶναι ὀρθὴ καὶ αἱ γωνίαι ΑΟΒ καὶ ΓΟΔ συμπληρωματικαί, τί γραμμὴ εἶναι ἡ ΑΟΔ ;

3. Κάθετοι εὐθεῖαι

65. Ὁρισμοί. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Ο μιᾶς εὐθείας ΑΒ φέρομεν μίαν ἡμιευθεῖαν ΟΓ *(Σχ. 52)*, ἡ ὁποία σχηματίζει μὲ τὴν ΑΒ δύο ἐφεξῆς γωνίας ν καὶ ω.

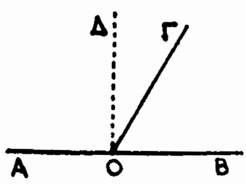
Ἐὰν αἱ γωνίαι ν καὶ ω εἶναι ἴσαι, *ἡ ἡμιευθεῖα ΟΓ λέγεται* ***κάθετος*** *ἐπὶ* τὴν ΑΒ *(Σχ. 52)*.

Ἐὰν αἱ δύο γωνίαι ν καὶ ω εἶναι ἄνισοι, ἡ *ἡμιευθεῖα ΓΟ λέγεται* ***πλαγία*** πρὸς τὴν ΑΒ *(Σχ. 53)*.



Σχ. 52.

Ὥστε: *Μία ἡμιευθεῖα εἶναι* ***κάθετος ἐπὶ ἄλλην εὐθεῖαν,*** *ἐὰν σχηματίζῃ μὲ αὐτὴν δύο ἐφεξῆς γωνίας ἴσας.*

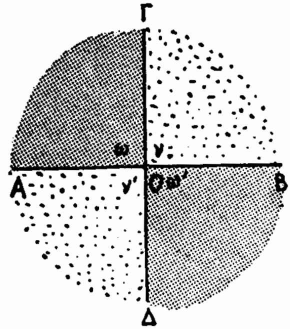


Σχ. 53.

Τὸ σημεῖον Ο, εἰς τὸν ὁποῖον ἡ κάθετος ἢ ἡ πλαγία συναντᾷ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ λέγεται *ποὺς τῆς καθέτου* ἢ *ποὺς τῆς πλαγίας (Σχ. 52)* καὶ *(Σχ. 53).*

Διὰ νὰ δηλώσωμεν, ὅτι ἡ ΓΟ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ *(Σχ. 52)* γράφομεν: ΓΟ⊥ΑΒ καὶ ἀπαγγέλλομεν: *ἡ ΓΟ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἢ ἡ ΓΟ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ΑΒ.*

66. Εὐθεῖαι κάθετοι. *Λέγομεν ὅτι δύο εὐθεῖαι εἶναι* ***κάθετοι μεταξύ των,*** *ὅταν ἡ μία ἀπὸ τὰς τέσσαρας γωνίας, ποὺ σχηματίζουν, εἶναι ὀρθή.*



Σχ. 54.

Ἔστω, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ *(Σχ. 54),* τεμνόμεναι εἰς τὸ σημεῖον Ο, σχηματίζουν μίαν ὀρθὴν γωνίαν ΑΟΓ. Αἱ εὐθεῖαι αὐταί, κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμόν, εἶναι κάθετοι μεταξύ των.

Αἱ γωνίαι ΑΟΔ καὶ ΓΟΒ, ὡς παραπληρωματικαὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας ΑΟΓ, εἶναι ὀρθαί.

Ἡ γωνία ΒΟΔ, ὡς κατὰ κορυφὴν τῆς ΑΟΓ, εἶναι ἐπίσης ὀρθή.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι:

1. ***Δύο εὐθεῖαι, κάθετοι μεταξύ των, σχηματίζουν τέσσαρας ὀρθὰς γωνίας.***

2. ***Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΓΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, θὰ εἶναι καὶ ἡ ΑΒ κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ.***

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ γράψωμεν, ἀδιαφόρως:

ΓΔ ⊥ ΑΒ, εἴτε ΑΒ ⊥ ΓΔ.

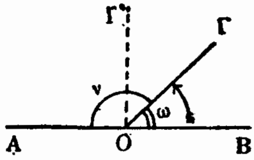
Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ λέγονται καὶ ***ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι*** ἢ λέγομεν ὅτι: ***τέμνονται ὀρθογωνίως.***

Τὸ κάτωθι θεώρημα δεικνύει, ὅτι ὑπάρχει εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ ἄλλην εὐθεῖαν.

67. Θεώρημα. ***Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον μιᾶς εὐθείας δυνάμεθα νὰ φέρωμεν μίαν κάθετον ἐπ' αὐτὴν καὶ μίαν μόνον.***

Ὑπόθεσις. Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ Ο ἕνα τυχὸν σημεῖον της *(Σχ. 55).*

Συμπέρασμα 1ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἀπὸ τὸ Ο δυνάμεθα νὰ φέρωμεν μίαν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ.



Σχ. 55.

Ἀπόδειξις. Ἀπὸ τὸ Ο φέρομεν μίαν τυχοῦσαν ἡμιευθεῖαν ΟΓ πλαγίαν πρὸς τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία νὰ σχηματίζῃ μὲ τὴν ΑΒ δύο ἀνίσους ἐφεξῆς γωνίας ω καὶ ν, $(\widehat{\nu} > \widehat{\omega})$.

Στρέφομεν ἔπειτα συνεχῶς τὴν ἡμιευθεῖαν ΟΓ περὶ τὸ Ο πρὸς τὸ μέρος τῆς μεγαλυτέρας γωνίας ν, ὁπότε ἡ μὲν γωνία ω αὐξάνει, ἡ δὲ γωνία ν ἐλαττοῦται.

Εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ ΟΓ, στρεφομένη περὶ τὸ Ο, θὰ λάβῃ μίαν θέσιν ΟΓ′ τοιαύτην, ὥστε αἱ δύο γωνίαι ω καὶ ν νὰ εἶναι ἴσαι. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν καθεμία ἀπὸ τὰς γωνίας αὐτὰς θὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ μιᾶς πεπλατυσμένης γωνίας, δηλ. θὰ εἶναι ἴση μὲ μίαν ὀρθὴν γωνίαν καὶ ἑπομένως ἡ ΟΓ′ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ.

Συμπέρασμα 2ον. Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο δὲν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἄλλην κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἡ ἡμιευθεῖα ΟΓ, στρεφομένη περὶ τὸ Ο, λάβῃ ἄλλην θέσιν ἐκτὸς τῆς ΟΓ′, αἱ σχηματιζόμεναι γωνίαι ω καὶ ν θὰ εἶναι ἄνισοι καὶ ἡ εὐθεῖα ΟΓ θὰ εἶναι πλαγία πρὸς τὴν ΑΒ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον. . . .***

68. Ἀξιώματα. ***1ον. Κάθε εὐθεῖα χωρίζει τὸ ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖται εἰς δύο μέρη, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἑκατέρωθεν αὐτῆς.***

2ον. Κάθε εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει δύο σημεῖα ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἑκατέρωθεν ἄλλης δοθείσης εὐθείας, τέμνει αὐτήν.

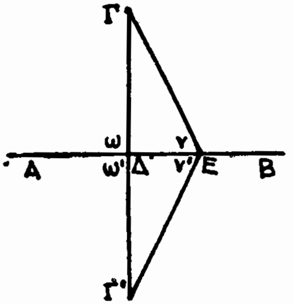
69. Θεώρημα. ***Ἀπὸ ἕνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς εὐθείας, δυνάμεθα νὰ φέρωμεν μίαν κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν αὐτὴν καὶ μίαν μόνον.***

Ὑπόθεσις. Ἔστω ΑΒ μία εὐθεῖα *(Σχ. 56)* καὶ Γ τυχὸν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τῆς ΑΒ.

Συμπέρασμα 1ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ δυνάμεθα νὰ φέρωμεν μίαν εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ.

Ἀπόδειξις. Ἡ εὐθεῖα ΑΒ χωρίζει τὸ ἐπίπεδον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου

κεῖται εἰς δύο μέρη : εἰς τὸ ἄνω μέρος τῆς ΑΒ, καὶ εἰς τὸ κάτω μέρος τῆς ΑΒ.



Σχ. 56.

Περιστρέφομεν τὸ ἄνω μέρος τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον περιέχει τὸ σημεῖον Γ, περὶ τὴν ΑΒ μέχρις, ὅτου πέσῃ ἐπὶ τοῦ κάτω μέρους τοῦ ἐπιπέδου. Τότε τὸ σημεῖον Γ θὰ λάβῃ μίαν θέσιν, ἔστω τὴν Γ'.

Ἐπαναφέρομεν ἔπειτα τὸ ἄνω μέρος τοῦ ἐπιπέδου εἰς τὴν ἀρχικήν του θέσιν καὶ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΓΓ' ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς ἕνα σημεῖον Δ (§ 68), λέγομεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΓΓ' εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ.

Πράγματι· ἐὰν περιστρέψωμεν πάλιν τὸ ἄνω μέρος τοῦ ἐπιπέδου περὶ τὴν ΑΒ, μέχρις ὅτου πέσῃ ἐπὶ τοῦ κάτω μέρους του, τὸ σημεῖον Γ θὰ πέσῃ πάλιν ἐπὶ τοῦ Γ', τὸ Δ θὰ μείνῃ εἰς τὴν θέσιν του καὶ ἡ ΔΓ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΔΓ'· ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΔ μένει ἀκίνητος, ἡ γωνία ΓΔΑ=ω θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς γωνίας ΑΔΓ'=ω'. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ω καὶ ω' εἶναι ἴσαι, ἑκάστη ἐξ αὐτῶν εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ μιᾶς πεπλατυσμένης γωνίας, δηλ. μὲ μίαν ὀρθὴν καὶ ἑπομένως αἱ εὐθεῖαι ΓΓ' καὶ ΑΒ εἶναι κάθετοι μεταξύ των.

Συμπέρασμα 2ον. Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι δὲν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἀπὸ τὸ Γ ἄλλην εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ.

Ἀπόδειξις. Ἔστω, ὅτι ἐκτὸς τῆς ΓΔ ὑπάρχει καὶ ἄλλη κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ ΓΕ.

Ἐπειδὴ ἡ ΓΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ γωνία ν εἶναι ὀρθή.

Ἐὰν περιστρέψωμεν πάλιν τὸ ἄνω μέρος τοῦ ἐπιπέδου περὶ τὴν ΑΒ, τὸ Γ θὰ πέσῃ ἐπάνω εἰς τὸ Γ', τὸ Ε θὰ μείνῃ ἀκίνητον καὶ ἡ ΕΓ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΕΓ'. Ἐπειδὴ ἡ ΑΒ μένει ἀκίνητος, αἱ γωνίαι ν καὶ ν' θὰ εἶναι ἴσαι. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ν εἶναι ὀρθὴ ἔπεται, ὅτι καὶ ἡ ἴση της ν' εἶναι ὀρθή.

Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ ἐφεξῆς γωνίαι ν καὶ ν' εἶναι παραπληρωματικαί· ἄρα αἱ μὴ κοιναὶ πλευραί των ΕΓ καὶ ΕΓ' κεῖνται ἐπ' εὐθείας· ἤτοι ἡ ΓΕΓ' εἶναι εὐθεῖα. Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως καὶ ἡ ΓΔΓ' εἶναι εὐθεῖα. Θὰ ἔχωμεν λοιπόν, ἐξ ἑνὸς σημείου Γ εἰς ἄλλο σημεῖον Γ', δύο εὐθείας τὰς ΓΕΓ' καὶ ΓΔΓ' πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον, διότι ἀντιβαίνει εἰς τὸ ἀξίωμα : δύο σημεῖα ὁρίζουν τὴν θέσιν μιᾶς μόνον εὐθείας.

Ἡ ΓΕ δὲν εἶναι λοιπὸν κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ.

Ὥστε ἀπὸ τὸ Γ δὲν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἄλλην **κάθετον ἐπὶ** τὴν ΑΒ ἐκτὸς τῆς ΓΓ'.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι : ***Ἀπὸ ἕνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον...***

70. Μέθοδος διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς. Εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα δὲν ἀπεδείξαμεν ἀπ' εὐθείας, ὅτι μία καὶ μόνον κάθετος ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, ἀλλὰ *παρεδέχθημεν προσωρινῶς*, ὅτι ἐκτὸς τῆς ΓΔ ὑπάρχει καὶ ἄλλη κάθετος πρὸς τὴν ΑΒ, ἡ ΓΕ.

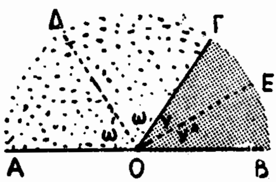
Παραδεχθέντες ὅμως, ὅτι ἡ ΓΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, κατελήξαμεν εἰς τὸ συμπέρασμα : *ὅτι αἱ ΓΔΓ' καὶ ΓΕΓ' εἶναι δύο διαφορετικαὶ εὐθεῖαι μὲ τὰ αὐτὰ ἄκρα*, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀπαράδεκτον.

Ἡ μέθοδος αὐτὴ τοῦ συλλογισμοῦ, πρὸς ἀπόδειξιν μιᾶς προτάσεως, λέγεται *πλαγία ἀπόδειξις* ἢ *μέθοδος ἀποδείξεως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς*.

Γενικῶς : Ἡ μέθοδος ἀποδείξεως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς συνίσταται : εἰς τὸ νὰ *ὑποθέσωμεν προσωρινῶς*, ὅτι τὸ συμπέρασμα μιᾶς ἀποδεικτέας προτάσεως δὲν εἶναι ἀκριβές. Παραδεχόμεθα ἔπειτα, ὡς ἀληθεῖς ὅλας τὰς ἀντιθέτους περιπτώσεις τῆς προσωρινῆς αὐτῆς ὑποθέσεως. Ἐάν, ἐκ τῆς παραδοχῆς αὐτῶν, καταλήξωμεν εἰς συμπεράσματα, τὰ ὁποῖα ἀντίκεινται εἰς τὴν ὑπόθεσιν τῆς ἀποδεκτέας προτάσεως ἢ ἄλλης γνωστῆς προτάσεως, τότε πρέπει νὰ παραδεχθῶμεν, ὅτι ἡ *προσωρινὴ ὑπόθεσίς μας* πρέπει νὰ ἀπορριφθῇ.

71. Θεώρημα. ***Ἐὰν δύο ἐφεξῆς γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί, αἱ διχοτόμοι των εἶναι κάθετοι μεταξύ των.***

Ὑπόθεσις. Ἔστωσαν αἱ ἐφεξῆς γωνίαι ΑΟΓ καὶ ΓΟΒ *(Σχ. 57)*,



Ὑπόθ.	$\widehat{AO\Gamma}$ καὶ $\widehat{\Gamma OB}$ ἐφεξῆς γωνίαι $\widehat{AO\Gamma}+\widehat{\Gamma OB}=2$ ὀρθαὶ ΟΔ διχοτόμος γων.ΑΟΓ ΟΕ » γων.ΓΟΒ
Συμπ.	ΟΔ ⊥ ΟΕ

Σχ. 57.

αἱ ὁποῖαι εἶναι παραπληρωματικαὶ καὶ ΟΔ, ΟΕ αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν αὐτῶν ἀντιστοίχως.

Συμπέρασμα. Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ διχοτόμοι ΟΔ καὶ ΟΕ εἶναι

κάθετοι μεταξύ των, δηλ. ὅτι ἡ γωνία ΔΟΕ εἶναι ὀρθή.

Ἀπόδειξις. Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\widehat{2\omega}+\widehat{2\nu}=2$ ὀρθ.·

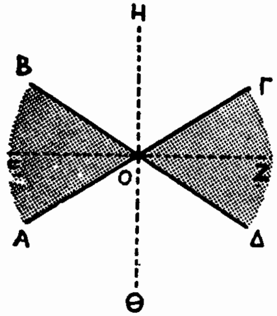
ἄρα θὰ εἶναι $\widehat{\omega}+\widehat{\nu}=1$ ὀρθ. ἢ $\Delta\widehat{O}E=1$ ὀρθ.

Ἐπειδὴ ἡ γωνία ΔΟΕ εἶναι ὀρθή, αἱ πλευραί της ΟΔ καὶ ΟΕ εἶναι κάθετοι μεταξύ των.

Ἐδείχθη λοιπὸν ὅτι: ***Ἐὰν δύο ἐφεξῆς γωνίαι....***

72. Θεώρημα. ***Αἱ διχοτόμοι τῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας.***

Ὑπόθεσις. Ἔστωσαν αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι ΑΟΒ καὶ ΓΟΔ *(Σχ. 58)* καὶ ΟΕ, ΟΖ αἱ διχοτόμοι των ἀντιστοίχως.



Σχ. 58.

Ὑπόθ.	$A\widehat{O}B$ καὶ $\Gamma\widehat{O}\Delta$ κατὰ κορυφὴν γωνίαι ΟΕ διχοτ. $A\widehat{O}B$ ΟΖ διχοτ. ΓΟΔ
Συμπερ.	ΕΟΖ=εὐθεῖα

Συμπέρασμα. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ γραμμὴ ΕΟΖ εἶναι εὐθεῖα.

Ἀπόδειξις. Φέρομεν τὴν διχοτόμον ΟΗ τῆς γωνίας ΒΟΓ. Αἱ ἐφεξῆς γωνίαι ΑΟΒ καὶ ΒΟΓ εἶναι παραπληρωματικαί, διότι αἱ μὴ κοιναὶ πλευραί των κεῖνται ἐπ' εὐθείας· ἄρα αἱ διχοτόμοι των ΟΕ καὶ ΟΗ εἶναι κάθετοι μεταξύ των (§ 71)· ἤτοι εἶναι

γων.ΕΟΗ=1 ὀρθὴ (1)

Ὁμοίως αἱ διχοτόμοι ΟΗ καὶ ΟΖ τῶν ἐφεξῆς παραπληρωματικῶν γωνιῶν ΒΟΓ καὶ ΓΟΔ εἶναι κάθετοι μεταξύ των· ἤτοι εἶναι

γων.ΗΟΖ=1 ὀρθὴ (2)

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

γων.ΕΟΗ+γων.ΗΟΖ=2 ὀρθαί.

Ἐπειδὴ αἱ ἐφεξῆς γωνίαι ΕΟΗ καὶ ΗΟΖ εἶναι παραπληρωματικαί, αἱ μὴ κοιναὶ πλευραί των ΟΕ καὶ ΟΖ κεῖνται ἐπ' εὐθείας (§ 58).

Ὥστε ἡ γραμμὴ ΕΟΖ εἶναι εὐθεῖα.

Ἐδείχθη λοιπὸν ὅτι: ***Αἱ διχοτόμοι τῶν....***

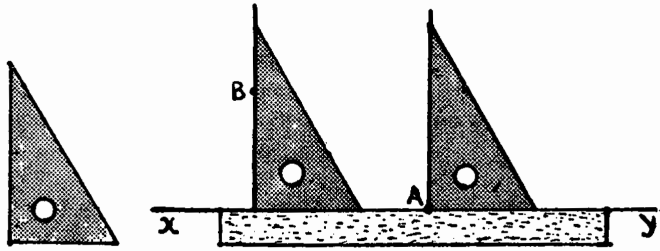
73. Πόρισμα. ***Αἱ διχοτόμοι τῶν τεσσάρων γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι***

σχηματίζονται ὑπὸ δύο τεμνομένων εὐθειῶν, ἀποτελοῦν δύο εὐθείας καθέτους μεταξύ των.

Διότι αἱ διχοτόμοι αὗται εἶναι διχοτόμοι τῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν.

74. Πρακτικὴ χάραξις καθέτων. Ἡ κατασκευὴ καθέτων εὐθειῶν δύναται νὰ γίνῃ πρακτικῶς μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ γνώμονος καὶ τοῦ κανόνος.

Ὁ *γνώμων* εἶναι μία λεπτὴ σανὶς *(Σχ. 59)*, ἡ ὁποία καταλήγει



Σχ. 59.

εἰς τρεῖς εὐθείας (πλευρὰς) ἐκ τῶν ὁποίων αἱ δύο εἶναι κάθετοι μεταξύ των, ἡ δὲ τρίτη εἶναι πλαγία πρὸς τὰς δύο ἄλλας.

Μὲ τὸν γνώμονα καὶ μὲ τὸν κανόνα δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὰ δύο ἑπόμενα προβλήματα:

Πρόβλημα 1ον. ***Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Α μιᾶς εὐθείας xy νὰ ἀχθῇ ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν αὐτήν.***

Ἐφαρμόζομεν τὸν κανόνα κατὰ μῆκος τῆς εὐθείας xy καὶ ὀλισθαίνομεν τὴν μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ γνώμονος ἐπὶ τοῦ κανόνος μέχρις, ὅτου ἡ ἄλλη πλευρά του συναντήσῃ τὸ δοθὲν σημεῖον Α.

Κατόπιν χαράσσομεν μὲ τὸ μολύβι ἢ μὲ τὴν κιμωλίαν, κατὰ μῆκος τῆς πλευρᾶς αὐτῆς τοῦ γνώμονος μίαν εὐθεῖαν ΓΑ, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.

Πρόβλημα 2ον. ***Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Β, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς μιᾶς εὐθείας xy, νὰ ἀχθῇ ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν αὐτήν.***

Ἐργαζόμεθα ὅπως ἀνωτέρω.

75. Γεωμετρικὸν πρόβλημα. *Μία πρότασις εἰς τὴν ὁποίαν ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ ἕνα γεωμετρικὸν σχῆμα, λέγεται* ***γεωμετρικὸν πρόβλημα.***

Λύσις *γεωμετρικοῦ προβλήματος, λέγεται ὁ τρόπος τῆς κατασκευῆς του.*

Ὅταν ἡ κατασκευὴ ἑνὸς γεωμετρικοῦ σχήματος γίνεται μὲ τὴν

χρῆσιν τοῦ κανόνος καὶ τοῦ γνώμονος ἢ τοῦ μοιρογνωμονίου, ἡ λύσις τοῦ γεωμετρικοῦ προβλήματος λέγεται *πρακτικὴ λύσις* τοῦ προβλήματος.

Ὅταν ἡ κατασκευὴ τοῦ γεωμετρικοῦ σχήματος γίνεται μὲ τὴν χρῆσιν τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου, ἡ λύσις τοῦ γεωμετρικοῦ προβλήματος λέγεται *θεωρητικὴ λύσις* τοῦ προβλήματος.

Τὰ ἀνωτέρω προβλήματα ἐλύθησαν πρακτικῶς.

Ἀσκήσεις

12. (29). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ διχοτόμοι δύο ἐφεξῆς γωνιῶν σχηματίζουν γωνίαν, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δοθεισῶν γωνιῶν. Ἐφαρμογή: Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία τῶν διχοτόμων: 1ον ἂν αἱ δοθεῖσαι γωνίαι εἶναι 68° καὶ 45°. 2ον ἂν αἱ δοθεῖσαι γωνίαι εἶναι συμπληρωματικαί.

13. (31). Νὰ διατυπωθῇ καὶ νὰ ἀποδειχθῇ τὸ ἀντίστροφον τοῦ θεωρήματος τῆς § 71.

14. (32). Δίδονται δύο ἐφεξῆς γωνίαι ΑΟΒ καὶ ΒΟΓ καὶ ΟΜ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΟΒ· νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

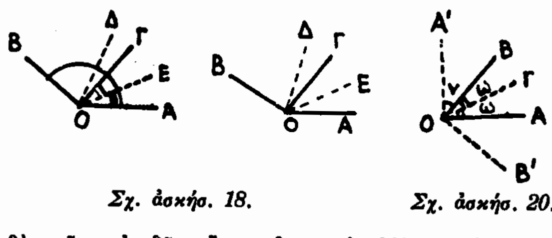
$$\widehat{AOM} = \frac{\widehat{AO\Gamma} - \widehat{BO\Gamma}}{2}, \quad \widehat{\Gamma OM} = \frac{\widehat{\Gamma OA} + \widehat{\Gamma OB}}{2}.$$

15. (33). Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Ο φέρομεν τὰς ἡμιευθείας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, οὕτως ὥστε αἱ σχηματιζόμεναι τρεῖς διαδοχικαὶ γωνίαι νὰ εἶναι ἴσαι. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι κάθε μία ἀπὸ τὰς ἡμιευθείας αὐτάς, ἂν προεκταθῇ πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς, διχοτομῇ τὴν γωνίαν τῶν δύο ἄλλων ἡμιευθειῶν.

16. (34). Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ διχοτόμος ΟΓ μιᾶς γωνίας ΑΟΒ σχηματίζει μὲ μίαν ἡμιευθεῖαν ΟΜ, ἡ ὁποία κεῖται ἐκτὸς ἢ ἐντὸς τῆς γωνίας ΑΟΒ, μίαν γωνίαν ἴσην μὲ τὸ ἡμιάθροισμα ἢ μὲ τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ ἡμιευθεῖα ΟΜ μὲ ἑκάστην τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ΑΟΒ.

17. (35). Δίδεται μία ὀρθὴ γωνία xOy. Ἐὰν ἡ Ox εἶναι διχοτόμος μιᾶς γωνίας ΑΟΒ καὶ Oy εἶναι διχοτόμος μιᾶς γωνίας ΓΟΔ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ γωνίαι ΑΟΓ καὶ ΒΟΔ εἶναι παραπληρωματικαί.

18. (36). Δύο γωνίαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν κοινὴν κορυφὴν καὶ μίαν κοινὴν



Σχ. ἀσκήσ. 18. *Σχ. ἀσκήσ. 20.*

πλευρὰν καὶ δὲν εἶναι ἐφεξῆς, ἔχουν διαφορὰν 90°. Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν αὐτῶν εἶναι ἴση μὲ 45°.

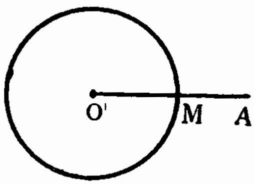
19. (37). Δίδεται μία γωνία ΑΟΒ. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Ο φέρομεν τὴν

ἡμιευθεῖαν ΟΑ' κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΑ καὶ κειμένην πρὸς τὸ μέρος τῆς ΟΒ καὶ ἔπειτα τὴν ἡμιευθεῖαν ΟΒ' κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΒ καὶ κειμένην πρὸς τὸ μέρος τῆς ΟΑ'. 1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ γωνίαι ΑΟΒ καὶ Α'ΟΒ' εἶναι ἴσαι καὶ αἱ διχοτόμοι των κάθετοι.

20. (38). Δίδεται μία γωνία ΑΟΒ. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Ο φέρομεν τὴν ΟΑ' κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΑ καὶ κειμένην πρὸς τὸ μέρος τῆς ΟΒ καὶ ἔπειτα τὴν ἡμιευθεῖαν ΟΒ' κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΒ καὶ κειμένην πρὸς τὸ μέρος τῆς ΟΑ. Νὰ δειχθῇ, ὅτι αἱ γωνίαι ΑΟΒ καὶ Α'ΟΒ' ἔχουν τὴν αὐτὴν διχοτόμον καὶ ὅτι αἱ γωνίαι αὐταὶ εἶναι παραπληρωματικαί.

4. Κύκλος

76. Περιφέρεια κύκλου. Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι μία ἡμιευθεῖα ΟΑ *(Σχ. 60)*, ἀναχωροῦσα ἀπὸ τὴν ἀρχικὴν θέσιν ΟΑ καὶ μένουσα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, κάμῃ μίαν ὁλόκληρον στροφὴν περὶ τὸ σημεῖον Ο, εἰς τρόπον, ὥστε νὰ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικήν της θέσιν ΟΑ, τότε κάθε σημεῖον Μ τῆς ΟΑ παρασύρεται κατὰ τὴν κίνησίν του καὶ γράφει μίαν κλειστὴν καμπύλην γραμμήν, ἡ ὁποία λέγεται ***περιφέρεια κύκλου.*** Ὥστε:



Σχ. 60.

Περιφέρεια κύκλου *ἢ ἁπλῶς* ***περιφέρεια,*** *λέγεται ἡ ἐπίπεδος κλειστὴ καμπύλη γραμμή, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ δοθὲν σημεῖον, τὸ ὁποῖον λέγεται* ***κέντρον.***

Τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ μίαν περιφέρειαν, λέγεται ***κύκλος.***

Ἀπὸ τοὺς ὁρισμοὺς τῆς περιφερείας καὶ τοῦ κύκλου, συνάγομεν ὅτι ἡ περιφέρεια εἶναι μία *γραμμὴ* καὶ ὁ κύκλος εἶναι μία *ἐπιφάνεια (Σχ. 61)*. Ἐν τούτοις χρησιμοποιοῦμεν πολλάκις τὴν λέξιν *κύκλος*, ἀντὶ τῆς λέξεως *περιφέρεια* καὶ ἀντιστρόφως.



Σχ. 61.

77. Ὁρισμοί. *Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα, τὸ ὁποῖον συνδέει τὸ κέντρον ἑνὸς κύκλου μὲ τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας του λέγεται* ***ἀκτὶς*** *τοῦ κύκλου.*

Π.χ. Ἡ ΟΑ εἶναι ἀκτὶς τοῦ κύκλου Ο. *(Σχ. 62).*

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν αὐτόν:

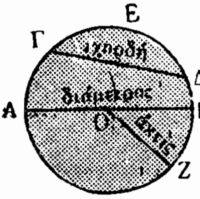
Ὅλαι αἱ ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου εἶναι ἴσαι.

Τυχὸν μέρος μιᾶς περιφερείας λέγεται ***τόξον.***

Δύο σημεῖα μιᾶς περιφερείας ὁρίζουν δύο τόξα. Διὰ νὰ ἀποφύγωμεν τὴν σύγχισιν σημειώνομεν ἕνα τόξον μὲ τρία γράμματα:

Π.χ. Τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ *(Σχ. 62)* ὁρίζουν τὰ τόξα ΓΕΔ καὶ ΓΖΔ, τὰ ὁποῖα παριστάνομεν ὡς ἑξῆς: τοξ.ΓΕΔ καὶ τοξ.ΓΖΔ ἢ $\widehat{ΓΕΔ}$ καὶ $\widehat{ΓΖΔ}$.

Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα, τὸ ὁποῖον συνδέει δύο τυχόντα σημεῖα μιᾶς περιφερείας λέγεται ***χορδὴ κύκλου.***



Σχ. 62.

Π.χ. ἡ ΓΔ εἶναι χορδὴ τοῦ κύκλου Ο. *(Σχ 62).*

Κάθε χορδή, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, λέγεται ***διάμετρος.***

Π.χ. ἡ ΑΒ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου Ο. *(Σχ. 62).*

Κάθε διάμετρος κύκλου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα δύο ἀκτίνων· ἄρα: ***Ὅλαι αἱ διάμετροι τοῦ αὐτοῦ κύκλου εἶναι ἴσαι.***

Μία περιφέρεια ἔχει ὁρισθῆ, ὅταν γνωρίζωμεν: 1ον. Τὴν ἀκτῖνα της καὶ τὸ κέντρον της. 2ον. Τὴν διάμετρόν της.

Δύο περιφέρειαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα εἶναι ἴσαι, διότι συμπίπτουν, ὅταν τὰ κέντρα των συμπέσουν.

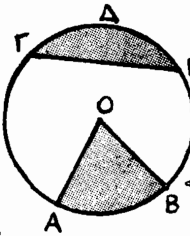
Διὰ νὰ δηλώσωμεν τὴν περιφέρειαν, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα R χρησιμοποιοῦμεν τὴν συμβολικὴν παράστασιν (Ο, R).

Τὸ ἥμισυ μιᾶς περιφερείας λέγεται ***ἡμιπεριφέρεια*** *καὶ τὸ ἥμισυ ἑνὸς κύκλου λέγεται* ***ἡμικύκλιον.***

Τὸ μέρος τοῦ κύκλου, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ ἑνὸς τόξου καὶ τῆς χορδῆς του λέγεται ***κυκλικὸν τμῆμα.***

Π.χ. τὸ ΓΔΕΓ *(Σχ. 63)* εἶναι ἕνα κυκλικὸν τμῆμα.

Τὸ μέρος τοῦ κύκλου, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ ἑνὸς τόξου καὶ τῶν ἀκτίνων, αἱ ὁποῖαι καταλήγουν εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τόξου, λέγεται ***κυκλικὸς τομεύς.***



Σχ. 63.

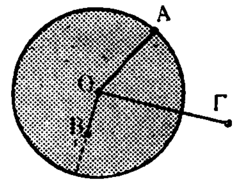
Π.χ. τὸ μέρος ΟΑΒΟ τοῦ κύκλου Ο *(Σχ. 63)* εἶναι κυκλικὸς τομεύς.

78. Μέρη τοῦ ἐπιπέδου ὁριζόμενα ὑπὸ τῆς περιφερείας κύκλου. Ἔστω ὁ κύκλος Ο, ἀκτῖνος R *(Σχ. 64)*. Ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου Ο χωρίζει τὸ ἐπίπεδον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖται, εἰς δύο μέρη: εἰς τὸ μέρος, ποὺ περιέχει τὸ κέντρον, τὸ ὁποῖον λέγεται *ἐσωτερικὸν μέρος τοῦ κύκλου* καὶ εἰς τὸ ἄλλο μέρος τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον λέγεται *ἐξωτερικὸν μέρος* αὐτοῦ.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ δ τὴν ἀπόστασιν ἑνὸς σημείου τοῦ ἐπιπέδου ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου Ο, εὐκόλως συνάγομεν ὅτι:

1. Κάθε σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον *κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας* ἑνὸς **κύκλου**, ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον Ο ἀπόστασιν ἴσην μὲ τὴν ἀκτῖνα: δηλ. **εἶναι**: ΟΑ=R ἢ | δ=R |

2. Κάθε σημεῖον Β, τὸ ὁποῖον *κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν μέρος* ἑνὸς κύκλου, ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον Ο ἀπόστασιν μικροτέραν τῆς ἀκτῖνος· δηλ. εἶναι: ΟΒ<R, ἢ | δ<R |



Σχ. 64.

3. Κάθε σημεῖον Γ, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς *τὸ ἐξωτερικὸν μέρος* ἑνὸς κύκλου, ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἀπόστασιν μεγαλυτέραν τῆς ἀκτῖνος· δηλ. εἶναι ΟΓ>R ἢ | δ>R |

Ἀντιστρόφως. ***1. Ἐὰν δ=R, τὸ σημεῖον κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.***

2. Ἐὰν δ<R, τὸ σημεῖον κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν μέρος τοῦ κύκλου.

3. Ἐὰν δ>R, τὸ σημεῖον κεῖται εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τοῦ κύκλου.

79. Γεωμετρικὸς τόπος. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι: ὅλα τὰ σημεῖα μιᾶς περιφερείας ἀπέχουν ἀπὸ τὸ κέντρον ἀπόστασιν ἴσην μὲ τὴν ἀκτῖνα, καὶ εἶναι τὰ *μόνα σημεῖα* τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν *ἰδιότητα* αὐτήν.

Τὸ σύνολον αὐτῶν τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν ἰδιότητα νὰ ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ ἕνα ὡρισμένον σημεῖον, (ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου) σχηματίζουν ἕνα σχῆμα (τὴν περιφέρειαν ἑνὸς κύκλου), τὸ ὁποῖον λέγεται ***γεωμετρικὸς τόπος***. Ὥστε:

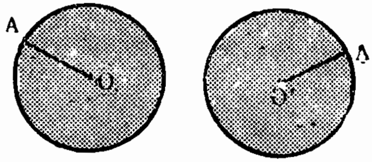
Γεωμετρικὸς τόπος *λέγεται τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ἀπὸ τὸ σύνολον τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν κοινὴν ἰδιότητα.*

Συνεπῶς: *Ἡ περιφέρεια κύκλου εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσην ἀπόστασιν R ἀπὸ ἕνα ὡρισμένον σημεῖον Ο.*

80. Κύκλοι ἴσοι. Ἔστωσαν δύο κύκλοι ἴσοι Ο καὶ Ο′ *(Σχ. 65)*. Ἐὰν θέσωμεν τὸν ἕνα ἐπὶ τοῦ ἄλλου οὕτως, ὥστε νὰ συμπέσουν τὰ κέντρα των Ο καὶ Ο′, τότε θὰ συμπέσουν καὶ αἱ περιφέρειαί των. Ἄρα οἱ κύκλοι αὐτοὶ ἔχουν ἴσας ἀκτῖνας.

Ἀντιστρόφως. ***Δύο κύκλοι, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἴσας ἀκτῖνας, εἶναι ἴσοι.***

Πράγματι· ἐὰν θέσωμεν τὸν κύκλον Ο′ ἐπὶ τοῦ Ο οὕτως, ὥστε νὰ συμπέσουν τὰ κέντρα των Ο καὶ Ο′, τότε κάθε σημεῖον Α′ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου Ο′ θὰ συμπέσῃ μὲ ἕνα σημεῖον τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου Ο. Αἱ δύο λοιπὸν περιφέρειαι συμπίπτουν καὶ ἑπομένως οἱ κύκλοι αὐτοὶ εἶναι ἴσοι.

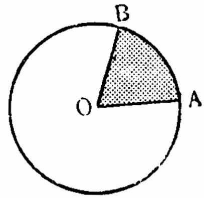


Σχ. 65.

81. Τόξα ἴσα. *Δύο τόξα εἶναι ἴσα, ὅταν τὸ ἕνα τιθέμενον ἐπὶ τοῦ ἄλλου, ἐφαρμόζουν.*

Εἶναι φανερόν, ὅτι ἕνα τόξον δύναται νὰ ἐφαρμόσῃ πανταχοῦ ἐπὶ τῆς περιφερείας, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει.

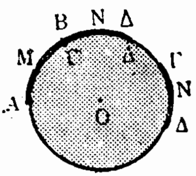
Πράγματι, ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι ὁ κυκλικὸς τομεὺς ΑΟΒΑ *(Σχ. 66)* στρέφεται περὶ τὸ κέντρον Ο, χωρὶς νὰ ἐξέλθῃ τοῦ ἐπιπέδου του, τὸ τόξον ΑΒ, κατὰ τὴν περιστροφήν του, θὰ ἐφαρμόζῃ πάντοτε ἐπὶ τῆς περιφερείας Ο. Διότι κάθε σημεῖον τοῦ τόξου ΑΒ θὰ ἐξακολουθῇ νὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τὸ κέντρον ἀπόστασιν σταθερὰν καὶ ἴσην μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου.



Σχ. 66.

Εὐνόητον εἶναι, ὅτι τὸ τόξον ΑΒ δύναται νὰ ἐφαρμόσῃ πανταχοῦ καὶ ἐπὶ πάσης ἄλλης περιφερείας ἴσης μὲ τὴν Ο.

82. Ἄθροισμα δύο τόξων. Ἔστωσαν τὰ δύο τόξα ΑΜΒ καὶ ΓΝΔ *(Σχ. 67)* τῆς περιφερείας Ο. Ὀλισθαίνομεν ἐπὶ τῆς περιφερείας τὸ τόξον ΓΝΔ εἰς τρόπον, ὥστε τὸ σημεῖον Γ νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Β. Ἔστω ΒΝΔ′ ἡ νέα θέσις τοῦ τόξου ΓΝΔ. Τὸ τόξον ΑΒΔ′ εἶναι τὸ ***ἄθροισμα*** τῶν τόξων ΑΜΒ καὶ ΓΝΔ καὶ γράφομεν:



Σχ. 67.

$$\overset{\frown}{AB\Delta'}=\overset{\frown}{AMB}+\overset{\frown}{\Gamma N\Delta}.$$

Διὰ νὰ προσθέσωμεν πολλὰ τόξα, εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων τόξων, ἔπειτα εἰς τὸ ἄθροισμα αὐτὸ προσθέτομεν τὸ τρίτον τόξον κ.ο.κ. μέχρις ὅτου λάβωμεν διαδοχικῶς ὅλα τὰ τόξα. Παραδεχόμεθα, ὅτι τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς τάξεως κατὰ τὴν ὁποίαν προστίθενται τὰ τόξα.

83. Ἄνισα τόξα. Τὸ τόξον ΑΒΔ′ *(Σχ. 67),* τὸ ὁποῖον εἶναι

ἄθροισμα τοῦ τόξου ΑΜΒ καὶ ἑνὸς ἄλλου τόξου (ἐδῶ τοῦ ΓΝΔ) λέγεται *μεγαλύτερον* τοῦ τόξου ΑΜΒ καὶ γράφομεν: $\widehat{AM\Delta'} > \widehat{AMB}$.

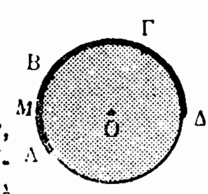
Τὸ τόξον ΑΜΒ λέγεται *μικρότερον* τοῦ τόξου ΑΒΔ΄ καὶ γράφομεν:

$$\widehat{AMB} < \widehat{AB\Delta}\ .$$

84. Διαφορὰ δύο τόξων. Ἡ *διαφορὰ* τῶν τόξων ΑΒΔ΄ καὶ ΑΜΒ *(Σχ. 67)* εἶναι τὸ τόξον ΓΝΔ, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ μικρότερον τόξον ΑΜΒ διὰ νὰ λάβωμεν τὸ μεγαλύτερον τόξον ΑΒΔ΄. Γράφομεν: $\widehat{\Gamma N\Delta} = \widehat{AB\Delta'} - \widehat{AMB}$.

85. Γινόμενον ἑνὸς τόξου ἐπὶ ἕνα ἀκέραιον ἀριθμόν. Ἔστω ὅτι τὸ τόξον ΑΒΔ *(Σχ. 68)*, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τριῶν τόξων, ἴσων μὲ τὸ τόξον ΑΜΒ. Τὸ τόξον ΑΒΔ λέγεται τριπλάσιον τοῦ τόξου ΑΜΒ· δηλ. εἶναι γινόμενον τοῦ τόξου ΑΜΒ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 3 καὶ γράφομεν: $\widehat{AB\Delta} = \widehat{AMB} \times 3$ ἢ $\widehat{AB\Delta} = 3\,\widehat{AMB}$.

Γενικῶς: *Λέγομεν ὅτι, ἕνα τόξον εἶναι* ***διπλάσιον, τριπλάσιον . . . νιπλάσιον*** *ἑνὸς ἄλλου τόξου, ἐὰν εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα 2, 3, . . . ν τόξων, ἴσων μὲ τὸ δοθὲν τόξον.*



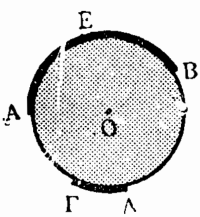
Σχ. 68.

86. Ἀκριβὲς πηλίκον ἑνὸς τόξου δι' ἑνὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ. Τὸ τόξον ΑΜΒ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ τόξου ΑΒΔ *(Σχ. 68)*. Λέγομεν, ὅτι τὸ τόξον ΑΜΒ εἶναι τὸ ***ἀκριβὲς πηλίκον*** τοῦ τόξου ΑΒΔ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 3 καὶ γράφομεν $\widehat{AMB} = \dfrac{\widehat{AB\Delta}}{3}$.

Γενικῶς: *Λέγομεν, ὅτι ἕνα τόξον ΑΜΒ εἶναι τὸ* ***ἥμισυ, τὸ τρίτον, . . . τὸ νιοστὸν*** *ἑνὸς ἄλλου τόξου ΑΒΔ, ὅταν τὸ τόξον ΑΒΔ εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ τόξου ΑΜΒ ἐπὶ 2, 3, . . . ν.*

87. Μέσον τόξου. Τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον διαιρεῖ ἕνα τόξον εἰς δύο ἴσα τόξα, λέγεται ***μέσον*** τοῦ τόξου. Εἶναι φανερόν, ὅτι:

Κάθε τόξον ἔχει ἕνα καὶ μόνον μέσον.



Σχ. 69.

88. Μέτρον τόξου. Ὅταν λέγωμεν, ὅτι *θὰ μετρήσωμεν ἕνα τόξον* σημαίνει, ὅτι θὰ τὸ συγκρίνωμεν πρὸς ἕνα ἄλλο τόξον, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ὡς μονάδα μετρήσεως, διὰ νὰ ἴδωμεν πόσας φορὰς ἡ μονὰς χωρεῖ εἰς τὸ δοθὲν τόξον. Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος θὰ προκύψῃ ἐκ τῆς συγκρίσεως αὐτῆς, λέγεται ***μέτρον*** τοῦ δοθέντος τόξου.

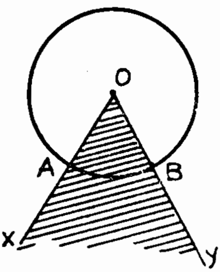
Π.χ. ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ μετρήσωμεν τὸ τόξον ΑΕΒ *(Σχ. 69)*. Λαμβάνομεν ὡς μονάδα μετρήσεως τὸ τόξον ΓΔ. Ἔστω ὅτι ἡ μονὰς ΓΔ τῶν τόξων περιέχεται 4 φορὰς ἀκριβῶς εἰς τὸ τόξον ΑΒ. Ὁ ἀριθμὸς 4 εἶναι τὸ ***μέτρον*** τοῦ τόξου ΑΕΒ καὶ γράφομεν: $\widehat{AEB}=4$.

Σημ. Ἡ μονὰς τῶν τόξων θὰ δοθῇ εἰς τὴν § 94.

5. Τόξα καὶ ἐπίκεντροι γωνίαι

89. Ἐπίκεντρος γωνία. Ἔστω μία περιφέρεια Ο *(Σχ. 70)* **καὶ** μία γωνία xOy, ἡ ὁποία ἔχει τὴν κορυφήν της εἰς τὸ κέντρον Ο. Ἡ γωνία αὐτὴ λέγεται ***ἐπίκεντρος γωνία.*** Γενικῶς:

***Ἐπίκεντρος γωνία** λέγεται κάθε γωνία, ἡ ὁποία ἔχει τὴν κορυφήν της εἰς τὸ **κέντρον** ἑνὸς κύκλου.*



Σχ. 70.

Τὸ τόξον ΑΒ τῆς περιφερείας, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας xOy λέγεται *ἀντίστοιχον τόξον* αὐτῆς. Συνήθως λέγομεν, ὅτι ἡ ἐπίκεντρος γωνία xOy *βαίνει ἐπὶ* τοῦ τόξου ΑΒ.

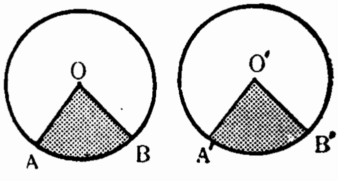
90. Θεώρημα. ***Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους, δύο ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι βαίνουν ἐπὶ ἴσων τόξων.***

Ὑπόθ.	Κύκλ.Ο=κύκλ.Ο′ $\widehat{AOB}=\widehat{A'O'B'}$
Συμπ.	$\widehat{AB}=\widehat{A'B'}$

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν δύο ἴσοι κύκλοι Ο καὶ Ο′ *(Σχ. 71)* καὶ αἱ ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι ΑΟΒ καὶ Α′Ο′Β′.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ τόξα ΑΒ καὶ Α′Β′, ἐπὶ τῶν ὁποίων βαίνουν αἱ γωνίαι αὐταί, εἶναι ἴσα.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν φαντασθῶμεν, ὅτι θέτομεν τὸν κύκλον Ο′ ἐπὶ τοῦ κύκλου Ο οὕτως, ὥστε ἡ γωνία Α′Ο′Β′ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης της ΑΟΒ, τότε οἱ κύκλοι Ο′ καὶ Ο θὰ ἐφαρμόσουν, διότι εἶναι ἴσοι καὶ συμπίπτουν τὰ κέντρα των· τὸ σημεῖον Α′ θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Α, τὸ σημεῖον Β′ θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Β, διότι αἱ ἀκτῖνες ΟΑ′, ΟΒ′, εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ἀκτῖνας ΟΑ καὶ ΟΒ καὶ ἑπομένως τὸ τόξον Α′Β′ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΒ.

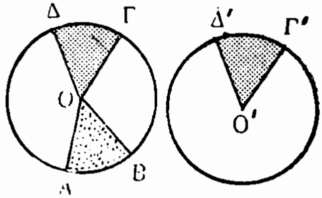


Σχ. 71.

Εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα καταλήγομεν, ἐὰν φαντασθῶμεν, ὅτι αἱ

ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

Πράγματι: ἔστωσαν αἱ ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι ΑΟΒ καὶ ΓΟΔ *(Σχ. 72)*, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας Ο· θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ ἀντίστοιχα τόξα αὐτῶν ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι ἴσα. Διότι, ἐὰν φαντασθῶμεν ἕνα κύκλον Ο′ *(Σχ. 72)* ἴσον μὲ τὸν δοθέντα κύκλον Ο καὶ μίαν ἐπίκεντρον γωνίαν Γ′Ο′Δ′ ἴσην πρὸς τὰς δοθείσας ἐπικέντρους γωνίας ΑΟΒ καὶ ΓΟΔ καὶ ἐργασθῶμεν ὡς ἀνωτέρω, θὰ εὕρωμεν, ὅτι τὰ τόξα ΑΒ καὶ ΓΔ θὰ εἶναι ἴσα, ὡς ἴσα πρὸς τὸ τόξον Γ′Δ′.



Σχ. 72.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον.....***

91. Θεώρημα. *(Ἀντίστροφον).* ***Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους εἰς ἴσα τόξα βαίνουν ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι.***

Ὑπόθεσις. Ἔστωσαν οἱ ἴσοι κύκλοι Ο καὶ Ο′ *(Σχ. 71)* καὶ δύο ἴσα τόξα ΑΒ καὶ Α′Β′.

Συμπέρασμα. Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι ΑΟΒ καὶ Α′Ο′Β′, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ τόξα αὐτά, εἶναι ἴσαι.

Ὑπόθ.	Κύκλ.Ο=κύκλ.Ο′ $\widehat{AB}=\widehat{A'B'}$
Συμπ.	$A\widehat{O}B=A'\widehat{O'}B'$

Ἀπόδειξις. Ἐὰν θέσωμεν τὸν κύκλον Ο′ ἐπὶ τοῦ ἴσου του κύκλου Ο οὕτως, ὥστε τὸ τόξον Α′Β′ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ἴσου του τόξου ΑΒ, τότε τὰ κέντρα Ο καὶ Ο′ θὰ ἐφαρμόσουν, διότι οἱ κύκλοι εἶναι ἴσοι· ἡ ἀκτὶς Ο′Α′ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΟΑ καὶ ἡ ἀκτὶς Ο′Β′ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΟΒ καὶ ἑπομένως θὰ ἐφαρμόσουν αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι ΑΟΒ καὶ Α′Ο′Β′.

Σημ. Εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα καταλήγομεν, ἐὰν φαντασθῶμεν, ὅτι τὰ ἴσα τόξα κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον.....***

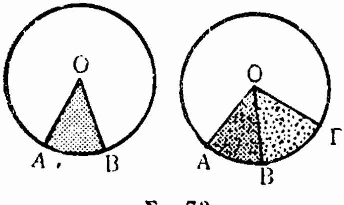
92. Θεώρημα. ***Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους: δύο ἄνισοι ἐπίκεντροι γωνίαι βαίνουν ἐπὶ ἀνίσων τόξων καὶ ἡ μεγαλυτέρα γωνία βαίνει εἰς τὸ μεγαλύτερον τόξον.***

Ὑπόθεσις. Ἔστωσαν οἱ ἴσοι κύκλοι Ο καὶ Ο′ καὶ αἱ ἄνισοι ἐπίκεντροι γωνίαι ΑΟΓ καὶ Α′Ο′Β′. Ἔστω ὅτι εἶναι $A\widehat{O}\Gamma > A'\widehat{O'}B'$.

Ὑπόθ.	Κύκλ.Ο=κύκλ.Ο′ $A\widehat{O}\Gamma > A'\widehat{O'}B'$
Συμπ.	$\widehat{A\Gamma} > \widehat{A'B'}$

Συμπέρασμα. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\widehat{ΑΓ} > \widehat{Α'Β'}$.

Ἀπόδειξις. Λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ κύκλου Ο μίαν ἐπίκεντρον γωνίαν ΑΟΒ ἴσην μὲ τὴν γωνίαν Α'Ο'Β'· Τὰ τόξα ΑΒ καὶ Α'Β' εἶναι ἴσα. Ἀλλὰ εἶναι τόξ.ΑΓ>τόξ.ΑΒ, διότι τὸ Β κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ. Ἄρα θὰ εἶναι καὶ τοξ.ΑΓ>τοξ.Α'Β'.

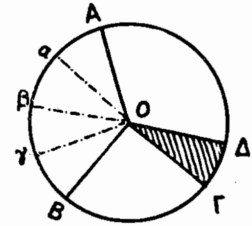


Σχ. 73.

Τὸ ἀντίστροφον τοῦ θεωρήματος διατυποῦται καὶ ἀποδεικνύεται εὐκόλως

93. Θεώρημα. ***Ἡ ἐπίκεντρος γωνία ἔχει τὸ αὐτὸ μέτρον, ποὺ ἔχει καὶ τὸ ἀντίστοιχον τόξον της, ὑπὸ τὸν ὅρον νὰ λάβωμεν ὡς μονάδα τῶν γωνιῶν τὴν ἐπίκεντρον γωνίαν, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν μονάδα τῶν τόξων.***

Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ μετρήσωμεν τὴν ἐπίκεντρον γωνίαν ΑΟΒ *(Σχ. 74)* καὶ ἔστω, ὅτι, ὡς μονὰς μετρήσεως τῶν γωνιῶν, λαμβάνεται ἡ ἐπίκεντρος γωνία ΓΟΔ, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ τόξον ΓΔ, τὸ ὁποῖον λαμβάνεται ὡς μονὰς τῶν τόξων. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ τόξον ΑΒ, ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἐπίκεντρον γωνίαν ΑΟΒ, περιέχει 4 φορὰς τὴν μονάδα τῶν τόξων. Θὰ εἶναι τότε (§ 88) μετρ.$\widehat{ΑΒ}$=4 (1).



Σχ. 74.

Διαιροῦμεν τὸ τόξον ΑΒ εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη καὶ ἔστωσαν α, β, γ, τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως. Ἐπειδὴ τὰ τόξα Αα, αβ, βγ, γΒ καὶ ΓΔ εἶναι ἴσα καὶ αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι, αἱ ὁποῖαι βαίνουν ἐπὶ τῶν τόξων αὐτῶν εἶναι ἴσαι· ὥστε ἡ ἐπίκεντρος γωνία ΑΟΒ εἶναι ἴση μὲ 4 ἐπικέντρους γωνίας, ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐπίκεντρον γωνίαν ΓΟΔ, ἡ ὁποία ἐλήφθη ὡς μονὰς μετρήσεως τῶν γωνιῶν. Δηλ. εἶναι μετρ.$\widehat{ΑΟΒ}$=4 (2).

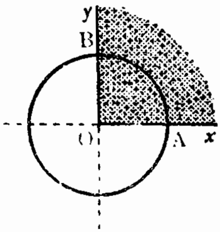
Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι

$$μετρ.\widehat{ΑΟΒ} = μετρ.\widehat{ΑΒ}.$$

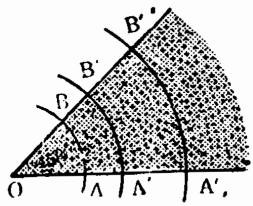
94. Μονάδες τόξου. *Δεχόμεθα νὰ λαμβάνωμεν πάντοτε ὡς μονάδα τόξου ἐπὶ τῆς περιφερείας ἑνὸς κύκλου τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἐπίκεντρον γωνίαν, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ὡς μονάδα γωνιῶν.*

Ἔστω μία ὀρθὴ γωνία xOy *(Σχ. 75)*. Μὲ κέντρον τὴν κορυ-

φήν της Ο καὶ μὲ ἀκτῖνα τυχοῦσαν γράφομεν περιφέρειαν κύκλου, ἡ ὁποία τέμνει τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Τὸ τόξον ΑΒ, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἐπίκεντρον ὀρθὴν γωνίαν, λέγεται *τεταρτημόριον*. Εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ περιφέρεια Ο ἔχει τέσσαρα τεταρτημόρια. Τὸ τεταρτημόριον διαιρεῖται εἰς 90 ἴσα τόξα, ἕκαστον τῶν ὁποίων λέγεται *μοῖρα* ($^{\circ}$). Ἡ μοῖρα διαιρεῖται εἰς 60 *λεπτὰ* (′) καὶ τὸ λεπτὸν εἰς 60 *δεύτερα λεπτὰ* (″) κλπ. Μία περιφέρεια ἔχει 360 μοίρας.



Σχ. 75.



Σχ. 76.

Τὸ τεταρτημόριον διαιρεῖται ἐπίσης καὶ εἰς 100 *βαθμοὺς* ($^{\gamma}$). Αἱ ὑποδιαιρέσεις τοῦ βαθμοῦ εἶναι: Τὸ *δέκατον* τοῦ βαθμοῦ, τὸ *ἑκατοστὸν* τοῦ βαθμοῦ, τὸ *χιλιοστὸν* τοῦ βαθμοῦ. Ἡ περιφέρεια ἔχει 400 βαθμούς.

Συνηθεστέρα μονὰς μετρήσεως ἑνὸς τόξου εἶναι ἡ μοῖρα.

Παρατήρησις. Τὰ τόξα ΑΒ, Α′Β′, Α″Β″ *(Σχ. 76)* δὲν εἶναι ἴσα, διότι αἱ ἀκτῖνες τῶν περιφερειῶν εἰς τὰς ὁποίας ἀνήκουν εἶναι διάφοροι. Ἐν τούτοις ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον, διότι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν αὐτὴν ἐπίκεντρον γωνίαν τῶν 45°.

Ἄσκησις. 21. (414). Δίδονται δύο διαδοχικὰ τόξα ΑΒ καὶ ΒΓ μιᾶς περιφερείας. Ἐὰν Μ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τόξου ΑΒ, νὰ δειχθῇ, ὅτι:

$$\overset{\frown}{ΑΜ}=\frac{\overset{\frown}{ΑΓ}-\overset{\frown}{ΒΓ}}{2},\quad ΓΜ=\frac{ΓΑ+ΓΒ}{2}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

ΠΟΛΥΓΩΝΑ - ΤΡΙΓΩΝΑ

1. Πολύγωνα καὶ πολυγωνικαὶ γραμμαὶ

95. Ὁρισμοί. *Ἕνα μέρος τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ εὐθύγραμμα τμήματα, λέγεται* ***πολύγωνον.***

Τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, τὰ ὁποῖα περικλείουν ἕνα πολύγωνον λέγονται ***πλευραὶ τοῦ πολυγώνου.***

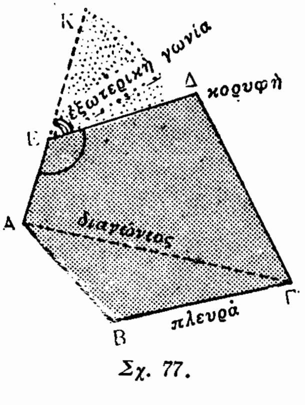
Τὸ σχῆμα ΑΒΓΔΕ *(Σχ. 77)* εἶναι ἕνα πολύγωνον· αἱ πλευραί του εἶναι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ.

Τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν ἑνὸς πολυγώνου λέγεται ***περίμετρος*** *αὐτοῦ.*

Π.χ. ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ εἶναι τὸ ἄθροισμα

ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΕ+ΕΑ.

Αἱ γωνίαι τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ πλευραὶ ἑνὸς πολυγώνου, λέγονται ***γωνίαι τοῦ πολυγώνου.***



Σχ. 77.

Αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν ἑνὸς πολυγώνου λέγονται καὶ ***κορυφαὶ τοῦ πολυγώνου.***

Ἕνα πολύγωνον ἔχει τόσας γωνίας, ὅσας καὶ κορυφάς. Δύο κορυφαί, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς πλευρᾶς, λέγονται *διαδοχικαί.*

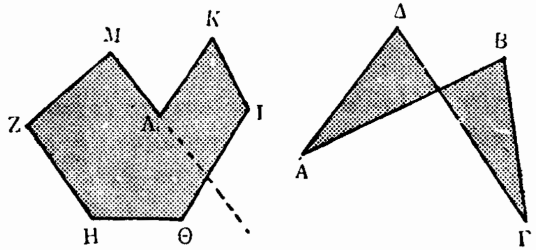
Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα, τὸ ὁποῖον συνδέει δύο μὴ διαδοχικὰς κορυφὰς ἑνὸς πολυγώνου λέγεται ***διαγώνιος*** *αὐτοῦ.*

Π.χ. τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΓ *(Σχ. 77)* εἶναι μία διαγώνιος τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ.

Ἐὰν προεκτείνωμεν μίαν πλευρὰν ἑνὸς πολυγώνου *(Σχ. 77)*, ἔστω τὴν ΑΕ, μέχρι τοῦ σημείου Κ, ἡ γωνία ΚΕΔ, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὴν προέκτασιν τῆς ΑΕ καὶ ἀπὸ τὴν προσκειμένην πλευρὰν ΕΔ λέγεται *ἐξωτερικὴ γωνία* τοῦ πολυγώνου.

Ἕνα πολύγωνον λέγεται ***κυρτόν,*** *ὅταν, κάθε πλευρά του προεκτεινομένη, ἀφίνῃ ὅλον τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς.*

Π.χ. τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ *(Σχ. 77)* εἶναι κυρτόν, ἐνῷ τὸ ΖΗΘΙΚΛΜ *(Σχ. 78)* *δὲν εἶναι κυρτόν*, διότι ἡ πλευρά του ΜΛ προεκτεινομένη χωρίζει τὸ πολύγωνον εἰς δύο μέρη. Ἐπίσης τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔ *(Σχ. 78)* δὲν **εἶναι** κυρτόν.



Σχ. 78.

Τὰ κυριώτερα πολύγωνα εἶναι:

1ον.	*Τὸ τρίγωνον*	(μὲ 3 πλευρὰς)
2ον.	*Τὸ τετράπλευρον*	(μὲ 4 πλευρὰς)
3ον.	*Τὸ πεντάγωνον*	(μὲ 5 πλευρὰς)
4ον.	*Τὸ ἑξάγωνον*	(μὲ 6 πλευρὰς)
5ον.	*Τὸ ὀκτάγωνον*	(μὲ 8 πλευρὰς)
6ον.	Τὸ *δεκάγωνον*	(μὲ 10 πλευρὰς)
7ον.	*Τὸ δωδεκάγωνον*	(μὲ 12 πλευρὰς)
8ον.	*Τὸ δεκαπεντάγωνον*	(μὲ 15 πλευρὰς)

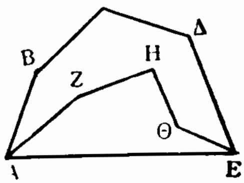
96. Πολυγωνικαὶ γραμμαί. *Μία* ***τεθλασμένη γραμμὴ*** *κλειστὴ ἢ μή, λέγεται καὶ* ***πολυγωνικὴ γραμμή.***

Αἱ πλευραὶ τῆς τεθλασμένης γραμμῆς λέγονται καὶ ***πλευραὶ*** **τῆς** πολυγωνικῆς γραμμῆς.

Μία πολυγωνικὴ γραμμὴ λέγεται ***κυρτή,*** *ὅταν κάθε πλευρά της προεκτεινομένη, ἀφίνῃ ὅλην τὴν πολυγωνικὴν γραμμὴν πρὸς τὸ* ***αὐτὸ*** *μέρος αὐτῆς.*

Μία εὐθεῖα συναντᾷ μίαν κυρτὴν πολυγωνικὴν γραμμὴν μόνον εἰς δύο σημεῖα.

Ὅταν δύο πολυγωνικαὶ γραμμαί, κυρταὶ ἢ μή, ἔχουν τὰ αὐτὰ ἄκρα λέγομεν, ὅτι ἡ μία *περιβάλλει τὴν ἄλλην*, ἐὰν ἡ τελευταία εὑρίσκεται ὁλόκληρος ἐντὸς τοῦ πολυγώνου, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ἀπὸ τὴν πρώτην πολυγωνικὴν γραμμὴν καὶ ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία συνδέει τὰ ἄκρα **των.**



Σχ. 79.

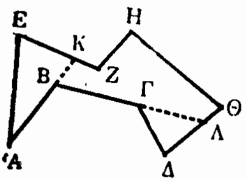
Π.χ. ἡ ΑΒΓΔΕ εἶναι μία πολυγωνική γραμμή, ἡ ὁποία περιβάλλει τὴν ΑΖΗΘΕ. *(Σχ. 79)*.

97. Ἀξίωμα τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος. ***Κάθε εὐθύγραμμον τμῆμα εἶναι μικρότερον ἀπὸ κάθε ἄλλην γραμμήν, ἡ ὁποία ἔχει τὰ αὐτὰ ἄκρα μὲ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα.***

Τὸ ἀξίωμα αὐτὸ ἐκφράζεται γενικώτερον, ἐὰν εἴπωμεν: ***Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι ὁ συντομώτερος δρόμος μεταξὺ δύο σημείων.***

98. Θεώρημα. ***Κάθε κυρτὴ τεθλασμένη γραμμὴ εἶναι μικροτέρα ἀπὸ κάθε ἄλλην τεθλασμένην γραμμήν, κυρτὴν ἢ μὴ κυρτήν, ἡ ὁποία περιβάλλει τὴν πρώτην καὶ ἔχει τὰ αὐτὰ ἄκρα μὲ αὐτήν.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω ἡ τεθλασμένη γραμμὴ ΑΕΖΗΘΔ *(Σχ. 80)*, ἡ ὁποία περιβάλλει τὴν κυρτὴν τεθλασμένην γραμμὴν ΑΒΓΔ καὶ ἔχει μὲ αὐτὴν τὰ αὐτὰ ἄκρα Α καὶ Δ.



Σχ. 80.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ<ΑΕ+ΕΖ+ΖΗ+ΗΘ+ΘΔ.$$

Ἀπόδειξις: Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΑΒ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Β καὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Γ μέχρις, ὅτου συναντήσουν τὴν περιβάλλουσαν εἰς τὰ σημεῖα Κ καὶ Λ ἀντιστοίχως.

Ἐπειδὴ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΚ εἶναι μικρότερον τῆς τεθλασμένης ΑΕΚ, θὰ εἶναι

$$ΑΒ+ΒΚ<ΑΕ+ΕΚ \qquad (1)$$

Ὁμοίως, ἐπειδὴ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΒΓΛ εἶναι μικρότερον τῆς τεθλασμένης ΒΚΖΗΘΛ, θὰ εἶναι

$$ΒΓ+ΓΛ<ΒΚ+ΚΖ+ΖΗ+ΗΘ+ΘΛ \qquad (2)$$

Ὁμοίως, ἐπειδὴ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΓΔ εἶναι μικρότερον τῆς τεθλασμένης ΓΛΔ, θὰ εἶναι

$$ΓΔ<ΓΛ+ΛΔ \qquad (3)$$

Προσθέτομεν τὰς ἀνισότητας (1), (2), (3) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$ΑΒ+ΒΚ+ΒΓ+ΓΛ+ΓΔ<ΑΕ+ΕΚ+ΒΚ+ΚΖ+ΖΗ+ΗΘ+ΘΛ+ΓΛ+ΛΔ.$$

Ἀφαιροῦμεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς ἀνισότητος αὐτῆς τὰ ΒΚ καὶ ΓΛ, τὰ ὁποῖα εἶναι κοινά, καὶ ἔχομεν

$$ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ<ΑΕ+ΕΚ+ΚΖ+ΖΗ+ΗΘ+ΘΛ+ΛΔ \qquad (4)$$

Ἐὰν παρατηρήσωμεν, ὅτι ΕΚ+ΚΖ=ΕΖ καὶ ΘΛ+ΛΔ=ΘΔ, ἡ ἀνισότης (4) γράφεται

$$ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ<ΑΕ+ΕΖ+ΖΗ+ΗΘ+ΘΔ.$$

Ἐδείχθη λοιπὸν ὅτι: ***Κάθε κυρτὴ τεθλασμένη. . . .***

Ἀσκήσεις

22. (39). Πόσας διαγωνίους δυνάμεθα νὰ φέρωμεν: 1ον εἰς ἕνα **ὀκτάγωνον**; 2ον εἰς ἕνα πολύγωνον μὲ ν πλευράς;

23. (40). Πόσας πλευρὰς ἔχει τὸ πολύγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει 14 **διαγωνίους**; 54 διαγωνίους.

24. (41). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ περίμετρος ἑνὸς κυρτοῦ πολυγώνου **εἶναι** μικροτέρα ἀπὸ τὴν περίμετρον κάθε πολυγώνου, κυρτοῦ ἢ μὴ κυρτοῦ, τὸ **ὁποῖον** περιβάλλει τὸ πρῶτον.

2. Σύγκρισις καθέτων καὶ πλαγίων πρὸς εὐθεῖαν

99. Θεώρημα. ***Ἐὰν ἀπὸ ἕνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς εὐθείας, φέρωμεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν καὶ διαφόρους πλαγίας πρὸς αὐτήν:***

1ον. Ἡ κάθετος εἶναι μικροτέρα ἀπὸ κάθε πλαγίαν.

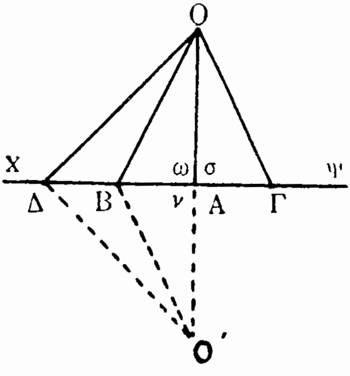
2ον. Δύο πλάγιαι, τῶν ὁποίων οἱ πόδες ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου, εἶναι ἴσαι.

3ον. Δύο πλάγιαι, τῶν ὁποίων οἱ πόδες ἀπέχουν ἄνισον ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου, εἶναι ἄνισοι καὶ μεγαλυτέρα εἶναι ἐκείνη, τῆς ὁποίας ὁ πους ἀπέχει περισσότερον ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου.

Ἔστω μία εὐθεῖα ΧΨ *(Σχ. 81)* καὶ Ο ἕνα σημεῖον, τὸ **ὁποῖον** κεῖται ἐκτὸς αὐτῆς.

1ον. *Ὑπόθεσις:* Ἀπὸ τὸ Ο φέρομεν τὴν κάθετον ΟΑ καὶ **τὴν** πλαγίαν ΟΒ ἐπὶ τὴν ΧΨ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΟΑ<ΟΒ.



Σχ. 81.

Ὑπόθ.	ΟΑ ⊥ ΧΨ ΟΒ πλαγία πρὸς ΧΨ
Συμπ.	ΟΑ < ΟΒ

Ἀπόδειξις: Προεκτείνομεν **τὴν** ΟΑ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως **λαμβάνομεν** ἕνα εὐθύγραμμον **τμῆμα** ΑΟ′=ΟΑ. Φέρομεν τὴν ΒΟ′.

Στρέφομεν τὸ ἄνω μέρος **τοῦ** σχήματος περὶ τὴν ΧΨ μέχρις, **ὅτου** πέσῃ ἐπὶ τοῦ κάτω μέρους **τοῦ σχήματος**· ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ω **καὶ ν** εἶναι ἴσαι, ὡς ὀρθαί, ἡ ΟΑ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΑΟ′ καὶ ἐπειδὴ ΑΟ=ΑΟ′,

τὸ O θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ O'. Ἐπίσης ἡ BO θὰ συμπέσῃ μὲ τὴν BO' καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι OB=O'B.

Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα OAO' εἶναι μικροτέρα τῆς OBO' θὰ εἶναι

$$OA+AO' < OB+BO' \quad (1)$$

Ἐπειδὴ AO'=OA, ἐκ κατασκευῆς καὶ BO'=OB, ὡς ἐδείχθη, ἡ ἀνισότης (1) γράφεται

$$OA+OA < OB+OB \quad ἢ \quad 2OA < 2OB \quad ἢ \quad OA < OB.$$

2ον. *Ὑπόθεσις*: Ἔστωσαν αἱ πλάγιαι OB καὶ OΓ καὶ τοιαῦται, ὥστε νὰ εἶναι AB=AΓ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι OB=OΓ.

Ὑποθ.	OB, OΓ πλάγιαι πρὸς XΨ AB=AΓ
Συμπ.	OB=OΓ

Ἀπόδειξις: Στρέφομεν τὸ μέρος OAΓ τοῦ σχήματος περὶ τὴν OA μέχρις ὅτου πέσῃ ἐπὶ τοῦ ἄλλου μέρους OAX τοῦ σχήματος. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ω καὶ σ εἶναι ἴσαι, ὡς ὀρθαί, ἡ AΓ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς AB καὶ ἐπειδὴ εἶναι AΓ=AB, ἐξ ὑποθέσεως, τὸ Γ θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ B. Ἐπειδὴ κατὰ τὴν στροφὴν τὸ σημεῖον O μένει ἀκίνητον, ἡ OΓ συμπίπτει μὲ τὴν OB. Ὥστε θὰ εἶναι OB=OΓ.

3ον. *Ὑπόθεσις*: Ἔστωσαν OΔ καὶ OΓ δύο πλάγιαι πρὸς τὴν XΨ καὶ τοιαῦται, ὥστε νὰ εἶναι AΔ > AΓ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι OΔ > OΓ.

Ὑπόθ.	OΔ, OΓ πλάγιαι πρὸς XΨ AΔ>AΓ
Συμπ.	OΔ>OΓ

Ἀπόδειξις: Ἐπὶ τῆς AΔ λαμβάνομεν ἕνα τμῆμα AB=AΓ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν OB. Ἐπειδὴ AB=AΓ, αἱ πλάγιαι OB καὶ OΓ εἶναι ἴσαι, ὅπως ἐδείχθη εἰς τὴν περίπτωσιν 2ον.

Προεκτείνομεν τὴν κάθετον OA καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς της λαμβάνομεν τμῆμα AO'=OA. Φέρομεν τὰς εὐθείας O'B καὶ O'Δ.

Ἡ τεθλασμένη γραμμὴ OΔO' περιβάλλει τὴν τεθλασμένην γραμμὴν OBO' καὶ ἔχει μὲ αὐτὴν τὰ αὐτὰ ἄκρα· ἄρα ἡ OΔO' εἶναι μεγαλυτέρα τῆς OBO' (§ 98), ἤτοι θὰ εἶναι

$$OΔ+ΔO' > OB+BO' \quad (2)$$

Ἐπειδὴ OΔ=ΔO' καὶ OB=BO', διότι εἶναι πλάγιαι πρὸς τὴν OO' καὶ οἱ πόδες των O, O' ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὸν πόδα A τῆς καθέτου XΨ ἐπὶ τὴν OO', ἡ ἀνισότης (2) γράφεται

$$OΔ+OΔ > OB+OB \quad ἢ \quad 2OΔ > 2OB \quad ἢ \quad OΔ > OB.$$

Ἐπειδὴ ΟΒ=ΟΓ, ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω, ἡ τελευταία ἀνισότης γράφεται : ΟΔ > ΟΓ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι : ***Ἐὰν ἀπὸ ἕνα σημεῖον.....***

100. Θεώρημα *(ἀντίστροφον).* ***Ἐὰν ἀπὸ ἕνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς εὐθείας φέρωμεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν καὶ διαφόρους πλαγίας :***

1ον. Ἀπὸ ὅλας τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τῆς εὐθείας, μὲ τὰ διάφορα σημεῖα τῆς εὐθείας, ἡ μικροτέρα εἶναι ἡ κάθετος, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν.

2ον. Ἐὰν δύο πλάγιαι εἶναι ἴσαι, οἱ πόδες των ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου.

3ον. Ἐὰν δύο πλάγιαι εἶναι ἄνισοι, οἱ πόδες ἀπέχουν ἄνισον ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου, καὶ περισσότερον ἀπέχει ὁ ποὺς τῆς μεγαλυτέρας πλαγίας.

Ἔστω μία εὐθεῖα ΧΨ *(Σχ. 81)* καὶ Ο ἕνα σημεῖον ἐκτὸς αὐτῆς· ἀπὸ τὸ Ο φέρομεν τὰς εὐθείας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, ..., αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὸ Ο μὲ τὰ διάφορα σημεῖα τῆς ΧΨ.

1ον. Ὑπόθεσις. Ἔστω, ὅτι ἡ ΟΑ εἶναι ἡ μικροτέρα ἀπὸ **ὅλας** τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὸ Ο μὲ τὰ διάφορα σημεῖα τῆς ΧΨ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ ΟΑ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΧΨ.

Ἀπόδειξις : Ἐὰν ἡ ΟΑ δὲν ἦτο κάθετος ἐπὶ τὴν ΧΨ, θὰ ἦτο πλαγία πρὸς αὐτὴν καὶ ἡ κάθετος ΟΑ′, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ Ο πρὸς τὴν ΧΨ θὰ ἦτο (§ 99. 1ον) μικροτέρα ἀπὸ τὴν ΟΑ, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εις τὴν ὑπόθεσίν μας, ἡ ὁποία ἦτο, ὅτι ἡ ΟΑ εἶναι ἡ μικροτέρα ἀπὸ ὅλας τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὸ Ο μὲ τὰ διάφορα σημεῖα τῆς ΧΨ. Ὥστε ἡ ΟΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΧΨ.

2ον. Ὑπόθεσις : Ἔστω, ὅτι αἱ πλάγιαι ΟΒ καὶ ΟΓ *(Σχ. 81)*, εἶναι ἴσαι.

Ὑπόθ.	ΟΑ ⊥ ΧΨ ΟΒ, ΟΓ πλάγιαι ΟΒ=ΟΓ
Συμπ.	ΑΒ=ΑΓ

Συμπέρασμα : Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΑΒ=ΑΓ.

Ἀπόδειξις : Ἐὰν ἡ ΑΒ δὲν ἦτο ἴση μὲ τὴν ΑΓ, θὰ ἦτο ἢ μεγαλυτέρα τῆς ΑΓ ἢ μικροτέρα τῆς ΑΓ.

Ἐὰν ἦτο ΑΒ > ΑΓ, τότε θὰ ἦτο ΟΒ > ΟΓ, (§ 99, 2ον), πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας.

Ἐὰν ἦτο ΑΒ < ΑΓ, τότε θὰ ἦτο ΟΒ < ΟΓ, τὸ ὁποῖον πάλιν

ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας. Ὥστε ἡ ΑΒ δὲν δύναται νὰ εἶναι οὔτε μεγαλυτέρα, οὔτε μικροτέρα τῆς ΑΓ· ἄρα θὰ εἶναι ἴση μὲ αὐτήν, ἤτοι θὰ εἶναι ΟΒ=ΟΓ.

3ον. Ὑπόθεσις. Ἔστω, ὅτι αἱ πλάγιαι ΟΔ καὶ ΟΓ *(Σχ. 81)* εἶναι ἄνισοι καὶ ὅτι ΟΔ > ΟΓ.

Ὑπόθ	ΟΑ ⊥ ΧΨ ΟΔ, ΟΓ πλάγιαι ΟΔ>ΟΒ
Συμπ.	ΑΔ>ΑΓ

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι θὰ εἶναι ΑΔ > ΑΓ.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν ἡ ΑΔ δὲν ἦτο μεγαλυτέρα τῆς ΑΓ, θὰ ἦτο ἴση μὲ αὐτὴν ἢ μικροτέρα αὐτῆς.

Ἐὰν ἦτο ΑΔ=ΑΓ τότε, κατὰ τὴν (§ 99. 2ον), θὰ ἦτο ΟΔ=ΟΓ, τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας.

Ἐὰν ἦτο ΑΔ<ΑΓ, τότε θὰ ἦτο, κατὰ τὴν (§ 99. 3ον), ΟΔ<ΟΓ, τὸ ὁποῖον ἀντίκειται πάλιν εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας.

Ὥστε ἡ ΑΔ δὲν δύναται νὰ εἶναι οὔτε ἴση μὲ τὴν ΑΓ, οὔτε μικροτέρα τῆς ΑΓ· ἄρα θὰ εἶναι μεγαλυτέρα αὐτῆς· ἤτοι θὰ εἶναι

ΑΔ > ΑΓ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν ἀπὸ ἕνα σημεῖον.....***

101. Σπουδαῖαι παρατηρήσεις. Ι. Ἡ ἀνωτέρω ἀπόδειξις (§ 100. 2ον) δεικνύει, ὅτι: *ἐὰν οἱ πόδες δύο πλαγίων ΟΒ καὶ ΟΓ ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου, αἱ πλάγιαι αὗται σχηματίζουν ἴσας γωνίας:*

1ον. *Μὲ τὴν κάθετον ΟΑ:* τὰς $\widehat{AOB}=\widehat{AO\Gamma}$.

2ον. *Μὲ τὴν εὐθεῖαν ΧΨ:* τὰς $\widehat{OBA}=\widehat{O\Gamma A}$.

ΙΙ. Ἀπὸ τὰ προηγούμενα θεωρήματα συνάγομεν, ὅτι: ***Ἀπὸ ἕνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς εὐθείας δὲν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν παρὰ δύο μόνον πλαγίας, αἱ ὁποῖαι νὰ εἶναι ἴσαι μεταξύ των.***

102. Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ εὐθεῖαν. *Ὀνομάζομεν* ***ἀπόστασιν σημείου ἀπὸ εὐθεῖαν,*** *τὸ μῆκος τῆς καθέτου, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ δοθὲν σημεῖον πρὸς τὴν εὐθεῖαν·* (τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου).

Ἡ ἀπόστασις ἑνὸς σημείου ἀπὸ εὐθεῖαν, εἶναι ἡ μικροτέρα τῶν ἀποστάσεων τοῦ σημείου αὐτοῦ ἀπὸ τὰ διάφορα σημεῖα τῆς εὐθείας.

Ἀσκήσεις

25. (41). Δίδεται ἡ ὀρθὴ γωνία xOy· ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Ox λαμβάνομεν δύο σημεῖα A καὶ A′ καὶ τοιαῦτα, ὥστε OA<OA′ καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Oy τὰ σημεῖα B καὶ B′ καὶ τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι OB<OB′. Φέρομεν τὰς εὐθείας AB καὶ A′B′. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι AB<A′B′.

26. (42). Ἀπὸ ἕνα σημεῖον O, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς μιᾶς εὐθείας xy φέρομεν τὴν κάθετον OA ἐπὶ τὴν xy καὶ δύο ἀνίσους πλαγίας OB καὶ OΓ. Ἐὰν εἶναι OΓ>OB νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι καὶ γων.AOΓ>γων.AOB.

3. Τρίγωνα

103. Τρίγωνον. Ὅπως ὡρίσαμεν εἰς τὴν § 95, ***τρίγωνον*** *ὀνομάζεται τὸ πολύγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει τρεῖς πλευράς.*

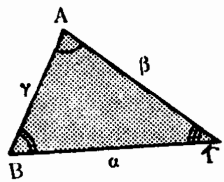
Κάθε τρίγωνον εἶναι *κυρτὸν* σχῆμα.

Κάθε τρίγωνον ἔχει *3 κορυφάς, 3 πλευρὰς καὶ 3 γωνίας.*

Π.χ. εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ *(Σχ. 82)* αἱ τρεῖς πλευραί του εἶναι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ· αἱ τρεῖς κορυφαί του εἶναι αἱ Α, Β, Γ καὶ αἱ τρεῖς γωνίαι του εἶναι αἱ $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{\Gamma}$.

Κάθε γωνία τριγώνου περιέχεται μεταξὺ δύο πλευρῶν του.

Π.χ. ἡ γωνία Α *(Σχ. 82)* περιέχεται μεταξὺ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ.



Σχ. 82.

Εἰς κάθε πλευρὰν τριγώνου *πρόσκεινται* δύο γωνίαι.

Π.χ. εἰς τὴν πλευρὰν ΒΓ πρόσκεινται αἱ γωνίαι Β καὶ Γ.

Ἀπέναντι κάθε πλευρᾶς τριγώνου κεῖται μία γωνία καὶ ἀντιστρόφως.

Π.χ ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς ΒΓ κεῖται ἡ γωνία Α κλπ.

Ἀντιστρόφως· ἀπέναντι τῆς γωνίας Α κεῖται ἡ πλευρὰ ΒΓ, κλπ.

Παριστάνομεν μὲ α τὴν πλευρὰν ΒΓ, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς γωνίας Α, μὲ β τὴν πλευρὰν ΑΓ, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς γωνίας Β καὶ μὲ γ τὴν πλευρὰν ΑΒ, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς γωνίας Γ.

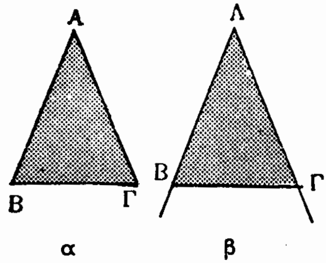
Αἱ τρεῖς πλευραὶ καὶ αἱ τρεῖς γωνίαι ἑνὸς τριγώνου ἀποτελοῦν τὰ *ἓξ κύρια στοιχεῖα τοῦ τριγώνου.*

104. Εἴδη τριγώνων. I. *Ἂν ἐξετάσωμεν τὰ τρίγωνα ὡς πρὸς τὰς πλευράς των, διακρίνομεν τρία εἴδη τριγώνων :*

Τὰ ἰσοσκελῆ, τὰ ἰσόπλευρα καὶ τὰ σκαληνά.

1ον. *Ἕνα τρίγωνον λέγεται* ***ἰσοσκελές****, ἐὰν ἔχῃ δύο πλευρὰς ἴσας.*

Ἡ πλευρά, ἡ ὁποία δὲν εἶναι ἴση πρὸς τὰς ἄλλας, ὀνομάζεται συνήθως ***βάσις*** τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου· ἡ ἀπέναντι τῆς βάσεως κορυφή, ὀνομάζεται ἰδιαιτέρως ***κορυφὴ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου.***



Σχ. 83.

Π.χ. τὸ τρίγωνον ΑΒΓ *(Σχ. 83α)* εἶναι ἰσοσκελὲς τρίγωνον.

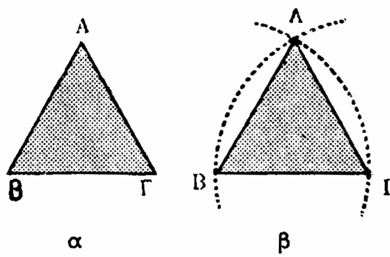
Αἱ ἴσαι πλευραί του εἶναι αἱ ΑΒ καὶ ΑΓ, ἡ βάσις του εἶναι ἡ ΒΓ καὶ ἡ κορυφή του ἡ Α.

Αἱ ἴσαι πλευραὶ ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου λέγονται ***σκέλη*** αὐτοῦ.

Κατασκευάζομεν ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον, ἂν λάβωμεν ἐπὶ τῶν πλευρῶν μιᾶς γωνίας Α *(Σχ. 83β)* μήκη ἴσα ΑΒ=ΑΓ καὶ φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν ΒΓ.

2ον. *Ἕνα τρίγωνον λέγεται* ***ἰσόπλευρον****, ἐὰν ἔχῃ καὶ τὰς τρεῖς πλευράς του ἴσας.*

Π.χ. τὸ τρίγωνον ΑΒΓ *(Σχ. 84α)* εἶναι ἰσόπλευρον, ἐὰν εἶναι ΑΒ=ΒΓ=ΓΑ.

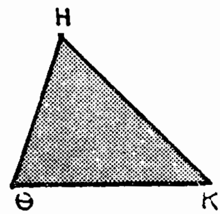


Σχ. 84.

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Λαμβάνομεν τυχὸν εὐθύγραμμον τμῆμα ΒΓ(*Σχ.84β*) καὶ μὲ κέντρα τὰ ἄκρα του Β καὶ Γ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΒΓ γράφομεν δύο τόξα, τὰ ὁποῖα νὰ τέμνωνται εἰς ἕνα σημεῖον, ἔστω εἰς τὸ Α· φέρομεν ἔπειτα τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσόπλευρον, διότι καὶ αἱ τρεῖς πλευραί του εἶναι ἴσαι μὲ τὴν ΒΓ.

3ον. *Ἕνα τρίγωνον λέγεται* ***σκαληνόν****, ἐὰν αἱ τρεῖς πλευραί του εἶναι ἄνισοι.*

Π.χ. τὸ τρίγωνον ΗΘΚ *(Σχ.85)* εἶναι σκαληνόν.



Σχ. 85.

ΙΙ. *Ἂν ἐξετάσωμεν τὰ τρίγωνα ὡς πρὸς τὰς γωνίας των, διακρίνομεν τρία εἴδη τριγώνων:*

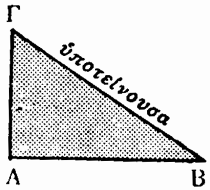
Τὰ ὀρθογώνια, τὰ ὀξυγώνια καὶ τὰ ἀμβλυγώνια τρίγωνα.

1ον. *Ἕνα τρίγωνον λέγεται* ***ὀρθογώνιον τρίγωνον****, ὅταν ἡ μία γωνία του εἶναι ὀρθή.*

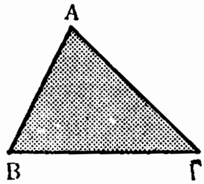
Εἰς ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ἡ πλευρά, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς ὀρθῆς γωνίας, λέγεται ***ὑποτείνουσα***, αἱ δύο ἄλλαι πλευραί του λέγονται ***κάθετοι πλευραὶ*** τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου.

Π.χ. τὸ τρίγωνον ΑΒΓ *(Σχ. 86)* εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον.

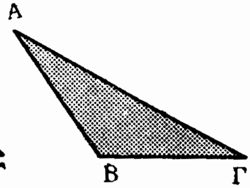
Ἡ πλευρὰ ΒΓ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ.



Σχ. 86.



Σχ. 87.



Σχ. 88.

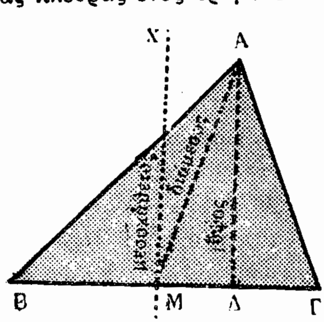
2ον. *Ἕνα τρίγωνον λέγεται* ***ὀξυγώνιον τρίγωνον****, ἐὰν ὅλαι αἱ γωνίαι του εἶναι ὀξεῖαι.*

Π.χ. τὸ τρίγωνον ΑΒΓ *(Σχ. 87)* εἶναι ὀξυγώνιον.

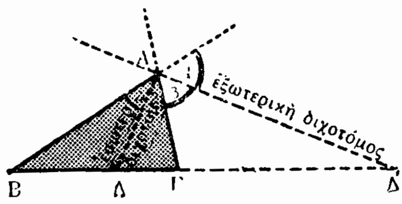
3ον. *Ἕνα τρίγωνον λέγεται* ***ἀμβλυγώνιον τρίγωνον****, ἐὰν ἔχῃ μίαν γωνίαν ἀμβλεῖαν.*

Π.χ. τὸ τρίγωνον ΑΒΓ *(Σχ. 88)* εἶναι ἀμβλυγώνιον, διότι ἡ γωνία του Β εἶναι ἀμβλεῖα.

105. Ἀξιοσημείωτοι εὐθεῖαι ἑνὸς τριγώνου. 1ον. Μία ἀπὸ τὰς πλευρὰς ἑνὸς τριγώνου λαμβάνεται ὡς ***βάσις*** αὐτοῦ.



Σχ. 89.



Σχ. 90.

Π.χ. εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ *(Σχ. 89)* βάσις του εἶναι εἴτε ἡ πλευρὰ ΒΓ, εἴτε ἡ ΑΒ, εἴτε ἡ ΑΓ.

2ον. Ἔστω, ὅτι ἡ βάσις τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἡ ΒΓ *(Σχ. 89)*.

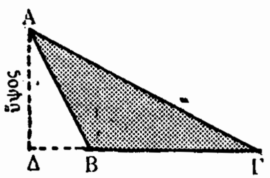
Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α φέρομεν τὴν κάθετον ΑΔ ἐπὶ τὴν ΒΓ. Ἡ ΑΔ λέγεται **ὕψος** τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Γενικῶς: *Ὕψος ἑνὸς τριγώνου λέγεται ἡ κάθετος, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ μίαν κορυφὴν ἐπὶ τὴν ἀπέναντι πλευράν του ἢ ἐπὶ τὴν προέκτασίν της (Σχ. 91).*

(Ὡς ὕψος ἑνὸς τριγώνου πρέπει νὰ θεωροῦμεν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα τῆς καθέτου αὐτῆς, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῆς κορυφῆς καὶ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς).

3ον. *Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα, τὸ ὁποῖον συνδέει μίαν κορυφὴν ἑνὸς τριγώνου μὲ τὸ μέσον τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς του, λέγεται* ***διάμεσος.***

Π.χ. ἐὰν Μ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΒΓ, ἡ ΑΜ εἶναι διάμεσος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ *(Σχ. 90).*



Σχ. 91.

4ον. α') *Ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας ἑνὸς τριγώνου λέγεται* ***ἐσωτερικὴ διχοτόμος*** *ἢ ἁπλῶς* ***διχοτόμος τῆς γωνίας τριγώνου.***

Ἰδιαιτέρως ὀνομάζομεν ἐσωτερικὴν διχοτόμον, τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας καὶ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς.

Π.χ. ἐὰν $\widehat{A_1}=\widehat{A_2}$ *(Σχ. 90)*, ἡ ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α.

β') *Ἡ διχοτόμος μιᾶς ἐξωτερικῆς γωνίας ἑνὸς τριγώνου λέγεται* ***ἐξωτερικὴ διχοτόμος τοῦ τριγώνου.***

Ἐὰν $\widehat{A_3}=\widehat{A_4}$, ἡ ΑΔ′ εἶναι ἐξωτερικὴ διχοτόμος.

Ἐπειδὴ εἰς κάθε κορυφὴν τριγώνου αἱ ἐξωτερικαὶ γωνίαι του εἶναι κατὰ κορυφήν, ἡ διχοτόμος τῆς μιᾶς εἶναι ἡ προέκτασις τῆς διχοτόμου τῆς ἄλλης. Διὰ τοῦτο ἕνα τρίγωνον ἔχει τρεῖς ἐξωτερικὰς διχοτόμους.

Ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος καὶ ἡ ἐξωτερικὴ διχοτόμος, αἱ σχετικαὶ πρὸς τὴν αὐτὴν κορυφὴν εἶναι κάθετοι μεταξύ των (§ 71).

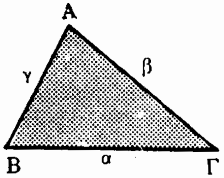
5ον. Ἔστω ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ *(Σχ. 89)*. Ἀπὸ τὸ μέσον Μ τῆς πλευρᾶς του ΒΓ φέρομεν τὴν ΜΧ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ· *ἡ ΜΧ λέγεται* ***μεσοκάθετος*** *τῆς πλευρᾶς ΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.* Κάθε τρίγωνον ἔχει τρεῖς μεσοκαθέτους.

106. Γενικὴ ἰδιότης τῶν τριγώνων. ***Κάθε πλευρὰ τριγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων καὶ μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς των.***

Ὑπόθεσις. Ἔστω ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ *(Σχ. 92)*.

Συμπέρασμα. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $ΒΓ<ΒΑ+ΑΓ$.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα εἶναι ὁ συντομώτερος δρόμος μεταξὺ δύο σημείων, θὰ εἶναι $ΒΓ<ΒΑ+ΑΓ$.



Σχ. 92.

Ὑπόθ.	α, β, γ πλευραὶ τριγώνου
Συμπ.	1. $α<β+γ$, $β<γ+α$, $γ<α+β$ 2. $γ>α-β$, $β>α-γ$, $α>β-γ$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $ΑΒ<ΒΓ+ΓΑ$, $ΑΓ<ΑΒ+ΒΓ$.

Γενικῶς, ἐὰν ὀνομάσωμεν μὲ α, β, γ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, θὰ ἔχωμεν $α<β+γ$, $β<γ+α$, $γ<α+β$ (1).

Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι κάθε πλευρά του, π.χ. ἡ ΑΒ, εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν δύο ἄλλων, ἤτοι ὅτι

$$ΑΒ>ΒΓ-ΑΓ \qquad γ>α-β.$$

Πράγματι, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς πρώτης ἀνισότητος τῶν (1) τὴν πλευρὰν β, θὰ ἔχωμεν $α-β<γ$ ἢ $γ>α-β$.

Ὁμοίως, ἂν ἀφαιρέσωμεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς αὐτῆς ἀνισότητος τὴν πλευρὰν γ, θὰ ἔχωμεν $α-γ<β$ ἢ $β>α-γ$.

Ἐπίσης, ἂν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς δευτέρας ἀνισότητος τῶν (1) ἀφαιρέσωμεν τὸ γ, θὰ ἔχωμεν $β-γ<α$ ἢ $α>β-γ$.

Παρατήρησις. Ἀπὸ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα συνάγομεν ὅτι, ἐὰν λάβωμεν αὐθαιρέτως τρία εὐθύγραμμα τμήματα, δὲν δυνάμεθα πάντοτε νὰ σχηματίσωμεν ἕνα τρίγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ πλευρὰς τὰ τρία αὐτὰ τμήματα. Διὰ νὰ σχηματισθῇ τρίγωνον, πρέπει τὸ μῆκος τοῦ μεγαλυτέρου εὐθυγράμμου τμήματος νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν μηκῶν τῶν δύο ἄλλων.

Ἀσκήσεις

27. (44). Νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν διαγωνίων τετραπλεύρου εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν του.

28. (45). Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Δ· φέρομεν τὸ εὐθύγρ. τμῆμα ΑΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον ὅτι τὸ ΑΔ εἶναι μικρότερον τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ τριγώνου καὶ 2ον ὅτι $ΑΔ>\frac{ΑΒ+ΑΓ-ΒΓ}{2}$.

29. (46). Νὰ εὑρεθῇ ἡ τρίτη πλευρὰ ἑνὸς τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ δύο

ἄλλαι πλευραὶ εἶναι 4 μέτρ. καὶ 9 μέτρα, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ τρίτη πλευρὰ περιέχει ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν μέτρων. Ὑπάρχουν πολλαὶ λύσεις;

30. (47). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ περίμετρος ἑνὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ ἀθροίσματος τῶν διαγωνίων καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν.

31. (48). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ περίμετρος ἑνὸς τριγώνου Α΄Β΄Γ΄, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς κορυφάς του ἐπὶ τῶν πλευρῶν ἄλλου τριγώνου ΑΒΓ, εἶναι μικροτέρα τῆς περιμέτρου τοῦ ΑΒΓ.

32. (49). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων σημείου κειμένου ἐντὸς τριγώνου ἀπὸ τῶν κορυφῶν του, εἶναι μικρότερον τῆς περιμέτρου καὶ μεγαλύτερον τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ τριγώνου.

4. Ἰσοσκελῆ τρίγωνα

107. Προσανατολισμὸς δύο ἐπιπέδων σχημάτων. Διὰ νὰ ἐξετάσωμεν, ἐὰν δύο σχήματα, τὰ ὁποῖα εἶναι σχεδιασμένα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, (πίνακος ἢ χάρτου) εἶναι ἴσα, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἀντιγράφομεν τὸ ἕνα σχῆμα ἐπὶ διαφανοῦς χάρτου καὶ ἐξετάζομεν, ἐὰν τὸ ἀντίγραφον τοῦ ἑνὸς σχήματος ἐφαρμόζῃ ἐπὶ τοῦ ἄλλου σχήματος.

Ἡ τοποθέτησις τοῦ ἑνὸς σχήματος ἐπὶ τοῦ ἄλλου δύναται νὰ γίνῃ κατὰ δύο τρόπους:

1ον. Δι' ἁπλῆς ὀλισθήσεως· δηλ. ὀλισθαίνομεν τὸ ἕνα σχῆμα ἢ τὸ ἀντίγραφόν του ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου του καὶ τὸ φέρομεν ἐπὶ τοῦ ἄλλου σχήματος. Εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν τὰ σχήματα ἐφαρμόσουν δι' ὀλισθήσεως, λέγομεν ὅτι τὰ σχήματα αὐτὰ *ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμὸν* καὶ ὅτι εἶναι *εὐθέως ἴσα*.

R R

Σχ. 93.

Π.χ. τὰ σχήματα R καὶ R *(Σχ. 93)* ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμὸν καὶ εἶναι εὐθέως ἴσα.

2ον. Δι' ἀναστροφῆς καὶ ὀλισθήσεως· δηλ. ἀναστρέφομεν πρῶτον τὸ σχῆμα ἢ τὸ ἀντίγραφόν του καὶ ἔπειτα τὸ φέρομεν ἐπὶ τοῦ ἄλλου δι' ὀλισθήσεως. Εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν τὰ σχήματα ἐφαρμόσουν δι' ἀναστροφῆς καὶ ὀλισθήσεως, λέγομεν, ὅτι τὰ σχήματα αὐτὰ *δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμὸν* καὶ ὅτι εἶναι *ἀντιστρόφως ἴσα*.

P q

Σχ. 94.

Π.χ. τὰ σχήματα P καὶ q *(Σχ. 94)* δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμὸν καὶ ἐπειδὴ ἐφαρμόζουν τὸ ἕνα ἐπὶ τοῦ ἄλλου δι' ἀναστροφῆς καὶ ὀλισθήσεως λέγονται ἀντιστρόφως ἴσα.

Εἰς μερικὰς περιπτώσεις δύο σχήματα δύνανται νὰ ἐφαρμόσουν καὶ κατὰ τοὺς δύο ἀνωτέρω τρόπους.

Δ ∇

Σχ. 95.

Π.χ. τὰ σχήματα Δ καὶ ∇ *(Σχ. 95)* ἐφαρμόζουν δι ὀλισθήσεως καὶ δι' ἀναστροφῆς καὶ ὀλισθήσεως.

108. Θεώρημα. ***Εἰς κάθε ἰσοσκελὲς τρίγωνον, αἱ γωνίαι του, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν του, εἶναι ἴσαι.***

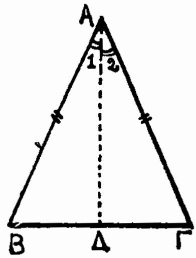
'Υπόθεσις. Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ *(Σχ. 96)*· ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΑΒ=ΑΓ.

Συμπέρασμα. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\widehat{B}=\widehat{\Gamma}$.

'Υπόθ.	ΑΒ=ΑΓ
Συμπ.	$\widehat{\Gamma}=\widehat{B}$

'Απόδειξις. Φέρομεν τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Α, ἡ ὁποία τέμνει τὴν πλευρὰν ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Δ.

'Επειδὴ ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α, θὰ εἶναι $\widehat{A}_1=\widehat{A}_2$. Στρέφομεν τὸ τρίγωνον ΑΔΓ περὶ τὴν ΑΔ μέχρις, ὅτου πέσει ἐπὶ τοῦ τριγώνου ΑΔΒ. 'Επειδὴ αἱ γωνίαι A_1 καὶ A_2 εἶναι ἴσαι, ἡ πλευρὰ ΑΓ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ καὶ ἐπειδὴ ΑΓ=ΑΒ, τὸ σημεῖον Γ θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Β· τότε ἡ ΔΓ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΔΒ, διότι μεταξὺ τῶν δύο σημείων Δ καὶ Β μία εὐθεῖα ἄγεται. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΑΔΓ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ τριγώνου ΑΔΒ καὶ ἑπομένως θὰ συμπέσουν καὶ αἱ γωνίαι Γ καὶ Β. Ὥστε αἱ γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι ἴσαι.



Σχ. 96.

'Εδείχθη λοιπὸν ὅτι: ***Εἰς κάθε ἰσοσκελὲς τρίγωνον....***

Σημ. Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ἐκφράζεται καὶ ὡς ἑξῆς:

Αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἴσαι.

109. Θεώρημα *(ἀντίστροφον).* ***'Εὰν ἕνα τρίγωνον ἔχῃ δύο γωνίας ἴσας, θὰ ἔχῃ καὶ τὰς ἀπέναντι τῶν γωνιῶν αὐτῶν πλευρὰς ἴσας· δηλ. τὸ τρίγωνον θὰ εἶναι ἰσοσκελές.***

'Υπόθεσις. Ἔστω τὸ τρίγωνον *(Σχ. 97)*, τὸ ὁποῖον ἔχει ἐξ ὑποθέσεως $\widehat{B}=\widehat{\Gamma}$.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι θὰ εἶναι ΑΓ=ΑΒ.

'Υπόθ.	$\widehat{B}=\widehat{\Gamma}$
Συμπ.	ΑΓ=ΑΒ

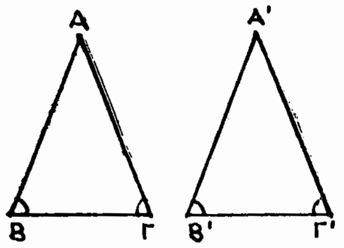
'Απόδειξις: Κάμνομεν, ἐπὶ διαφανοῦς χάρτου, ἕνα ἀντίγραφον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἔστω τὸ Α'Β'Γ'. Εἶναι φανερόν, ὅτι θὰ εἶναι

$$\widehat{A}=\widehat{A'},\quad \widehat{B}=\widehat{B'},\quad \widehat{\Gamma}=\widehat{\Gamma'},\quad AB=A'B',\quad A\Gamma=A'\Gamma',\quad B\Gamma=B'\Gamma'.$$

'Επειδὴ αἱ γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι ἴσαι ἐξ ὑποθέσεως καὶ ἐπειδὴ

$$\widehat{B}=\widehat{B'} \text{ καὶ } \widehat{\Gamma}=\widehat{\Gamma'}, \text{ θὰ εἶναι } \widehat{B}=\widehat{\Gamma}=\widehat{B'}=\widehat{\Gamma'}.$$

Ἀντιστρέφομεν ἔπειτα τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' καὶ τὸ θέτομεν ἐπὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ οὕτως, ὥστε ἡ πλευρὰ Γ'Β' νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης της ΒΓ, δηλ. τὸ σημεῖον Γ' νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Β καὶ τὸ Β' ἐπὶ τοῦ Γ.



Σχ. 97.

Ἐπειδή, ἐξ ὑποθέσεως, αἱ γωνίαι Β, Γ, Β', Γ' εἶναι ἴσαι, ἡ γωνία Γ' θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης της Β καὶ ἑπομένως ἡ Γ'Α' θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΒΑ. Ὁμοίως ἡ γωνία Β' θὰ ἐφαρμόσῃ, ἐπὶ τῆς ἴσης της γωνίας Γ καὶ ἑπομένως ἡ Β'Α' θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΓΑ. Ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΒΑ καὶ ΓΑ τέμνονται εἰς τὸ Α καὶ αἱ κείμεναι ἐπ' αὐτῶν εὐθεῖαι Γ'Α' καὶ Β'Α' θὰ τέμνωνται εἰς τὸ Α, διότι δύο εὐθεῖαι μόνον εἰς ἕνα σημεῖον τέμνονται. Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' ἐφαρμόζουν καὶ ἑπομένως ἡ Γ'Α', ἡ ὁποία δὲν εἶναι ἄλλη ἀπὸ τὴν ΑΓ, θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἤτοι θὰ εἶναι ΑΓ=ΑΒ. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θὰ εἶναι ἰσοσκελές.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν ἕνα τρίγωνον ἔχῃ....***

110. Ἱκαναὶ καὶ ἀναγκαῖαι συνθῆκαι. Γνωρίζομεν (§ 108, 109) ὅτι:

1ον. *Ἐὰν ἕνα τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές, αἱ γωνίαι του, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν του, εἶναι ἴσαι.* (Θεώρημα εὐθύ).

2ον. *Ἐὰν ἕνα τρίγωνον ἔχῃ δύο γωνίας ἴσας, θὰ ἔχῃ καὶ τὰς ἀπέναντι τῶν γωνιῶν αὐτῶν πλευρὰς ἴσας, δηλ. τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.* (Θεώρημα ἀντίστροφον).

Αἱ δύο ἀνωτέρω προτάσεις δύνανται νὰ διατυπωθοῦν καὶ ὡς ἑξῆς: ***Διὰ νὰ εἶναι ἕνα τρίγωνον ἰσοσκελές, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχῃ δύο γωνίας ἴσας.***

Ἡ μορφὴ τῆς ἐκφράσεως αὐτῆς μᾶς ἐπιτρέπει ν' ἀντικαταστήσωμεν, ὑπὸ μορφὴν πλέον συμπεπυκνωμένην, τὴν ἔκφρασιν ἑνὸς θεωρήματος καὶ ἐκείνην τοῦ ἀντιστρόφου του. Ἡ ἔκφρασις «***πρέπει***» ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ εὐθὺ θεώρημα *(ἀναγκαία συνθήκη)* καὶ ἡ ἔκφρασις «***ἀρκεῖ***» ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ἀντίστροφον θεώρημα *(ἱκανὴ συνθήκη).*

111. Χαρακτηριστικὴ ἰδιότης ἑνὸς σχήματος. Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι ἕνα τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές, πρέπει ν' ἀποδείξωμεν:

1ον. Εἴτε, ὅτι τὸ τρίγωνον αὐτὸ ἔχει δύο πλευρὰς ἴσας.

2ον. Εἴτε, ὅτι τὸ τρίγωνον αὐτὸ ἔχει δύο γωνίας ἴσας.

Ἡ ἰσότης δύο γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου, εἴτε ἡ ἰσότης δύο πλευρῶν αὐτοῦ, μᾶς ἐπιτρέπει νὰ συμπεράνωμεν, ὅτι τὸ τρίγωνον αὐτὸ εἶναι ἰσοσκελές. Διὰ τοῦτο λέγομεν:

Ἡ ἰσότης δύο γωνιῶν εἶναι μία ***χαρακτηριστικὴ ἰδιότης*** *τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου.*

Γενικῶς: *Ὀνομάζομεν* ***χαρακτηριστικὴν ἰδιότητα ἑνὸς σχήματος,*** *κάθε ἰδιότητα, ἡ ὁποία ἀνταποκρίνεται πρὸς τὸν ὁρισμὸν τοῦ σχήματος αὐτοῦ.*

112. Θεώρημα. ***Κάθε ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι καὶ ἰσογώνιον.***

Ὑπόθ.	ΑΒ=ΒΓ=ΓΔ
Συμπ.	$\widehat{A}=\widehat{B}=\widehat{\Gamma}$

Ἔστω ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ.

Ὑπόθεσις. Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι
ΑΒ=ΒΓ=ΓΑ.

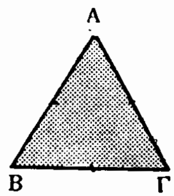
Συμπέρασμα. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\widehat{A}=\widehat{B}=\widehat{\Gamma}$.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ εἶναι ΑΒ=ΒΓ, θὰ εἶναι (§ 108) καὶ $\widehat{\Gamma}=\widehat{A}$ (1).

Ἐπίσης ἐπειδὴ εἶναι ΒΓ=ΓΑ, θὰ εἶναι
$\widehat{A}=\widehat{B}$ (2).

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι
$\widehat{A}=\widehat{B}=\widehat{\Gamma}$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Κάθε ἰσόπλευρον τρίγωνον. . . .***



Σχ. 98.

113. Θεώρημα. *(Ἀντίστροφον).* ***Κάθε ἰσογώνιον τρίγωνον εἶναι καὶ ἰσόπλευρον.***

Ὑπόθεσις. Ἔστω ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι, ἐξ ὑποθέσεως $\widehat{A}=\widehat{B}=\widehat{\Gamma}$.

Συμπέρασμα. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΑΒ=ΒΓ=ΓΑ.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{A}=\widehat{B}$, θὰ εἶναι (§ 109) καὶ ΒΓ=ΓΑ (1)

Ἐπίσης ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{B}=\widehat{\Gamma}$, θὰ εἶναι καὶ ΓΑ=ΑΒ (2)

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι ΑΒ=ΒΓ=ΓΑ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Κάθε ἰσογώνιον τρίγωνον. . . .***

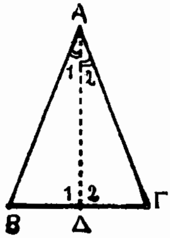
Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι:

Ἡ ἰσότης τῶν τριῶν γωνιῶν εἶναι μία χαρακτηριστικὴ ἰδιότης τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου.

114. Θεώρημα. ***Εἰς κάθε ἰσοσκελὲς τρίγωνον, ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς του, εἶναι συγχρόνως διάμεσος, ὕψος καὶ μεσοκάθετος τοῦ τριγώνου.***

Ὑπόθεσις. Ἔστω ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ *(Σχ. 99)*, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ἐξ ὑποθέσεως ΑΒ=ΑΓ. Ἔστω ΑΔ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α, δηλ. ἔστω $\widehat{A}_1=\widehat{A}_2$.

Ὑπόθ.	ΑΒ=ΑΓ $A_1=A_2$
Συμπ.	ΒΔ=ΔΓ ΑΔ ⊥ ΒΓ



Σχ. 99.

Συμπέρασμα. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι διάμεσος τοῦ τριγώνου, δηλ. ὅτι ΔΒ=ΔΓ, καὶ ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι καὶ ὕψος τοῦ τριγώνου, δηλ. ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν στρέψωμεν τὸ τρίγωνον ΑΔΓ περὶ τὴν ΑΔ μέχρις, ὅτου πέσῃ ἐπὶ τοῦ τριγώνου ΑΔΒ, τὰ δύο τρίγωνα θὰ ἐφαρμόσουν, ὅπως ἐδείχθη εἰς τὴν § 108· ἄρα θὰ εἶναι

$$ΔΓ=ΔΒ \quad \text{καὶ} \quad \widehat{Δ}_1=\widehat{Δ}_2.$$

Ἐπειδὴ ΔΓ=ΔΒ, ἡ ΑΔ εἶναι ***διάμεσος*** τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ἐπειδὴ ἡ ΑΔ σχηματίζει μὲ τὴν ΒΓ τὰς ἴσας γωνίας $Δ_1$ καὶ $Δ_2$, θὰ εἶναι ***κάθετος*** ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ ἑπομένως ἡ ΑΔ εἶναι ***ὕψος*** τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ἡ ΑΔ ὡς κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΓ εἶναι ***μεσοκάθετος*** τῆς ΒΓ.

Ἡ ΑΔ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως καὶ ***διχοτόμος*** τῆς γωνίας Α.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Εἰς κάθε ἰσοσκελὲς τρίγωνον. . . . .***

115. Παρατήρησις. Ἀπὸ τὸ προηγούμενον θεώρημα συνάγομεν, ὅτι αἱ τρεῖς εὐθεῖαι, διχοτόμος, ὕψος καὶ διάμεσος, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὴν κορυφὴν ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου, συμπίπτουν. Κατόπιν τούτου, τὸ προηγούμενον θεώρημα δύναται νὰ χωρισθῇ εἰς τὰ τρία κατωτέρω θεωρήματα:

1ον. Εἰς ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς του εἶναι συγχρόνως καὶ ὕψος τοῦ τριγώνου.

2ον. Εἰς ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον τὸ ὕψος, τὸ ἀγόμενον ἐκ τῆς κορυφῆς του εἶναι συγχρόνως καὶ διάμεσος τοῦ τριγώνου.

3ον. Εἰς ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς του εἶναι συγχρόνως καὶ διάμεσος τοῦ τριγώνου.

Καὶ τὰ ἀντίστροφα τῶν τριῶν ἀνωτέρω θεωρημάτων εἶναι ἀληθῆ καὶ ἀποδεικνύονται εὐκόλως (μετὰ τὴν § 123):

Ἕνα τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές:

1ον. ἐὰν ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας του εἶναι συγχρόνως καὶ ὕψος αὐτοῦ.

2ον. ἐὰν ἕνα ὕψος του εἶναι συγχρόνως καὶ διάμεσός του.

3ον. ἐὰν ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας του εἶναι συγχρόνως καὶ διάμεσός του.

5. Περιπτώσεις ἰσότητος τριγώνων

116. Ἰσότης δύο τριγώνων. *Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν τιθέμενα καταλλήλως τὸ ἕνα ἐπὶ τοῦ ἄλλου ἐφαρμόζουν.*

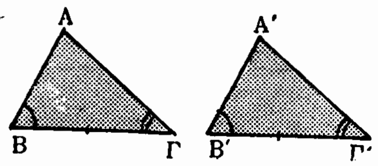
Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ τρεῖς πλευραὶ τοῦ ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ ἄλλου. Ἐπίσης αἱ τρεῖς γωνίαι τοῦ ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς γωνίας τοῦ ἄλλου.

Ὅταν δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, αἱ ἴσαι πλευραί των κεῖνται ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν καὶ ἀντιστρόφως.

Κατωτέρω θὰ ἐξετάσωμεν μερικὰς εἰδικὰς περιπτώσεις ἰσότητος τριγώνων.

117. *Περίπτωσις I.* **Θεώρημα.** ***Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν.***

Ὑπόθεσις. Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ *(Σχ. 100)*,



Σχ. 100.

Ὑπόθ.	ΒΓ=Β΄Γ΄ $\widehat{B}=\widehat{B}'$ $\widehat{\Gamma}=\widehat{\Gamma}'$
Συμπ.	τρ.ΑΒΓ=τρ.Α΄Β΄Γ΄

τὰ ὁποῖα ἔχουν ἐξ ὑποθέσεως ΒΓ=Β΄Γ΄, Β=Β΄, Γ=Γ΄.

Συμπέρασμα. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσα.

Ἀπόδειξις. Λαμβάνομεν (νοερῶς) τὸ τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ καὶ τὸ θέτομεν, δι᾽ ὀλισθήσεως, ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ οὕτως, ὥστε ἡ πλευρὰ Β΄Γ΄ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης της ΒΓ, δηλ. τὸ Β΄ νὰ πέσῃ εἰς τὸ Β καὶ τὸ Γ΄ εἰς τὸ Γ. Τότε ἡ πλευρὰ Β΄Α΄ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΑ, διότι αἱ γωνίαι Β καὶ Β΄ εἶναι ἴσαι ἐξ ὑποθέσεως, τὸ δὲ σημεῖον Α΄ θὰ εὑρίσκεται εἰς ἕνα σημεῖον τῆς ΒΑ ἢ τῆς προεκτάσεώς της. Ἐπίσης ἡ πλευρὰ Γ΄Α΄ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΓΑ, διότι αἱ γωνίαι Γ καὶ Γ΄ εἶναι

ἴσαι ἐξ ὑποθέσεως, τὸ δὲ σημεῖον Α΄ θὰ εὑρίσκεται εἰς ἕνα σημεῖον τῆς ΓΑ ἢ τῆς προεκτάσεώς της. Ἀλλὰ τὸ σημεῖον Α΄, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς ΒΑ καὶ ἐπὶ τῆς ΓΑ, θὰ συμπέσῃ μὲ τὸ σημεῖον Α, διότι δύο εὐθεῖαι τέμνονται μόνον εἰς ἕνα σημεῖον. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν Α΄Β΄Γ΄ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ἴσον μὲ αὐτό.

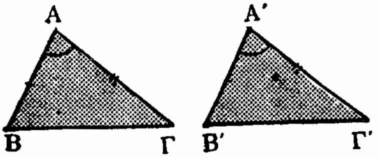
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα. . . . .***

118. Πόρισμα. ***Ἐὰν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουν μίαν κάθετον πλευρὰν ἴσην καὶ τὴν προσκειμένην ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην, εἶναι ἴσα.***

Τὰ ὀρθογώνια αὐτὰ τρίγωνα ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην, ἐξ ὑποθέσεως, καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας ἴσας, τὴν μὲν ὀξεῖαν γωνίαν, ἐξ ὑποθέσεως, τὴν δὲ ἄλλην προσκειμένην, ὡς ὀρθήν· ἄρα θὰ εἶναι ἴσα.

119. *Περίπτωσις ΙΙ.* **Θεώρημα.** ***Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, καὶ τὴν ὑπ᾿ αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην.***

Ὑπόθεσις. Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ *(Σχ. 101)*, τὰ ὁποῖα ἔχουν ΑΒ=Α΄Β΄, ΑΓ=Α΄Γ΄ καὶ Α=Α΄.



Ὑπόθ.	ΑΒ=Α΄Β΄ ΑΓ=Α΄Γ΄ $\widehat{A}=\widehat{A'}$
Συμπ.	τρ.ΑΒΓ=τρ.Α΄Β΄Γ΄

Σχ. 101.

Συμπέρασμα. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσα.

Ἀπόδειξις. Λαμβάνομεν τὸ τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ καὶ τὸ θέτομεν ἐπὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ οὕτως, ὥστε ἡ γωνία Α΄ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης της γωνίας Α. Τότε ἡ πλευρὰ Α΄Β΄ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης της ΑΒ, δηλ. τὸ σημεῖον Β΄ θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Β. Ἐπίσης ἡ πλευρὰ Α΄Γ΄ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης της πλευρᾶς ΑΓ, δηλ. τὸ σημεῖον Γ΄ θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Γ. Ἀλλὰ τότε καὶ ἡ πλευρὰ Β΄Γ΄ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ, διότι δύο σημεῖα ὁρίζουν τὴν θέσιν μιᾶς καὶ μόνον εὐθείας.

Τὸ τρίγωνον λοιπὸν Α΄Β΄Γ΄ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσον μὲ αὐτό.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα. . . .***

120. Πόρισμα. ***Ἐὰν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουν τὰς καθέτους πλευράς των ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, εἶναι ἴσα.***

Τὰ ὀρθογώνια αὐτὰ τρίγωνα, ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας, ἐξ ὑποθέσεως καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας γωνίας ἴσας, ὡς ὀρθάς· ἄρα θὰ εἶναι ἴσα.

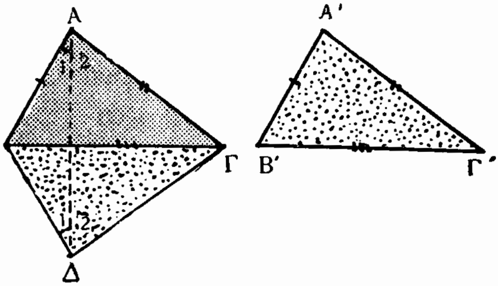
121. *Περίπτωσις III.* **Θεώρημα.** ***Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχουν καὶ τὰς τρεῖς πλευράς των ἴσας, μίαν πρὸς μίαν.***

Ὑπόθεσις. Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' (*Σχ. 102*), τὰ ὁποῖα ἔχουν ἐξ ὑποθέσεως ΑΒ=Α'Β', ΒΓ=Β'Γ', ΓΑ=Γ'Α'.

Συμπέρασμα. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσα.

Ὑπόθ.	ΑΒ=Α'Β' ΒΓ=Β'Γ' ΓΑ=Γ'Α'
Συμπ.	τρ.ΑΒΓ=τρ.Α'Β'Γ'

Ἀπόδειξις. Λαμβάνομεν τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' καὶ τὸ θέτομεν ἐπὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ οὕτως, ὥστε ἡ πλευρὰ Β'Γ' νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης της ΒΓ, δηλ. τὸ σημεῖον Β' νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Β καὶ τὸ Γ' ἐπὶ τοῦ Γ. Στρέφομεν ἔπειτα τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' περὶ τὴν ΒΓ μέχρις, ὅτου πέσῃ πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ σχετικῶς μὲ τὴν ΒΓ, καὶ ἔστω, ὅτι τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' θὰ λάβῃ τὴν θέσιν ΒΔΓ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΔ. Τὸ



Σχ. 102.

σχηματισθὲν τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ἰσοσκελές, διότι αἱ ΑΒ καὶ ΒΔ εἶναι ἴσαι, ὡς ἴσαι μὲ τὴν Α'Β'. Ἄρα αἱ παρὰ τὴν βάσιν του γωνίαι A_1 καὶ Δ_1 εἶναι ἴσαι, ἤτοι εἶναι $\widehat{A}_1=\widehat{\Delta}_1$ (1)

Ἐπίσης καὶ τὸ τρίγωνον ΓΑΔ εἶναι ἰσοσκελές, διότι αἱ ΓΑ καὶ ΓΔ εἶναι ἴσαι, ὡς ἴσαι πρὸς τὴν Α'Γ'. Ἄρα αἱ παρὰ τὴν βάσιν του γωνίαι A_2 καὶ Δ_2 εἶναι ἴσαι, ἤτοι εἶναι $\widehat{A}_2=\widehat{\Delta}_2$ (2).

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\widehat{A}_1+\widehat{A}_2=\widehat{\Delta}_1+\widehat{\Delta}_2 \quad \text{ἢ} \quad B\widehat{A}\Gamma=B\widehat{\Delta}\Gamma.$$

Ἀλλὰ $B\widehat{\Delta}\Gamma=\widehat{A'}$. Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' ἔχουν: δύο πλευρὰς ἴσας, ΑΒ=Α'Β', ΑΓ=Α'Γ' καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν περιε-

χομένας γωγίας Α καὶ Α' ἴσας· ἄρα εἶναι ἴσα (§ 119).
'Εδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα. . . .***

122. Παρατήρησις I. Τὰ τρία προηγούμενα θεωρήματα μᾶς δεικνύουν, ὅτι ἡ ἰσότης τῶν τριῶν στοιχείων ἑνὸς τριγώνου, *ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἕνα τοὐλάχιστον πρέπει νὰ εἶναι μία πλευρά*, εἶναι ἀρκετὴ διὰ νὰ συμπεράνωμεν τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων.

Ὅταν δύο τρίγωνα ἔχουν καὶ τὰς τρεῖς γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν, τὰ τρίγωνα αὐτὰ *δὲν εἶναι ἀναγκαστικῶς ἴσα* μεταξύ των. Πρέπει ἀπαραιτήτως νὰ ἔχουν καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην, διὰ νὰ εἶναι ἴσα.

II. Ὅταν δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, πρέπει νὰ ἀπαγέλλωμεν τὰ γράμματα τῶν ἀντιστοίχων κορυφῶν των κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν. Αἱ κορυφαί των αὐταί λέγονται ***ὁμόλογοι.***

'Εὰν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ἴσα, δυνάμεθα νὰ γράφωμεν, χωρὶς σχῆμα, τὰς ἑξῆς σχέσεις:

$$\widehat{A}=\widehat{\Delta} \qquad \widehat{B}=\widehat{E} \qquad \widehat{\Gamma}=\widehat{Z}$$
$$A\Gamma=EZ \qquad \Gamma B=Z\Delta \qquad AB=\Delta E.$$

5. 'Εφαρμογαὶ τῶν περιπτώσεων τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων καὶ τῶν ἰδιοτήτων τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου

123. Αἱ περιπτώσεις τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων καὶ αἱ ἰδιότητες τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου χρησιμεύουν πολλάκις εἰς τὸ νὰ ἀποδεικνύωμεν τὴν ἰσότητα δύο εὐθυγράμμων τμημάτων ἢ δύο γωνιῶν.

Πρὸς τοῦτο, διὰ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι δύο εὐθύγραμμα τμήματα εἶναι ἴσα ἢ ὅτι δύο γωνίαι εἶναι ἴσαι, ἀρκεῖ νὰ σχηματίσωμεν δύο τρίγωνα, εἰς τὰ ὁποῖα νὰ ἀνήκουν τὰ εὐθύγραμμα αὐτὰ τμήματα ἢ αἱ γωνίαι καὶ νὰ ἀποδείξωμεν ἔπειτα, ὅτι τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσα.

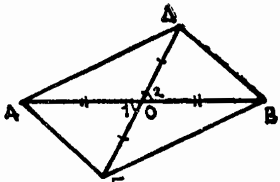
Κατωτέρω θὰ δώσωμεν δύο παραδείγματα, τὰ ὁποῖα θὰ μᾶς δείξουν καλύτερον τὸν τρόπον τῆς ἐφαρμογῆς τῶν περιπτώσεων τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων.

124. *Παράδειγμα 1.* ***Δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ (Σχ. 103), τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Ο οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι ΑΟ=ΟΒ καὶ ΓΟ=ΟΔ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΔ, ΔΒ, ΒΓ, ΓΑ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΑΓ=ΒΔ καὶ ΑΔ=ΒΓ.***

1ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΑΓ=ΒΔ. 'Αρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ ἀποδεί-

ξωμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΟΓ καὶ ΔΟΒ εἶναι ἴσα.

Ἀπόδειξις Τὰ τρίγωνα ΑΟΓ καὶ ΔΟΒ ἔχουν: ΑΟ=ΟΒ, ΟΓ=ΟΔ, ἐξ ὑποθέσεως καὶ $\widehat{O}_1=\widehat{O}_2$ ὡς κατὰ κορυφήν· ἤτοι ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας γωνίας ἴσας, ἄρα εἶναι



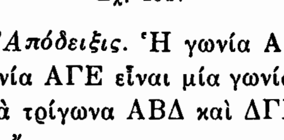
Σχ. 103.

Ὑπόθ.	ΑΟ=ΟΒ ΓΟ=ΟΔ
Συμπ.	ΑΓ=ΒΔ ΔΑ=ΓΒ

ἴσα καὶ ἑπομένως θὰ ἔχουν καὶ τὰ ἄλλα στοιχεῖα των ἴσα· ἤτοι θὰ εἶναι ΑΓ=ΒΔ.

2ον. Ὁμοίως ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων ΓΟΒ καὶ ΑΟΔ ἀποδεικνύομεν, ὅτι ΓΒ=ΑΔ.

125. *Παράδειγμα ΙΙ.* ***Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 104) φέρομεν τὴν διάμεσον ΒΔ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς της λαμβάνομεν ἕνα τμῆμα ΔΕ=ΒΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\widehat{ΑΓΕ}=\widehat{Α}$.***



Σχ. 104.

Ὑπόθ.	ΑΔ=ΔΓ ΒΔ=ΔΕ
Συμπ.	$\widehat{ΑΓΕ}=\widehat{Α}$

Ἀπόδειξις. Ἡ γωνία Α εἶναι μία γωνία τοῦ τριγώνου ΑΒΔ καὶ ἡ γωνία ΑΓΕ εἶναι μία γωνία τοῦ τριγώνου ΔΓΕ. Ἂν ἀποδείξωμεν, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΔΓΕ εἶναι ἴσα, τότε θὰ εἶναι καὶ αἱ γωνίαι αὗται ἴσαι.

Τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΔΓΕ ἔχουν: ΑΔ=ΔΓ, διότι ἡ ΒΔ εἶναι διάμεσος, ΒΔ=ΔΕ ἐξ ὑποθέσεως, $\widehat{Δ}_1=\widehat{Δ}_2$ ὡς κατὰ κορυφήν. Ἄρα, κατὰ τὴν 2αν περίπτωσιν τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων, τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι Α=ΑΓΕ, ὡς γωνίαι κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν ΒΔ καὶ ΔΕ.

Ἀσκήσεις

Α΄ Ὁμάς. **33.** (53). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἕνα τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές:
1ον. Ἐὰν ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας του εἶναι συγχρόνως καὶ ὕψος αὐτοῦ.
2ον. Ἐὰν ἕνα ὕψος του εἶναι συγχρόνως καὶ διάμεσός του. (Ἀντίστροφα τῶν θεωρημάτων τῆς § 115).

34. (54). Αἱ κάθετοι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὰ μέσα τῶν ἴσων πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου μέχρι τῶν ἀπέναντι πλευρῶν, εἶναι ἴσαι.

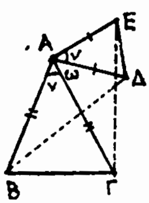
35. (55). Αἱ διχοτόμοι τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἴσαι.

36. (56). Κάθε σημεῖον τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς βάσεώς του.

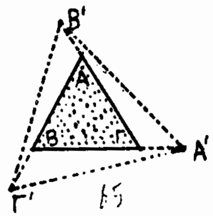
37. (57). Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου λαμβάνομεν μήκη ΑΑ΄=ΒΒ΄=ΓΓ΄. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ εἶναι ἰσόπλευρον.

38. (58). Τὸ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου, εἶναι ἰσοσκελές.

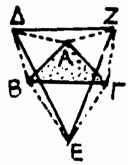
39. (59). Δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΔΕ ἔχουν τὴν κορυφήν των Α κοινὴν καὶ τὰς γωνίας τῆς κορυφῆς ἴσας. Ἐὰν φέρωμεν τὰς εὐθείας ΒΔ καὶ ΓΕ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΒΔ=ΓΕ.



Ἀσκ. 39.



Ἀσκ. 45.



Ἀσκ. 46.

40. (60). Δίδεται τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ· προεκτείνομεν τὴν βάσιν του ΒΓ καὶ ἑκατέρωθεν αὐτῆς λαμβάνομεν τμήματα, ΒΒ΄ καὶ ΓΓ΄ ἴσα. Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον ὅτι αἱ γωνίαι ΑΒΒ΄ καὶ ΑΓΓ΄ εἶναι ἴσαι. 2ον ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒ΄Γ΄ εἶναι ἰσοσκελές.

41. (61). Ἐὰν αἱ ἴσαι πλευραὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου προεκταθοῦν κατὰ μήκη ἴσα, τὰ ἄκρα των θὰ ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς βάσεώς του.

42. (62). Ἐὰν αἱ πλευραὶ καὶ αἱ γωνίαι ἑνὸς πενταγώνου εἶναι ἴσαι, αἱ διαγώνιοί του, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὴν αὐτὴν κορυφὴν τοῦ πενταγώνου, εἶναι ἴσαι.

Β΄ Ὁμάς. **43.** (63). Αἱ διάμεσοι ἰσοσκελοῦς τριγώνου, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς ἴσας πλευράς του, εἶναι ἴσαι.

44. (64). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἕνα τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές, ἐὰν ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας του εἶναι συγχρόνως καὶ διάμεσός του (ἀντίστροφον τοῦ 3ου θεωρήματος τῆς § 115).

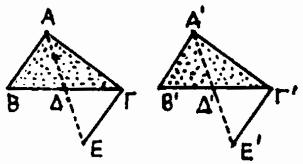
45. (65). Δίδεται τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ· προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΒΓ κατὰ ΓΑ΄, τὴν ΓΑ κατὰ ΑΒ΄ καὶ τὴν ΑΒ κατὰ ΒΓ΄. Νὰ ἀποδειχθῇ,

ὅτι, ἐὰν αἱ προεκτάσεις ΓΑ', ΑΒ', ΒΓ' εἶναι ἴσαι, τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' εἶναι ἰσόπλευρον.

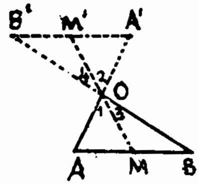
46. (66). Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου κατασκευάζομεν ἰσόπλευρα τρίγωνα, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐκτὸς τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ ἐξωτερικαὶ κορυφαί των σχηματίζουν ἰσοσκελὲς τρίγωνον.

47. (67). Δύο τετράπλευρα εἶναι ἴσα, ἐὰν ἔχουν τὰς τέσσαρας πλευράς των ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ μίαν γωνίαν, περιεχομένην μεταξὺ ἴσων πλευρῶν, ἴσην.

48. (68). Δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' ἔχουν τὰς πλευρὰς ΑΒ=Α'Β', ΑΓ=Α'Γ' καὶ τὰς διαμέσους ΑΔ καὶ Α'Δ' ἴσας. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσα.



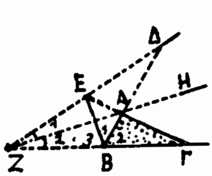
Σχ. ἀσκ. 48.



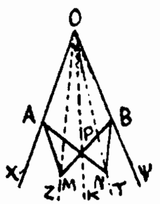
Σχ. ἀσκ. 49

Γ' Ὁμάς. **49.** (69). Δίδονται τὰ σημεῖα Α, Β, Ο, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Προεκτεινομεν τὴν ΑΟ κατὰ ἕνα τμῆμα ΟΑ'=ΑΟ καὶ τὴν ΒΟ κατὰ ἕνα τμῆμα ΟΒ'=ΒΟ. 1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι Α'Β'=ΑΒ. 2ον. Φέρομεν τὴν διάμεσον ΟΜ τοῦ τριγώνου ΟΑΒ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν Α'Β' εἰς τὸ Μ'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ Μ' εἶναι μέσον τῆς Α'Β'.

50. Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΒΑ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ κατὰ ἕνα μῆκος ΑΔ=ΑΓ καὶ τὴν πλευρὰν ΓΑ κατὰ ἕνα μῆκος ΑΕ=ΑΒ. Φέρομεν τὴν ΕΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΒΕΖ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Ζ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Α.



Σχ. ἀσκ. 50.



Σχ. ἀσκ. 54.

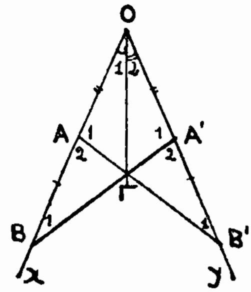
51. (71). Δίδεται ἡ γωνία ΧΟΨ. Φέρομεν τὴν κάθετον ΟΖ ἐπὶ τὴν ΟΧ καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΟΨ, ἔπειτα τὴν κάθετον ΟΤ ἐπὶ τὴν ΟΨ καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΟΧ. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν ΟΧ καὶ ΟΖ δύο μήκη ἴσα ΟΜ=ΟΝ καὶ ἐπὶ τῶν ΟΨ καὶ ΟΤ δύο ἄλλα μήκη ἴσα ΟΡ=ΟΣ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ γωνίαι ΟΡΝ καὶ ΟΣΜ εἶναι ἴσαι.

52. (72). Δίδονται δύο ἴσαι γωνίαι ΒΑΓ καὶ ΔΑΕ, αἱ ὁποῖαι ἔχουν κοινὴν κορυφὴν Α καὶ ἕνα κοινὸν μέρος τὴν γωνίαν ΔΑΓ. Ἐπὶ τῶν ΑΔ καὶ ΑΓ λαμβάνομεν μήκη ἴσα ΑΜ=ΑΝ· ἐπὶ τῶν ΑΒ καὶ ΑΕ λαμβάνομεν δύο ἄλλα μήκη

ἴσα ΑΡ=ΑΣ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΜΡ=ΝΣ καὶ ὅτι ἡ ΡΣ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας ΔΑΓ.

53. (73). Δίδεται ἡ γωνία ΧΟΨ καὶ ἕνα σημεῖον Μ τῆς διχοτόμου της ΟΖ. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΟΧ λαμβάνομεν δύο τμήματα ΟΑ καὶ ΟΒ καὶ ἐπὶ τῆς ΟΨ δύο τμήματα ΟΓ καὶ ΟΔ, ἀντιστοίχως ἴσα μὲ τὰ ΟΑ καὶ ΟΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΜΑΒ καὶ ΜΓΔ εἶναι ἴσα.

54. (74). Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΟΧ καὶ ΟΨ μιᾶς γωνίας ΧΟΨ λαμβάνομεν δύο μήκη ἴσα ΟΑ=ΟΒ. Εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας ΧΟΨ φέρομεν τὴν ἡμιευθεῖαν ΟΖ οὕτως, ὥστε ἡ γωνία ΧΟΖ νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἡμίσεως τῆς γωνίας ΧΟΨ. Ὁμοίως φέρομεν τὴν ΟΤ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας ΧΟΨ οὕτως, ὥστε $\widehat{\Psi O T}=\widehat{X O Z}$. Ἐπὶ τῶν ΟΖ καὶ ΟΤ λαμβάνομεν δύο μήκη ἴσα ΟΜ=ΟΝ. Φέρομεν τὰς ΑΝ καὶ ΒΜ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ Ρ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι: 1ον. Τὰ τρίγωνα ΡΑΜ καὶ ΡΒΝ εἶναι ἴσα. 2ον. Τὸ Ρ κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας ΧΟΨ.



Σχ. ἀσκ. 55.

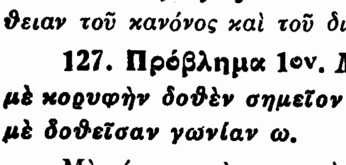
55. (75). Δίδεται μία γωνία xOy. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Ox λαμβάνομεν τὰ τμήματα ΟΑ καὶ ΟΒ, ἐπὶ δὲ τῆς Oy τὰ τμήματα ΟΑ′=ΟΑ καὶ ΟΒ′=ΟΒ. Φέρομεν ἔπειτα τὰς εὐθείας ΒΑ καὶ Β′Α, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Γ Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΟΓ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας xOy.

7. Θεμελιώδεις γεωμετρικαὶ κατασκευαὶ

126. Ὁρισμός. *Κάθε κατασκευή, ἡ ὁποία γίνεται μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου λέγεται* ***γεωμετρικὴ κατασκευή.***

127. Πρόβλημα 1ον. ***Μὲ πλευρὰν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ μὲ κορυφὴν δοθὲν σημεῖον αὐτῆς Α νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση μὲ δοθεῖσαν γωνίαν ω.***

Μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν Ο τῆς δοθείσης γωνίας ω καὶ μὲ ἀκτῖνα τυχοῦσαν γράφομεν ἕνα τόξον κύκλου, τὸ ὁποῖον τέμνει τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας ω εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε. Ἔπειτα μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα τὴν αὐτὴν γράφομεν ἕνα τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Η. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΔΕ. Μὲ κέντρον τὸ Η καὶ μὲ ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου ἴσον μὲ τὴν ἀπόστασιν ΔΕ, γράφομεν ἕνα τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ τόξον ΗΖ εἰς τὸ Γ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν



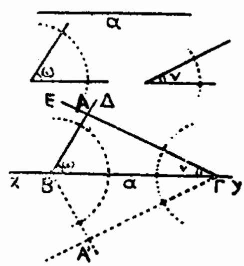
Σχ. 105.

ΗΓ. Τὰ τρίγωνα ΑΗΓ καὶ ΟΔΕ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς τρεῖς

πλευράς των ἴσας μίαν πρὸς μίαν ἐκ κατασκευῆς. Ἑπομένως αἱ γωνίαι Α καὶ ω, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν ΗΓ καὶ ΔΕ, εἶναι ἴσαι.

128. Πρόβλημα 2ον. ***Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν μίαν πλευράν του ΒΓ=α καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας Β=ω καὶ Γ=ν.*** *(Σχ. 106).*

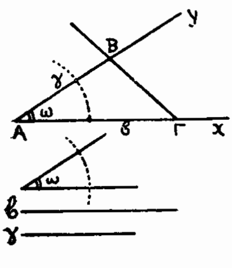
Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ΒΓ ἴσον μὲ α. Μὲ πλευρὰν τὴν ΒΓ καὶ κορυφὰς τὰ Β καὶ Γ κατασκευάζομεν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΒΓ, δύο γωνίας Β καὶ Γ ἴσας ἀντιστοίχως πρὸς τὰς δοθείσας γωνίας Β καὶ Γ. Αἱ ἄλλαι πλευραὶ τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ, ἐκτὸς τῆς ΒΓ, τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Α καὶ τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι προφανῶς τὸ ζητούμενον.



Σχ. 106.

Σημ. Κατωτέρω θὰ ἴδωμεν εἰς ποίους περιορισμοὺς πρέπει νὰ ὑπόκεινται αἱ γωνίαι Β καὶ Γ διὰ νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ κατασκευὴ τοῦ τριγώνου.

129. Πρόβλημα 3ον. ***Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν δύο πλευράς του καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν.***

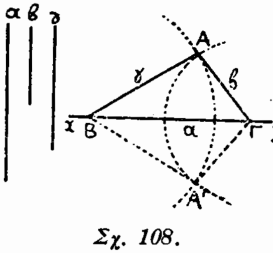


Σχ. 107.

Ἔστωσαν β καὶ γ *(Σχ. 107)* αἱ δύο δοθεῖσαι πλευραὶ καὶ ω ἡ δοθεῖσα γωνία.

Κατασκευάζομεν μίαν γωνίαν χΑy ἴσην μὲ τὴν ω. Ἔπειτα λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Αχ ἕνα τμῆμα ΑΓ=β καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Αy ἕνα τμῆμα ΑΒ=γ· φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΒΓ· τὸ σχηματισθὲν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι προφανῶς τὸ ζητούμενον.

130. Πρόβλημα 4ον. ***Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὰς τρεῖς πλευράς του α, β, γ.***



Σχ. 108.

Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας xy *(Σχ. 108)* λαμβάνομεν ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ΒΓ ἴσον μὲ τὴν πλευρὰν α. Μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Β καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ γ γράφομεν ἕνα τόξον κύκλου. Ἔπειτα μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ β γράφομεν ἕνα τόξον.

Ἡ τομὴ Α τῶν δύο αὐτῶν τόξων ὁρίζει τὴν τρίτην κορυφὴν τοῦ ζητουμένου τριγώνου.

Σημ. Κατωτέρω θὰ ἴδωμεν εἰς ποίους περιορισμοὺς πρέπει νὰ ὑπόκεινται αἱ πλευραὶ α,β,γ διὰ νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ κατασκευὴ τοῦ τριγώνου.

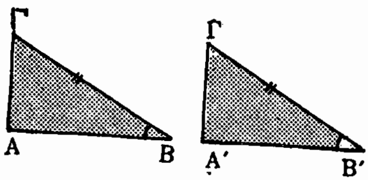
8. Περιπτώσεις ἰσότητος ὀρθογωνίων τριγώνων

131. Εἴδομεν (§ 118 καὶ 120) πότε δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα. Θὰ ἐξετάσωμεν τώρα καὶ ἄλλας ἰδιαιτέρας περιπτώσεις ἰσότητος αὐτῶν.

132. Θεώρημα. ***Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των ἴσας καὶ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ *(Σχ. 109)*, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἐξ ὑποθέσεως:

$$ΒΓ=Β'Γ', \ \widehat{Β}=\widehat{Β'}, \ \widehat{Α}=\widehat{Α'}=1 \text{ ὀρθή}.$$



Ὑπόθ.	ΒΓ=Β΄Γ $\widehat{Β}=\widehat{Β}$
Συμπ.	τρ. ΑΒΓ=τρ. Α΄Β΄Γ΄

Σχ. 109.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσα.

Ἀπόδειξις: Θέτομεν τὸ τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ οὕτως, ὥστε ἡ Β΄Γ΄ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης της ΒΓ· ἐπειδὴ ἡ γωνία Β΄ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν Β, ἡ πλευρὰ Β΄Α΄ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΑ καὶ τὸ σημεῖον Α΄ θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ΒΑ ἢ ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς της. Ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ Γ΄Α΄ καὶ ΓΑ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν καὶ ἄγονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Γ, ἡ Γ΄Α΄ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΓΑ καὶ τὸ σημεῖον Α΄ θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ΓΑ ἢ ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς της. Ἀλλὰ τὸ σημεῖον Α΄, ἐπειδὴ πρέπει νὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς ΒΑ καὶ ἐπὶ τῆς ΓΑ, πρέπει ἀναγκαστικῶς νὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ Α, διότι δύο εὐθεῖαι μόνον εἰς ἕνα σημεῖον τέμνονται. Ἀλλὰ τότε τὰ τρίγωνα Α΄Β΄Γ΄ καὶ ΑΒΓ ἐφαρμόζουν καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσα.

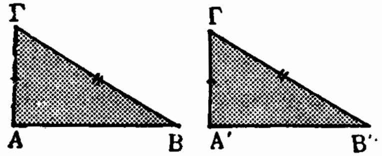
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα. . . .***

133. Θεώρημα. ***Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των ἴσας καὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν ἴσην.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ *(Σχ. 110)*, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἐξ ὑποθέσεως:

$$ΒΓ=Β'Γ', \quad ΑΓ=Α'Γ' \quad καὶ \quad \widehat{Α}=\widehat{Α'}=ὀρθή.$$

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ ὀρθογώνια αὐτὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα.



Σχ. 110.

Ὑπόθ.	ΒΓ=Β΄Γ΄ ΑΓ=Α΄Γ΄
Συμπ.	τρ.ΑΒΓ=τρ.Α΄Β΄Γ΄

Ἀπόδειξις: Θέτομεν τὸ τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ οὕτως, ὥστε ἡ πλευρὰ Α΄Γ΄ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης της πλευρᾶς ΑΓ. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι Α καὶ Α΄ εἶναι ἴσαι, ὡς ὀρθαί, ἡ πλευρὰ Α΄Β΄ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ καὶ τὸ σημεῖον Β΄ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἢ ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς της. Ὑπὸ τοὺς ὅρους αὐτούς, αἱ Γ΄Β΄ καὶ ΓΒ δύνανται νὰ θεωρηθοῦν, ὡς πλάγιαι πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Γ· ἐπειδὴ αἱ πλάγιαι Γ΄Β΄ καὶ ΓΒ εἶναι ἴσαι, οἱ πόδες των Β καὶ Β΄ θὰ ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὸν πόδα Α τῆς καθέτου καὶ ἑπομένως τὸ σημεῖον Β΄ θὰ πέσῃ ἀναγκαστικῶς ἐπὶ τοῦ Β. Ἀλλὰ τότε τὰ τρίγωνα Α΄Β΄Γ΄ καὶ ΑΒΓ θὰ ἐφαρμόσουν καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσα.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα....***

Ασκήσεις

Α΄ Ὁμάς. **56.** (76). Τὰ μέσα τῶν ἴσων πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὴν βάσιν του.

57. (77). Τὸ μέσον τῆς ὑποτεινούσης ἑνὸς ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς καθέτους πλευράς του.

58. (78). Αἱ κάθετοι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς βάσεως ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἐπὶ τὰς ἴσας πλευράς του εἶναι ἴσαι, καὶ σχηματίζουν ἴσας γωνίας μὲ τὴν βάσιν, καθὼς καὶ μὲ τὴν διάμεσον τοῦ τριγώνου.

59. (79). Ἐὰν αἱ κάθετοι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ μέσον μιᾶς πλευρᾶς τριγώνου ἐπὶ τὰς ἄλλας πλευράς του εἶναι ἴσαι, τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

60. (80). Αἱ κάθετοι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς βάσεως ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἐπὶ τὰς ἴσας πλευράς του, εἶναι ἴσαι.

61. (81). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι δύο κορυφαὶ τριγώνου ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὴν διάμεσον, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὴν τρίτην κορυφήν.

Β΄ Ὁμάς. **62.** (82). Δίδεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α· φέρομεν τὴν διχοτόμον ΒΔ τῆς γωνίας Β ἡ ὁποία τέμνει τὴν πλευρὰν ΑΓ εἰς τὸ Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΔΑ<ΔΓ.

63 (83). Ἐὰν δύο ὕψη τριγώνου εἶναι ἴσα, τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἀντιστρόφως.

64. (84). Δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ ἔχουν τὰς πλευρὰς ΒΓ καὶ Β′Γ′ ἴσας καὶ τὰ ὕψη ΒΔ καὶ ΓΕ ἴσα, ἀντιστοίχως, πρὸς τὰ Β′Δ′ καὶ Γ′Ε′. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ εἶναι ἴσα.

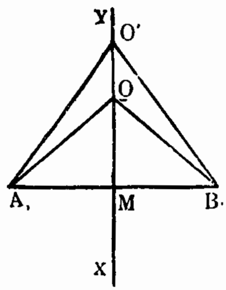
65. (85). Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ ἔχουν τὰς γωνίας Α καὶ Α′ παραπληρωματικὰς καὶ ΑΒ=Α′Β′, ΑΓ=Α′Γ′. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ ὕψη ΒΔ καὶ Β′Δ′ εἶναι ἴσα. Ἐπίσης εἶναι ἴσα καὶ τὰ ὕψη ΓΕ καὶ Γ′Ε′.

66. (86). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας xy λαμβάνομεν δύο σημεῖα Α καὶ Β. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τῆς xy, φέρομεν τὰς εὐθείας ΟΑ καὶ ΟΒ καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων λαμβάνομεν εὐθύγραμμα τμήματα ΑΑ′, ΒΒ′ ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰ ΟΑ καὶ ΟΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Α′ καὶ Β′ ἀπέχουν ἰσάκις ἀπὸ τὴν xy.

9. Ἰδιότης τῶν σημείων τῆς μεσοκαθέτου ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος

134. Θεώρημα. ***Κάθε σημεῖον τῆς μεσοκαθέτου ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος, ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ ἄκρα αὐτοῦ.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω ἕνα εὐθύγραμμον ΑΒ *(Σχ. 111)*, ΧΥ ἡ κάθετος, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ μέσον Μ τοῦ ΑΒ ἐπ' αὐτὸ καὶ Ο τυχὸν σημεῖον τῆς καθέτου αὐτῆς.



Σχ. 111.

Ὑπόθ.	ΧΥ ⊥ ΑΒ ΑΜ=ΜΒ
Συμπ.	ΟΑ=ΟΒ

Συμπέρασμα: Ἐὰν φέρωμεν τὰς εὐθείας ΟΑ καὶ ΟΒ, θὰ δείξωμεν, ὅτι ΟΑ=ΟΒ.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι: ΑΜ=ΜΒ, αἱ πλάγιαι ΟΑ καὶ ΟΒ, πρὸς τὴν ΑΒ, εἶναι ἴσαι, διότι οἱ πόδες των Α καὶ Β ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὸν πόδα Μ τῆς καθέτου ΧΥ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Κάθε σημεῖον τῆς μεσοκαθέτου. . . . .***

135. Θεώρημα. *(Ἀντίστροφον).* ***Κάθε σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ ἄκρα ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος, κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου αὐτοῦ.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω ἕνα σημεῖον Ο *(Σχ. 111)*, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ ἄκρα ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ, δηλ. ἔστω, ὅτι ΟΑ=ΟΒ.

Ὑπόθ.	ΟΑ=ΟΒ
Συμπ.	ΧΥ ⊥ ΑΒ ΑΜ=ΜΒ

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ Ο κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

'Απόδειξις: 'Επειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΟΑ=ΟΒ, τὸ τρίγωνον ΟΑΒ εἶναι ἰσοσκελές. 'Εὰν συνδέσωμεν, μὲ εὐθεῖαν, τὸ σημεῖον Ο μὲ τὸ μέσον Μ τοῦ ΑΒ, ἡ ΟΜ, ὡς διάμεσος ἰσοσκελοῦς τριγώνου, θὰ εἶναι καὶ ὕψος αὐτοῦ καὶ ἑπομένως κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ. Ὥστε τὸ Ο κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ ΑΒ.

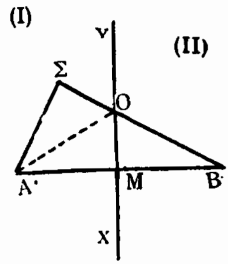
'Εδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Κάθε σημεῖον. . .***

Παρατήρησις: Τὰ δύο ἀνωτέρω θεωρήματα (§ 134 καὶ 135) δύνανται νὰ ἐκφρασθοῦν καὶ ὡς ἑξῆς:

'Η ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα ἕνα σημεῖον ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τὰ ἄκρα ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος εἶναι, ὅτι τὸ σημεῖον αὐτὸ πρέπει νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος, ἤ

Διὰ νὰ ἀπέχῃ ἕνα σημεῖον ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ ἄκρα ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ σημεῖον αὐτὸ νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ εὐθυγράμμου αὐτοῦ τμήματος.

136. Περιοχαὶ ὁριζόμεναι ὑπὸ τῆς μεσοκαθέτου ἑνὸς εὐθ. τμήματος. Ἔστω ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ καὶ ΧΥ ἡ μεσοκάθετος αὐτοῦ. 'Η μεσοκάθετος αὐτὴ χωρίζει τὸ ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖται εἰς δύο μέρη, εἰς δύο ἡμιεπίπεδα (Ι), (ΙΙ), τὰ ὁποῖα περιέχουν τὸν μὲν ἕνα τὸ σημεῖον Α, τὸ δὲ ἄλλο τὸ σημεῖον Β.



Σχ. 112.

Ζητεῖται νὰ συγκριθοῦν αἱ ἀποστάσεις ἑνὸς σημείου Σ ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

1ον. *Ἔστω ὅτι τὸ σημεῖον Σ κεῖται εἰς τὴν περιοχὴν* (Ι). Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΣΑ καὶ τὴν εὐθεῖαν ΣΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν μεσοκάθετον ΧΥ εἰς τὸ σημεῖον Ο. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΟΑ.

'Απὸ τὸ τρίγωνον ΣΟΑ ἔχομεν $ΣΑ<ΣΟ+ΟΑ$ (1).

'Επειδὴ ΟΑ=ΟΒ, (§ 134) ἡ (1) γράφεται

$$ΣΑ<ΣΟ+ΟΒ \quad ἢ \quad ΣΑ<ΣΒ.$$

Ὥστε διὰ κάθε σημεῖον τῆς περιοχῆς (Ι) ἔχομεν $ΣΑ<ΣΒ$.

2ον. *'Εὰν τὸ σημεῖον Σ κεῖται εἰς τὴν περιοχὴν (ΙΙ) ἀποδεικνύομεν ὁμοίως, ὅτι $ΣΒ<ΣΑ$.*

'Αντιστρόφως. 1ον. *'Εὰν $ΣΑ<ΣΒ$, τὸ σημεῖον Μ κεῖται εἰς τὴν περιοχὴν (Ι).*

Πράγματι· τὸ σημεῖον Σ δὲν δύναται νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου, διότι τότε θὰ ἦτο ΣΑ=ΣΒ, τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν.

Ἐπίσης τὸ σημεῖον Σ δὲν δύναται νὰ κεῖται εἰς τὴν περιοχὴν (ΙΙ), διότι τότε θὰ ἦτο ΣΑ>ΣΒ, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἀντίκειται πάλιν εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ὥστε τὸ σημεῖον θὰ κεῖται ἀναγκαστικῶς εἰς τὴν περιοχὴν (Ι).

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν:

Ἐὰν δίδεται ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ καὶ ἕνα σημεῖον Σ ἐκτὸς αὐτοῦ, ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη διὰ νὰ εἶναι ΣΑ<ΣΒ εἶναι, τὸ Σ νὰ κεῖται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ σημεῖον Α, ἐν σχέσει πρὸς τὴν μεσοκάθετον τοῦ ΑΒ.

137. Γεωμετρικὸς τόπος. Εἰς τὰ θεωρήματα § 134 καὶ § 135 εἴδομεν ὅτι: ***Κάθε σημεῖον τῆς μεσοκαθέτου ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ ἄκρα αὐτοῦ Α καὶ Β.***

Καὶ ἀντιστρόφως: ***Κάθε σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ ἄκρα ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ, κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου αὐτοῦ.***

Τὸ *σύνολον αὐτῶν τῶν σημείων*, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν ἰδιότητα νὰ ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὰ ἄκρα ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος, σχηματίζουν ἕνα σχῆμα, (ἐδῶ μίαν εὐθεῖαν γραμμήν), τὸ ὁποῖον λέγεται ***γεωμετρικὸς τόπος.***

Ὥστε δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ὅτι:

Ι. ***Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὰ ἄκρα ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος, εἶναι ἡ μεσοκάθετος αὐτοῦ.***

10. Στοιχειώδεις γεωμετρικαὶ κατασκευαὶ

138. Ἐφαρμογαί. ***Πρόβλημα 1ον. Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου νὰ ἀχθῇ ἡ μεσοκάθετος ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος.***

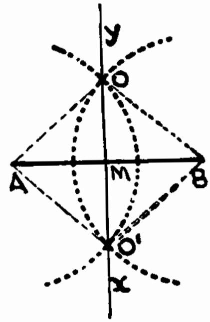
Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ φέρωμεν τὴν μεσοκάθετον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ *(Σχ. 113).*

Κατασκευή: Μὲ κέντρα τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν αὐτήν, ἀλλὰ μεγαλυτέραν τοῦ ἡμίσεως τοῦ ΑΒ, γράφομεν δύο τόξα, τὰ ὁποῖα τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Ο καὶ Ο'. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΟΟ', ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη μεσοκάθετος τοῦ ΑΒ.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὰς εὐθείας ΟΑ, ΟΒ, Ο'Α, Ο'Β· αἱ εὐ-

θεῖαι αὐταὶ εἶναι ἴσαι, ὡς ἀκτῖνες ἴσων περιφερειῶν. Τὰ σημεῖα λοιπὸν O καὶ O′ ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὰ ἄκρα A καὶ B τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AB καὶ ἑπομένως κεῖνται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου αὐτοῦ (§ 135). Ὥστε ἡ OO′ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ AB.

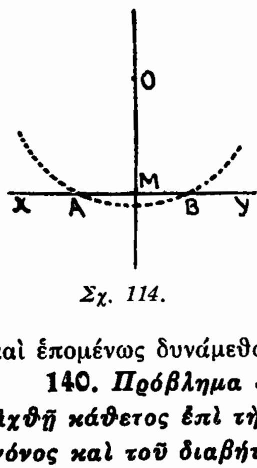
Παρατήρησις. Ἡ προηγουμένη κατασκευὴ μᾶς δίδει τὸ μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AB. Ἐπαναλαμβάνοντες διαδοχικῶς τὴν αὐτὴν κατασκευὴν καὶ εἰς καθένα ἀπὸ τὰ ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται τὸ τμῆμα AB, διαιροῦμεν αὐτὸ εἰς 4, 8, 16,...2^{ν} ἴσα μέρη.



Σχ. 113.

139. ***Πρόβλημα 2ον. Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς εὐθείας, νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν αὐτήν, μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου.***

Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ φέρωμεν ἀπὸ τὸ σημεῖον O *(Σχ. 114)* τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν xy.



Σχ. 114.

Μὲ κέντρον τὸ δοθὲν σημεῖον O καὶ μὲ ἀκτῖνα μεγαλυτέραν τῆς ἀποστάσεως τοῦ O ἀπὸ τὴν xy, γράφομεν ἕνα τόξον περιφερείας, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν xy εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B. Ἡ μεσοκάθετος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AB, θὰ διέρχεται ἀναγκαστικῶς ἀπὸ τὸ σημεῖον O, διότι τὸ O, ἐκ κατασκευῆς, ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ A καὶ B. Ὥστε ἡ ζητουμένη κάθετος θὰ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τοῦ AB καὶ ἑπομένως δυνάμεθα νὰ τὴν κατασκευάσωμεν (§ 138).

140. ***Πρόβλημα 3ον. Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον μιᾶς εὐθείας, νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν αὐτήν, μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου.***

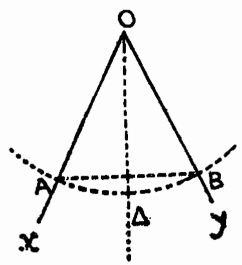
Ἔστω M ἕνα σημεῖον τῆς εὐθείας xy *(Σχ. 114)* ἀπὸ τὸ ὁποῖον θέλομεν νὰ φέρωμεν κάθετον ἐπὶ τὴν xy.

Κατασκευή : Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς εὐθείας xy δύο σημεῖα A καὶ B οὕτως, ὥστε MA=MB. Ἡ μεσοκάθετος MO τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AB εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος ἐπὶ τὴν xy.

141. ***Πρόβλημα 4ον. Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου, νὰ ἀχθῇ ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας.***

Ἔστω xOy *(Σχ. 115)* μία γωνία, τὴν ὁποίαν θέλομεν νὰ διχοτομήσωμεν.

Κατασκευή : Μὲ κέντρον τὴν κορυφήν της Ο καὶ μὲ ἀκτῖνα τυχοῦσαν γράφομεν ἕνα τόξον περιφερείας, τὸ ὁποῖον τέμνει τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ. Τὸ σχηματισθὲν τρίγωνον ΟΑΒ εἶναι ἰσοσκελές. Ἡ κάθετος λοιπὸν εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεώς του θὰ εἶναι καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς του Ο. Ὥστε διὰ νὰ φέρωμεν τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας xOy, ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν τὴν μεσοκάθετον τοῦ ΑΒ, ὅπως ἐδείχθη εἰς τὴν § 138.



Σχ. 115.

Παρατήρησις: Ἐὰν διχοτομήσωμεν δοθεῖσαν γωνίαν καὶ ἔπειτα διχοτομήσωμεν διαδοχικῶς κάθε μίαν ἀπὸ τὰς ἴσας αὐτὰς γωνίας, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν μίαν γωνίαν εἰς 4, 8, 16, ... 2^{ν} ἴσας γωνίας.

Ἀσκήσεις

67. (87). Ἐὰν δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν, ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὰς κορυφάς των εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν.

68. (88). Δίδεται τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐπὶ τῆς διχοτόμου ΑΔ τῆς γωνίας Α τῆς κορυφῆς του λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Ο καὶ φέρομεν τὰς εὐθείας ΒΟΒ′ καὶ ΓΟΓ′, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς πλευρὰς ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Β′ καὶ Γ′. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΒΒ′=ΓΓ′.

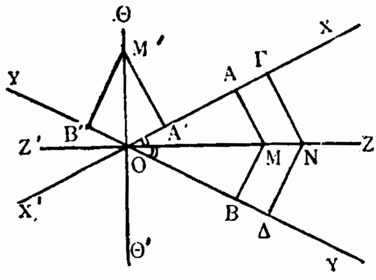
11. Ἰδιότης τῶν σημείων τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας

142. Θεώρημα. ***Κάθε σημεῖον τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς πλευράς της.***

Ὑπόθεσις : Ἔστω ΧΟΥ *(Σχ. 116)* μία γωνία, Μ ἕνα σημεῖον τῆς διχοτόμου της ΟΖ καὶ ΜΑ, ΜΒ αἱ ἀποστάσεις του ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΜΑ=ΜΒ.

Ἀπόδειξις: Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΑΜ καὶ ΟΒΜ ἔχουν τὴν



Σχ. 116.

Ὑπόθ.	$\widehat{MOX}=\widehat{MOY}$ ΜΑ⊥ΟΧ ΜΒ⊥ΟΥ
Συμπ.	ΜΑ=ΜΒ

ὑποτείνουσαν ΟΜ κοινὴν καὶ τὰς ὀξείας γωνίας ΜΟΑ καὶ ΜΟΒ ἴσας. Ἄρα θὰ εἶναι ἴσα καὶ ἐπομένως θὰ ἔχουν καὶ ΜΑ=ΜΒ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Κάθε σημεῖον τῆς διχοτόμου....***

143. Θεώρημα. *(Ἀντίστροφον).* ***Κάθε σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς πλευρὰς μιᾶς γωνίας, κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω ΧΟΥ μία γωνία καὶ Μ ἕνα σημεῖον ἐντὸς αὐτῆς καὶ τοιοῦτον, ὥστε αἱ ἀποστάσεις του ΜΑ καὶ ΜΒ ἀπὸ τὰς πλευράς της νὰ εἶναι ἴσαι. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΟΜ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ ΟΜ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΧΟΥ.

Ὑπόθ.	$MA \perp OX$ $MB \perp OY$ $MA = MB$
Συμπ.	$M\widehat{O}X = M\widehat{O}Y$

Ἀπόδειξις. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΜΑ καὶ ΟΜΒ ἔχουν τὴν ὑποτείνουσαν ΟΜ κοινὴν καὶ τὰς καθέτους πλευρὰς ΜΑ καὶ ΜΒ ἴσας, ἐξ ὑποθέσεως. Ἄρα θὰ εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως θὰ ἔχουν καὶ $M\widehat{O}X = M\widehat{O}Y$, ὁπότε ἡ ΟΖ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΧΟΥ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Κάθε σημεῖον, τὸ ὁποῖον.....***

Παρατήρησις. Τὰ δύο ἀνωτέρω θεωρήματα ἐκφράζονται καὶ ὡς ἑξῆς:

Διὰ νὰ κεῖται ἕνα σημεῖον ἐπὶ τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ σημεῖον αὐτὸ νὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τὰς δύο πλευρὰς τῆς γωνίας αὐτῆς.

144. Γεωμετρικὸς τόπος. Εἰς τὰ δύο θεωρήματα 142 καὶ 143 εἴδομεν, ὅτι:

Κάθε σημεῖον τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς πλευράς της.

Καὶ ἀντιστρόφως: ***Κάθε σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς πλευρὰς μιᾶς γωνίας κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας.***

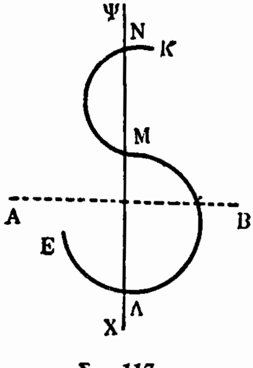
Παρατηροῦμεν καὶ ἐδῶ, ὅτι ὅλα τὰ σημεῖα τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας ἔχουν τὴν ἰδιότητα νὰ ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας. Ὥστε δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ὅτι:

Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὰς πλευρὰς μιᾶς γωνίας, εἶναι ἡ διχοτόμος αὐτῆς.

145. Χρῆσις τῆς ἐννοίας τοῦ γεωμετρικοῦ τόπου. Οἱ γεωμετρικοὶ τόποι χρησιμοποιοῦνται πρὸ παντὸς εἰς τὰ προβλήματα κατασκευῶν· π.χ. ὅταν πρόκειται νὰ εὕρωμεν ἕνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον νὰ ἱκανοποιῇ δύο καθωρισμένας ἐκ τῶν προτέρων συνθήκας. Ἐὰν ἐγνωρίζωμεν τοὺς γεωμετρικοὺς τόπους τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα πληροῦν καὶ τὴν μίαν καὶ τὴν ἄλλην ἀπὸ τὰς δοθείσας συνθήκας, τὸ ζητούμενον

σημεῖον θὰ εὑρίσκετο εἰς τὴν τομὴν τῶν δύο αὐτῶν τόπων. Τὸ κατωτέρω παράδειγμα θὰ μᾶς δείξῃ καλύτερον τὸν τρόπον τῆς χρήσεως τῶν γεωμετρικῶν τόπων.

146. *Πρόβλημα.* ***Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β (Σχ. 117) καὶ μία καμπύλη Κ καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθοῦν ὅλα τὰ σημεῖα τῆς καμπύλης Κ, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β.***



Σχ. 117.

Κατὰ τὸ πρόβλημα τὰ ζητούμενα σημεῖα πρέπει νὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς καμπύλης Κ.

Ἐπειδὴ ὅμως τὰ ζητούμενα σημεῖα πρέπει νὰ ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὰ δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β, πρέπει νὰ ἀνήκουν εἰς τὸν γεωμετρικὸν τόπον τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὰ Α καὶ Β· δηλ. πρέπει νὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου ΧΨ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ, τὸ ὁποῖον συνδέει τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Τὰ ζητούμενα λοιπὸν σημεῖα θὰ εἶναι τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῆς μεσοκαθέτου ΧΨ καὶ τῆς καμπύλης Κ· δηλ. εἶναι τὰ σημεῖα Λ, Ν, Μ.

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. **69.** (91). Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον, τὸ ὁποῖον νὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ δύο τεμνομένας εὐθείας καὶ ἴσον ἀπὸ δύο ἄλλας τεμνομένας εὐθείας.

70. (92). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ΒΓ ἕνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον νὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ.

71. (93). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ΑΓ ἢ ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς της, ἕνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον νὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τὰς κορυφὰς Β καὶ Γ.

72. (94). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα.

Β' Ὁμάς. **73.** (95). Δίδονται δύο εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἕνα σημεῖον Ο τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι κοινὴ κορυφὴ δύο ἰσοσκελῶν τριγώνων, τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν βάσεις τὰς ΑΒ καὶ ΓΔ.

74. (96). Δίδεται μία γωνία ΑΟΒ καὶ ἕνα σημεῖον Γ τοιοῦτον, ὥστε ἡ ΟΓ νὰ μὴν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας ΑΟΒ. Νὰ εὑρεθῇ ἕνα σημεῖον Μ, τὸ ὁποῖον νὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τὰς ΟΑ καὶ ΟΒ καὶ τοιοῦτον, ὥστε ΜΟ=ΜΓ.

75. (97). Δίδεται ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ· ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ ΑΒ καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτοῦ φέρομεν τὰς εὐθείας Αx καὶ Βy, αἱ ὁποῖαι σχημα-

τίζουν ἴσας γωνίας μὲ τὸ ΑΒ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου **Μ** τῆς τομῆς των.

76. (98). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ὅταν ἕνα σημεῖον ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τὰ **ἄκρα** δύο διαδοχικῶν τμημάτων ΑΓ καὶ ΒΓ, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται **ἐπ' εὐθείας, θὰ** ἀπέχῃ ἴσον καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Γ.

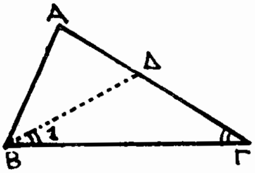
12. Ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν γωνιῶν καὶ τῶν πλευρῶν τριγώνου

147. Θεώρημα. ***Ἐὰν δύο γωνίαι τριγώνου εἶναι ἄνισοι καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν κείμεναι πλευραὶ εἶναι ἄνισοι καὶ ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας γωνίας κεῖται μεγαλυτέρα πλευρά.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ *(Σχ. 118),* εἰς τὸ ὁποῖον, ἐξ ὑποθέσεως, εἶναι

$$\widehat{B} > \widehat{\Gamma}.$$

Ὑπόθ.	$\widehat{B} > \widehat{\Gamma}$
Συμπ.	ΑΓ > ΑΒ



Σχ. 118.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς πλευρᾶς ΑΒ.

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Β φέρομεν μίαν εὐθεῖαν ΒΔ, ἡ ὁποία νὰ σχηματίζῃ μὲ τὴν ΒΓ μίαν γωνίαν ΓΒΔ ἴσην μὲ τὴν γωνίαν Γ. Ἐπειδὴ ἡ γωνία Β εἶναι, ἐξ ὑποθέσεως, μεγαλυτέρα τῆς γωνίας Γ, ἡ εὐθεῖα ΒΔ θὰ κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας ΑΒΓ καὶ ἑπομένως τὸ σημεῖον Δ θὰ κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ.

Τὸ τρίγωνον ΔΒΓ εἶναι ἰσοσκελές, διότι αἱ γωνίαι B_1 καὶ Γ εἶναι ἴσαι ἐκ κατασκευῆς· ἄρα θὰ εἶναι ΒΔ=ΔΓ.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΔ, ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του· ἤτοι εἶναι

$$AB < A\Delta + \Delta B \qquad (1)$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἀνισότητα αὐτὴν τὴν ΔΒ μὲ τὴν ἴσην της ΔΓ καὶ ἔχομεν $AB < A\Delta + \Delta\Gamma$ ἢ $AB < A\Gamma$ ἢ $A\Gamma > AB$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν δύο γωνίαι τριγώνου. . . . .***

148. Θεώρημα. *(Ἀντίστροφον).* ***Ἐὰν δύο πλευραὶ τριγώνου εἶναι ἄνισοι καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν κείμεναι γωνίαι εἶναι ἄνισοι καὶ ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς κεῖται μεγαλυτέρα γωνία.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ *(Σχ. 118),* εἰς τὸ ὁποῖον

εἶναι ΑΓ>ΑΒ.

Ὑπόθ.	ΑΓ>ΑΒ
Συμπ.	$\widehat{B}>\widehat{\Gamma}$

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι θὰ εἶναι καὶ $\widehat{B}>\widehat{\Gamma}$.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ γωνία Β δὲν εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας Γ, τότε θὰ εἶναι ἢ ἴση μὲ αὐτὴν ἢ μικροτέρα αὐτῆς.

Ἐὰν ἦτο $\widehat{B}=\widehat{\Gamma}$, τότε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θὰ ἦτο ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως θὰ ἦτο ΑΒ=ΑΓ. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀπαράδεκτον, διότι ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας: ΑΓ>ΑΒ.

Ἐὰν ἦτο $\widehat{B}<\widehat{\Gamma}$, τότε κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, θὰ ἦτο ΑΓ<ΑΒ. Ἀλλὰ καὶ τοῦτο εἶναι ἀπαράδεκτον, διότι ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας.

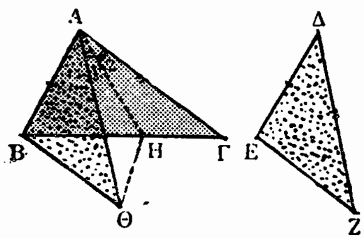
Ὥστε ἡ γωνία Β δὲν δύναται νὰ εἶναι, οὔτε ἴση μὲ τὴν Γ, οὔτε μικροτέρα αὐτῆς· ἄρα ἀναγκαστικῶς θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς Γ· ἤτοι θὰ εἶναι $\widehat{B}>\widehat{\Gamma}$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν δύο πλευραὶ . . .***

149. Θεώρημα. ***Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας γωνίας ἀνίσους, τότε αἱ τρίται πλευραί των εἶναι ἄνισοι καὶ μεγαλυτέρα εἶναι ἐκείνη, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας γωνίας.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ *(Σχ. 119)*, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἐξ ὑποθέσεως: ΑΒ=ΔΕ, ΑΓ=ΔΖ καὶ $\widehat{A}>\widehat{\Delta}$.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΒΓ>ΕΖ.



Σχ. 119.

Ἀπόδειξις: Θέτομεν τὸ τρίγωνον ΔΕΖ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ οὕτως, ὥστε

Ὑπόθ.	ΑΒ=ΔΕ ΑΓ=ΔΖ $\widehat{A}>\widehat{\Delta}$
Συμπ.	ΒΓ>ΕΖ

ἡ ΔΕ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης της ΑΒ· ἐπειδὴ ἡ γωνία Δ εἶναι μικροτέρα τῆς Α, ἡ πλευρὰ ΔΖ θὰ πέσῃ ἐντὸς τῆς γωνίας Α καὶ θὰ λάβῃ τὴν θέσιν ΑΘ, τὸ δὲ τρίγωνον ΔΕΖ θὰ λάβῃ τὴν θέσιν ΑΒΘ.

Φέρομεν τὴν διχοτόμον ΑΗ τῆς γωνίας ΘΑΓ, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν πλευρὰν ΒΓ εἰς τὸ Η· φέρομεν ἔπειτα τὴν εὐθεῖαν ΗΘ. Τὰ σχη-

ματισθέντα τρίγωνα ΑΗΘ καὶ ΑΗΓ ἔχουν: τὴν πλευρὰν ΑΗ κοινήν, ΑΘ=ΑΓ, διότι εἶναι ἴσαι πρὸς τὴν ΔΖ καὶ $\widehat{A}_1=\widehat{A}_2$, ἄρα θὰ εἶναι ἴσα (§ 119) καὶ ἑπομένως θὰ ἔχουν καὶ ΘΗ=ΗΓ.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΒΗΘ εἶναι ΒΘ<ΒΗ+ΗΘ (1)

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἀνισότητα (1) τὴν ΗΘ μὲ τὴν ἴσην της ΗΓ καὶ ἔχομεν ΒΘ<ΒΗ+ΗΓ.

Ἐπειδὴ ΒΘ=ΕΖ καὶ ΒΗ+ΗΓ=ΒΓ, ἡ προηγουμένη ἀνισότης γράφεται ΕΖ<ΒΓ ἢ ΒΓ>ΕΖ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν....***

150. Θεώρημα. (*Ἀντίστροφον*). ***Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας μίαν πρὸς μίαν, τὰς δὲ τρίτας πλευράς των ἀνίσους, τότε αἱ ἀπέναντι τῶν ἀνίσων πλευρῶν κείμεναι γωνίαι εἶναι ἄνισοι καὶ μεγαλυτέρα εἶναι ἐκείνη, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ (*Σχ. 119*), τὰ ὁποῖα ἔχουν ἐξ ὑποθέσεως:

ΑΒ=ΔΕ, ΑΓ=ΔΖ καὶ ΒΓ>ΕΖ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν $\widehat{A}>\widehat{\Delta}$.

Ὑπόθ.	ΑΒ=ΔΕ ΑΓ=ΔΖ ΒΓ>ΕΖ
Συμπ.	$\widehat{A}>\widehat{\Delta}$

Ἀπόδειξις: Ἐὰν ἡ γωνία Α δὲν ἦτο μεγαλυτέρα τῆς γωνίας Δ, θὰ ἦτο ἴση μὲ αὐτὴν ἢ μικροτέρα αὐτῆς.

Ἐὰν ἡ Α ἦτο ἴση μὲ τὴν Δ, τότε τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ θὰ ἦσαν ἴσα (§ 119), καὶ ἑπομένως θὰ ἦτο ΒΓ=ΕΖ. Ἀλλὰ τοῦτο ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας ΒΓ>ΕΖ.

Ἐὰν ἡ Α ἦτο μικροτέρα τῆς Δ, τότε, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, θὰ ἦτο καὶ ΒΓ<ΕΖ. Ἀλλὰ τοῦτο ἀντιβαίνει ἐπίσης εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας.

Ὥστε ἡ γωνία Α δὲν δύναται νὰ εἶναι, οὔτε ἴση, οὔτε μικροτέρα τῆς Δ· ἑπομένως θὰ εἶναι μεγαλυτέρα αὐτῆς· ἤτοι θὰ εἶναι $\widehat{A}>\widehat{\Delta}$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν δύο τρίγωνα....***

Ἀσκήσεις

77. (99). Δίδεται ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Β τῆς βάσεώς του ΒΓ φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΒΔ ἐντὸς τοῦ τριγώνου, ἡ ὁποία τέμνει τὴν πλευρὰν ΑΓ εἰς τὸ σημεῖον Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΒΔ>ΔΓ.

78. (100). Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ ἑνὸς τριγώνου τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Ο. Ἐὰν εἶναι ΑΒ>ΑΓ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΟΒ>ΟΓ.

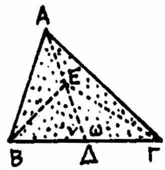
79. (101). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι κάθε πλευρὰ τριγώνου εἶναι μικροτέρα τῆς ἡμιπεριμέτρου του.

80. (102). Εἰς ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ἡ ΑΒ εἶναι ἡ μεγαλυτέρα πλευρά του, καὶ ἡ ΓΔ ἡ μικροτέρα πλευρά του. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι γων.ΑΔΓ>γων.ΑΒΓ καὶ γων.ΒΓΔ>γων ΒΑΔ.

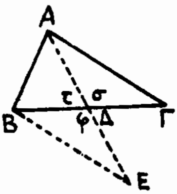
81. (103). Εἰς ἕνα κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ΑΔ=ΒΓ καὶ $\widehat{\Delta}>\widehat{\Gamma}$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΑΓ>ΒΔ.

82. (104). Ἐὰν διάμεσος τριγώνου περιέχεται μεταξὺ ἀνίσων πλευρῶν, αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τυχὸν σημεῖον αὐτῆς μέχρι τῶν ἄκρων τῆς τρίτης πλευρᾶς, εἶναι ἄνισοι καὶ μεγαλυτέρα εἶναι ἐκείνη, ἡ ὁποία κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς.

83. (105). Ἐὰν διάμεσος τριγώνου περιέχεται μεταξὺ ἀνίσων πλευρῶν: 1ον σχηματίζει μὲ αὐτὰς ἀνίσους γωνίας καὶ μεγαλυτέραν μὲ τὴν μικροτέραν πλευράν. 2ον σχηματίζει μὲ τὸ ἥμισυ τῆς τρίτης πλευρᾶς, ἡ ὁποία πρόσκειται εἰς τὴν μεγαλυτέραν πλευράν, γωνίαν ἀμβλεῖαν.



Σχ. ἀσκ. 82.



Σχ. ἀσκ. 83.

Δ' Ὁμάς. **84.** (106). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὑψῶν ἑνὸς ὀξυγωνίου τριγώνου περιέχεται μεταξὺ τοῦ ἀθροίσματος καὶ τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν πλευρῶν του.

85. (109). Ἐὰν α, β, γ εἶναι αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ καὶ μ_α ἡ διάμεσος, ἡ ἀγομένη ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α, νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον ὅτι $\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}<\mu_\alpha<\frac{\beta+\gamma}{2}$. 2ον ὅτι $\frac{\gamma-\beta}{2}<\mu_\alpha<\frac{\gamma+\beta}{2}$.

86. (110). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν διαμέσων ἑνὸς τριγώνου εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἡμιπεριμέτρου του καὶ μικρότερον τῆς περιμέτρου του.

87. (111). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον, τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι ἰσόπλευρον, ἡ μεγαλυτέρα πλευρά του εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ τρίτου τῆς περιμέτρου του καὶ ἡ μικροτέρα πλευρά του εἶναι μικροτέρα τοῦ τρίτου τῆς περιμέτρου του (δύο περιπτώσεις).

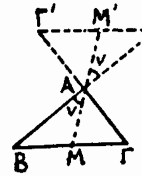
88. (118). Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς εὐθείας xy, φέρομεν τὴν κάθετον ΟΑ ἐπὶ τὴν xy καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς καθέτου τὰς πλαγίας ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, ... καὶ τοιαύτας, ὥστε ΑΒ=ΒΓ=ΒΔ= .... Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ γωνίαι ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΔ, ... βαίνουν ἐλαττούμεναι.

89. (119). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν ὕψος ΑΔ. Ἐὰν εἶναι ΑΒ>ΑΓ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι καὶ γων.ΒΑΔ>γων.ΔΑΓ.

90. (120). Κάθε πλευρὰ τριγώνου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία συνδέει τοὺς πόδας τῶν καθέτων, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τυχὸν σημεῖον αὐτῆς ἐπὶ τὰς ἄλλας πλευρὰς τοῦ τριγώνου.

91. (107). Δίδεται ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ΒΓ, ἡ μεσοκάθετος αὐτοῦ εἰς τὸ μέσον Μ καὶ Σ ἕνα τυχὸν σημεῖον τῆς μεσοκαθέτου. Ἡ κάθετος ἀπὸ τὸ Σ ἐπὶ τὴν ΣΒ τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ε καὶ ἡ κάθετος ἀπὸ τὸ Σ ἐπὶ τὴν ΣΓ τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΣΜ εἶναι μεσοκάθετος τῆς ΕΖ.

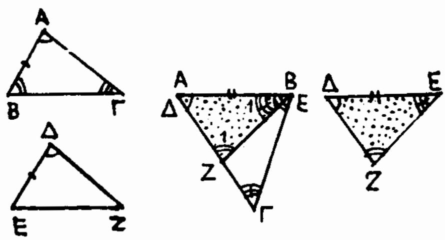
92. (108). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ προεκτείνομεν τὰς πλευράς του ΒΑ καὶ ΓΑ πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς Α καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τμήματα ΑΒ'=ΑΒ καὶ ΑΓ'=ΑΓ· φέρομεν τὴν εὐθεῖαν Β'Γ'. Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον ὅτι Β'Γ'=ΒΓ. 2ον ὅτι ἡ κορυφὴ Α καὶ τὰ μέσα Μ καὶ Μ' τῶν ΒΓ καὶ Β'Γ' κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ ὅτι τὸ Α εἶναι τὸ μέσον τῆς εὐθείας ΜΜ'.



Σχ. ἀσκ. 92.

93. (112). Δύο τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τὴν γωνίαν, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς μιᾶς αὐτῶν ἴσην, εἶναι ἢ ἴσα ἢ ἄνισα.

94. (113). Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς τρεῖς γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν, τὰ τρίγωνα εἶναι ἢ ἴσα ἢ ἄνισα.



Σχ. ἀσκ. 94.

95. (114). Ἐὰν δύο διαδοχικαὶ πλευραὶ τετραπλεύρου εἶναι ἴσαι καὶ αἱ προσκείμεναι εἰς αὐτὰς δύο γωνίαι του εἶναι ἴσαι, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ διαγώνιοι τοῦ τετραπλεύρου εἶναι κάθετοι μεταξύ των.

96. (115). Δύο πολύγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχουν ν—1 διαδοχικὰς πλευρὰς ἴσας, αἱ ὁποῖαι περιέχουν ν—2 γωνίας ἴσας καὶ ὁμοίως κειμένας.

97. (116). Δύο πολύγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχουν ν—2 διαδοχικὰς πλευρὰς ἴσας καὶ ν—1, προσκειμένας εἰς αὐτάς, γωνίας ἴσας καὶ ὁμοίως κειμένας.

98. (117). Δύο πολύγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχουν ὅλας τὰς πλευράς των ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ ν—3 διαδοχικὰς γωνίας ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ ὁμοίως κειμένας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄.

ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

1. Συμμετρία πρὸς κέντρον

151. Ὁρισμοί. Ἔστω ἕνα ὡρισμένον σημεῖον Ο *(Σχ. 120)* καὶ ἕνα τυχὸν σημεῖον Α. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΟ, τὴν ὁποίαν προεκτείνομεν πρὸς τὸ μέρος τοῦ Ο κατὰ ἕνα μῆκος ΟΑ′=ΟΑ. Τὸ σημεῖον Α′ λέγεται ***συμμετρικὸν*** τοῦ σημείου Α, ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Ο.



Σχ. 120.

Ἀντιστρόφως, τὸ Α εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Α′ ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Ο. Ὥστε:

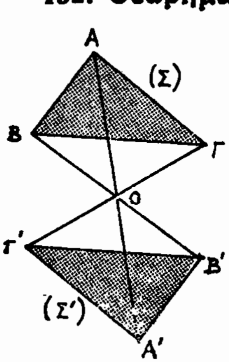
*Δύο σημεῖα Α καὶ Α′ λέγονται **συμμετρικὰ** ὡς πρὸς ἕνα σημεῖον Ο, ὅταν τὸ Ο εἶναι τὸ μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΑ′, ποὺ συνδέει τὰ σημεῖα αὐτά.*

Τὸ ὡρισμένον σημεῖον Ο λέγεται ***κέντρον συμμετρίας***.

Ὅταν κατασκευάσωμεν τὰ συμμετρικὰ ὅλων τῶν σημείων ἑνὸς σχήματος (Σ) ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ κέντρον Ο, λαμβάνομεν ***ἕνα σχῆμα (Σ′) συμμετρικὸν τοῦ σχήματος (Σ) ὡς πρὸς κέντρον τὸ Ο.*** Ὥστε:

*Δύο σχήματα (Σ) καὶ (Σ′) (Σχ. 121) εἶναι **συμμετρικὰ πρὸς κέντρον,** ὅταν τὸ συμμετρικὸν τυχόντος σημείου τοῦ σχήματος (Σ) κεῖται ἐπὶ τοῦ σχήματος (Σ′) καὶ ἀντιστρόφως.*

152. Θεώρημα. ***Δύο σχήματα συμμετρικὰ πρὸς κέντρον συμμετρίας, εἶναι ἴσα.***



Σχ. 121.

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν τὰ συμμετρικὰ σχήματα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ *(Σχ. 121)* πρὸς κέντρον συμμετρίας Ο.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ σχήματα αὐτὰ εἶναι ἴσα.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν στρέψωμεν τὸ σχῆμα ΑΒΓ περὶ τὸ Ο, κατὰ γωνίαν 180° καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου του, ἡ ΟΒ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΟΒ′ καὶ ἐπειδὴ εἶναι ΟΒ=ΟΒ′, τὸ Β θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Β′.

Ἐπίσης ἡ ΟΑ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΟΑ′, διότι αἱ γωνίαι ΒΟΑ καὶ Β′ΟΑ′ εἶναι ἴσαι, τὸ δὲ Α θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Α′, διότι ΟΑ=ΟΑ′.

Ὁμοίως ἡ ΟΓ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΟΓ′, διότι αἱ γωνίαι ΒΟΓ καὶ Β′ΟΓ′ εἶναι ἴσαι, τὸ δὲ Γ ἐπὶ τοῦ Γ′, διότι ΟΓ=ΟΓ′.

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, τοῦ σχήματος ΑΒΓ ἐφαρμόζουν ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν συμμετρικῶν σημείων τοῦ σχήματος Α′Β′Γ′ καὶ ἑπομένως τὰ δύο αὐτὰ σχήματα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ εἶναι ἴσα.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Δύο σχήματα συμμετρικά....***

Παραδείγματα : Τὸ συμμετρικὸν σχῆμα ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ εἶναι ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα Α′Β′ ἴσον πρὸς αὐτό.

Ἐπίσης τὸ συμμετρικὸν μιᾶς γωνίας ΑΒΓ εἶναι μία γωνία Α′Β′Γ′ ἴση πρὸς αὐτήν.

Ὁμοίως τὸ συμμετρικὸν σχῆμα μιᾶς περιφερείας εἶναι μία περιφέρεια ἴση πρὸς αὐτήν.

153. Κέντρον συμμετρίας ἑνὸς σχήματος. Ὅταν τὰ σημεῖα ἑνὸς σχήματος εἶναι ἀνὰ δύο συμμετρικὰ πρὸς ἕνα καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον τοῦ σχήματος, τὸ σημεῖον αὐτὸ λέγεται ***κέντρον συμμετρίας*** (ἢ ἁπλῶς ***κέντρον***) τοῦ *σχήματος*.

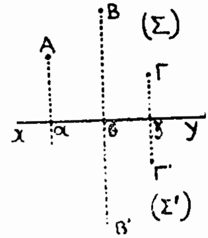
Παραδείγματα : 1. Τὸ μέσον ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος εἶναι κέντρον συμμετρίας τοῦ εὐθυγράμμου αὐτοῦ τμήματος.

2. Τὸ κέντρον μιᾶς περιφερείας εἶναι κέντρον συμμετρίας τοῦ σχήματος αὐτοῦ· πράγματι τὰ ἄκρα κάθε διαμέτρου τῆς περιφερείας εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὸ κέντρον της.

2. Συμμετρία πρὸς ἄξονα

154. Ὁρισμοί. Ἔστω μία ὡρισμένη εὐθεῖα xy *(Σχ. 122)* καὶ ἕνα τυχὸν σημεῖον Α. Ἀπὸ τὸ Α φέρομεν τὴν κάθετον Αα ἐπὶ τὴν xy καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς της λαμβάνομεν ἕνα τμῆμα αΑ′=Αα. Τὸ σημεῖον Α′ λέγεται ***συμμετρικὸν*** τοῦ σημείου Α πρὸς τὴν εὐθεῖαν xy.

Ἀντιστρόφως, τὸ Α εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Α′ πρὸς τὴν xy. Ὥστε:



Σχ. 122.

Δύο σημεῖα Α καὶ Α′ λέγονται ***συμμετρικὰ πρὸς μίαν εὐθεῖαν xy****, ἐὰν ἡ xy εἶναι μεσοκάθετος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΑ′.*

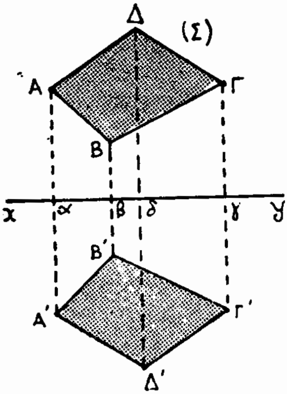
Ἡ εὐθεῖα xy λέγεται ***ἄξων συμμετρίας.***

Δύο σχήματα (Σ) καὶ (Σ′) εἶναι ***συμμετρικὰ πρὸς ἄξονα,*** *ὅταν τὸ συμμετρικὸν τυχόντος σημείου τοῦ σχήματος (Σ) κεῖται ἐπὶ τοῦ σχήματος (Σ′) καὶ ἀντιστρόφως.*

Τὸ συμμετρικὸν σχῆμα ἑνὸς σχήματος ΑΒΓ. . . πρὸς ἄξονα συμμετρίας xy εὑρίσκεται, ἂν κατασκευάσωμεν τὰ συμμετρικὰ Α', Β', Γ',... τῶν σημείων Α, Β, Γ.

155. Θεώρημα. ***Δύο σχήματα συμμετρικὰ πρὸς ἄξονα συμμετρίας, εἶναι ἴσα.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν τὰ συμμετρικὰ σχήματα ΑΒΓΔ καὶ Α'Β'Γ'Δ' *(Σχ. 123)* πρὸς ἄξονα συμμετρίας xy.



Σχ. 123.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ σχήματα αὐτὰ εἶναι ἴσα.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν περιστρέψωμεν τὸ ἡμιεπίπεδον Αxy περὶ τὴν xy, μέχρις ὅτου πέσῃ ἐπὶ τοῦ ἡμιεπιπέδου Α'xy, τότε ἡ αΑ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς αΑ', διότι καὶ αἱ δύο εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν xy εἰς τὸ σημεῖον α, τὸ δὲ Α θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Α', διότι εἶναι Αα=αΑ'.

Ὁμοίως τὰ σημεῖα Β, Γ, Δ τοῦ σχήματος ΑΒΓΔ θὰ πέσουν ἐπὶ τῶν συμμετρικῶν των σημείων Β', Γ, Δ' τοῦ σχήματος Α'Β'Γ'Δ'. Ὥστε κάθε σημεῖον τοῦ σχήματος ΑΒΓΔ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ συμμετρικοῦ του σημείου τοῦ σχήματος Α'Β'Γ'Δ' καὶ ἑπομένως τὰ δύο αὐτὰ σχήματα εἶναι ἴσα.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Δύο σχήματα συμμετρικά. . . .***

156. Πορίσματα. ***1. Τὸ συμμετρικὸν σχῆμα ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος, πρὸς ἄξονα συμμετρίας, εἶναι εὐθύγραμμον τμῆμα ἴσον πρὸς τὸ δοθέν.***

Πράγματι· ὅπως ἐδείχθη ἀνωτέρω τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ ἐφαρμόζει ἐπὶ τοῦ συμμετρικοῦ του τμήματος Α'Β', ἤτοι εἶναι ΑΒ=Α'Β'.

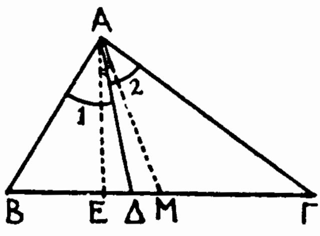
2. Τὸ συμμετρικὸν σχῆμα μιᾶς γωνίας, πρὸς ἄξονα συμμετρίας εἶναι μία γωνία ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν.

157. Ἄξων συμμετρίας ἑνὸς σχήματος. Λέγομεν, ὅτι ἕνα σχῆμα ἔχει ***ἄξονα συμμετρίας,*** ὅταν τὰ σημεῖα του εἶναι ἀνὰ δύο συμμετρικὰ πρὸς τὸν ἄξονα αὐτόν.

Παραδείγματα: 1. Ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ τριγώνου.

2. Ἡ μεσοκάθετος ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ εὐθυγράμμου αὐτοῦ τμήματος.

158. Συμμετροδιάμεσος ἑνὸς τριγώνου. Ἔστω ΑΒΓ ἕνα τρίγωνον, ΑΔ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α καὶ ΑΜ ἡ διάμεσος, ἡ ἀγομένη ἐκ τῆς κορυφῆς Α. Ἐὰν ἡ ΑΕ εἶναι συμμετρικὴ τῆς διαμέσου ΑΜ πρὸς ἄξονα συμμετρίας τὴν διχοτόμον ΑΔ, ἡ ΑΕ λέγεται ***συμμετροδιάμεσος*** τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.



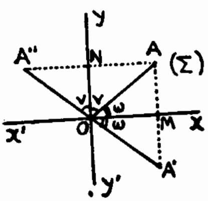
Σχ. 124.

Εἶναι φανερόν, ὅτι κάθε τρίγωνον ἔχει τρεῖς συμμετροδιαμέσους. Ὥστε:

***Συμμετροδιάμεσος ἑνὸς τριγώνου** λέγεται ἡ εὐθεῖα, ἡ συμμετρικὴ τῆς διαμέσου τοῦ τριγώνου πρὸς ἄξονα συμμετρίας τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας, τὴν ἀγομένην ἐκ τῆς αὐτῆς κορυφῆς.*

159. Θεώρημα. ***Ὅταν ἕνα σχῆμα ἔχῃ δύο ἄξονας συμμετρίας καθέτους μεταξύ των, θὰ ἔχῃ καὶ ἕνα κέντρον συμμετρίας, τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ἀξόνων.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν x′x καὶ y′y (*Σχ. 125*) δύο ἄξονες συμμετρίας, οἱ ὁποῖοι τέμνονται καθέτως εἰς τὸ σημεῖον Ο.



Σχ. 125.

Ἔστω Α τυχὸν σημεῖον ἑνὸς σχήματος (Σ), Α′ τὸ συμμετρικόν του, πρὸς τὸν ἄξονα x′x καὶ Α″ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Α πρὸς τὸν ἄξονα y′y.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ σημεῖα Α′ καὶ Α″ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὸ σημεῖον Ο.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὰς εὐθείας ΟΑ, ΟΑ′ καὶ ΟΑ″.

Ἐπειδὴ ἡ Οx εἶναι μεσοκάθετος τῆς ΑΑ′, θὰ εἶναι ΟΑ=ΟΑ′ (1) καὶ αἱ γωνίαι ω θὰ εἶναι ἴσαι.

Ὁμοίως θὰ εἶναι ΟΑ=ΟΑ″ (2) καὶ $\widehat{\nu}=\widehat{\nu}$.

Ἀλλὰ $x\widehat{O}y=1$ ὀρθ. ἢ $\widehat{\omega}+\widehat{\nu}=1$ ὀρθ. ἢ $2\widehat{\omega}+2\widehat{\nu}=2$ ὀρθ.

ἢ $A'\widehat{O}A+A\widehat{O}A''=2$ ὀρθ.

Ἐπειδὴ αἱ ἐφεξῆς γωνίαι Α′ΟΑ καὶ ΑΟΑ″ εἶναι παραπληρωματικαί, αἱ μὴ κοιναὶ πλευραί των ΟΑ′ καὶ ΟΑ″ θὰ κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας, ἤτοι ἡ γραμμὴ Α′ΟΑ″ εἶναι εὐθεῖα.

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι ΟΑ′=ΟΑ″· ἐπομένως τὰ σημεῖα Α′ καὶ Α″ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὸ σημεῖον Ο.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ὅταν ἕνα σχῆμα. . . .***

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

ΕΥΘΕΙΑΙ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΙ

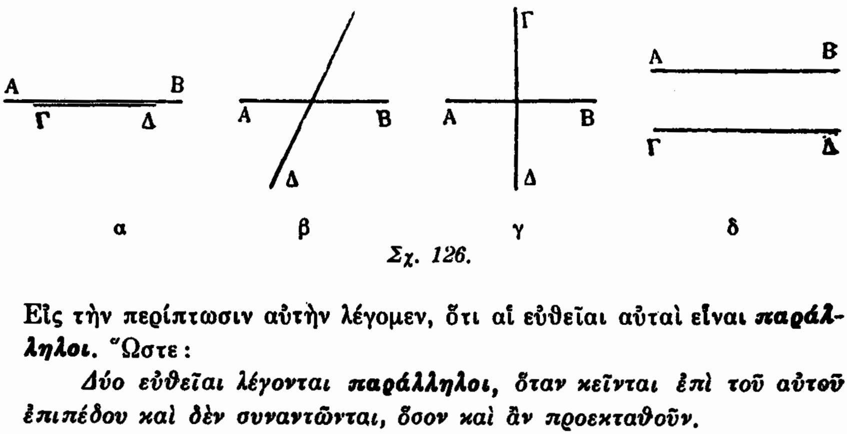
1. Γενικότητες

160. Σχετικαὶ θέσεις δύο εὐθειῶν. Εὐθεῖαι παράλληλοι. Δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου δύνανται νὰ καταλάβουν τὰς κάτωθι θέσεις:

1ον. Νὰ *συμπίπτουν (Σχ. 126α).*

2ον. Νὰ *τέμνωνται.* Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ μία εὐθεῖα εἶναι πλαγία πρὸς τὴν ἄλλην *(Σχ. 126β)* ἢ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ἄλλην *(Σχ. 126γ).*

3ον. Νὰ *μὴ συναντῶνται*, ὁσονδήποτε καὶ ἂν προεκταθοῦν*(Σχ. 126δ).*



Σχ. 126.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι αὐταὶ εἶναι ***παράλληλοι.*** Ὥστε:

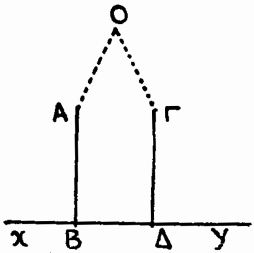
Δύο εὐθεῖαι λέγονται ***παράλληλοι,*** *ὅταν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν προεκταθοῦν.*

Διὰ νὰ δηλώσωμεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ *(Σχ. 126δ)* γράφομεν: ΑΒ//ΓΔ καὶ ἀπαγγέλλομεν: *ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ.*

Τὸ κατωτέρω θεώρημα ἀποδεικνύει τὴν ὕπαρξιν παραλλήλων εὐθειῶν.

161. Θεώρημα. ***Δύο εὐθεῖαι, κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, εἶναι παράλληλοι.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ *(Σχ. 127)*, αἱ ὁποῖαι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν xy καὶ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (τοῦ ἐπιπέδου τοῦ σχήματος).



Σχ. 127.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι.

Ὑπόθ.	ΑΒ⊥xy ΓΔ⊥xy
Συμπ.	ΑΒ//ΓΔ

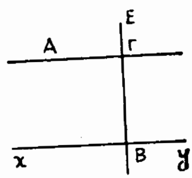
Ἀπόδειξις: Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ δὲν ἦσαν παράλληλοι, τότε, προεκτεινόμεναι, θὰ ἐτέμνοντο εἰς ἕνα σημεῖον Ο. Ἀλλὰ τότε θὰ εἴχομεν ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο δύο καθέτους, τὰς ΟΑΒ καὶ ΟΓΔ ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν xy, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον (§ 69)· ὥστε αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ δὲν συναντῶνται καὶ ἐπειδὴ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, εἶναι παράλληλοι.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Δύο εὐθεῖαι, κάθετοι. . . .***

162. Θεώρημα. ***Ἀπὸ ἕνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς εὐθείας, δυνάμεθα νὰ φέρωμεν μίαν παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν αὐτήν.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω Α ἕνα τυχὸν σημεῖον *(Σχ. 128)*, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τῆς εὐθείας xy.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἀπὸ τὸ Α δυνάμεθα νὰ φέρωμεν μίαν παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν xy.



Σχ. 128.

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Β τῆς xy φέρομεν τὴν ΒΕ κάθετον ἐπὶ τὴν xy. Ἔπειτα ἀπὸ τὸ Α φέρομεν τὴν ΑΓ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΕ. Αἱ εὐθεῖαι ΑΓ καὶ xy εἶναι παράλληλοι, διότι εἶναι κάθετοι, ἐκ κατασκευῆς, ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΒΕ (§ 161).

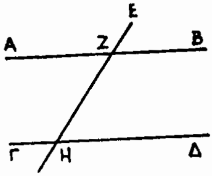
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἀπὸ ἕνα σημεῖον . . . .***

163. Αἴτημα τοῦ Εὐκλείδου. ***Ἀπὸ ἕνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς εὐθείας, ἄγεται μία καὶ μόνη παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν αὐτήν*** (*).

(*) Εἶναι ἀδύνατον νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι ἡ παράλληλος αὐτὴ εἶναι ἡ μόνη, τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἀπὸ τὸ σημεῖον Α πρὸς τὴν εὐθεῖαν xy. Αὐτὴ ἡ πρότασις, ἡ ὁποία δὲν εἶναι καθόλου προφανὴς καὶ ἡ ὁποία ἔχει ἐπα-

164. Πόρισμα 1ον. ***Ἐὰν μία εὐθεῖα συναντᾷ μίαν ἐκ δύο παραλλήλων, θὰ συναντᾷ καὶ τὴν ἄλλην.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ *(Σχ. 129)*, καὶ ΕΖ μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν ΑΒ.



Σχ. 129.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ ΕΖ,

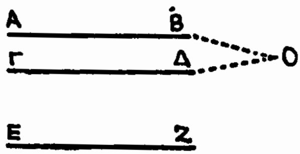
Ὑπόθ.	ΑΒ//ΓΔ ΕΖ συναντᾷ τὴν ΑΒ
Συμπ.	ΕΖ συναντᾷ τὴν ΓΔ

προεκτεινομένη, συναντᾷ καὶ τὴν ΓΔ.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν ἡ ΕΖ δὲν συνήντα τὴν ΓΔ, θὰ ἦτο παράλληλος πρὸς αὐτήν· ἀλλὰ τότε θὰ εἴχομεν ἀπὸ τὸ σημεῖον Ζ δύο παραλλήλους πρὸς τὴν ΓΔ, τὰς ΖΒ καὶ ΖΕ, τὸ ὁποῖον ἀντίκειται πρὸς τὸ αἴτημα τοῦ Εὐκλείδου· ὥστε ἡ ΕΖ συναντᾷ τὴν ΓΔ.

165. Πόρισμα 2ον. ***Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τρίτην εἶναι καὶ μεταξύ των παράλληλοι.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ *(Σχ. 130)*, αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι ἐξ ὑποθέσεως πρὸς τὴν ΕΖ.



Σχ. 130.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι μεταξύ των.

Ὑπόθ.	ΑΒ//ΕΖ ΓΔ//ΕΖ
Συμπ.	ΑΒ//ΓΔ

Ἀπόδειξις: Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ δὲν ἦσαν παράλληλοι, τότε, προεκτεινόμεναι, θὰ ἐτέμνοντο εἰς ἕνα σημεῖον Ο. Ἀλλὰ τότε θὰ ἤγοντο ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο δύο παράλληλοι,

---

ληθευθῇ διὰ τοῦ πειράματος, εἶναι ἕνα *αἴτημα* (1), τὸ ὁποῖον τὸ πρῶτον διετυπώθη ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου.

Καίτοι τὸ αἴτημα τοῦτο ἔχει ἐπιβεβαιωθῇ διὰ τῶν πλέον ἀκριβῶν μετρήσεων, ὅλαι αἱ γενόμεναι ἀπόπειραι διὰ νὰ τὸ ἀποδείξουν ἀπέβησαν μάταιαι. Τουναντίον ὁ Ρῶσσος Lobatchefski κατὰ τὸ 1826 καὶ ὁ Bolgai κατὰ τὸ 1932 ἀνέπτυξαν μίαν νέαν γεωμετρίαν, ἡ ὁποία λέγεται *«μὴ Εὐκλείδιος γεωμετρία»* μὴ παραδεχθέντες τὸ αἴτημα τοῦ Εὐκλείδου. Ὅσον παράδοξα καὶ ἐὰν εἶναι τὰ οὕτω ἐπιτευχθέντα ἀποτελέσματα δὲν εὑρέθη κανείς, ὁ ὁποῖος νὰ δυνηθῇ νὰ θέσῃ ὡς προφανῆ διὰ τοῦ συλλογισμοῦ τὴν πρότασιν αὐτήν. Ὁ Henri Poincaré κατὰ τὸ 1892 ἀπέδειξεν, ὅτι ἡ ἀπόδειξις τοῦ αἰτήματος τοῦ Εὐκλείδου ἦτο ἀδύνατος.

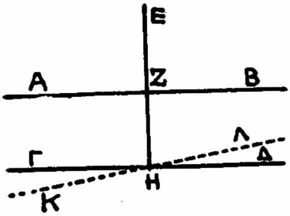
---

(1) ***Αἴτημα*** παλαιότερον ἐκαλεῖτο κάθε πρότασις, τὴν ὁποίαν ἐδεχόμεθα, ὡς ἀληθῆ. Σήμερον αἱ λέξεις: ***ἀξίωμα*** καὶ ***αἴτημα*** ἔχουν τὴν αὐτὴν σημασίαν : εἶναι προτάσεις, τὰς ὁποίας δεχόμεθα ὡς ἀληθεῖς.

αἱ ΟΒΑ καὶ ΟΔΓ πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΕΖ, τὸ ὁποῖον ἀντιβαίνει εἰς τὸ αἴτημα τοῦ Εὐκλείδου. Ὥστε αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι.

166. Θεώρημα. ***Ὅταν δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, τότε, κάθε κάθετος ἐπὶ τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ἄλλην.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ *(Σχ. 131)* καὶ ΕΖ μία τρίτη εὐθεῖα, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ.



Σχ. 131.

Ὑπόθ.	ΑΒ//ΓΔ ΕΖ ⊥ ΑΒ
Συμπ.	ΕΖ ⊥ ΓΔ

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ ΕΖ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΓΔ.

Ἀπόδειξις: Ἐν πρώτοις ἡ ΕΖ, προεκτεινομένη, συναντᾷ τὴν ΓΔ εἰς ἕνα σημεῖον Η (§ 164).

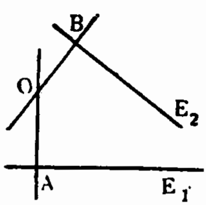
Λέγομεν τώρα, ὅτι ἡ ΕΗ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΓΔ.

Ἐὰν ἡ ΕΗ δὲν ἦτο κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ, τότε θὰ ἦτο κάθετος ἐπὶ μίαν ἄλλην εὐθεῖαν, ἔστω τὴν ΚΗΛ, εἰς τὸ σημεῖον Η. Ἀλλὰ τότε ἡ ΚΗΛ, θὰ ἦτο παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΕΗ (§ 161). Θὰ εἴχομεν λοιπὸν ἀπὸ τὸ σημεῖον Η δύο παραλλήλους, τὰς ΓΗΔ καὶ ΚΗΛ, πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΒ, τὸ ὁποῖον ἀντιβαίνει εἰς τὸ αἴτημα τοῦ Εὐκλείδου. Ὥστε ἡ ΕΗ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ὅταν δύο εὐθεῖαι. . . .***

167. Θεώρημα. ***Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται, θὰ τέμνωνται ἐπίσης καὶ αἱ κάθετοι πρὸς αὐτάς.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν εὐθεῖαι ΟΑ καὶ ΟΒ *(Σχ. 132)*, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ Ο καὶ ἔστω ὅτι ἡ εὐθεῖα E_1 εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΑ εἰς τὸ Α καὶ ἡ εὐθεῖα E_2 εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΒ εἰς τὸ Β.



Σχ. 132.

Ὑπόθ.	ΟΑ καὶ ΟΒ τέμν. E_1 ⊥ ΟΑ E_2 ⊥ ΟΒ
Συμπ.	E_1 καὶ E_2 τέμν.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν ὅτι αἱ E_1 καὶ E_2 τέμνονται.

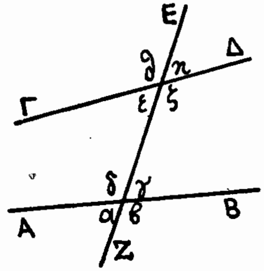
Ἀπόδειξις: Ἐὰν αἱ E_1 καὶ E_2 δὲν ἐτέμνοντο, θὰ ἦσαν παράλληλοι. Ἀλλὰ τότε ἡ ΟΑ, ὡς κάθετος ἐξ ὑποθέσεως ἐπὶ τὴν E_1, θὰ

ἦτο κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν της E_2· ἀλλὰ ἡ E_2 εἶναι ἐξ ὑποθέσεως, κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΒ. Θὰ εἴχομεν λοιπὸν ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο δύο καθέτους, τὰς ΟΑ καὶ ΟΒ, ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν E_2, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον· ὥστε ἀναγκαστικῶς αἱ E_1 καὶ E_2 θὰ τέμνωνται.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν δύο εὐθεῖαι. . . .***

2. Γωνίαι σχηματιζόμεναι ὑπὸ δύο παραλλήλων καὶ μιᾶς τεμνούσης

168. Ὁρισμοί. Ὅταν δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ *(Σχ. 133)* τέμνωνται ὑπὸ τρίτης ΕΖ, ὡρισμένα ζεύγη τῶν σχηματιζομένων ὀκτὼ γωνιῶν α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, λαμβάνουν ἰδιαίτερα ὀνόματα:



Σχ. 133.

Αἱ γωνίαι δ καὶ ζ, αἱ ὁποῖαι κεῖνται μεταξὺ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ ἑκατέρωθεν τῆς τεμνούσης ΕΖ, λέγονται ***ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι.***

Ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι εἶναι καὶ αἱ γωνίαι γ καὶ ε.

Αἱ γωνίαι α καὶ η, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἐκτὸς τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ ἑκατέρωθεν τῆς τεμνούσης ΕΖ λέγονται ***ἐκτὸς ἐναλλὰξ γωνίαι.***

Ἐκτὸς ἐναλλὰξ γωνίαι εἶναι καὶ αἱ β καὶ θ.

Αἱ γωνίαι δ καὶ θ, αἱ ὁποῖαι κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τεμνούσης ΕΖ καὶ ἡ μία κεῖται μεταξὺ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ, ἡ δὲ ἄλλη ἐκτὸς αὐτῶν, λέγονται ***ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι.*** Ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι εἶναι καὶ αἱ γ καὶ η, ἐπίσης αἱ ε καὶ α, καθὼς καὶ αἱ ζ καὶ β.

Αἱ γωνίαι δ καὶ ε, αἱ ὁποῖαι κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τεμνούσης ΕΖ καὶ μεταξὺ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ, λέγονται ***ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι.***

Ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι εἶναι καὶ αἱ γ καὶ ζ.

Αἱ γωνίαι α καὶ θ, αἱ ὁποῖαι κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τεμνούσης καὶ ἐκτὸς τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ, λέγονται ***ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι.***

Ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι εἶναι καὶ αἱ β καὶ η.

Ὅταν αἱ δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν σχηματιζομένων γωνιῶν μερικαὶ σχέσεις μεγέθους, αἱ ὁποῖαι περιλαμβάνονται εἰς τὸ κάτωθι θεώρημα.

169. Θεώρημα. ***Ὅταν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι τμηθοῦν ὑπὸ τρίτης εὐθείας:***

1ον. Αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι εἶναι ἴσαι.

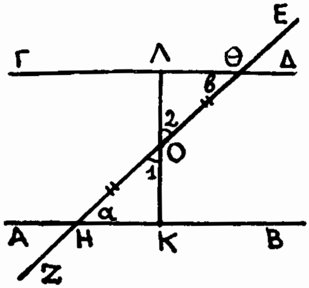
2ον. Αἱ ἐκτὸς ἐναλλὰξ γωνίαι εἶναι ἴσαι.

3ον. Αἱ ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι εἶναι ἴσαι.

4ον. Αἱ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί.

5ον. Αἱ ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί.

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ *(Σχ. 134)*, αἱ ὁποῖαι τέμνονται ὑπὸ τῆς ΕΖ εἰς τὰ σημεῖα Η καὶ Θ.



Σχ. 134.

Ὑπόθ.	ΑΒ//ΓΔ
Συμπ.	1ον. α=β 2ον. α=η 3ον. γ=η 4ον. γ+ζ=2 ὀρθ. 5ον. β+η=2 ὀρθ.

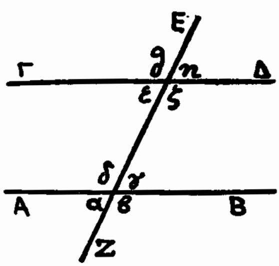
Συμπέρασμα 1ον: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι α καὶ β εἶναι ἴσαι.

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὸ μέσον Ο τῆς ΗΘ φέρομεν τὴν ΟΚ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ· αὕτη προεκτεινομένη θὰ τέμνῃ τὴν ΓΔ εἰς τὸ σημεῖον Λ καὶ θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΓΔ (§ 166).

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΚΗ καὶ ΟΛΘ ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των ΟΗ καὶ ΟΘ ἴσας, ἐκ κατασκευῆς καὶ τὰς ὀξείας γωνίας $Ο_1$ καὶ $Ο_2$ ἴσας, ὡς κατὰ τὴν κορυφήν· ἄρα θὰ εἶναι ἴσα καὶ θὰ ἔχουν καὶ $\widehat{α}=\widehat{β}$.

Αἱ δύο ἄλλαι ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι εἶναι ἴσαι, ὡς παραπληρωματικαὶ τῶν ἴσων γωνιῶν α καὶ β.

Συμπέρασμα 2ον: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ἐκτὸς ἐναλλὰξ γωνίαι α καὶ η *(Σχ. 135)* εἶναι ἴσαι.



Σχ. 135.

Ἀπόδειξις: Αἱ γωνίαι α καὶ γ εἶναι ἴσαι, ὡς κατὰ κορυφήν· ὁμοίως καὶ αἱ ε καὶ η εἶναι ἴσαι, ὡς κατὰ κορυφήν.

Ἐπειδὴ αἱ γ καὶ ε εἶναι ἴσαι, ὡς ἐντὸς ἐναλλάξ, (ὅπως ἐδείχθη εἰς τὴν 1ην περίπτωσιν) καὶ αἱ ἴσαι πρὸς αὐτὰς α καὶ η, θὰ εἶναι ἴσαι.

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι αἱ γωνίαι β καὶ ϑ εἶναι ἴσαι.

Συμπέρασμα 3ον: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι γ καὶ η *(Σχ. 135)* εἶναι ἴσαι:

Ἀπόδειξις: Αἱ γωνίαι γ καὶ ε εἶναι ἴσαι, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ (περιπτ. 1η)· ἀλλὰ ε=η, ὡς κατὰ κορυφήν· ἄρα θὰ εἶναι καὶ γ=η.

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι δ=ϑ, ε=α, ζ=β.

Συμπέρασμα 4ον: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι γ καὶ ζ *(Σχ. 135)* εἶναι παραπληρωματικαί.

Ἀπόδειξις: Ἡ ζ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ε, διότι εἶναι ἐφεξῆς, τῶν ὁποίων αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ κεῖνται ἐπ' εὐθείας· ἀλλὰ ε=γ, ὡς ἐντὸς ἐναλλάξ· ἄρα αἱ ζ καὶ γ εἶναι παραπληρωματικαί· δηλ. εἶναι γ+ζ=2 ὀρθαί· ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι δ+ε=2 ὀρθαί.

Συμπέρασμα 5ον: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι β καὶ η *(Σχ. 135)* εἶναι παραπληρωματικαί.

Ἀπόδειξις: Ἡ γωνία β εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς γ, διότι εἶναι ἐφεξῆς, τῶν ὁποίων αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ κεῖνται ἐπ' εὐθείας· ἀλλὰ γ=η, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· ἄρα ἡ β θὰ εἶναι παραπληρωματικὴ καὶ τῆς η· δηλ. θὰ εἶναι β+η=2 ὀρθαί.

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι α+ϑ=2 ὀρθ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ὅταν δύο παράλληλοι....***

170. Θεώρημα. *(Ἀντίστροφον).* ***Δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, ὅταν, τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης εὐθείας, σχηματίζουν:***

1ον. Τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας.

2ον. Τὰς ἐκτὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας.

3ον. Τὰς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας ἴσας.

4ον. Τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας παραπληρωματικάς.

5ον. Τὰς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας παραπληρωματικάς.

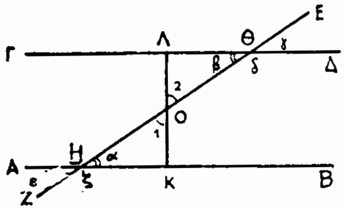
Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται ὑπὸ τῆς ΕΖ εἰς τὰ σημεῖα Η καὶ Θ *(Σχ. 136)*.

1ον. Ὑπόθεσις: Ἔστω, ὅτι αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι α καὶ β εἶναι ἴσαι.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι.

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὸ μέσον Ο τῆς ΗΘ φέρομεν τὴν ΚΛ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΓΔ εἰς τὸ Λ. Τὰ σχηματισθέντα τρί-

γωνα ΟΚΗ καὶ ΟΛΘ ἔχουν: ΟΗ=ΟΘ ἐξ ὑποθέσεως, $\widehat{\alpha}=\widehat{\beta}$ ἐξ ὑποθέσεως καὶ $\widehat{O_1}=\widehat{O_2}$, ὡς κατὰ κορυφήν· ἄρα τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσα· θὰ ἔχουν λοιπὸν καὶ $\widehat{K}=\widehat{\Lambda}$. Ἐπειδὴ ἡ γωνία Κ εἶναι ὀρθή, θὰ εἶναι ὀρθὴ καὶ ἡ ἴση πρὸς αὐτὴν γωνία Λ. Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ,



Σχ. 136.

Ὑπόθ.	1ον. $\alpha=\beta$ 2ον. $\varepsilon=\gamma$ 3ον. $\alpha=\gamma$ 4ον. $\alpha+\delta=2$ ὀρθ. 5ον. $\zeta+\gamma=2$ ὀρθ.
Συμπ.	ΑΒ//ΓΔ

ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΚΛ, εἶναι παράλληλοι.

2ον. Ὑπόθεσις: Ἔστω, ὅτι αἱ ἐκτὸς ἐναλλὰξ γωνίαι ε καὶ γ εἶναι ἴσαι.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι.

Ἀπόδειξις: Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\varepsilon=\gamma$.

Ἀλλὰ $\varepsilon=\alpha$ καὶ $\gamma=\beta$, ὡς κατὰ κορυφήν· ἄρα θὰ εἶναι καὶ $\alpha=\beta$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ, τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΕΖ, σχηματίζουν τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας α καὶ β ἴσας. Ἄρα, ὡς ἐδείχθη εἰς τὴν 1ην περίπτωσιν, αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι.

3ον. Ὑπόθεσις: Ἔστω, ὅτι αἱ ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι α καὶ γ *(Σχ. 136)* εἶναι ἴσαι, δηλ. ὅτι εἶναι $\alpha=\gamma$.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι.

Ἀπόδειξις: Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\alpha=\gamma$· ἀλλὰ $\gamma=\beta$· ἄρα $\alpha=\beta$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ, τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΕΖ, σχηματίζουν τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας α καὶ β ἴσας· ἄρα, ὡς ἐδείχθη εἰς τὴν 1ην περίπτωσιν, αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι.

4ον. Ὑπόθεσις: Ἔστω, ὅτι αἱ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι α καὶ δ εἶναι παραπληρωματικαί, ἤτοι ὅτι $\alpha+\delta=2$ ὀρθαί.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι.

Ἀπόδειξις: Αἱ γωνίαι β καὶ δ εἶναι παραπληρωματικαί, ὡς ἐφεξῆς, τῶν ὁποίων αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως καὶ αἱ γωνίαι α καὶ δ εἶναι παραπληρωματικαί. Ἄρα αἱ γωνίαι β καὶ α εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν παραπληρωματικὴν γωνίαν δ.

Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ, τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΕΖ, σχηματίζουν τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας α καὶ β ἴσας· ἄρα, ὡς ἐδείχθη εἰς τὴν 1ην περίπτωσιν, αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι.

5ον *Ὑπόθεσις:* Ἔστω, ὅτι αἱ ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι ζ καὶ γ *(Σχ. 136)* εἶναι παραπληρωματικαί.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι.

Ἀπόδειξις: Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ζ+γ=2 ὀρθ. (1). Ἐπίσης εἶναι καὶ ζ+α=2 ὀρθ. (2), διότι αἱ ζ καὶ α εἶναι ἐφεξῆς, τῶν ὁποίων αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι: ζ+γ=ζ+α ἢ γ=α.

Ἀλλὰ γ=β, ὡς κατὰ κορυφήν· ἄρα θὰ εἶναι καὶ β=α.

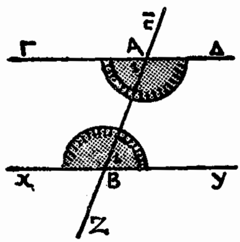
Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ, τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΕΖ, σχηματίζουν τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας α καὶ β ἴσας· ἄρα αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι, ὅπως ἐδείχθη εἰς τὴν 1ην περίπτωσιν.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι . . . .***

3. Γραφικαὶ ἐφαρμογαί

171. Χάραξις παραλλήλων. Εἰς τὴν § 162 ἐδείξαμεν πῶς δυνάμεθα νὰ φέρωμεν μίαν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν, ἀπὸ δοθὲν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τῆς εὐθείας. Ἐκτὸς τοῦ τρόπου αὐτοῦ ὑπάρχουν καὶ ἄλλοι, οἱ ὁποῖοι πηγάζουν ἀπὸ τὰ προηγούμενα θεωρήματα.

1ον. Μὲ τὸ μοιρογνωμόνιον καὶ τὸν κανόνα. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ φέρωμεν ἀπὸ τὸ σημεῖον Α *(Σχ. 137)*, μίαν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν xy.



Σχ. 137.

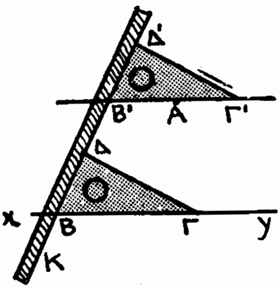
Ἀπὸ τὸ σημεῖον Α φέρομεν μίαν τυχοῦσαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ τὴν xy, ἔστω εἰς ἕνα σημεῖον Β. Κατασκευάζομεν ἔπειτα μὲ τὸ μοιρογνωμόνιον μίαν γωνίαν A_1 ἴσην μὲ τὴν γωνίαν B_1. Ἡ πλευρὰ ΑΓ τῆς γωνίας A_1 εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν xy, διότι αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι B_1 καὶ A_1 εἶναι ἴσαι ἐκ κατασκευῆς.

2ον. Μὲ τὸν γνώμονα καὶ τὸν κανόνα. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ φέρωμεν ἀπὸ τὸ σημεῖον Α μίαν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν xy *(Σχ. 138)*.

Τοποθετοῦμεν τὸν γνώμονα εἰς τρόπον, ὥστε ἡ ὑποτείνουσά του

ΒΓ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς εὐθείας xy καὶ τὸν κανόνα Κ οὕτως, ὥστε μία ἀκμή του (κόψις) νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς καθέτου πλευρᾶς ΒΔ τοῦ γνώμονος.

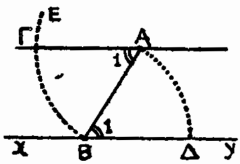
Ὀλισθαίνομεν ἔπειτα τὸν γνώμονα ΒΓΔ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖται ἡ xy καὶ κατὰ μῆκος τοῦ κανόνος μέχρις, ὅτου ἡ ὑποτείνουσα τοῦ γνώμονος περάσῃ ἀπὸ τὸ σημεῖον Α. Χαράσσομεν ἔπειτα μὲ τὸ μολύβι ἢ μὲ ἄλλο μέσον, μίαν εὐθεῖαν Β΄Γ΄ κατὰ μῆκος τῆς ὑποτεινούσης Β΄Γ΄ τοῦ γνώμονος καὶ ἔχομεν τὴν ζητουμένην παράλληλον· διότι αἱ ὑποτείνουσαι ΒΓ καὶ Β΄Γ΄ τοῦ γνώμονος σχηματίζουν μὲ τὸν κανόνα Κ τὰς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας Β καὶ Β΄ ἴσας.



Σχ. 138.

172. Πρόβλημα. ***Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς δοθείσης εὐθείας xy, νὰ ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν xy.***

Λύσις. Ἀπὸ τὸ δοθὲν σημεῖον Α φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΑΒ, τέμνουσαν τὴν xy.



Σχ. 139.

Ἔστω B_1 ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ ΑΒ μὲ τὴν xy. Μὲ κορυφὴν τὸ Α καὶ πλευρὰν τὴν ΑΒ κατασκευάζομεν μίαν γωνίαν ΒΑΓ ἴσην μὲ τὴν γωνίαν B_1 (§ 127).

Ἡ εὐθεῖα ΑΓ εἶναι ἡ ζητουμένη παράλληλος.

Πράγματι· ἡ ΑΓ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Α καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν xy, διότι αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι A_1 καὶ B_1 εἶναι ἴσαι ἐκ κατασκευῆς.

Ἀσκήσεις

99. (121). Κάθε εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν ἰσοσκελοῦς τριγώνου καὶ τέμνουσα τὰς ἴσας πλευράς του, ὁρίζει ἕνα δεύτερον τρίγωνον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοσκελές.

100. (122). Δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΔ καὶ ΒΓ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Ο. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ τρίγωνα ΟΑΒ καὶ ΟΓΔ ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας, μίαν πρὸς μίαν.

101. (123). Ἂν ἀπὸ τυχὸν σημεῖον τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας ἀχθῇ εὐ-

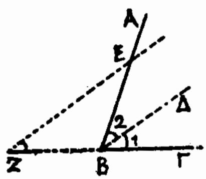
θεῖα παράλληλος πρὸς μίαν πλευρὰν τῆς γωνίας, τὸ προκῦπτον τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

102. (124). Δίδεται μία γωνία ΑΒΓ· ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Ζ τῆς πλευρᾶς ΑΒ φέρομεν παράλληλον ΖΕ πρὸς τὴν ΒΓ καὶ κειμένην ἐντὸς τῆς γωνίας. Ἐπὶ τῆς ΖΕ λαμβάνομεν τμῆμα ΖΕ=ΖΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΒΕ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΒΓ.

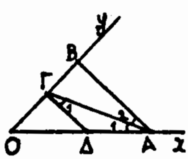
103. (125). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ· φέρομεν τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Α καὶ ἀπὸ τὸ Β φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν διχοτόμον, ἡ ὁποία συναντᾶ τὴν προέκτασιν τῆς ΓΑ εἰς τὸ Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΒΑΔ εἶναι ἰσοσκελές.

104. (126). Δίδεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α· ἀπὸ τὴν κορυφὴν Β φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΑΒ κειμένην ἐκτὸς τοῦ τριγώνου καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου αὐτῆς λαμβάνομεν τμῆμα ΒΔ=ΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΔΓ εἶναι διχοτόμος τῆς ἐσωτερικῆς ἢ ἐξωτερικῆς γωνίας Γ.

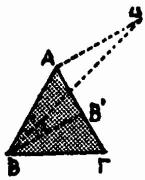
105. (127). Νὰ δειχθῇ, ὅτι μία εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν διχοτόμον μιᾶς γωνίας, τέμνει τὴν μίαν πλευρὰν καὶ τὴν προέκτασιν τῆς ἄλλης εἰς σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας.



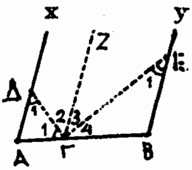
Σχ. ἀσκ. 105.



Σχ. ἀσκ. 106.



Σχ. ἀσκ. 107.



Σχ. ἀσκ. 108.

106. (128). Δίδεται μία γωνία xOy· ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Ox λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Α, ἀπὸ τὸ ὁποῖον φέρομεν τὴν κάθετον ΑΒ ἐπὶ τὴν Oy· φέρομεν τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας ΟΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Oy εἰς τὸ Γ· ἀπὸ τὸ Γ φέρομεν τὴν ΓΔ κάθετον ἐπὶ τὴν Oy, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Ox εἰς τὸ Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΓΔΑ εἶναι ἰσοσκελές.

107. (129). Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν τὴν κάθετον ΑΔ ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΑΓ καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν τμῆμα ΑΔ=ΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΒΔ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὴν ΑΒ καὶ ἀπὸ τὸ ὕψος ΒΒ' τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

108. (130). Ἀπὸ τὰ ἄκρα ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ φέρομεν, πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ΑΒ, δύο ἡμιευθείας παραλλήλους Αx καὶ Βy. Λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ ΑΒ τυχὸν σημεῖον Γ, ἐπὶ τῆς Αx ἕνα τμῆμα ΑΔ=ΑΓ καὶ ἐπὶ τῆς Βy ἕνα τμῆμα ΒΕ=ΓΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία ΔΓΕ εἶναι ὀρθή

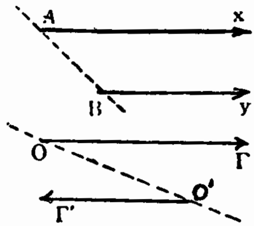
109. (131). Εἰς ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὸ ὕψος ΑΗ καὶ μίαν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν του, ἡ ὁποία τέμνει τὰς ἴσας πλευράς του εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι γων.ΝΜΗ=γων.ΜΝΗ καὶ γων.ΑΗΜ=γων.ΑΗΝ.

4. Γωνίαι τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι παράλληλοι ἢ κάθετοι

173. Ὁρισμός. *Θὰ λέγωμεν, ὅτι* ***δύο ἡμιευθεῖαι ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν,*** *ὅταν κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ἡ ὁποία συνδέει τὰς ἀρχάς των.*

Ἐπίσης θὰ λέγωμεν, ὅτι ***δύο ἡμιευθεῖαι ἔχουν ἀντίθετον φοράν,*** *ὅταν κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας, ἡ ὁποῖα συνδέει τὰς ἀρχάς των.*

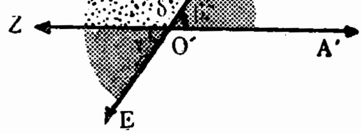
Π.χ. αἱ ἡμιευθεῖαι Ax καὶ By ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν, ἐνῶ αἱ ἡμιευθεῖαι ΟΓ καὶ Ο'Γ' ἔχουν ἀντίθετον φοράν.



Σχ. 140.

174. Θεώρημα. ***Δύο γωνίαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους, μίαν πρὸς μίαν εἶναι ἴσαι μέν, ὅταν αἱ πλευραί των ἔχουν, ἀνὰ δύο, τὴν αὐτὴν φορὰν ἤ, ἀνὰ δύο, ἀντίθετον φοράν· παραπληρωματικαὶ δέ, ὅταν δύο παράλληλοι πλευραὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν φορὰν καὶ αἱ δύο ἄλλαι ἀντίθετον φοράν.***

1ον. Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν αἱ γωνίαι ΑΟΒ=α καὶ Α'Ο'Β'=β *(Σχ. 141)*, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους, μίαν πρὸς μίαν, καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς.



Σχ. 141.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ γωνίαι α καὶ β εἶναι ἴσαι.

Ἀπόδειξις: Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν Ο'Β' καὶ ἔστω Γ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῆς ΟΑ καὶ τῆς προεκτάσεως τῆς Ο'Β'.

Αἱ γωνίαι β καὶ α' εἶναι ἴσαι, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων Ο'Α' καὶ ΟΑ τεμνομένων ὑπὸ τῆς Ο'Δ. Ἀλλὰ $\widehat{\alpha'}=\widehat{\alpha}$, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων Ο'Δ καὶ ΟΒ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΟΑ· ἄρα θὰ εἶναι καὶ α=β, ὡς ἴσαι πρὸς τὴν α'.

2ον. Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν αἱ γωνίαι ΑΟΒ=α καὶ ΖΟ'Ε=γ *(Σχ. 141)*, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους μίαν πρὸς μίαν καὶ μὲ ἀντιθέτους φοράς.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\widehat{\alpha}=\widehat{\gamma}$.

Ἀπόδειξις: Προεκτείνομεν τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας Ο' πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς· ἡ σχηματιζομένη γωνία β εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν γ ὡς κατὰ κορυφήν. Ἀλλὰ $\widehat{\beta}=\widehat{\alpha}$, διότι ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς· ἄρα θὰ εἶναι καὶ $\widehat{\alpha}=\widehat{\gamma}$.

3ον. Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν αἱ γωνίαι ΑΟΒ=α καὶ ΖΟ'Β'=δ *(Σχ. 141)*, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους μίαν πρὸς μίαν, ἀλλὰ αἱ μὲν πλευραὶ ΟΒ καὶ Ο'Β' ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν, αἱ δὲ πλευραὶ ΟΑ καὶ Ο'Ζ ἔχουν ἀντίθετον φοράν.

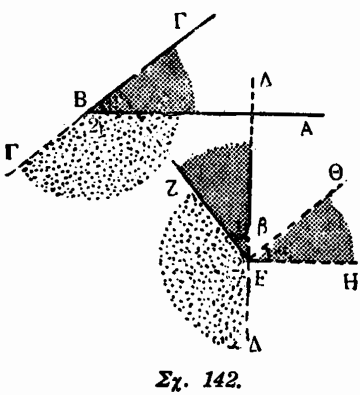
Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ γωνίαι αὐταὶ εἶναι παραπληρωματικαί· δηλ. ὅτι εἶναι $\widehat{\alpha}+\widehat{\delta}=2$ ὀρθ.

Ἀπόδειξις: Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΖΟ' πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς, μέχρις ἑνὸς σημείου Α'. Αἱ γωνίαι δ καὶ β εἶναι παραπληρωματικαί, ὡς ἐφεξῆς τῶν ὁποίων αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ κεῖνται ἐπ' εὐθείας· δηλ. εἶναι $\widehat{\delta}+\widehat{\beta}=2$ ὀρθ. (1)

Ἀλλὰ β=α, διότι ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὴν γωνίαν β μὲ τὴν ἴσην της γωνίαν α καὶ ἔχομεν $\widehat{\delta}+\widehat{\alpha}=2$ ὀρθαί.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Δύο γωνίαι. . . .***

175. Θεώρημα. ***Δύο γωνίαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους μίαν πρὸς μίαν εἶναι ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί. Εἶναι ἴσαι μέν, ἐὰν καὶ αἱ δύο γωνίαι εἶναι ὀξεῖαι, ἢ ἀμβλεῖαι· παραπληρωματικαὶ δέ, ἐὰν ἡ μία εἶναι ὀξεῖα καὶ ἡ ἄλλη ἀμβλεῖα.***



Σχ. 142.

1ον. Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν αἱ ὀξεῖαι γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ *(Σχ. 142)*, αἱ ὁποῖαι ἔχουν: τὴν πλευρὰν

Ὑπόθ.	ΕΔ ⊥ ΒΑ ΕΖ ⊥ ΒΓ
Συμπ.	$A\widehat{B}\Gamma=\Delta\widehat{E}Z$

ΕΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΑ καὶ τὴν πλευρὰν ΕΖ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ γωνίαι αὐταὶ εἶναι ἴσαι· δηλ. ὅτι εἶναι $A\widehat{B}\Gamma=\Delta\widehat{E}Z$.

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Ε τῆς γωνίας ΔΕΖ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΕΗ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΑ καὶ μὲ τὴν αὐτὴν φορὰν καὶ τὴν ΕΘ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ καὶ μὲ τὴν αὐτὴν φοράν. Ἡ σχηματιζομένη γωνία ΗΕΘ=α εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν B_1, διότι ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς, ἐκ κατασκευῆς, δηλ. εἶναι $\widehat{B_1}=\widehat{\alpha}$.

Ἐπειδὴ ἡ ΕΔ εἶναι κάθετος, ἐξ ὑποθέσεως, ἐπὶ τὴν ΒΑ θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλον ΕΗ τῆς ΒΑ· ἄρα ἡ γωνία ΔΕΗ εἶναι ὀρθή. Ὁμοίως ἡ γωνία ΖΕΘ εἶναι ὀρθή, (διότι ἡ ΖΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΘ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν παράλληλόν της ΒΓ). Ἂν ἀπὸ τὰς ἴσας ὀρθὰς γωνίας ΔΕΗ καὶ ΖΕΘ ἀφαιρέσωμεν τὴν κοινὴν γωνίαν β, αἱ ἀπομένουσαι γωνίαι E_1 καὶ α εἶναι ἴσαι· δηλ. εἶναι $\widehat{E_1}=\widehat{\alpha}$· ἀλλὰ $\widehat{\alpha}=\widehat{B_1}$, ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω· ἄρα θὰ εἶναι καὶ

$$\widehat{E}_1=\widehat{B}_1 \quad \text{ἢ} \quad \Delta\widehat{E}Z=A\widehat{B}\Gamma.$$

2ον. Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν αἱ ἀμβλεῖαι γωνίαι B_2 καὶ E_2 *(Σχ. 142)*, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους μίαν πρὸς μίαν.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν ὅτι $\widehat{B}_2=\widehat{E}_2$.

Ἀπόδειξις: Αἱ γωνίαι B_1 καὶ B_2 εἶναι παραπληρωματικαί, ὡς ἐφεξῆς, τῶν ὁποίων αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Ὁμοίως, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, αἱ γωνίαι E_1 καὶ E_2 εἶναι παραπληρωματικαί. Ἐπειδὴ $\widehat{B}_1=\widehat{E}_1$, ὡς ἐδείχθη εἰς τὴν 1ην περίπτωσιν καὶ αἱ παραπληρωματικαὶ αὐτῶν θὰ εἶναι ἴσαι· δηλαδὴ θὰ εἶναι $\widehat{B}_2=\widehat{E}_2$.

3ον. Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ Δ΄ΕΖ, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους μίαν πρὸς μίαν, ἀλλὰ ἡ μὲν ΑΒΓ εἶναι ὀξεῖα, ἡ δὲ Δ΄ΕΖ εἶναι ἀμβλεῖα.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ γωνίαι αὐταὶ εἶναι παραπληρωματικαί.

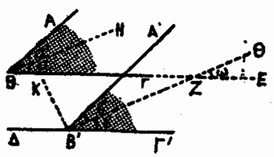
Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ ἡ $\widehat{E_2}$, εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς $\widehat{E_1}$ καὶ ἡ $\widehat{E_1}$ εἶναι ἴση μὲ τὴν $\widehat{B_1}$, ὡς ἐδείχθη προηγουμένως, ἕπεται, ὅτι αἱ $\widehat{E_2}$ καὶ B_1 εἶναι παραπληρωματικαί.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Δύο γωνίαι, αἱ ὁποῖαι. . . .***

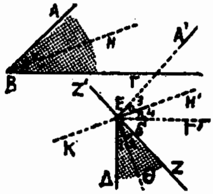
Ἀσκήσεις

***Α' Ὁμάς*. 110. (132).** Ἐὰν δύο γωνίαι ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους, αἱ διχοτόμοι των εἶναι παράλληλοι ἢ κάθετοι.

111. (133). Δίδεται ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐπὶ τῆς βάσεώς του ΒΓ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Δ καὶ ἀπὸ τὰ μέσα Μ καὶ Ν τῶν τμημάτων ΒΔ καὶ ΔΓ φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὴν ΒΓ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ. Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία ΕΔΖ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν Α.



Σχ. ἀσκ. 110.

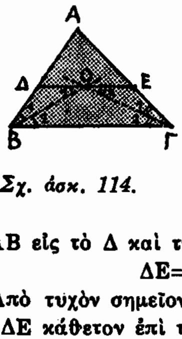


Σχ. ἀσκ. 112.

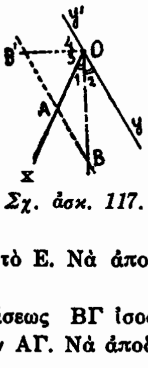
Β' Ὁμάς. **112.** (134). Ἐὰν δύο γωνίαι ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους, μίαν πρὸς μίαν, αἱ διχοτόμοι των εἶναι κάθετοι ἢ παράλληλοι.

113. (135). Ἐὰν ἡ διχοτόμος ἐξωτερικῆς γωνίας τριγώνου εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευράν του, τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἀντιστρόφως.

114. (136). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Ο τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν του. Ἀπὸ τὸ Ο φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, ἡ



Σχ. ἀσκ. 114.



Σχ. ἀσκ. 117.

ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Δ καὶ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ε. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

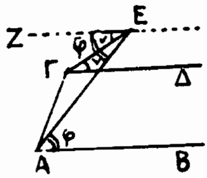
ΔΕ=ΒΔ+ΓΕ.

115. (137). Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Δ τῆς βάσεως ΒΓ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν τὴν ΔΕ κάθετον ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΑΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία Α εἶναι διπλασία τῆς γωνίας ΕΔΓ.

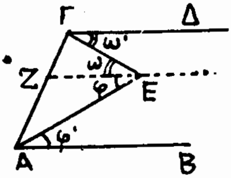
116. (138). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α. Προεκτείνομεν τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς Α καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΑ τμῆμα ΑΒ'=ΑΓ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΓΑ ἕνα τμῆμα ΑΓ'=ΑΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ προέκτασις τοῦ ὕψους ΑΔ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον Ε τῆς ΒΓ'.

117. (139). Δίδεται μία γωνία xOy· ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Α τῆς πλευρᾶς Ox φέρομεν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν Oy καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς τμῆμα ΑΒ=ΟΑ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΟΒ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Ο ἢ τῆς παραπληρωματικῆς της, καθόσον τὸ τμῆμα ΑΒ κεῖται ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τῆς γωνίας Α.

118. (140). Δύο παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τεμνούσης ΑΓ, ἕνα δὲ σημεῖον Ε κεῖται ἐκτὸς τοῦ σχήματος ΒΑΓΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία ΑΕΓ ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν γωνιῶν ΕΑΒ καὶ ΕΓΔ.



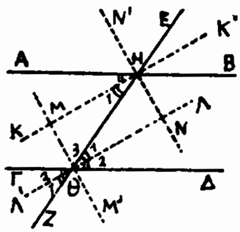
Σχ. ἀσκ. 118.



Σχ. ἀσκ. 119.

119. (141). Δύο παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τεμνούσης ΑΓ, ἕνα δὲ σημεῖον Ε κεῖται ἐντὸς τοῦ σχήματος ΒΑΓΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία ΑΕΓ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΕΑΒ καὶ ΕΓΔ.

120. (142). Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι τέμνονται ὑπὸ τρίτης. Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον. ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν δύο ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνιῶν ἢ τῶν δύο ἐκτὸς ἐναλλὰξ



Σχ. ἀσκ. 120.

γωνιῶν ἢ τῶν ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνιῶν εἶναι παράλληλοι. 2ον. ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνιῶν εἶναι κάθετοι.

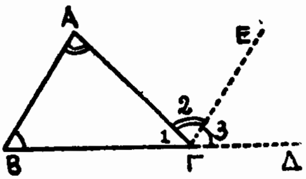
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε'.

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ ΕΝΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ, ΕΝΟΣ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ

1. Ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου, ἑνὸς πολυγώνου

176. Θεώρημα. ***Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς γωνίας.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ *(Σχ. 143)* καὶ Α, Β, Γ αἱ γωνίαι του.



Σχ. 143.

Ὑπόθ.	Α, Β, Γ γωνίαι τριγ. ΑΒΓ
Συμπ.	$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=2$ ὀρθ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=2$ ὀρθαί.

Ἀπόδειξις: Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΒΓ μέχρις ἑνὸς σημείου Δ· ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ φέρομεν παράλληλον ΓΕ πρὸς τὴν ΒΑ.

Αἱ γωνίαι Γ_1, Γ_2 καὶ Γ_3 (§ 62, 2ον) ἔχουν ἄθροισμα ἴσον μὲ 2, ὀρθὰς γωνίας· ἤτοι θὰ εἶναι $\widehat{\Gamma}_1+\widehat{\Gamma}_2+\widehat{\Gamma}_3=2$ ὀρθ. (1)

Ἀλλὰ $\widehat{\Gamma}_2=\widehat{A}$, διότι εἶναι ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΓΕ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΓ.

Ἐπίσης εἶναι $\widehat{\Gamma}_3=\widehat{B}$, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ΓΕ καὶ ΒΑ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΔ.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὰς γωνίας Γ_2 καὶ Γ_3 μὲ τὰς ἴσας των γωνίας Α καὶ Β καὶ ἔχομεν

$$\widehat{\Gamma}_1+\widehat{A}+\widehat{B}=2 \text{ ὀρθ.} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=2 \text{ ὀρθ.}}$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν. . . .***

Παρατήρησις: Ἀπὸ τὸ προηγούμενον θεώρημα συνάγομεν, ὅτι: ὅταν γνωρίζωμεν δύο γωνίας ἑνὸς τριγώνου, ἡ τρίτη γωνία του εἶναι καθωρισμένη: εἶναι παραπληρωματικὴ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν.

Π.χ. Ἐὰν εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $\widehat{A}=47^o$ καὶ $\widehat{B}=68^o$, ἡ γωνία Γ θὰ εἶναι ἴση μὲ $180^o-(47^o+68^o)=65^o$.

177. Πορίσματα: Ι. ***Ἕνα τρίγωνον δὲν δύναται νὰ ἔχῃ περισσοτέρας ἀπὸ μίαν ὀρθὴν γωνίαν ἢ ἀπὸ μίαν ἀμβλεῖαν γωνίαν.***

Διότι, ἐὰν συνέβαινεν ἄλλως, τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν του θὰ ὑπερέβαινε τὰς δύο ὀρθὰς γωνίας πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον (§ 176).

ΙΙ. ***Εἰς κάθε ὀρθογώνιον τρίγωνον, αἱ δύο ὀξεῖαι γωνίαι του εἶναι συμπληρωματικαί.***

Πράγματι· ἀφοῦ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ 2 ὀρθὰς καὶ ἡ μία ἀπὸ τὰς γωνίας του εἶναι ὀρθή, αἱ δύο ἄλλαι ὀξεῖαι γωνίαι του θὰ ἔχουν ἄθροισμα ἴσον μὲ 1 ὀρθὴν καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι συμπληρωματικαί.

ΙΙΙ. ***Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο γωνίας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, θὰ ἔχουν καὶ τὰς τρίτας γωνίας των ἴσας.***

Διότι αἱ τρίται γωνίαι τῶν δύο τριγώνων εἶναι παραπληρωματικαὶ τοῦ αὐτοῦ ἀθροίσματος γωνιῶν· ἄρα θὰ εἶναι ἴσαι.

VI. ***Κάθε γωνία ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι ἴση μὲ*** $\frac{2}{3}$ ***τῆς ὀρθῆς ἢ μὲ*** $\frac{180^o}{3}=60^o$ ***ἢ μὲ*** $\frac{200}{3}$ ***βαθμούς.***

Αἱ τρεῖς ἴσαι γωνίαι τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ἔχουν ἄθροισμα ἴσον μὲ 2 ὀρθὰς γωνίας ἢ μὲ 180^o ἢ μὲ 200 βαθμούς· ἄρα ἡ μία ἀπὸ τὰς γωνίας αὐτὰς εἶναι ἴση μὲ 2 ὀρθ.: 3, δηλ. μὲ $\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς, ἢ μὲ $180^o:3=60^o$, ἢ μὲ 200 βαθμ.: $3=\frac{200}{3}$ βαθ.

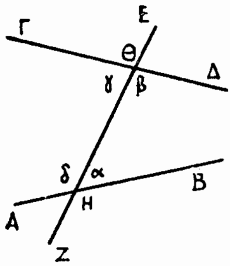
178. Ἰδιότης τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας τριγώνου. Εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα ἐδείχθη, ὅτι ἡ ἐξωτερικὴ γωνία ΑΓΔ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἐχωρίσθη, ὑπὸ τῆς εὐθείας ΓΕ, εἰς δύο γωνίας $Γ_1$ καὶ $Γ_2$, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι μὲ τὰς γωνίας Α καὶ Β τοῦ τριγώνου· ὥστε δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, ὅτι:

1ον. ***Ἡ ἐξωτερικὴ γωνία ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν τοῦ τριγώνου.***

2ον. Ἡ ἐξωτερικὴ γωνία ἑνὸς τριγώνου εἶναι μεγαλυτέρα μιᾶς τῶν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν τοῦ τριγώνου.

179. Θεώρημα. ***Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ τρίτης καὶ σχηματίζουν δύο ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα διαφέρει τῶν δύο ὀρθῶν γωνιῶν, αἱ εὐθεῖαι αὐταὶ τέμνονται καὶ τέμνονται πρὸς τὸ μέρος τῆς τεμνούσης ὅπου τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν εἶναι μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν.***

1ον. Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ *(Σχ. 144)*, αἱ ὁποῖαι τέμνονται ὑπὸ τῆς ΕΖ εἰς τὰ σημεῖα Η καὶ Θ ἀντιστοίχως· καὶ ἔστω, ὅτι $\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}<2$ ὀρθ.



Σχ. 144.

Ὑπόθ.	1ον. $\alpha+\beta\neq 2$ ὀρθ. $\gamma+\delta\neq 2$ ὀρθ. 2ον. $\alpha+\beta<2$ ὀρθ.
Συμπ.	1ον. Αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνονται 2ον. Αἱ ἡμιευθεῖαι ΗΒ καὶ ΘΒ τέμνονται

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνονται.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ δὲν ἐτέμνοντο, θὰ ἦσαν παράλληλοι, ὁπότε θὰ εἴχομεν $\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}=2$ ὀρθ., τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας $\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}<2$ ὀρθ.· ὥστε αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνονται.

2ον. Ἔστω ὅτι εἶναι $\alpha+\beta<2$ ὀρθ.· τότε θὰ εἶναι $\gamma+\delta>2$ ὀρθ. Αἱ ἡμιευθεῖαι ΗΑ καὶ ΘΓ δὲν δύνανται νὰ τέμνωνται, διότι τότε θὰ ἐσχηματίζετο ἕνα τρίγωνον, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του δ καὶ γ θὰ ἦτο μεγαλύτερον τῶν 2 ὀρθῶν γωνιῶν. Ἑπομένως θὰ τέμνωνται αἱ ἡμιευθεῖαι ΗΒ καὶ ΘΔ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν δύο εὐθεῖαι. . . .***

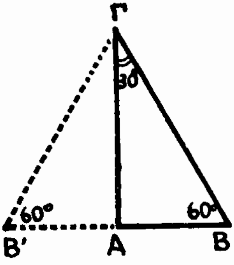
180. Θεώρημα. ***Ἐὰν ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχῃ μίαν γωνίαν 30°, ἡ πλευρά, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς γωνίας αὐτῆς, εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ *(Σχ. 145)*, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ γωνία Γ εἶναι ἴση μὲ 30°.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ.

Ἀπόδειξις: Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΒΑ πρὸς τὸ μέρος τῆς

κορυφῆς Α καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμῆμα ΑΒ′=ΑΒ· φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΓΒ′. Ἐπειδὴ ἡ ΓΑ εἶναι ὕψος καὶ διάμεσος τοῦ τριγώνου ΓΒ′Β, τὸ τρίγωνον ΓΒ′Β εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως αἱ γωνίαι του Β′ καὶ Β θὰ εἶναι ἴσαι· ἀλλὰ ἡ γωνία Β εἶναι 60°, ὡς συμπληρωματικὴ τῆς γωνίας Γ, ἡ ὁποία εἶναι 30°· ἄρα καὶ ἡ ἴση της γωνία Β′ θὰ εἶναι 60°. Ἀλλὰ τότε καὶ ἡ τρίτη γωνία τοῦ τριγώνου ΒΓΒ′ θὰ εἶναι 60°. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΓΒ′Β εἶναι ἰσογώνιον· ἄρα θὰ εἶναι καὶ ἰσόπλευρον· ὥστε θὰ εἶναι Β′Β=ΒΓ.



Σχ. 145.

Ὑπόθ.	$\widehat{A}=90^\circ$ $\widehat{\Gamma}=30^\circ$
Συμπ.	$AB=\frac{1}{2}B\Gamma$

Ἀλλὰ ἡ ΑΒ εἶναι, ἐκ κατασκευῆς, ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς Β′Β· ἄρα θὰ εἶναι ἴση καὶ μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ΒΓ· ἤτοι εἶναι $AB=\frac{B\Gamma}{2}$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον....***

181. Θεώρημα. *(Ἀντίστροφον).* ***Ἐὰν ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχῃ μίαν πλευρὰν ἴσην μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης, ἡ γωνία, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς αὐτῆς, εἶναι ἴση μὲ 30°.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ *(Σχ. 145)*, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι $AB=\frac{B\Gamma}{2}$.

Ὑπόθ.	$A=90^\circ$ $AB=\frac{1}{2}B\Gamma$
Συμπ.	$\Gamma=30^\circ$

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\widehat{\Gamma}=30^\circ$.

Ἀπόδειξις: Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΒΑ πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς Α καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμῆμα ΑΒ′=ΑΒ· φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΓΒ′.

Ἐπειδὴ ἡ ΓΑ εἶναι ὕψος καὶ διάμεσος τοῦ τριγώνου ΓΒ′Β, τὸ τρίγωνον αὐτὸ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι

$$\Gamma B'=\Gamma B \qquad (1)$$

Ἀλλὰ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι καὶ

$$AB=\frac{B\Gamma}{2} \text{ ἢ } 2AB=\Gamma B \text{ ἢ } B'B=\Gamma B \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι ΓΒ′=Β′Β=ΒΓ.

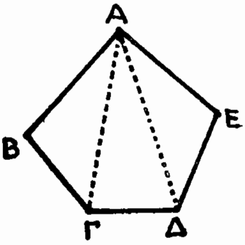
Ἀπὸ τὰς τελευταίας ἰσότητας συνάγομεν, ὅτι τὸ τρίγωνον ΓΒ′Β εἶναι ἰσόπλευρον καὶ ἑπομένως καὶ ἰσογώνιον, ὁπότε ἡ γωνία Β θὰ εἶναι 60°. Ἐπειδὴ εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἡ ὀξεῖα γωνία Β

εἶναι 60°, ἡ ἄλλη ὀξεῖα γωνία του Γ θὰ εἶναι 30°, ὡς συμπληρωματικὴ τῆς γωνίας Β.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον. . . .***

182. Θεώρημα. ***Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς πολυγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει ν πλευράς, εἶναι ἴσον μὲ 2ν—4 ὀρθὰς γωνίας.***

Ἔστω τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ *(Σχ. 146)*. Ἀπὸ μίαν κορυφήν του, ἔστω τὴν Α, φέρομεν τὰς διαγωνίους ΑΓ, ΑΔ. Χωρίζεται οὕτω τὸ πολύγωνον εἰς τόσα τρίγωνα, ὅσαι εἶναι αἱ πλευραί του πλὴν 2.



Σχ. 146.

Πράγματι· ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ σημεῖον Α ὡς κοινὴν κορυφὴν ὅλων αὐτῶν τῶν τριγώνων, εἰς κάθε πλευρὰν ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ τοῦ πολυγώνου ἀντιστοιχεῖ ἕνα τρίγωνον, ἐκτὸς τῶν δύο πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΕ, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν γωνίαν Α τοῦ πολυγώνου. Ἐὰν λοιπὸν τὸ πολύγωνον ἔχῃ 5 πλευράς, θὰ σχηματισθοῦν 5—2 τρίγωνα. Ἐὰν ἔχῃ ν πλευρὰς θὰ σχηματισθοῦν ν—2 τρίγωνα. Ὅλαι αἱ γωνίαι αὐτῶν τῶν τριγώνων, ἀθροιζόμεναι καταλλήλως, ἀποτελοῦν τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου. Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ 2 ὀρθὰς γωνίας, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν ν—2 τριγώνων, θὰ εἶναι ἴσον μὲ 2(ν—2) ὀρθάς, δηλ. μὲ 2ν—4 ὀρθάς.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν. . . .***

Παρατήρησις: Ἀπὸ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα συνάγομεν, ὅτι, ἐὰν παραστήσωμεν μὲ ν τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν ἑνὸς πολυγώνου, μὲ Σ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του, εἰς ὀρθὰς γωνίας, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν

$$\boxed{\Sigma = 2\nu - 4 \text{ ὀρθ.}} \qquad (1)$$

Μὲ τὴν βοήθειαν τῆς σχέσεως αὐτῆς δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ Σ, ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ ν καὶ ἀντιστρόφως, νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ν ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ Σ.

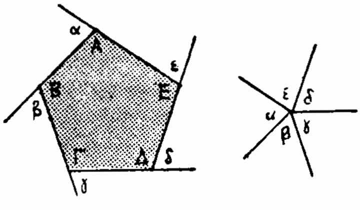
183. Πόρισμα. ***Ἐὰν αἱ ν γωνίαι ἑνὸς κυρτοῦ πολυγώνου εἶναι ἴσαι, καθεμία ἀπὸ τὰς ἴσας γωνίας του εἶναι ἴση μὲ*** $\frac{2\nu-4}{\nu}$ ***ὀρθάς.***

Πράγματι· αἱ ν ἴσαι γωνίαι τοῦ κυρτοῦ πολυγώνου ἔχουν ἄθροισμα 2ν—4 ὀρθὰς γωνίας· ἄρα καθεμία γωνία του θὰ εἶναι ἴση μὲ

$$\frac{2\nu-4}{\nu} \text{ ὀρθὰς γωνίας.}$$

184. Θεώρημα. ***Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας λαμβάνομεν, ἂν προεκτείνωμεν ὅλας τὰς πλευρὰς ἑνὸς πολυγώνου κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, εἶναι ἴσον μὲ 4 ὀρθάς.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω ΑΒΓΔΕΖ *(Σχ. 147)* ἕνα κυρτὸν πολύγωνον μὲ ν πλευρὰς καὶ α, β, γ, δ, ε..... αἱ ἐξωτερικαὶ γωνίαι του, τὰς ὁποίας λαμβάνομεν, ἐὰν προεκτείνωμεν τὰς πλευράς του κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν.



Σχ. 147.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}+\widehat{\gamma}+\widehat{\delta}+\widehat{\varepsilon}+\cdots=4$ ὀρθ.

Ἀπόδειξις: Κάθε κορυφὴ πολυγώνου, π.χ. ἡ Α, εἶναι κορυφὴ μιᾶς ἐσωτερικῆς γωνίας Α τοῦ πολυγώνου καὶ μιᾶς ἐξωτερικῆς γωνίας α. Αἱ γωνίαι Α καὶ α ἔχουν ἄθροισμα ἴσον μὲ 2 ὀρθάς, (διότι εἶναι ἐφεξῆς, τῶν ὁποίων αἱ μὴ κοιναὶ πλευραί των κεῖνται ἐπ' εὐθείας).

Ἐπειδὴ τὸ πολύγωνον ἔχει ν κορυφὰς ἕπεται, ὅτι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν γωνιῶν του, ἐσωτερικῶν καὶ ἐξωτερικῶν, εἶναι ἴσον μὲ 2ν ὀρθάς. Ἀλλὰ γνωρίζομεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν ἑνὸς πολυγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει ν πλευράς, εἶναι ἴσον μὲ 2ν—4 ὀρθ. Ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου θὰ εἶναι ἴσον μὲ 2ν—(2ν—4)=4 ὀρθάς.

Ἀσκήσεις

121. (143). Εἰς ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον μία γωνία του εἶναι ἴση μὲ τὰ 2/3 μιᾶς ἄλλης γωνίας του. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ ὀρθογ. τριγώνου (2 περιπτώσεις).

122. (154). Πόσον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς τετραπλεύρου ; ἑνὸς ἑξαγώνου ; ἑνὸς δεκαπενταγώνου ;

123 (155). Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς κυρτοῦ πολυγώνου εἶναι 18 ὀρθαί. Πόσας πλευρὰς ἔχει τὸ πολύγωνον ;

124. (156). Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς κυρτοῦ πολυγώνου εἶναι 1080°. Πόσας πλευρὰς ἔχει τὸ πολύγωνον ;

125. (157). Ἕνα δεκάγωνον ἔχει ὅλας τὰς γωνίας του ἴσας. Μὲ πόσα μέρη τῆς ὀρθῆς ἰσοῦται κάθε γωνία του ;

126. (158). Ἡ μία γωνία ὀκταγώνου εἶναι ὀρθὴ καὶ αἱ ἄλλαι γωνίαι του εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Πόσων μοιρῶν εἶναι κάθε γωνία του ;

127. (159). Ὑπάρχει κυρτὸν πολύγωνον, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του εἶναι 13 ὀρθαὶ γωνίαι ;

128. (144). Εἰς ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, ἡ γωνία τῆς κορυφῆς του εἶ-

ναι 78°. Ἑκατέρωθεν τῆς βάσεως ΒΓ λαμβάνομεν τμήματα ΒΔ=ΑΒ καὶ ΓΕ=ΓΑ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι: 1ον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. 2ον τοῦ τριγώνου ΑΔΕ.

129. (147). Εἰς ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, ἡ γωνία τῆς κορυφῆς Α εἶναι διπλασία μιᾶς τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν του. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τῆς βάσεως.

130. (148). Ἐὰν ἡ βάσις ΒΓ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ προεκταθῇ μέχρι ἑνὸς σημείου Δ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι: ΑΔ>ΑΓ.

131. (149). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας ἑνὸς τριγώνου τέμνει τὴν ἀπέναντι πλευρὰν εἰς δύο τμήματα, τὰ ὁποῖα εἶναι μικρότερα, ἀντιστοίχως, τῶν προσκειμένων, πρὸς τὰ τμήματα αὐτά, πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

132. (176). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἡ γωνία Α εἶναι ἀμβλεῖα καὶ μικροτέρα τῶν 135°, ἡ γωνία Γ εἶναι μικροτέρα τῶν 45°. Ἐὰν ΑΔ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΒΔ<ΑΔ<ΓΔ

133. (179). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ· προεκτείνομεν τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων λαμβάνομεν τμήματα ΒΔ=ΓΕ. 1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΔΕ>ΒΓ. 2ον. Ἐὰν εἶναι ΑΒ<ΑΓ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΔΓ<ΒΕ.

134. (173). Νὰ ἀποδειχθῇ, ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τοὺς πόδας τῶν δύο ὑψῶν ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου, τὰ ὁποῖα ἄγονται ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς βάσεώς του, εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν.

135. (160). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, εἶναι ἴση μὲ 1 ὀρθ.$+\frac{A}{2}$.

136 (161). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὰς διχοτόμους τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν Β καὶ Γ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, εἶναι ἴση μὲ 1 ὀρθ.$-\frac{A}{2}$.

137. (162). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ διχοτόμος τῆς ἐσωτερικῆς γωνίας Β ἑνὸς τριγώνου καὶ ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας του Γ εἶναι ἴση μὲ $\frac{A}{2}$.

138. (163). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία, ἡ ὁποία σχηματίζεται ὑπὸ τῆς διχοτόμου καὶ τοῦ ὕψους, τὰ ὁποῖα ἄγονται ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, εἶναι ἴση μὲ τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ.

139. (150). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ ἡ γωνία του Β εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας Γ. Ἐὰν φέρωμεν τὴν διχοτόμον ΑΔ τῆς γωνίας Α, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\widehat{A\Delta\Gamma}-\widehat{A\Delta B}=\widehat{B}-\widehat{\Gamma}.$$

140. (151). Ἐὰν ἡ μία γωνία ἑνὸς τριγώνου εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον εἶναι ἀμβλυγώνιον.

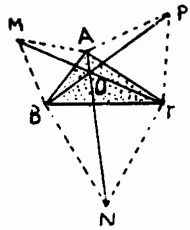
141. (152). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι Β—Γ=90°. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διχοτόμος ΑΔ τῆς γωνίας Α σχηματίζει μὲ τὴν ΒΓ γωνίαν 45°.

142. (153). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α, εἶναι ΑΒ<ΑΓ. Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΗ καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ τμῆμα ΗΔ=ΗΒ. Ἀπὸ τὸ Γ φέρομεν τὴν ΓΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΑΔ εἰς τὸ Ε. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΒΓ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΓΕ.

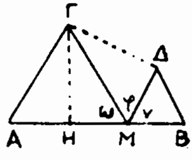
143. (164). Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζομεν, ἐκτὸς αὐτοῦ

τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα ΜΑΒ, ΝΒΓ καὶ ΡΑΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΜΓ=ΝΑ=ΡΒ.

144. (165). Δίδεται ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ=3α. Ἐπὶ τοῦ ΑΒ λαμβάνομεν ἕνα τμῆμα ΑΜ=2α. Μὲ πλευρὰς τὰς ΑΜ καὶ ΜΒ κατασκευάζομεν τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΜΓ καὶ ΜΒΔ, κείμενα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ΑΒ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΓΔ καὶ τὴν κάθετον ΓΗ ἐπὶ τὴν ΑΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΓΗ=ΓΔ.



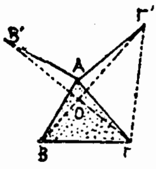
Σχ. ἀσκ. 143.



Σχ. ἀσκ. 144.

145. (166). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α. Ἀπὸ τὰς κορυφὰς Β καὶ Γ φέρομεν τὰς εὐθείας Βx καὶ Γy, αἱ ὁποῖαι νὰ σχηματίζουν μὲ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ γωνίας 45°. Ἀπὸ τὸ Α φέρομεν τὰς καθέτους ΑΔ καὶ ΑΕ ἐπὶ τὰς Βx καὶ Γy ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Δ, Α, Ε κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

146. (167). Δίδεται μία ὀρθὴ γωνία xOy. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Ox λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Α καὶ ἐπὶ τῆς Oy ἕνα ἄλλο σημεῖον Β. Ἀπὸ τὸ Α φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΜ, ἡ ὁποία νὰ σχηματίζῃ μὲ τὴν Ox γωνίαν 30° καὶ νὰ τέμνῃ τὴν Oy εἰς τὸ Μ. Ἐπίσης ἀπὸ τὸ Β φέρομεν τὴν ΒΝ, ἡ ὁποία νὰ σχηματίζῃ μὲ τὴν Oy γωνίαν 30° καὶ νὰ τέμνῃ τὴν Ox εἰς τὸ Ν. Αἱ εὐθεῖαι ΑΜ καὶ ΒΝ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Γ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΝΓ καὶ ΒΜΓ εἶναι ἰσοσκελῆ.

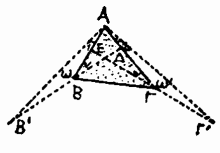


Σχ. ἀσκ. 147.

147. (175). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α φέρομεν τὴν ΑΒ′ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ἴσην μὲ τὴν ΑΒ καὶ κειμένην ἐκτὸς τοῦ τριγώνου. Ἐπίσης ἀπὸ τὸ Α φέρομεν τὴν κάθετον ΑΓ′ ἐπὶ τὴν ΑΓ καὶ ἴσην μὲ τὴν ΑΓ καὶ κειμένην ἐκτὸς τοῦ τριγώνου. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΓΒ′ καὶ ΒΓ′ εἶναι ἴσαι καὶ κάθετοι μεταξύ των.

148 (182). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία Α εἶναι 60°. Φέρομεν τὰς διχοτόμους ΒΒ′ καὶ ΓΓ′ τῶν γωνιῶν του, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς πλευρὰς ΑΓ καὶ ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Β′ καὶ Γ′. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι γων.ΒΒ′Γ=γων.ΓΓ′Α.

149. (168). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α· φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΓΔ λαμβάνομεν τμῆμα ΔΓ′=ΔΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ′ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ′ εἶναι ἴση μὲ 90°.



Σχ. ἀσκ. 150.

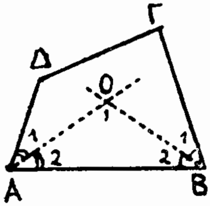
150. (174). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ· φέρομεν τὰ ὕψη ΒΔ καὶ ΓΕ. Προεκτείνομεν τὸ ὕψος ΒΔ πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς Β καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμῆμα ΒΒ′=ΑΓ. Ἐπίσης ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ ὕψους ΓΕ πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς Γ λαμβάνομεν τμῆμα ΓΓ′=ΑΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον. ὅτι ΑΒ′=ΑΓ′. 2ον. ὅτι ἡ γωνία Β′ΑΓ′ εἶναι ὀρθή.

151. (177). Ἐὰν ἡ βάσις ΒΓ ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι μεγαλυτέρα, ἢ ἴση, ἢ μικροτέρα τῶν ἴσων πλευρῶν του, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία Α εἶναι, ἀντιστοίχως μεγαλυτέρα ἢ ἴση ἢ μικροτέρα τῶν 60°.

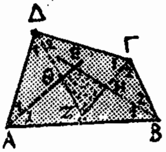
152 (178). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι μία γωνία ἑνὸς τριγώνου εἶναι ὀξεῖα, ὀρθή, ἢ ἀμβλεῖα, ἐὰν ἡ διάμεσος, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας αὐτῆς εἶναι ἀντιστοίχως μεγαλυτέρα, ἴση ἢ μικροτέρα τοῦ ἡμίσεως τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς.

153. (180). Ἐὰν τὸ ὕψος ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἀντιστοίχου πλευρᾶς, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία, ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς ὁποίας ἄγεται τὸ ὕψος, εἶναι ὀξεῖα ἢ κατ' ἐξαίρεσιν ὀρθή.

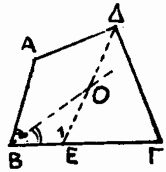
154. (169). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὰς δι-



Σχ. ἀσκ. 154.



Σχ. ἀσκ. 155.



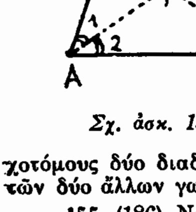
Σχ. ἀσκ. 156.

χοτόμους δύο διαδοχικῶν γωνιῶν τετραπλεύρου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν του.

155. (186). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τετραπλεύρου σχηματίζουν τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί.

156. (170). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ διχοτόμοι δύο ἀπέναντι γωνιῶν τετραπλεύρου εἶναι ἴση μὲ τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν του.

157. (171). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ διχοτόμοι δύο διαδοχικῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν τετραπλεύρου, εἶναι ἴση μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο (ἐσωτερικῶν) αὐτῶν διαδοχικῶν γωνιῶν του.



Σχ. ἀσκ. 158.

158. (172). Αἱ διχοτόμοι τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν τετραπλεύρου, τεμνόμεναι, σχηματίζουν τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί.

159. (187). Δίδεται ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ. Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΑΒ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Β καὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Γ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων ἐξωτερικῶν γωνιῶν εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν Α καὶ Δ.

160. (181). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ὅταν δύο ἀπέναντι γωνίαι τετραπλεύρου εἶναι ὀρθαί, αἱ διχοτόμοι τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν του εἶναι παράλληλοι.

161. (184). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε πολύγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει τοὐλάχιστον τέσσαρας πλευράς, μία τυχοῦσα γωνία του εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄλλων γωνιῶν του.

162 (185). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι του δὲν εἶναι ἴσαι: 1ον. ἡ μία τοὐλάχιστον ἐκ τῶν γωνιῶν του εἶναι ὀξεῖα. 2ον. ἡ μία τοὐλάχιστον ἐκ τῶν γωνιῶν του εἶναι ἀμβλεῖα.

163. (183). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἕνα κυρτὸν πολύγωνον δὲν δύναται νὰ ἔχῃ περισσοτέρας ἀπὸ τρεῖς ὀξείας γωνίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ'.

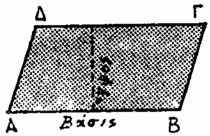
ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ - ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ

185. Τὰ σπουδαιότερα τετράπλευρα εἶναι :
Τὸ ***παραλληλόγραμμον***, τὸ ***ὀρθογώνιον***, ὁ ***ῥόμβος***, τὸ ***τετράγωνον*** καὶ τὸ ***τραπέζιον***.

1. Παραλληλόγραμμα

186. Παραλληλόγραμμον. *Κάθε τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευράς του παραλλήλους, λέγεται* ***παραλληλόγραμμον.***
Π.χ. τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ *(Σχ. 148)* εἶναι παραλληλόγραμμον.

Μία ἀπὸ τὰς πλευρὰς ἑνὸς παραλληλογράμμου λέγεται ***βάσις*** αὐτοῦ· καὶ ἡ ἀπόστασις αὐτῆς, ἀπὸ τὴν ἀπέναντι παράλληλον πλευράν, λέγεται ***ὕψος***.



Σχ. 148.

187. Ἰδιότητες τῶν γωνιῶν ἑνὸς παραλληλογράμμου. Θεώρημα. ***Εἰς κάθε παραλληλόγραμμον :***

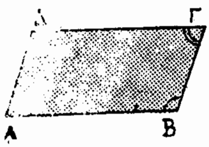
1ον. Αἱ ἀπέναντι γωνίαι του εἶναι ἴσαι.

2ον. Δύο διαδοχικαὶ γωνίαι του εἶναι παραπληρωματικαί.

Ὑπόθεσις : Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ.

Συμπέρασμα : 1ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ἀπέναντι γωνίαι τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ εἶναι ἴσαι· δηλ. θὰ δείξωμεν, ὅτι :

$$\widehat{A}=\widehat{\Gamma} \quad \text{καὶ} \quad \widehat{B}=\widehat{\Delta}.$$



Σχ. 149.

Ὑπόθ.	ΑΒ//ΓΔ ΑΔ//ΒΓ
Συμπ.	$\widehat{A}=\widehat{\Gamma}$ $\widehat{B}=\widehat{\Delta}$

Ἀπόδειξις : Αἱ γωνίαι Α καὶ Γ εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους καὶ μὲ ἀντίθετον φοράν. Ὁμοίως καὶ αἱ γωνίαι Β καὶ Δ εἶναι ἴσαι, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον.

2ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι δύο διαδοχικαὶ γωνίαι τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ εἶναι παραπληρωματικαί.

Ἀπόδειξις: Πράγματι· αἱ γωνίαι Α καὶ Δ *(Σχ. 149)* εἶναι παραπληρωματικαί, διότι εἶναι ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΔΓ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΔ· ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι αἱ γωνίαι Α καὶ Β εἶναι παραπληρωματικαί, καθὼς καὶ αἱ Β καὶ Γ καὶ αἱ Γ καὶ Δ.

Ὑπόθ.	ΑΒ//ΓΔ ΑΔ//ΒΓ
Συμπ.	$\widehat{A}+\widehat{\Delta}=2$ὀρθ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Εἰς κάθε παραλληλόγραμμον....***

188. Θεώρημα *(Ἀντίστροφον).* ***Ἕνα τετράπλευρον εἶναι παραλληλόγραμμον:***

1ον. Ἐὰν αἱ ἀπέναντι γωνίαι του εἶναι ἴσαι.

2ον. Ἐὰν αἱ προσκείμεναι γωνίαι, εἰς ἑκάστην τῶν πλευρῶν του, εἶναι παραπληρωματικαί.

1ον. Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ *(Σχ. 149)*, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι: $\widehat{A}=\widehat{\Gamma}$ καὶ $\widehat{B}=\widehat{\Delta}$.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τετράπλευρον αὐτὸ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ὑπόθ.	$\widehat{A}=\widehat{\Gamma}$ $\widehat{B}=\widehat{\Delta}$
Συμπ.	ΑΒ//ΔΓ ΑΔ//ΒΓ

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς τετραπλεύρου εἶναι ἴσον μὲ 4 ὀρθὰς γωνίας, θὰ εἶναι: $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}+\widehat{\Delta}=4$ ὀρθ. (1)

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὴν γωνίαν Γ μὲ τὴν ἴσην της Α καὶ τὴν γωνίαν Δ μὲ τὴν ἴσην της Β, καὶ ἔχομεν

$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{A}+\widehat{B}=4$ ὀρθ. ἢ $2\widehat{A}+2\widehat{B}=4$ ὀρθ. ἢ $\widehat{A}+\widehat{B}=2$ ὀρθ.

Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΒΓ τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΑΒ σχηματίζουν τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας Α καὶ Β παραπληρωματικάς· ἄρα (§ 170. 4ον) αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΒΓ εἶναι παράλληλοι.

Ὁμοίως, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὴν γωνίαν Β μὲ τὴν ἴσην της Δ καὶ τὴν γωνίαν Γ μὲ τὴν ἴσην της Α, θὰ ἔχωμεν

$\widehat{A}+\widehat{\Delta}+\widehat{A}+\widehat{\Delta}=4$ ὀρθ. ἢ $2\widehat{A}+2\widehat{\Delta}=4$ ὀρθ. ἢ $\widehat{A}+\widehat{\Delta}=2$ ὀρθ.

Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΔΓ, τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΑΔ σχηματίζουν τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας Α καὶ Δ παραπληρωματικάς· ἄρα αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΔΓ εἶναι παράλληλοι.

Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΑΒΓΔ, ὡς ἔχον τὰς ἀπέναντι πλευράς του παραλλήλους, εἶναι παραλληλόγραμμον.

2ον. Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ *(Σχ. 149)*, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι:

$\widehat{A}+\widehat{B}=2$ ὀρθ., $\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=2$ ὀρθ.

Ὑπόθ.	$\widehat{A}+\widehat{B}=2$ ὀρθ. $\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=2$ ὀρθ.
Συμπ.	ΑΒ//ΔΓ ΑΔ//ΒΓ

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ $\widehat{A}+\widehat{B}=2$ ὀρθ., αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΒΓ εἶναι παράλληλοι. Ὁμοίως, ἐπειδὴ $\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=2$ ὀρθ., αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΔΓ εἶναι παράλληλοι.

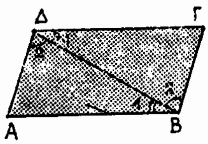
Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΑΒΓΔ ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευράς του παραλλήλους καὶ ἑπομένως εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἕνα τετράπλευρον εἶναι . . . .***

189. Ἰδιότητες τῶν πλευρῶν ἑνὸς παραλληλογράμμου. Θεώρημα. ***Εἰς κάθε παραλληλόγραμμον αἱ ἀπέναντι πλευραί του εἶναι ἴσαι ἀνὰ δύο.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ *(Σχ. 150)*.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι: ΑΒ=ΔΓ καὶ ΑΔ=ΒΓ.



Σχ. 150.

Ὑπόθ.	ΑΒ//ΓΔ ΑΔ//ΒΓ
Συμπ.	ΑΒ=ΔΓ ΑΔ=ΒΓ

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὴν διαγώνιον ΒΔ. Τὰ σχηματισθέντα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΔ ἔχουν: τὴν ΒΔ κοινήν, τὴν γωνίαν B_1 ἴσην μὲ τὴν γωνίαν Δ_1, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΔΓ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΔ· ἐπίσης ἔχουν τὴν γωνίαν Δ_2 ἴσην μὲ τὴν γωνίαν B_2, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΔ καὶ ΒΓ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΔ· δηλ. τὰ τρίγωνα αὐτὰ ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας ἴσας· ἄρα εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως θὰ ἔχουν καὶ ΑΒ=ΔΓ, ΑΔ=ΒΓ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Εἰς κάθε παραλληλόγραμμον. . . .***

190. Θεώρημα. *(Ἀντίστροφον).* ***Ἕνα τετράπλευρον εἶναι παραλληλόγραμμον, ἐὰν αἱ ἀπέναντι πλευραί του εἶναι ἴσαι.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ *(Σχ. 150)*, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ΑΒ=ΓΔ καὶ ΑΔ=ΒΓ.

Ὑπόθ.	ΑΒ=ΓΔ ΑΔ=ΒΓ
Συμπ.	ΑΒ//ΔΓ ΑΔ//ΒΓ

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὴν διαγώνιον ΒΔ. Τὰ σχηματισθέντα τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΒΓΔ ἔχουν: ΑΒ=ΓΔ, ΑΔ=ΒΓ, ἐξ ὑποθέσεως καὶ τὴν πλευρὰν ΒΔ κοινήν· δηλ. ἔχουν καὶ τὰς τρεῖς πλευράς των ἴσας,

μίαν πρὸς μίαν· ἄρα εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως θὰ ἔχουν καὶ

$$\widehat{B}_1=\widehat{\Delta}_1 \quad \text{καὶ} \quad \widehat{\Delta}_2=\widehat{B}_2.$$

Ἐπειδὴ $\widehat{B}_1=\widehat{\Delta}_1$, αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΔΓ εἶναι παράλληλοι, διότι τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΒΔ σχηματίζουν τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας Δ_1 καὶ B_1 ἴσας.

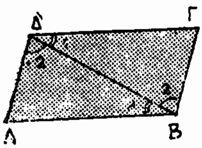
Ὁμοίως ἐπειδὴ $\widehat{\Delta}_2=\widehat{B}_2$, αἱ ΑΔ καὶ ΒΓ εἶναι παράλληλοι.

Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΑΒΓΔ ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευρὰς παραλλήλους· ἄρα εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: *"Ενα τετράπλευρον εἶναι....*

191. Θεώρημα. ***Ἐὰν ἕνα τετράπλευρον ἔχῃ δύο ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας καὶ παραλλήλους, τὸ τετράπλευρον αὐτὸ εἶναι παραλληλόγραμμον.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ *(Σχ. 151)* εἰς τὸ ὁποῖον αἱ ἀπέναντι πλευραί του ΑΒ καὶ ΔΓ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.



Σχ. 151.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ὑπόθ.	ΑΒ=ΓΔ ΑΒ//ΓΔ
Συμπ.	ΑΔ//ΒΓ

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὴν διαγώνιον ΒΔ. Τὰ σχηματισθέντα τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΒΓΔ ἔχουν: ΑΒ=ΔΓ, ἐξ ὑποθέσεως, τὴν πλευρὰν ΒΔ κοινὴν καὶ $\widehat{B}_1=\widehat{\Delta}_1$, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΔΓ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΔ· δηλ. ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην· ἄρα τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως θὰ ἔχουν καὶ $\widehat{\Delta}_2=\widehat{B}_2$. Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΒΓ τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΒΔ σχηματίζουν τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας Δ_2 καὶ B_2 ἴσας· ἄρα αἱ εὐθεῖαι αὐταὶ εἶναι παράλληλοι.

Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΑΒΓΔ ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευράς του παραλλήλους καὶ ἑπομένως εἶναι παραλληλόγραμμον.

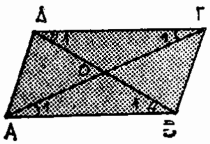
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν ἕνα τετράπλευρον....***

Σημ. Ἡ ἰδιότης αὐτὴ μᾶς ἐπιτρέπει νὰ κατασκευάσωμεν εὐκόλως ἕνα παραλληλόγραμμον εἰς ἕνα φύλλον τετραδίου.

192. Ἰδιότης τῶν διαγωνίων ἑνὸς παραλληλογράμμου. **Θεώρημα.** ***Εἰς κάθε παραλληλόγραμμον αἱ διαγώνιοί του διχοτομοῦνται.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν ΑΓ καὶ ΒΔ (*Σχ. 152)* αἱ διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ο.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΑΟ=ΟΓ καὶ ΟΒ=ΟΔ.



Σχ. 152.

Ὑπόθ.	ΑΒ//ΓΔ ΑΔ//ΒΓ
Συμπ.	ΑΟ=ΟΓ ΒΟ=ΟΔ

Ἀπόδειξις: Τὰ τρίγωνα ΟΑΒ καὶ ΟΓΔ ἔχουν ΑΒ=ΔΓ, ὡς ἀπέναντι πλευρὰς παραλληλογράμμου, $\widehat{A}_1=\widehat{\Gamma}_1$, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΓΔ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΓ, καὶ $\widehat{B}_1=\widehat{\Delta}_1$, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΓΔ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΔ· ἄρα τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα (§ 117) καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι καὶ ΑΟ=ΟΓ καὶ ΟΒ=ΟΔ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Εἰς κάθε παραλληλόγραμμον....***

193. Θεώρημα. *(Ἀντίστροφον).* ***Ἕνα τετράπλευρον εἶναι παραλληλόγραμμον, ὅταν αἱ διαγώνιοί του διχοτομοῦνται.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ (*Σχ. 152)* καὶ ΑΓ, ΒΔ αἱ διαγώνιοί του, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ο. Ἔστω ὅτι εἶναι ΑΟ=ΟΓ καὶ ΟΒ=ΟΔ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ὑπόθ.	ΑΟ=ΟΓ ΒΟ=ΟΔ
Συμπ.	ΑΒ//ΔΓ ΑΔ//ΒΓ

Ἀπόδειξις: Τὰ τρίγωνα ΟΑΒ καὶ ΟΓΔ ἔχουν: ΟΑ=ΟΓ, ΟΒ=ΟΔ, ἐξ ὑποθέσεως καὶ $\widehat{AOB}=\widehat{\Delta O\Gamma}$, ὡς κατὰ κορυφήν· δηλ. ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην· ἄρα θὰ εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως θὰ ἔχουν καὶ $\widehat{B}_1=\widehat{\Delta}_1$.

Ἐπειδὴ $\widehat{B}_1=\widehat{\Delta}_1$, αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΔΓ εἶναι παράλληλοι (§ 170).

Ὁμοίως ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων ΟΑΔ καὶ ΟΒΓ εὑρίσκομεν, ὅτι $\widehat{OB\Gamma}=\widehat{O\Delta A}$ καὶ ἑπομένως αἱ ΒΓ καὶ ΑΔ εἶναι παράλληλοι.

Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΑΒΓΔ ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευράς του παραλλήλους καὶ ἑπομένως εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἕνα τετράπλευρον εἶναι....***

194. Κέντρον ἑνὸς παραλληλογράμμου. *Τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων ἑνὸς παραλληλογράμου λέγεται* ***κέντρον τοῦ παραλληλογράμμου.***

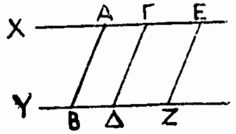
*Τὸ κέντρον τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι **κέντρον συμμετρίας τοῦ παραλληλογράμμου.***

Καὶ ἀντιστρόφως: ***Ἕνα κυρτὸν τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει ἕνα κέντρον συμμετρίας, εἶναι παραλληλόγραμμον.***

195. Θεώρημα. ***Παράλληλοι εὐθεῖαι, περιεχόμεναι μεταξὺ παραλλήλων εὐθειῶν, εἶναι ἴσαι.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, αἱ ὁποῖαι περιέχονται μεταξὺ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν Χ καὶ Υ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΑΒ=ΓΔ=ΕΖ.



Σχ. 153.

Ἀπόδειξις: Τὸ τετράπλευρον ΑΓΔΒ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ ἀπέναντι πλευραί του εἶναι παράλληλοι, ἐξ ὑποθέσεως· ἄρα αἱ ἀπέναντι πλευραί του ΑΒ καὶ ΓΔ θὰ εἶναι ἴσαι, ἤτοι θὰ εἶναι ΑΒ=ΓΔ (1)

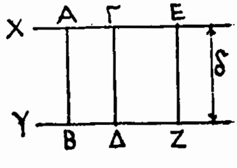
Ὁμοίως ἀπὸ τὸ παραλληλόγραμμον ΓΕΖΔ ἔχομεν ΓΔ=ΕΖ (2)

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι ΑΒ=ΓΔ=ΕΖ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Παράλληλοι εὐθεῖαι. . . .***

196. Πόρισμα. ***Κάθετοι εὐθεῖαι, περιεχόμεναι μεταξὺ παραλλήλων εὐθειῶν, εἶναι ἴσαι.***

Αἱ κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶναι παράλληλοι· ἄρα εἶναι ἴσαι, ὡς παράλληλοι περιεχόμεναι μεταξὺ παραλλήλων εὐθειῶν (§ 195).

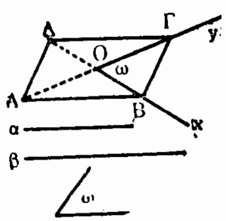


Σχ. 154.

Σημ. Τὸ πόρισμα αὐτὸ ἐκφράζεται καὶ ὡς ἑξῆς:

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, ὅλα τὰ σημεῖα τῆς μιᾶς εὐθείας ἀπέχουν ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὴν ἄλλην.

197. Πρόβλημα. ***1ον. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα παραλληλόγραμμον, ἂν γνωρίζωμεν τὰς διαγωνίους του καὶ τὴν γωνίαν των.***



Σχ. 155.

Ἔστωσαν ω ἡ γωνία τῶν διαγωνίων καὶ α καὶ β αἱ διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου. Κατασκευάζομεν μίαν γωνίαν xOy *(Σχ. 155)* ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Oy λαμβάνομεν τμῆμα ΟΓ ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τῆς διαγωνίου β καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Ox τμῆμα ΟΒ ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἄλλης διαγωνίου α. Προεκτείνομεν τὰς ΟΓ καὶ ΟΒ πρὸς

τὸ μέρος τῆς κορυφῆς Ο καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων λαμβάνομεν τμήματα ΑΟ=ΟΓ καὶ ΟΔ=ΟΒ. Τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ εἶναι τὸ ζητούυενον παραλληλόγραμμον.

Ἀπόδειξις: Τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ διαγώνιοί του ΑΓ καὶ ΒΔ διχοτομοῦνται ἐκ κατασκευῆς· εἶναι δὲ καὶ τὸ ζητούμενον, διότι αἱ διαγώνιοί του εἶναι ἐκ κατασκευῆς ἴσαι μὲ τὰς δοθείσας α καὶ β καὶ σχηματίζουν γωνίαν ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω ἐκ κατασκευῆς.

Ἀσκήσεις

164. (191). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι κάθε εὐθεῖα, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον ἑνὸς παραλληλογράμμου καὶ περατοῦται εἰς τὰς ἀπέναντι πλευράς του, διχοτομεῖται ὑπὸ τοῦ κέντρου τοῦ παραλληλογράμμου.

165. (192). Αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ μέσα τῶν ἡμιδιαγωνίων παραλληλογράμμου σχηματίζουν παραλληλόγραμμον μὲ κέντρον τὸ κέντρον τοῦ δοθέντος παραλληλογράμμου.

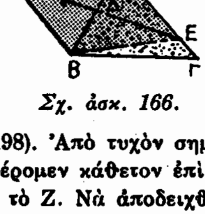
166. (193). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ· ἀπὸ τὸ μέσον Δ τῆς πλευρᾶς ΑΒ φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ σημεῖον Ε. Προεκτείνομεν τὴν ΕΔ πέραν τοῦ Δ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμῆμα ΔΖ=ΕΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΒΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΑ.

167. (194). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ. Φέρομεν τὰς διαμέσους ΒΒ′ καὶ ΓΓ′ καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεών των λαμβάνομεν μήκη Β′Δ=ΒΒ′ καὶ Γ′Ε=ΓΓ′. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΑΔ=ΑΕ καὶ ὅτι τὰ σημεῖα Α, Δ, Ε, κεῖνται ἐπ᾿ εὐθείας.

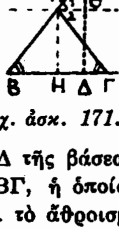
168. (195). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα δύο ἀπέναντι πλευρῶν παραλληλογράμμου διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ παραλληλογράμμου.

169. (196). Δίδεται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ Ε καὶ Ζ τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του ΑΒ καὶ ΓΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΕΓΖ εἶναι παραλληλόγραμμον.

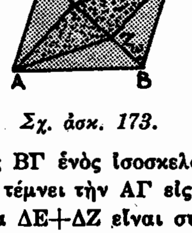
170. (197). Ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα δύο ἀπέναντι πλευρῶν παραλληλογράμμου χωρίζει αὐτὸ εἰς δύο παραλληλόγραμμα. Ἀληθεύει τὸ ἀντίστροφον;



Σχ. ἀσκ. 166.



Σχ. ἀσκ. 171.



Σχ. ἀσκ. 173.

171. (198). Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Δ τῆς βάσεως ΒΓ ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ε καὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα ΔΕ+ΔΖ εἶναι σταθερόν.

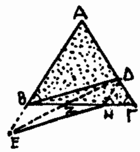
172. (199). Ἐὰν ἀπὸ τυχὸν σημεῖον τῆς βάσεως ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἀχθοῦν παράλληλοι πρὸς τὰς ἴσας πλευράς του, σχηματίζεται ἕνα παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι σταθερά.

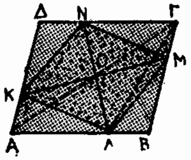
173. (200). Δίδεται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Ἀπὸ τὰς ἀπέναντι κορυφὰς Α καὶ Γ φέρομεν καθέτους, ΑΕ καὶ ΓΖ ἐπὶ τὴν διαγώνιον ΒΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΕΓΖ εἶναι παραλληλόγραμμον.

174. (201). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὰς διαμέσους ΑΔ καὶ ΒΕ. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Γ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΕ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ Ε, εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Ἐὰν Η εἶναι τὸ μέσον τῆς ΕΖ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΔΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΗ.

175. (202). Δίδεται τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ μὲ βάσιν τὴν ΒΓ. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΓ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Δ καὶ προεκτείνομεν τὴν ΑΒ κατὰ ἕνα μῆκος ΒΕ ἴσον μὲ ΓΔ· φέρομεν ἔπειτα τὴν εὐθεῖαν ΕΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΒΓ εἰς ἕνα σημεῖον Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ Ζ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΕΔ.

176. (203). Δίδεται ἕνα παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ· προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΑΒ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμῆμα ΒΕ=ΒΓ. Ἐπίσης προεκτείνομεν τὴν ΑΔ καὶ λαμβάνομεν ΔΖ=ΓΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ : 1ον. ὅτι $\widehat{\Delta\Gamma Z}=\widehat{B\Gamma E}$ καὶ 2ον. ὅτι τὰ σημεῖα Ζ, Γ, Ε κεῖνται ἐπ' εὐθείας.





Σχ. ἀσκ. 175. *Σχ. ἀσκ. 177.*

177. (204). Ἐὰν ἕνα παραλληλόγραμμον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα ἄλλο, (δηλ. αἱ κορυφαί του κεῖνται ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ πρώτου), τὰ κέντρα των συμπίπτουν.

178. (205). Δίδεται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς του ΑΒ λαμβάνομεν τυχὸν τμῆμα ΑΕ, ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΓΔ τμῆμα ΓΖ=ΑΕ. Ἐπίσης ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΔ λαμβάνομεν τυχὸν τμῆμα ΑΗ καὶ ἐπὶ τῆς ΓΒ τμῆμα ΓΘ=ΑΗ. Νὰ ἀποδειχθῇ : 1ον ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΘΖΗ εἶναι παραλληλόγραμμον ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ ΑΒΓΔ. 2ον ὅτι τὰ κέντρα τῶν δύο παραλληλογράμμων συμπίπτουν.

179. (206). Δίδεται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ· ἐπὶ τῶν πλευρῶν του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ λαμβάνομεν τμήματα $AE=\frac{AB}{4}$, $BZ=\frac{B\Gamma}{4}$, $\Gamma H=\frac{\Gamma\Delta}{4}$, $\Delta\Theta=\frac{\Delta A}{4}$. Νὰ ἀποδειχθῇ : 1ον. ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμον. 2ον. ὅτι τὰ δύο παραλληλόγραμμα ἔχον τὸ αὐτὸ κέντρον.

180. (229). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ, ἂν γνωρίζωμεν:

1ον. Τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΔ καὶ τὴν γωνίαν Α.

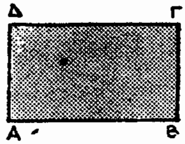
2ον. Τὴν πλευρὰν ΔΓ, τὴν διαγώνιον ΒΔ καὶ τὴν γωνίαν ΑΒΔ.

3ον. Τὴν πλευρὰν ΑΒ καὶ τὰς γωνίας ΑΒΔ καὶ ΒΑΓ.

2. 'Ορθογώνιον

198. 'Ορθογώνιον. *Κάθε παραλληλόγραμμον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς γωνίας του ὀρθάς, λέγεται* ***ὀρθογώνιον*** *(Σχ: 156).*

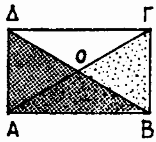
Εἰς ἕνα ὀρθογώνιον δύο διαδοχικαὶ πλευραί του λαμβάνονται ὡς ***βάσις*** καὶ ***ὕψος*** καὶ λέγονται ***διαστάσεις*** αὐτοῦ.



Σχ. 156.

199. Θεώρημα. ***Αἱ διαγώνιοι ὀρθογωνίου εἶναι ἴσαι.***

'Υπόθεσις: Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ *(Σχ. 157)* καὶ ΑΓ, ΒΔ αἱ διαγώνιοί του.



Σχ. 157.

'Υπόθ.	ΑΒΓΔ=ὀρθογών.
Συμπ.	ΑΓ=ΒΔ

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι: ΑΓ=ΒΔ.

'Απόδειξις: Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΑΒ ἔχουν: τὴν ΑΒ κοινήν, ΒΓ=ΑΔ, ὡς ἀπέναντι πλευρὰς παραλληλογράμμου· δηλ. ἔχουν τὰς καθέτους πλευράς των ἴσας μίαν πρὸς μίαν· ἄρα θὰ εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως θὰ ἔχουν καὶ ΑΓ=ΒΔ.

'Εδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Αἱ διαγώνιοι ὀρθογωνίου. . . .***

200. Θεώρημα. ***Κάθε παραλληλόγραμμον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς διαγωνίους του ἴσας, εἶναι ὀρθογώνιον.***

'Υπόθεσις: Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον *(Σχ. 157)*, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς διαγωνίους του ΑΓ καὶ ΒΔ ἴσας.

'Υπόθ.	ΑΒΓΔ=παραλληλόγρ. ΑΓ=ΒΔ
Συμπ.	ΑΒΓΔ=ὀρθ.

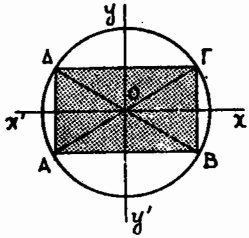
Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ ΑΒΓΔ εἶναι ὀρθογώνιον.

'Απόδειξις: Τὰ τρίγωνα ΔΑΒ καὶ ΓΒΑ ἔχουν: τὴν πλευρὰν ΑΒ κοινήν, ΑΔ=ΒΓ, ὡς ἀπέναντι πλευρὰς παραλληλογράμμου καὶ ΒΔ=ΑΓ ἐξ ὑποθέσεως· δηλ. ἔχουν καὶ τὰς τρεῖς πλευράς των ἴσας μίαν πρὸς μίαν· ἄρα θὰ εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως θὰ ἔχουν $\Delta\widehat{A}B=A\widehat{B}\Gamma$.

'Επειδὴ αἱ γωνίαι ΔΑΒ καὶ ΑΒΓ εἶναι ἴσαι καὶ παραπληρωματικαί, ὡς διαδοχικαὶ γωνίαι παραλληλογράμμου ἕπεται, ὅτι καθεμία ἐξ αὐτῶν εἶναι ὀρθή. Τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ ἔχει λοιπὸν δύο διαδοχικὰς γωνίας του ὀρθὰς καὶ ἑπομένως εἶναι ὀρθογώνιον.

'Εδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Κάθε παραλληλόγραμμον. . . .***

201. Περιγεγραμμένος κύκλος περὶ ὀρθογώνιον. Ἐπειδὴ αἱ διαγώνιοι ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι ἴσαι, τὸ μέσον Ο τῶν διαγωνίων του ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς κορυφάς του. Ἂν λοιπὸν γράψωμεν μίαν περιφέρειαν κύκλου μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα τὴν ΟΑ, ἡ περιφέρεια αὐτὴ θὰ περάσῃ ἀπὸ τὰς τέσσαρας κορυφάς του. Ὁ κύκλος εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει ἡ περιφέρεια αὐτὴ λέγεται: ***περιγεγραμμένος κύκλος περὶ τὸ ὀρθογώνιον*** ΑΒΓΔ.



Σχ. 158.

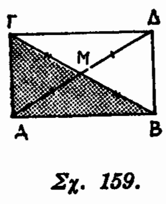
202. Ἄξων συμμετρίας ὀρθογωνίου. Αἱ διαγώνιοι τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ *(Σχ. 158)* τεμνόμεναι εἰς τὸ Ο σχηματίζουν τέσσαρα ἰσοσκελῆ τρίγωνα. Ἡ εὐθεῖα x'x, ἡ ὁποία διχοτομεῖ τὰς γωνίας ΑΟΔ καὶ ΒΟΓ εἶναι μεσοκάθετος τῶν ΑΔ καὶ ΒΓ. Ὁμοίως ἡ y'y εἶναι μεσοκάθετος τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ· ἄρα αἱ x'x καὶ y'y εἶναι ***ἄξονες συμμετρίας τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ.***

203. Ἰδιότης διαμέσου ὀρθογωνίου τριγώνου. Αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΔΓ διχοτομοῦνται εἰς τὸ Μ *(Σχ. 159)* καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἴσαι, θὰ εἶναι $ΑΜ=\frac{ΒΓ}{2}$, $ΜΒ=\frac{ΑΔ}{2}$.

Ἐπειδὴ ἡ ΑΜ εἶναι διάμεσος τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ συνάγομεν, ὅτι:

Ἡ διάμεσος ὀρθογωνίου τριγώνου, ἡ ὁποία ἄγεται ὑπὸ τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας, εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης.

Ἀντιστρόφως. ***Ἐὰν ἡ διάμεσος ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἀντιστοίχου πλευρᾶς, τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον.***



Σχ. 159.

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ *(Σχ. 159)* καὶ ΑΜ ἡ διάμεσός του. Ἔστω ὅτι εἶναι:

$$ΑΜ=\frac{ΒΓ}{2}.$$

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α.

Ὑπόθ.	ΑΒΓ τρ. ΑΜ διάμεσος $ΑΜ=\frac{ΒΓ}{2}$
Συμπ.	ΑΒΓ=ὀρθ. τρ.

Ἀπόδειξις: Προεκτείνομεν τὴν ΑΜ καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τμῆμα ΜΔ=ΑΜ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΓΔ καὶ ΒΔ

Τὸ σχηματισθὲν τετράπλευρον ΑΒΔΓ εἶναι παραλληλόγραμμον

διότι αἱ διαγώνιοί του ΑΔ καὶ ΒΓ διχοτομοῦνται εἰς τὸ Μ, ἐξ ὑποθέσεως καὶ ἐκ κατασκευῆς.

Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι καὶ $\text{ΑΜ}=\frac{\text{ΒΓ}}{2}$ ἢ $2\text{ΑΜ}=\text{ΒΓ}$ ἢ $\text{ΑΔ}=\text{ΒΓ}$· ἤτοι αἱ διαγώνιοι ΑΔ καὶ ΒΓ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΔΓ εἶναι ἴσαι· ἄρα τὸ ΑΒΔΓ εἶναι (§ 200) ὀρθογώνιον καὶ ἑπομένως ἡ γωνία του Α εἶναι ὀρθή:

Ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α.

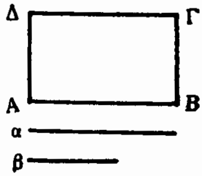
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν ἡ διάμεσος....***

204. Πόρισμα. ***Ἡ διάμεσος ὀρθογωνίου τριγώνου, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας διαιρεῖ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον εἰς δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα.***

Πράγματι· ἐδείχθη, ὅτι $\text{ΑΜ}=\frac{\text{ΒΓ}}{2}$, δηλ. ὅτι $\text{ΑΜ}=\text{ΜΒ}=\text{ΜΓ}$.

Ἐπειδὴ $\text{ΑΜ}=\text{ΜΒ}$ τὸ τρίγωνον ΑΜΒ εἶναι ἰσοσκελές. Ἐπίσης ἐπειδὴ $\text{ΑΜ}=\text{ΜΓ}$, τὸ τρίγωνον ΑΜΓ εἶναι ἰσοσκελές.

205. Πρόβλημα. ***Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ διαστάσεις α καὶ β.***



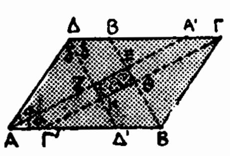
Σχ. 160.

Κατασκευάζομεν μίαν ὀρθὴν γωνίαν Α καὶ ἐπὶ τῶν πλευρῶν της λαμβάνομεν τμήματα ΑΒ=α καὶ ΑΔ=β *(Σχ. 160).*

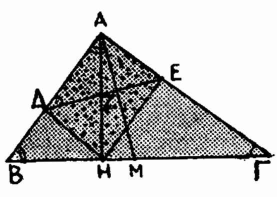
Ἀπὸ τὰ σημεῖα Β καὶ Δ φέρομεν καθέτους πρὸς τὰς ΑΒ καὶ ΑΔ ἀντιστοίχως, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Γ. Τὸ σχηματισθὲν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον ὀρθογώνιον. (Διατί;).

Ἀσκήσεις

181. (207). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν παραλληλογράμμου σχηματίζουν ὀρθογώνιον.



Σχ. ἀσκ. 181.



Σχ. ἀσκ. 182.

182. (208). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α. Ἀπὸ τὸν

πόδα Η τοῦ ὕψους ΑΗ φέρομεν τὰς καθέτους ΗΔ καὶ ΗΕ ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ. Φέρομεν καὶ τὴν διάμεσον ΑΜ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΔΕ=ΑΗ·

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\widehat{BAM}=\widehat{ABM}$ καὶ $\widehat{A\Delta E}=\widehat{A\Gamma B}$.

3ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΑΜ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ.

183. (209). Δίδεται τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, (ΑΒ=ΑΓ). Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΒΑ πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς Α καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμῆμα ΑΔ=ΑΒ· φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΔΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία ΒΓΔ εἶναι ὀρθή.

184. (210). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὰ ὕψη του ΒΒ′ καὶ ΓΓ′. Ἐὰν Δ εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΔΒ′=ΔΓ′.

185. (211). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ· ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ λαμβάνομεν ἕνα τμῆμα ΑΔ=ΑΓ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΑ ἕνα τμῆμα ΑΕ=ΑΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΔΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΕΓ.

186. (212). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὴν διχοτόμον ΑΔ τῆς γωνίας Α καὶ τὴν διχοτομον ΑΔ′ τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν πλευρὰν ΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Δ′ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ μέσον Μ τῆς ΔΔ′ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ σημεῖα Δ, Δ′ καὶ Α.

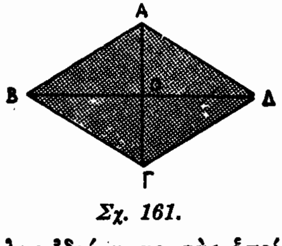
177. (213). Ἀπὸ τὸ μέσον Μ τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν κάθετον ΜΝ ἐπὶ τὴν ΑΒ. Ἐὰν τὸ Ν εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α.

188. (214). Δίδεται μία γωνία xOy καὶ ἕνα σημεῖον Α ἐντὸς αὐτῆς. Ἀπὸ τὸ Α φέρομεν τὴν ΑΒ κάθετον ἐπὶ τὴν Ox καὶ τὴν ΑΓ κάθετον ἐπὶ τὴν Oy. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὸ μέσον Μ τῆς εὐθείας ΟΑ μὲ τὸ μέσον Ν τῆς εὐθείας ΒΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ.

189. (296). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας xy λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Ο καὶ ἐκτὸς αὐτῆς ἕνα ἄλλο σημεῖον Μ. Ἔστω Μ′ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Μ πρὸς τὴν xy καὶ Μ″ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Μ πρὸς τὸ Ο. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία ΜΜ′Μ″ εἶναι ὀρθή.

3. Ρόμβος

206. Ρόμβος. *Κάθε παραλληλόγραμμον, τὸ ὁποῖον ἔχει καὶ τὰς τέσσαρας πλευράς του ἴσας, λέγεται* ***ρόμβος*** *(Σχ. 161).*



Σχ. 161.

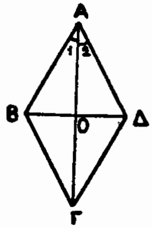
Εἶναι προφανές, ὅτι, ἐὰν ἕνα παραλληλόγραμμον ἔχῃ δύο διαδοχικὰς πλευράς του ἴσας, εἶναι ρόμβος.

Ὁ ρόμβος ἔχει ὅλας τὰς ἰδιότητας τοῦ παραλληλογράμμου· ἐκτὸς αὐτῶν ἔχει καὶ ἄλλας ἰδιότητας, τὰς ὁποίας θὰ ἐξετάσωμεν κατωτέρω.

207. Θεώρημα. ***Αἱ διαγώνιοι ἑνὸς ρόμβου τέμνονται καθέτως καὶ διχοτομοῦν τὰς γωνίας του.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω ὁ ρόμβος ΑΒΓΔ καὶ ΑΓ, ΒΔ, αἱ διαγώνιοί του, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ο.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι κάθετοι μεταξύ των καὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ ρόμβου.



Σχ. 162.

Ὑπόθ.	ΑΒ=ΒΓ=ΓΔ=ΔΑ
Συμπ.	ΑΓ ⊥ ΒΔ $\hat{A}_1=\hat{A}_2$, $\hat{B}_1=\hat{B}_2$

Ἀπόδειξις: Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΑΒ=ΒΓ=ΓΔ=ΔΑ. Ἐπίσης ἐπειδὴ ὁ ρόμβος εἶναι παραλληλόγραμμον, θὰ εἶναι ΑΟ=ΟΓ καὶ ΟΒ=ΟΔ. Εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΔ, ἡ ΑΟ εἶναι διάμεσος ἄρα θὰ εἶναι καὶ ὕψος τοῦ τριγώνου καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας Α. Ὥστε ἡ ΑΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΔ καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας Α.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἡ ΒΔ εἶναι διχοτόμος τῶν γωνιῶν Β καὶ Δ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Αἱ διαγώνιοι ἑνὸς ρόμβου. . . .***

208. Θεώρημα Ι. *(Ἀντίστροφον).* ***Ἐὰν αἱ διαγώνιοι ἑνὸς παραλληλογράμμου εἶναι κάθετοι μεταξύ των, τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι ρόμβος.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ *(Σχ. 162)*, εἰς τὸ ὁποῖον αἱ διαγώνιοί του ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι κάθετοι μεταξύ των

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ ΑΒΓΔ εἶναι ρόμβος.

Ὑπόθ.	ΑΒΓΔ παραλληλόγρ. ΑΓ ⊥ ΒΔ
Συμπ.	ΑΒ=ΒΓ=ΓΔ=ΔΑ

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ τὸ ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον θὰ εἶναι ΒΟ=ΟΔ.

Ἐξ ὑποθέσεως ὅμως ἡ ΑΟ εἶναι κάθετος εἰς τὴν ΒΔ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΔ ἡ ΑΟ εἶναι διάμεσος καὶ ὕψος του καὶ ἑπομένως (§ 115) τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ἰσοσκελές. δηλ. εἶναι ΑΒ=ΑΔ· ἐπειδὴ δύο διαδοχικαὶ πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ εἶναι ἴσαι, τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι ρόμβος.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν αἱ διαγώνιοι ἑνός. . . .***

209. Θεώρημα ΙΙ. *(Ἀντίστροφον).* ***Ἐὰν μία διαγώνιος παραλληλογράμμου εἶναι διχοτόμος μιᾶς γωνίας του, τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι ρόμβος.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ *(Σχ. 162)*, εἰς

τὸ ὁποῖον ἡ διαγώνιος ΑΓ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ ΑΒΓΔ εἶναι ρόμβος.

Ὑπόθ.	ΑΒΓΔ=παραλληλόγρ. $A_1=A_2$
Συμπ.	ΑΒ=ΒΓ=ΓΔ=ΔΑ

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ τὸ ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον, θὰ εἶναι ΒΟ=ΟΔ.

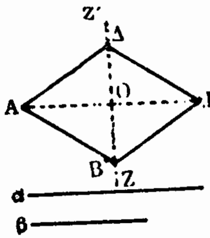
Ἐξ ὑποθέσεως ἡ ΑΟ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΔ, ἡ ΑΟ εἶναι διάμεσός του καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας Α τῆς κορυφῆς του· ἄρα (§ 115, 3ον) τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ΑΒ=ΑΔ.

Ἐπειδὴ δύο διαδοχικαὶ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΑΔ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ εἶναι ἴσαι, τὸ παραλληλόγραμμον αὐτὸ εἶναι ρόμβος.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν μία διαγώνιος....***

210. Ἄξων συμμετρίας τοῦ ρόμβου. Γνωρίζομεν ὅτι αἱ διαγώνιοι ἑνὸς ρόμβου εἶναι μεσοκάθετοι, ἡ μία τῆς ἄλλης. Ἂν λοιπὸν διπλώσωμεν τὸν ρόμβον ΑΒΓΔ *(Σχ. 162)* κατὰ μίαν διαγώνιόν του, ἔστω τὴν ΒΔ, τὰ δύο μέρη αὐτοῦ ΑΔΒ καὶ ΓΒΔ θὰ συμπέσουν. Ὥστε: *αἱ διαγώνιοι ἑνὸς ρόμβου εἶναι ἄξονες συμμετρίας τοῦ ρόμβου.*

211. Πρόβλημα. *Νὰ κατασκευασθῇ ἕνας ρόμβος, ἂν γνωρίζωμεν τὰς διαγωνίους του.*



Σχ. 163.

Φέρομεν δύο καθέτους εὐθείας ΑΓ καὶ ΖΖ' *(Σχ. 163)* καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς των Ο λαμβάνομεν ἑκατέρωθεν τοῦ Ο ἐπὶ τῆς ΑΓ τὰ τμήματα ΟΑ καὶ ΟΓ ἴσα μὲ τὸ ἥμισυ τῆς α καὶ ἐπὶ τῆς ΖΖ' τὰ τμήματα ΟΒ, ΟΔ ἴσα μὲ τὸ ἥμισυ τῆς β. Τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ὁ ζητούμενος ρόμβος. (Διατί ;).

Ἀσκήσεις

190. (215). Ἀπὸ τὸ μέσον Μ τῆς βάσεως ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν τὰς παραλλήλους ΜΔ καὶ ΜΕ πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΔΜΕ εἶναι ρόμβος.

191. (216). Δίδεται ἕνας ρόμβος ΑΒΓΔ· ἀπὸ τὴν κορυφήν του Β φέρομεν κάθετον ΒΕ ἐπὶ τὴν ΑΔ καὶ ἀπὸ τὴν κορυφὴν Δ κάθετον ΔΖ ἐπὶ τὴν ΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΒΖΔ εἶναι ὀρθογώνιον.

192. (217). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ἀπόστασις δύο παραλλήλων πλευρῶν ρόμβου εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του.

4. Τετράγωνον

212. Τετράγωνον. *Τὸ παραλληλόγραμμον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς γωνίας του ὀρθὰς καὶ τὰς πλευράς του ἴσας λέγεται* ***τετράγωνον*** *(Σχ. 164).*

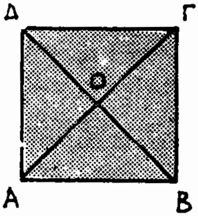
Ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον ἔχει τὰς γωνίας του ὀρθὰς καὶ τὰς πλευράς του ἴσας, ἔχει τὰς ἰδιότητας τοῦ ὀρθογωνίου καὶ τοῦ ρόμβου, δηλαδή:

Αἱ διαγώνιοι τοῦ τετραγώνου εἶναι:

1ον. ἴσαι.

2ον. εἶναι κάθετοι μεταξύ των.

καὶ ***3ον. εἶναι καὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του.***



Σχ. 164.

Καὶ *ἀντιστρόφως:*

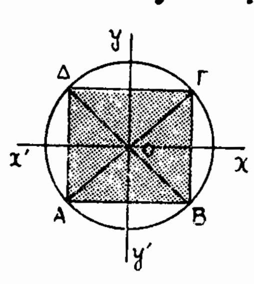
1ον. Ἐὰν αἱ διαγώνιοι παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι καὶ κάθετοι μεταξύ των, τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι τετράγωνον.

Πράγματι ἐπειδὴ αἱ διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι, τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι ὀρθογώνιον (§ 200). Ἐπειδὴ αἱ διαγώνιοί του εἶναι κάθετοι μεταξύ των, τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι ρόμβος (§ 208). Τὸ παραλληλόγραμμον λοιπὸν ἔχει τὰς γωνίας του ὀρθὰς καὶ τὰς πλευράς του ἴσας καὶ ἑπομένως εἶναι τετράγωνον.

2ον. Ἐὰν αἱ διαγώνιοι παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι καὶ ἡ μία ἐξ αὐτῶν εἶναι διχοτόμος μιᾶς γωνίας τοῦ παραλληλογράμμου, τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι τετράγωνον.

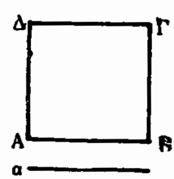
Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἀνάλογος πρὸς ἐκείνην, ποὺ ἐδόθη εἰς τὴν περίπτωσιν 1ον.

213. Ἄξων συμμετρίας ἑνὸς τετραγώνου. Τὸ κέντρον τοῦ τετραγώνου, εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τετράγωνον. Τὸ τετράγωνον ἔχει τέσσαρας ἄξονας συμμετρίας. ***Τὰς μεσοκαθέτους τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του,*** ὅπως εἰς τὸ ὀρθογώνιον καὶ τὰς ***διαγωνίους του,*** ὅπως εἰς τὸν ρόμβον.



Σχ. 165.

214. Πρόβλημα. ***Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράγωνον, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν πλευράν του.***



Σχ. 166

Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν τμῆμα ΑΒ *(Σχ. 166)* ἴσον μὲ τὴν

δοθεῖσαν πλευρὰν α τοῦ τετραγώνου. Ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β ὑψοῦμεν τὰς καθέτους ΑΔ καὶ ΒΓ πρὸς τὴν ΑΒ, πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς καὶ ἴσας μὲ τὴν δοθεῖσαν πλευρὰν α. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΔΓ καὶ τὸ σχηματισθὲν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον τετράγωνον.

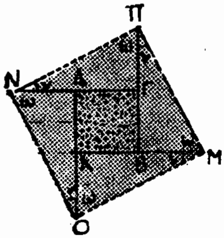
Ἀσκήσεις

193. (218). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ἑνὸς ὀρθογωνίου, τεμνόμεναι, σχηματίζουν τετράγωνον.

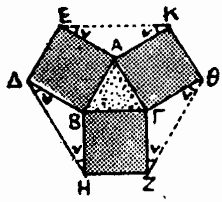
194. (219). Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον μιᾶς διαγωνίου τετραγώνου φέρομεν εὐθείας πρὸς τὰς κορυφάς του. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράγωνον ἐχωρίσθη εἰς δύο ζεύγη ἐξ ἴσων τριγώνων.

195. (220). Δίδεται ἕνα τετράγωνον ΑΒΓΔ· προεκτείνομεν τὰς ἀπέναντι πλευράς του κατὰ μήκη ἴσα πρὸς τὰς πλευρὰς καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν· καὶ λαμβάνομεν ΒΜ=ΑΒ, ΔΝ=ΓΔ, ΓΠ=ΒΓ, ΑΘ=ΔΑ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΜΝ καὶ ΘΠ εἶναι ἴσαι.

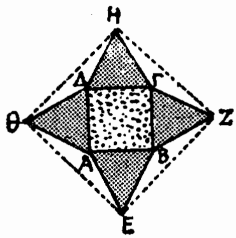
196. (221). Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζομεν τετράγωνα, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐκτὸς τοῦ τριγώνου. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ γωνίαι τοῦ σχηματιζομένου ἑξαγώνου εἶναι ἴσαι καὶ ὅτι αἱ πλευραί του σχηματίζουν δύο ὁμάδας τριῶν ἴσων πλευρῶν.



Σχ. ἀσκ. 195.



Σχ. ἀσκ. 196.



Σχ. ἀσκ. 197.

197. (222). Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ἑνὸς τετραγώνου ΑΒΓΔ κατασκευάζομεν τέσσαρα ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΒΕ, ΒΓΖ, ΓΔΗ, ΔΑΘ, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐκτὸς τοῦ τετραγώνου. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ εἶναι κορυφαὶ τετραγώνου.

198. (293). Νὰ ἐξετασθῇ ἡ συμμετρία : 1ον εἰς ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον. 2ον εἰς ἕνα παραλληλόγραμμον. 3ον εἰς ἕνα ὀρθογώνιον. 4ον εἰς ἕνα ρόμβον. 5ον εἰς ἕνα τετράγωνον.

199. (294). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἐὰν ἕνα τετράπλευρον ἔχῃ ἕνα κέντρον συμμετρίας, τὸ τετράπλευρον αὐτὸ εἶναι παραλληλόγραμμον.

200. (228). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράγωνον :

1ον. Ἂν γνωρίζωμεν τὴν περίμετρόν του.

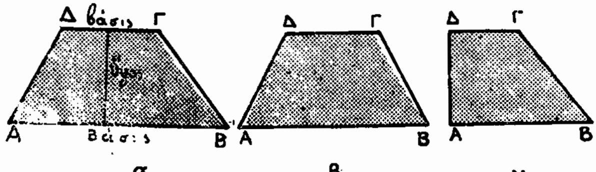
2ον. Ἂν γνωρίζωμεν τὴν διαγώνιόν του.

5. Τραπέζια

214. Τραπέζιον. *Τὸ τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει δύο μόνον πλευρὰς παραλλήλους, λέγεται* ***τραπέζιον.***

Π.χ. Τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ *(Σχ. 167)*, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΓΔ παραλλήλους εἶναι ἕνα τραπέζιον.

Αἱ δύο παράλληλοι πλευραὶ τοῦ τραπεζίου λέγονται ***βάσεις τοῦ***



Σχ. 167.

τραπεζίου *(μεγάλη βάσις καὶ μικρὰ βάσις)*, ἡ δὲ ἀπόστασις αὐτῶν λέγεται ***ὕψος*** τοῦ τραπεζίου.

Εἰς κάθε τραπέζιον, αἱ γωνίαι αἱ προσκείμεναι εἰς μίαν ἀπὸ τὰς μὴ παραλλήλους πλευράς του εἶναι παραπληρωματικαὶ (§ 169, 4ον), δηλ. εἶναι $\widehat{A}+\widehat{\Delta}=180^\circ$, $\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=180^\circ$.

Ἕνα τραπέζιον λέγεται ***ἰσοσκελὲς τραπέζιον,*** *ὅταν αἱ δύο, μὴ παράλληλοι, πλευραί του εἶναι ἴσαι.*

Π.χ. Τὸ τραπέζιον *(Σχ. 167 β)* εἶναι ἰσοσκελές, ἐὰν ΑΔ=ΒΓ.

Ἕνα τραπέζιον λέγεται ***ὀρθογώνιον τραπέζιον,*** *ὅταν ἡ μία ἀπὸ τὰς μὴ παραλλήλους πλευράς του εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς βάσεις του.*

Π.χ. Τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ *(Σχ. 167 γ)* εἶναι ὀρθογώνιον τραπέζιον.

Διάμεσος τραπεζίου *λέγεται ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του.*

215. Θεώρημα. ***Εἰς κάθε ἰσοσκελὲς τραπέζιον:***

1ον. αἱ γωνίαι, αἱ προσκείμεναι εἰς μίαν ἀπὸ τὰς βάσεις του, εἶναι ἴσαι.

2ον. αἱ διαγώνιοί του εἶναι ἴσαι.

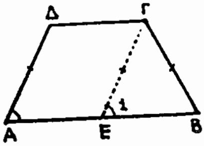
Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τραπέζιον ΑΒΓΔ *(Σχ. 168)*, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ΔΑ=ΓΒ.

1ον. *Συμπέρασμα:* Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\widehat{A}=\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Delta}=\widehat{\Gamma}$.

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Γ φέρομεν τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ΔΑ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν πλευρὰν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Ε. Τὸ τετρά-

πλευρον ΑΕΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ ἀπέναντι πλευραί του εἶναι παράλληλοι· ἄρα θὰ εἶναι ΔΑ=ΓΕ· ἀλλ' ἐπειδή, ἐξ ὑποθέσεως, εἶναι καὶ ΔΑ=ΓΒ, θὰ εἶναι ΓΕ=ΓΒ. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΓΕΒ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι $\widehat{E}_1=\widehat{B}$.

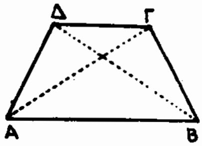
Ὑπόθ.	ΑΒ//ΓΔ ΑΔ=ΒΓ
Συμπ.	1ον. $\widehat{A}=\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}=\widehat{\Delta}$ 2ον. ΑΓ=ΒΔ



Σχ. 168.

'Αλλὰ $\widehat{E}_1=\widehat{A}$, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ΔΑ καὶ ΓΕ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΒ· ἄρα θὰ εἶναι καὶ $\widehat{A}=\widehat{B}$.

Αἱ γωνίαι Δ καὶ Γ εἶναι ἴσαι, ὡς παραπληρωματικαὶ τῶν ἴσων γωνιῶν Α καὶ Β.



Σχ. 169.

2ον. Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν ΑΓ καὶ ΒΔ *(Σχ. 169)* αἱ διαγώνιαι τοῦ ἰσοσκελοῦς τραπεζίου ΑΒΓΔ.

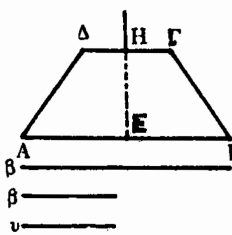
Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι: ΑΓ=ΒΔ.

'Απόδειξις: Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ ἔχουν τὴν πλευρὰν ΑΒ κοινήν, ΒΓ=ΑΔ, ἐξ ὑποθέσεως, καὶ $\widehat{B}=\widehat{A}$, ὡς ἐδείχθη εἰς τὴν περίπτωσιν 1ον· ἄρα θὰ εἶναι ἴσα (§ 119) καὶ ἑπομένως θὰ ἔχουν καὶ ΑΓ=ΒΔ.

'Εδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Εἰς κάθε ἰσοσκελές. . . .***

216. Πρόβλημα. ***Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ἰσοσκελὲς τραπέζιον, ἂν γνωρίζωμεν τὰς δύο βάσεις του β καὶ β' καὶ τὸ ὕψος του υ.***

'Επὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν ἕνα τμῆμα ΑΒ *(Σχ. 170)* ἴσον μὲ τὴν μεγαλυτέραν βάσιν του β. Ἔπειτα φέρομεν τὴν μεσοκάθετον ΕΗ τῆς ΑΒ καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς ἕνα τμῆμα ΕΗ=υ καὶ ἀπὸ τὸ Η φέρομεν τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ. 'Επὶ τῆς παραλλήλου αὐτῆς καὶ ἑκατέρωθεν τοῦ Η λαμβάνομεν τμήματα ΗΓ καὶ ΗΔ ἴσα μὲ τὸ ἥμισυ τῆς β'. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΔ καὶ ΒΓ καὶ τὸ σχηματιζόμενον τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον ἰσοσκελὲς τραπέζιον. (Διατί ;).



Σχ. 170.

'Ασκήσεις

201. (223). Δίδεται τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ· ἀπὸ τὰ ἄκρα Α καὶ Β τῆς μεγάλης βάσεώς του φέρομεν παραλλήλους ΑΜ καὶ ΒΝ πρὸς τὰς πλευρὰς ΒΓ καὶ

ΑΔ ἀντιστοίχως, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν προέκτασιν τῆς ΔΓ εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\widehat{M}=\widehat{B}$ καὶ $\widehat{N}=\widehat{A}$.

202. (224). Ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα τῶν παραλλήλων πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τραπεζίου εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς πλευρὰς αὐτάς.

203. (225). Ἐὰν ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα δύο μὴ διαδοχικῶν πλευρῶν τετραπλεύρου εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς πλευρὰς αὐτάς, τὸ τετράπλευρον εἶναι ἰσοσκελὲς τραπέζιον.

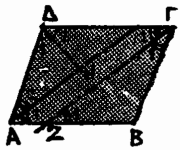
204. (226). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ περίμετρος ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΔ=ΒΓ), ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι αἱ ἀμβλεῖαι γωνίαι του εἶναι διπλάσιαι τῶν ὀξειῶν γωνιῶν του καὶ ὅτι ἡ διαγώνιος ΑΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ. Ἡ μικρὰ βάσις ΓΔ ἔχει μῆκος β μέτρα

205. (227) Νὰ διατυπωθῇ καὶ νὰ ἀποδειχθῇ τὸ ἀντίστροφον τοῦ θεωρήματος τῆς § 215.

'Ασκήσεις ἐπὶ τοῦ ΣΤ' Κεφαλαίου

206. (188). Δίδεται τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ. Ἀπὸ τὸ μέσον Δ τῆς βάσεώς του ΒΓ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ Α, εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

207. (189). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ. Φέρομεν τὴν διχοτόμον ΑΔ τῆς γωνίας Α, ἡ ὁποία τέμνει τὴν πλευρὰν ΒΓ εἰς τὸ Δ. Ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν πλευρὰν ΑΓ εἰς τὸ Ε. Ἀπὸ τὸ Ε φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ζ Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΑΕ=ΒΖ.



Σχ. ἀσκ. 208.

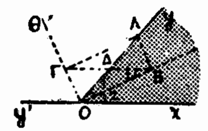
208. (190). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν ἀπέναντι γωνιῶν παραλληλογράμμου εἶναι παράλληλοι, αἱ δὲ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι πρόσκεινται πρὸς τὴν αὐτὴν πλευράν, εἶναι κάθετοι.

209. (230). Δίδεται μία γωνία xOy· ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Α τῆς πλευρᾶς Oy φέρομεν τὴν ΑΒ κάθετον ἐπὶ τὴν ἐσωτερικὴν διχοτόμον τῆς γωνίας xOy καὶ τὴν ΑΓ κάθετον ἐπὶ τὴν ἐξωτερικὴν διχοτόμον τῆς γωνίας xOy. Νὰ ἀποδειχθῇ : 1ον ὅτι τὸ τετράπλευρον ΟΒΑΓ εἶναι ὀρθογώνιον. 2ον ὅτι ἡ ΒΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν Ox καὶ διχοτομεῖ τὴν ΟΑ.

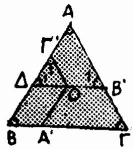
210. (231). Δίδεται ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ· ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Ο τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς τοῦ τριγώνου, φέρομεν παραλλήλους ΟΑ', ΟΒ', ΟΓ' πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Α', Β', Γ'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα ΟΑ'+ΟΒ'+ΟΓ' εἶναι ἴσον μὲ μίαν ἀπὸ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου.

211. (232). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν ΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε ἀντιστοίχως. Φέρομεν τὴν διάμεσον ΑΜ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς της

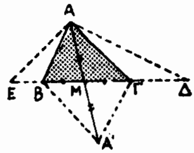
λαμβάνομεν τμῆμα ΜΑ'=ΑΜ. Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΒΑ'Γ εἶναι παραλληλόγραμμον. 2ον ὅτι αἱ γωνίαι ΑΒΑ' καὶ ΕΑΔ εἶναι ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί.



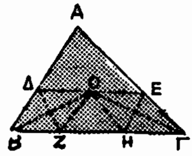
Σχ. ἀσκ. 209.



Σχ. ἀσκ. 210.



Σχ. ἀσκ. 211.

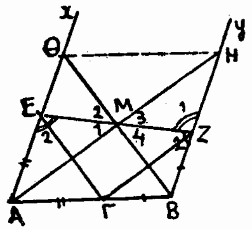


Σχ. ἀσκ. 212.

212. (233). Ἀπὸ τὸ κοινὸν σημεῖον Ο τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν μίαν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Δ καὶ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ε. Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον. Ὅτι ΔΕ=ΒΔ+ΓΕ. 2ον. Ἀπὸ τὸ Ο φέρομεν τὴν ΟΖ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ζ· ἐπίσης φέρομεν τὴν ΟΗ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Η. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΟΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΗ καὶ ἡ ΟΒ κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΖ.

213. (234). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές, ὅταν ἡ εὐθεῖα ΔΕ, ἡ ὁποία συνδέει τοὺς πόδας τῶν διχοτόμων ΒΕ καὶ ΓΔ τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ, εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ.

214. (235). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ΑΒ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Γ· ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β φέρομεν δύο τυχούσας παραλλήλους Ax καὶ By πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΒ. Ἐπὶ τῆς Ax λαμβάνομεν τμῆμα ΑΕ=ΑΓ καὶ ἐπὶ τῆς By τμῆμα ΒΖ=ΒΓ. Ἐὰν Μ εἶναι τὸ μέσον τῆς εὐθείας ΕΖ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία ΑΜΒ εἶναι ὀρθή.



Σχ. ἀσκ. 214.

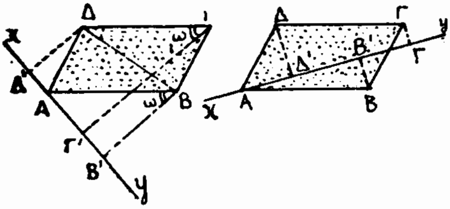
215. (236). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἡ γωνία Β εἶναι διπλασία τῆς γωνίας Γ. Ἀπὸ τὸ μέσον Μ τῆς ΑΓ φέρομεν τὴν παράλληλον πρὸς τὴν διχοτόμον ΒΔ τῆς γωνίας Β· ἡ παράλληλος αὐτὴ τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ν. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΝΓ εἶναι ὀρθογώνιον.

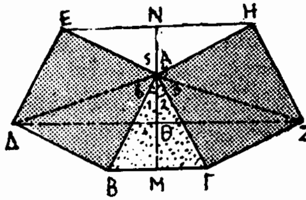
216. (237). Ἐὰν εἰς ἕνα παραλληλόγραμμον ἡ μία ἀπὸ τὰς δύο διαδοχικὰς πλευράς του εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς τέμνονται καθέτως.

217. (238). Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α ἑνὸς παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρομεν μίαν τυχοῦσαν εὐθεῖαν xAy. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς Γ ἀπὸ τὴν xy εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν Β καὶ Δ ἀπὸ τὴν xy, καθόσον ἡ xy κεῖται ἐκτὸς τοῦ παραλληλογράμμου ἢ τέμνει αὐτό.

218. (239). Δίδεται ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ. Μὲ πλευρὰς τὰς ἴσας

πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ κατασκευάζομεν τὰ τετράγωνα ΑΒΔΕ καὶ ΑΓΖΗ, ἐκτὸς τοῦ τριγώνου. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΔΖ καὶ ΕΗ εἶναι παράλληλοι.


Σχ. ἀσκ. 217.


Σχ. ἀσκ. 218.

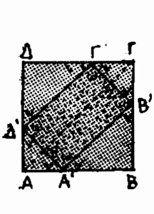
219. (240). Δίδεται ἕνας ῥόμβος ΑΒΓΔ· ἐπὶ τῶν πλευρῶν του ΑΒ καὶ ΑΔ λαμβάνομεν μήκη ΑΑ' καὶ ΑΔ' ἴσα, ἐπὶ δὲ τῶν πλευρῶν του ΓΒ καὶ ΓΔ λαμβάνομεν μήκη ΓΒ' καὶ ΓΓ', ἀντιστοίχως, ἴσα πρὸς τὰ πρῶτα. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Α', Β' Γ', Δ' εἶναι κορυφαὶ ὀρθογωνίου.

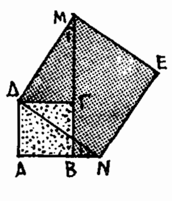
220. (241). Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ἑνὸς τετραγώνου ΑΒΓΔ λαμβάνομεν κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν μήκη ΑΑ'=ΒΒ'=ΓΓ'=ΔΔ'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Α', Β', Γ', Δ' εἶναι κορυφαὶ τετραγώνου.

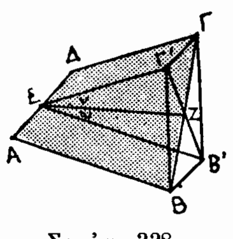
221. (242). Δίδεται τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ· ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΔ τῆς γωνίας Α λαμβάνομεν τμήματα ΑΑ'=ΑΔ'· ἐπίσης ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΓΒ καὶ ΓΔ τῆς γωνίας Γ λαμβάνομεν τμήματα ΓΒ'=ΓΓ' ἴσα πρὸς τὰ ΑΑ' καὶ ΑΔ'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Α', Β', Γ', Δ' εἶναι κορυφαὶ ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι σταθερά.

222. (243). Δίδεται ἕνα τετράγωνον ΑΒΓΔ· ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΔ καὶ ΔΓ λαμβάνομεν τμήματα ΑΜ καὶ ΔΝ ἴσα. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΒΜ καὶ ΑΝ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΑΝ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΜ.

223. (244). Δίδεται ἕνα τετράγωνον ΑΒΓΔ. Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΑΒ κατὰ ἕνα μῆκος ΑΝ>ΑΒ. Ἐπίσης προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΒΓ καὶ λαμβάνομεν ἕνα μῆκος ΓΜ=ΑΝ. Κατασκευάζομεν τὸ παραλληλόγραμμον ΔΝΕΜ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τοῦτο εἶναι τετράγωνον.


Σχ. ἀσκ. 221.


Σχ. ἀσκ. 223.


Σχ. ἀσκ. 228.

224. (245). Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ἑνὸς παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ κατασκευάζομεν τέσσαρα τετράγωνα ΑΒΕΖ, ΒΓΗΘ, ΓΔΙΚ, ΔΑΛΜ, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐκτὸς

τοῦ παραλληλογράμμου. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ κέντρα Π, Ρ, Σ, Τ τῶν τεσσάρων τετραγώνων εἶναι κορυφαὶ ἑνὸς ἄλλου τετραγώνου.

225. (246). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν ἡ μικροτέρα βάσις ἑνὸς τραπεζίου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του, αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν, ποὺ πρόσκεινται εἰς τὴν μεγαλυτέραν βάσιν, τέμνουν τὴν μικροτέραν βάσιν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

226. (247). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ὅταν ἡ μεγαλυτέρα βάσις ἑνὸς τραπεζίου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του, αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν, ποὺ πρόσκεινται εἰς τὴν μικροτέραν βάσιν τέμνουν τὴν μεγάλην βάσιν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

227. (248). Ἂν ἀπὸ τὰς κορυφὰς ἑνὸς τετραπλεύρου φέρωμεν παραλλήλους πρὸς τὰς διαγωνίους του σχηματίζεται ἕνα παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ δοθέντος τετραπλεύρου.

228. (249). Δίδεται ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι ἴσαι. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΕΖ, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του σχηματίζει ἴσας γωνίας μὲ τὴν ΑΒ καὶ ΔΓ.

229. (250). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ. Αἱ μεσοκάθετοι ΔΟ, ΕΟ τῶν πλευρῶν του ΑΒ, ΒΓ, προεκτεινόμεναι, τέμνουν τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Ζ, Η ἀντιστοίχως. Ἐὰν σχηματίσωμεν τὸ παραλληλόγραμμον ΗΒΖΘ, νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ ΟΘ εἶναι μεσοκάθετος τῆς πλευρᾶς ΑΓ.

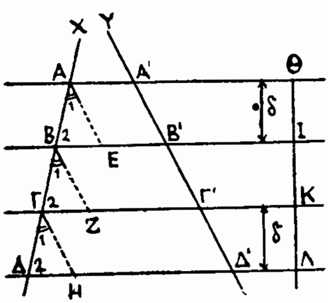
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ'.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΤΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ

---

217. Θεώρημα. ***Ἐὰν παράλληλοι εὐθεῖαι τέμνουν δύο ἄλλας εὐθείας καὶ ὁρίζουν ἴσα τμήματα ἐπὶ τῆς μιᾶς εὐθείας, θὰ ὁρίζουν ἴσα τμήματα καὶ ἐπὶ τῆς δευτέρας εὐθείας.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ', ΔΔ' *(Σχ. 171)*, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς εὐθείας Χ καὶ Υ καὶ ἔστω ὅτι εἶναι ΑΒ=ΒΓ=ΓΔ.



Σχ. 171.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι θὰ εἶναι καὶ Α'Β'=Β'Γ'=Γ'Δ'.

Ὑπόθ.	ΑΑ'//ΒΒ'//ΓΓ'//ΔΔ' ΑΒ=ΒΓ=ΓΔ
Συμπ.	Α'Β'=Β'Γ'=Γ'Δ'

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ φέρομεν παραλλήλους ΑΕ, ΒΖ, ΓΗ πρὸς τὴν εὐθεῖαν Υ. Αἱ ΑΕ, ΒΖ, ΓΗ εἶναι παράλληλοι μεταξύ των, ὡς παράλληλοι πρὸς τὴν Υ. Τὰ σχηματισθέντα τρίγωνα ΑΒΕ, ΒΓΖ, ἔχουν: τὰς πλευρὰς ΑΒ=ΒΓ, ἐξ ὑποθέσεως, $\widehat{A}_1=\widehat{B}_1$, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ΑΕ καὶ ΒΖ τεμνομένων ὑπὸ τῆς Χ, $\widehat{B}_2=\widehat{\Gamma}_2$, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ΒΒ' καὶ ΓΓ' τεμνομένων ὑπὸ τῆς Χ· δηλ. ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας ἴσας· ἄρα θὰ εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως θὰ ἔχουν καὶ ΑΕ=ΒΖ. Ἀλλὰ ἐπειδὴ ΑΕ=Α'Β' καὶ ΒΖ=Β'Γ', ὡς ἀπέναντι πλευραὶ τῶν παραλληλογράμμων ΑΕΒ'Α' καὶ ΒΖΓ'Β', θὰ εἶναι καὶ Α'Β'=Β'Γ' (1)

Ἐὰν λάβωμεν τὰ τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΓΔΗ καὶ ἐργασθῶμεν ὁμοίως, θὰ εὕρωμεν, ὅτι Α'Β'=Γ'Δ' (2)

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι

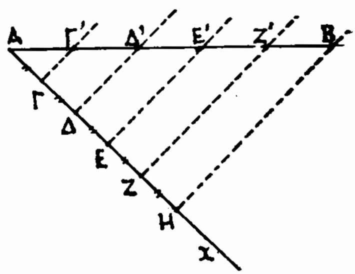
Α'Β'=Β'Γ'=Γ'Δ'.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν παράλληλοι εὐθεῖαι. . . .***

218. Ἰσαπέχουσαι παράλληλοι. Ἐὰν αἱ παράλληλοι **εὐθεῖαι** ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′, ΔΔ′ *(Σχ. 171)* ὁρίζουν ἴσα τμήματα ἐπὶ τῆς **τεμνούσης** αὐτὰς εὐθείας Χ, δηλ. ἐὰν εἶναι ΑΒ=ΒΓ=ΓΔ, θὰ **ὁρίζουν** ἴσα τμήματα καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου ΘΛ, ἡ ὁποία τέμνει αὐτάς· **δηλ.** θὰ εἶναι ΘΙ=ΙΚ=ΚΛ. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ **παράλληλοι** ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′, ΔΔ′ λέγονται ***ἰσαπέχουσαι παράλληλοι.***

219. Ἐφαρμογή. Πρόβλημα. ***Νὰ διαιρεθῇ ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα εἰς ὁσαδήποτε ἴσα μέρη.***

Ἔστω ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ, τὸ ὁποῖον θέλομεν **νὰ διαιρέσωμεν** εἰς ἴσα μέρη, ἔστω εἰς 5 ἴσα μέρη. Πρὸς τοῦτο **ἀπὸ τὸ ἕνα** ἄκρον Α τοῦ ΑΒ φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν Αx. Ἐπὶ τῆς Αx **λαμβάνομεν**, μὲ τὸν διαβήτην, πέντε ἴσα διαδοχικὰ τμήματα ΑΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΗ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΒΗ καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα Α, Γ, Δ, Ε, Ζ, φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΒΗ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα, Α, Γ′, Δ′, Ε′, Ζ′. Λέγομεν, ὅτι τὰ τμήματα ΑΓ′, Γ′Δ′, Δ′Ε′, Ε′Ζ′, Ζ′Β εἶναι ἴσα μεταξύ των.



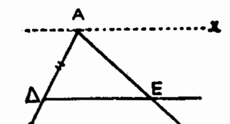
Σχ. 172.

Πράγματι· αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΑ′, ΓΓ′, ΔΔ′, ΕΕ′, ΖΖ′, ΗΒ ὁρίζουν ἴσα τμήματα, ἐκ κατασκευῆς, ἐπὶ τῆς Αx· ἄρα θὰ ὁρίζουν ἴσα τμήματα καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ, τὴν ὁποίαν τέμνουν· ἤτοι θὰ εἶναι

ΑΓ′=Γ′Δ′=Δ′Ε′=Ε′Ζ′=Ζ′Β.

220. Πόρισμα Ι. ***Ἐὰν ἀπὸ τὸ μέσον μιᾶς πλευρᾶς τριγώνου φέρωμεν παράλληλον πρὸς ἄλλην πλευράν του, ἡ παράλληλος αὐτὴ θὰ περάσῃ ἀπὸ τὸ μέσον τῆς τρίτης πλευρᾶς τοῦ τριγώνου.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Δ τὸ μέσον τῆς **πλευρᾶς** ΑΒ· δηλ. ἔστω ὅτι ΑΔ=ΔΒ. Ἀπὸ **τὸ Δ** φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ σημεῖον Ε.



Σχ. 173.

Ὑπόθ.	ΑΔ=ΔΒ ΔΕ//ΒΓ
Συμπ.	ΑΕ=ΕΓ

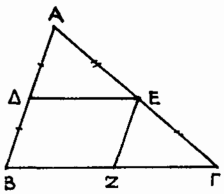
Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι **ΑΕ=ΕΓ.**

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α **φέρομεν** μίαν εὐθεῖαν Αx παράλληλον πρὸς **τὴν ΒΓ**, ἡ ὁποία, θὰ εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὴν ΔΕ.

Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι Ax, ΔΕ, ΒΓ τέμνουν τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ ὁρίζουν ἐπὶ τῆς ΑΒ ἴσα τμήματα, ΑΔ=ΔΒ· ἄρα θὰ ὁρίζουν ἴσα τμήματα καὶ ἐπὶ τῆς ΑΓ· δηλ. θὰ εἶναι ΑΕ=ΕΓ.

221. Πόρισμα ΙΙ. ***Ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα δύο πλευρῶν τριγώνου εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευράν του καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Δ καὶ Ε τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του ΑΒ καὶ ΑΓ.



Σχ. 174.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΔΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ΒΓ.

Ὑπόθ.	ΑΔ=ΔΒ ΑΕ=ΕΓ
Συμπ.	ΔΕ//ΒΓ $ΔΕ=\frac{ΒΓ}{2}$

Ἀπόδειξις: Ἂν φέρωμεν ἀπὸ τὸ μέσον Δ τῆς ΑΒ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, αὐτὴ θὰ περάσῃ ἀπὸ τὸ μέσον Ε τῆς ΑΓ (§ 220) καὶ ἑπομένως θὰ συμπέσῃ μὲ τὴν ΔΕ.

Ἂν τώρα φέρωμεν ἀπὸ τὸ Ε παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, αὐτὴ θὰ περάσῃ ἀπὸ τὸ μέσον Ζ τῆς ΒΓ καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι

$$ΒΖ=ΖΓ=\frac{ΒΓ}{2}.$$

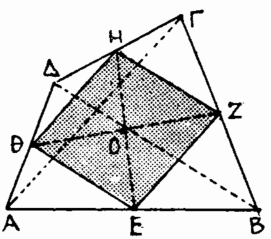
Ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρον ΔΒΖΕ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ ἀπέναντι πλευραί του εἶναι παράλληλοι, θὰ εἶναι

$$ΔΕ=ΒΖ \quad ἢ \quad ΔΕ=\frac{ΒΓ}{2}.$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: *Ἡ εὐθεῖα. . . .*

222· Θεώρημα. ***Τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τετραπλεύρου εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου***

Ὑπόθεσις: Ἔστω ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ (*Σχ. 175*) καὶ Ε, Ζ, Η, Θ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ.



Σχ. 175.

Ὑπόθ.	ΑΕ=ΕΒ ΒΖ=ΖΓ ΓΗ=ΗΔ ΔΘ=ΘΑ
Συμπ.	ΕΖΗΘ=παραλ- ληλόγραμμον

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὴν διαγώνιον ΑΓ.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΔΑΓ, ἡ εὐθεῖα ΘΗ συνδέει τὰ μέσα δύο πλευρῶν του καὶ ἑπομένως εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευράν του ΑΓ καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς (§ 221).

Ὁμοίως εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἡ εὐθεῖα ΕΖ συνδέει τὰ μέσα τῶν δύο πλευρῶν του καὶ ἑπομένως εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν ΑΓ καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς.

Ἐπειδὴ αἱ ΘΗ καὶ ΕΖ εἶναι ἴσαι μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ΑΓ καὶ παράλληλοι πρὸς αὐτήν, θὰ εἶναι καὶ ἴσαι μεταξύ των καὶ παράλληλοι· ἄρα τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ δύο ἀπέναντι πλευραί του ΕΖ καὶ ΘΗ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι (§ 191).

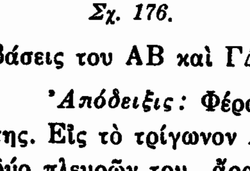
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Τὰ μέσα τῶν πλευρῶν....***

223. Πόρισμα. ***Αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τετραπλεύρου διχοτομοῦνται.***

Αἱ εὐθεῖαι ΕΗ καὶ ΖΘ *(Σχ. 175)*, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ εἶναι διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου ΕΖΗΘ καὶ ἑπομένως διχοτομοῦνται.

224. Θεώρημα. ***Ἡ διάμεσος τραπεζίου εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις του καὶ ἴση μὲ τὸ ἡμιάθροισμα αὐτῶν.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ *(Σχ. 176)* καὶ Ε, Ζ τὰ μέσα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του ΑΔ καὶ ΒΓ.



Σχ. 176.

Ὑπόθ.	ΑΕ=ΕΔ ΒΖ=ΖΓ
Συμπ.	ΕΖ//ΑΒ $ΕΖ=\frac{ΑΒ+ΓΔ}{2}$

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν ὅτι ὅτι ἡ διάμεσος ΕΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις του ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ ἴση μὲ $\frac{ΑΒ+ΓΔ}{2}$.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὴν διαγώνιον ΑΓ καὶ ἔστω Μ τὸ μέσον της. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΔΓ, ἡ εὐθεῖα ΕΜ συνδέει τὰ μέσα Ε καὶ Μ δύο πλευρῶν του, ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΔΓ καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς (§ 221). Ὁμοίως εἰς τὸ τρίγωνον ΓΑΒ, ἡ εὐθεῖα ΜΖ συνδέει τὰ μέσα Μ καὶ Ζ δύο πλευρῶν του· ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευράν του ΑΒ καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς.

Αἱ εὐθεῖαι ΕΜ καὶ ΜΖ, ὡς παράλλληλοι πρὸς τὰς παραλλήλους ΑΒ καὶ ΔΓ καὶ ἀγόμεναι ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Μ ἀποτελοῦν μίαν εὐθεῖαν ΕΜΖ παράλληλον πρὸς τὰς ΑΒ καὶ ΔΓ.

Ἐδείχθη ἀνωτέρω, ὅτι $ΕΜ = \frac{ΔΓ}{2}$ καὶ $ΜΖ = \frac{ΑΒ}{2}$.

Ἄρα θὰ εἶναι $ΕΜ + ΜΖ = \frac{ΔΓ}{2} + \frac{ΑΒ}{2}$ ἢ $ΕΖ = \frac{ΔΓ + ΑΒ}{2}$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἡ διάμεσος τραπεζίου. . . .***

Διὰ τοῦτο ἡ διάμεσος τραπεζίου λέγεται καί: ***μέση βάσις*** αὐτοῦ.

Ἀσκήσεις

230. (251). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τριγώνου μὲ μίαν ἀπὸ τὰς κορυφάς του, εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου.

231. (252). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου εἶναι κορυφαὶ ἄλλου τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ πρώτου ἀντιστοίχως καὶ ἴσαι μὲ τὰ ἡμίση αὐτῶν.

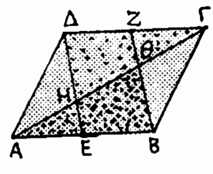
232. (253). Αἱ εὐθεῖαι. αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου διαιροῦν τὸ τρίγωνον εἰς τέσσαρα ἴσα τρίγωνα.

233. (254). Ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα δύο πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου, διχοτομεῖ τὴν διάμεσον, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν τρίτην πλευράν του.

234. (267). Τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου καὶ ὁ ποὺς ἑνὸς ὕψους του εἶναι κορυφαὶ ἰσοσκελοῦς τραπεζίου.

235 (255). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὴν διάμεσον ΒΔ καὶ ἔστω Ε τὸ μέσον αὐτῆς. Φέρομεν ἔπειτα τὴν εὐθεῖαν ΑΕ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ΖΓ=2ΒΖ.

236. (256). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὰς ἀπέναντι κορυφὰς παραλληλογράμμου εἰς τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του, διαιροῦν τὴν διαγώνιόν του εἰς τρία ἴσα μέρη.



Σχ. ἀσκ. 236.

237. (257). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν:

1ον. Ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι κορυφαὶ ρόμβου.

2ον. Ἑνὸς ρόμβου εἶναι κορυφαὶ ὀρθογωνίου

3ον. Ἑνὸς τετραγώνου εἶναι κορυφαὶ ἄλλου τετραγώνου.

238. (298). Ἐὰν ἕνα σχῆμα ἔχῃ ἄξονα συμμετρίας καὶ ἕνα κέντρον συμμετρίας, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος αὐτοῦ, θὰ ἔχῃ καὶ δεύτερον ἄξονα συμμετρίας κάθετον ἐπὶ τὸν πρῶτον εἰς τὸ κέντρον συμμετρίας αὐτοῦ.

239. (311). Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν xΑy. Ἀπὸ τὰς κορυφὰς Β καὶ Γ φέρομεν καθέτους ΒΒ′ καὶ ΓΓ′ ἐπὶ τὴν xΑy. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ μέσον Δ τῆς ΒΓ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ σημεῖα Β′ καὶ Γ′.

240. (323). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν

ἑνὸς τριγώνου εἶναι μικρότερον τῆς περιμέτρου καὶ μεγαλύτερον τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ τριγώνου.

241. (351). Ἐὰν ἡ γωνία Α ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ὀξεῖα, ὀρθή, ἢ ἀμβλεῖα, ἡ διάμεσός του, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α εἶναι μεγαλυτέρα, ἴση, ἢ μικροτέρα τοῦ ἡμίσεως τῆς πλευρᾶς ΒΓ.

242. (352). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τυχὸν σημεῖον ἐντὸς ἑνὸς τριγώνου εἰς τὰς κορυφάς του εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο μεγαλυτέρων πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

243. (355). Ἐὰν αἱ διχοτόμοι δύο γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴσαι, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

244. (356). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς τὴν μεγαλυτέραν πλευρὰν ἑνὸς τριγώνου ἀντιστοιχεῖ ἡ μικροτέρα διχοτόμος γωνίας του.

245. (340). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ. Φέρομεν τὴν διχοτόμον ΑΔ καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΑΒ ἕνα μῆκος ΑΓ′=ΑΓ καὶ ἐπὶ τῆς ΑΓ ἕνα μῆκος ΑΒ′=ΑΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Β′, Γ′ καὶ Δ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

246. (342). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὸ ὕψος του ΑΗ, τὴν διχοτόμον ΑΔ τῆς γωνίας Α καὶ τὴν διάμεσον ΑΜ. Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. Ὅτι ἡ διχοτόμος ΑΔ κεῖται ἐντὸς τῆς γωνίας ΗΑΓ.

2ον. Ὅτι ΔΓ>ΒΔ.

3ον. Ὅτι ἡ διχοτόμος ΑΔ δὲν ὑπερβαίνει τὴν διάμεσον ΑΜ.

247. (258). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τραπεζίου εἶναι κορυφαὶ ρόμβου.

248. (259). Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τετραπλεύρου εἶναι ἴσαι, τὸ τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ δοθέντος τετραπλεύρου, εἶναι ὀρθογώνιον.

249. (260). Ἐὰν μία βάσις τραπεζίου εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης, ἡ διάμεσός του διαιρεῖται εἰς τρία ἴσα μέρη ὑπὸ τῶν διαγωνίων του.

250. (261). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διάμεσος τραπεζίου διέρχεται ἀπὸ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του καὶ ὅτι τὸ τμῆμα τῆς διαμέσου, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν διαγωνίων του εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν βάσεων τοῦ τραπεζίου.

251. (262). Προεκτείνομεν τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς ἑνὸς τραπεζίου ΑΒΓΔ μέχρι τῆς συναντήσεώς των εἰς ἕνα σημεῖον Ε. Ἐὰν Ζ, Η, Θ, Κ εἶναι τὰ μέσα τῶν ΑΕ, ΒΕ καὶ τῶν διαγωνίων ΑΓ καὶ ΒΔ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ΘΚΗΖ εἶναι τραπέζιον.

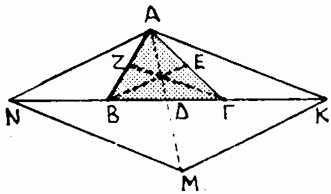
252. (269). Ἐαν αἱ διαγώνιοι τετραπλεύρου εἶναι κάθετοι μεταξύ των, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του εἶναι κορυφαὶ ὀρθογωνίου.

253. (270). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ τρεῖς εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τετραπλεύρου καὶ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του, τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ μέσον ἑκάστης τῶν τριῶν αὐτῶν εὐθειῶν.

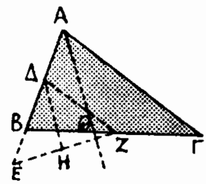
254. (263). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὰς διαμέσους ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ. Προεκτείνομεν τὴν ΑΔ κατὰ μῆκος ΔΜ=ΑΔ. Ἐπίσης προεκτείνομεν τὴν ΒΓ καὶ ἑκατέρωθεν αὐτῆς λαμβάνομεν τμήματα ΒΝ=ΓΚ=ΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ πλευραὶ τῶν τριγώνων ΑΜΝ καὶ ΑΜΚ εἶναι διπλάσιαι τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

255. (264). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ ἡ πλευρὰ ΒΓ εἶναι διπλασία τῆς ΑΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διάμεσος ΑΔ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΑΓ καὶ ἀπὸ τὴν διάμεσον ΑΕ τοῦ τριγώνου ΑΒΔ.

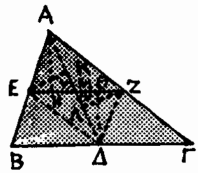
256. (265). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ· ἐπὶ τῆς πλευρᾶς του ΑΒ καὶ ἀπὸ τὸ μέσον Δ αὐτῆς λαμβάνομεν ἕνα τμῆμα ΔΕ ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ΑΓ. Ἀπὸ τὸ Ε φέρομεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Α. Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ κάθετος αὐτὴ τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ μέσον της.



Σχ. ἀσκ. 254.



Σχ. ἀσκ. 256.



Σχ. ἀσκ. 258.

257. (266). Ἀπὸ τὰ μέσα Δ καὶ Ε τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν δύο τυχούσας παραλλήλους ΔΖ καὶ ΕΘ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν ΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Ζ καὶ Θ. Νὰ ἀποδειχθῇ·

1ον. Ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΔΕ εἶναι τὸ τέταρτον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

2ον. Ὅτι τὸ τετράπλευρον ΔΖΘΕ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

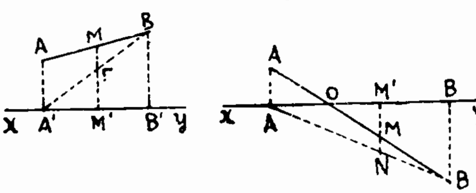
258. (268). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὴν διάμεσον ΑΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν εὐθεῖαν ΕΖ, ποὺ συνδέει τὰ μέσα Ε καὶ Ζ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὸ σημεῖον Μ. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι τὸ Μ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΔ καὶ ΕΖ.

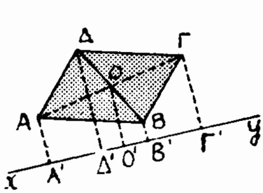
2ον. Ὅτι τὰ σημεῖα Α καὶ Δ ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὴν ΕΖ.

3ον. Ὅτι τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὴν ΑΔ.

259. (271). Δίδεται μία εὐθεῖα xy καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β, τὰ ὁποῖα κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς xy. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ μέσου Μ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ ἀπὸ τὴν xy εἶναι ἴση μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν σημείων Α καὶ Β ἀπὸ τὴν xy. Ἐὰν τὰ σημεῖα Α καὶ Β κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς xy, τί δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν;



Σχ. ἀσκ. 259.



Σχ. ἀσκ. 260.

260. (272). Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν ἑνὸς παραλληλογράμμου ἀπὸ εὐθεῖαν, ἡ ὁποία δὲν τέμνει τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετραπλάσιον τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων τοῦ παραλληλογράμμου ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν αὐτήν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η'

ΜΕΡΙΚΑΙ ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

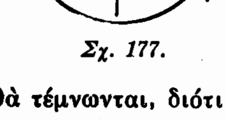
---

225. Μεταξὺ τῶν κυρίων στοιχείων ἑνὸς τριγώνου (τῶν τριῶν πλευρῶν του καὶ τῶν τριῶν γωνιῶν του) καὶ τῶν ὕψῶν του, τῶν διαμέσων του, τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν του κλπ. ὑπάρχουν μερικαὶ ἀξιοσημείωτοι ἰδιότητες θέσεως, τὰς ὁποίας θὰ ἐξετάσωμεν κατωτέρω:

226. Θεώρημα. ***Αἱ τρεῖς μεσοκάθετοι ἑνὸς τριγώνου, δηλ. αἱ κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευράς του εἰς τὰ μέσα αὐτῶν, τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΔΔ', ΕΕ', ΖΖ' αἱ τρεῖς μεσοκάθετοί του.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν ὅτι αἱ ΔΔ', ΕΕ', ΖΖ' τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.



Σχ. 177.

Ὑπόθ.	ΔΔ' μεσοκάθ. τῆς ΑΒ ΕΕ' » » ΒΓ ΖΖ' » » ΓΑ
Συμπ.	Αἱ ΔΔ', ΕΕ', ΖΖ' τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον

Ἀπόδειξις: Αἱ μεσοκάθετοι ΔΔ' καὶ ΕΕ' θὰ τέμνωνται, διότι ἐφ' ὅσον αἱ ΒΑ καὶ ΒΓ τέμνονται, θὰ τέμνωνται καὶ αἱ κάθετοι πρὸς αὐτὰς (§ 167).

Ἔστω Ο τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ΔΔ' καὶ ΕΕ'. Θὰ δείξωμεν, ὅτι καὶ ἡ τρίτη μεσοκάθετος τῆς πλευρᾶς ΑΓ, θὰ διέρχεται ἀπὸ τὸ Ο.

Ἐπειδὴ τὸ Ο κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τῆς ΑΒ, θὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τὰ ἄκρα αὐτῆς· δηλ. θὰ εἶναι ΟΑ=ΟΒ (1)

Ἐπίσης, ἐπειδὴ τὸ Ο κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τῆς πλευρᾶς ΒΓ, θὰ εἶναι ΟΓ=ΟΒ (2)

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι ΟΑ=ΟΓ.

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἰσότητα παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ Ο ἀπέχει ἴσον

ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς πλευρᾶς ΑΓ· ἄρα (§ 135) τὸ Ο θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τῆς ΑΓ, δηλ. ἐπὶ τῆς ΖΖ'.

Ὥστε αἱ μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Αἱ τρεῖς μεσοκάθετοι ἑνὸς τριγώνου....***

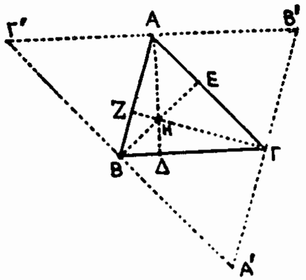
227. Περιγεγραμμένος κύκλος περὶ τρίγωνον. Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) τῆς § 226, συνάγομεν ὅτι: ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ.

Τὸ σημεῖον Ο, ὡς ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τὰς τρεῖς κορυφὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, εἶναι τὸ κέντρον ἑνὸς κύκλου, ὁ ὁποῖος διέρχεται ἀπὸ τὰς τρεῖς κορυφάς του. Ὁ κύκλος αὐτὸς ὀνομάζεται ***περιγεγραμμένος κύκλος*** περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

228. Θεώρημα. ***Τὰ τρία ὕψη ἑνὸς τριγώνου τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ *(Σχ. 178)* καὶ ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τὰ τρία ὕψη του.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ ὕψη του τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.



Σχ. 178.

Ὑπόθ.	ΑΔ ⊥ ΒΓ ΒΕ ⊥ ΓΑ ΓΖ ⊥ ΑΒ
Συμπ.	ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ, τέμν. εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὰς κορυφὰς Α, Β, Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς ἀπέναντι πλευράς του, αἱ ὁποῖαι τεμνόμενα σχηματίζουν ἕνα τρίγωνον Α'Β'Γ'.

Τὰ τετράπλευρα ΒΓΑΓ' καὶ ΒΓΒ'Α εἶναι παραλληλόγραμμα, ἐκ κατασκευῆς· ἄρα θὰ εἶναι ΒΓ=Γ'Α καὶ ΒΓ=ΑΒ'. Ἀπὸ τὰς ἰσότητας αὐτὰς συνάγομεν, ὅτι Γ'Α=ΑΒ', δηλ. ὅτι ἡ κορυφὴ Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς Γ'Β' τοῦ τριγώνου Α'Β'Γ'.

Ὁμοίως ἀπὸ τὰ παραλληλόγραμμα ΓΑΓ'Β καὶ ΓΑΒΑ' συνάγομεν, ὅτι τὸ Β εἶναι τὸ μέσον τῆς Γ'Α' καὶ ἀπὸ τὰ παραλληλόγραμμα ΑΒΑ'Γ καὶ ΑΒΓΒ', ὅτι τὸ Γ εἶναι τὸ μέσον τῆς Α'Β'.

Ἐπειδὴ ἡ ΑΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν της Γ'Β'· ἤτοι τὸ ὕψος ΑΔ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι μεσοκάθετος τῆς πλευρᾶς Γ'Β' τοῦ τριγώνου Α'Β'Γ'.

Ὁμοίως τὰ ὕψη ΒΕ καὶ ΓΖ εἶναι μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν Γ'Α καὶ Α'Β' τοῦ τριγώνου Α'Β'Γ'.

Ἀλλὰ γνωρίζομεν, ὅτι αἱ μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον (§ 226). Ωστε τὰ ὕψη ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Τὰ τρία ὕψη ἑνὸς τριγώνου. . . .***

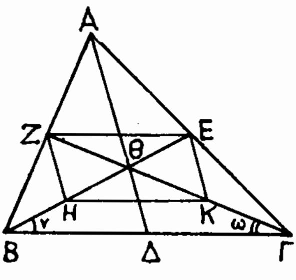
229. Ὀρθόκεντρον. *Τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν τριῶν ὑψῶν ἑνὸς τριγώνου λέγεται* ***ὀρθόκεντρον.***

Ὅταν τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον, τὸ ὀρθόκεντρον εἶναι ἡ κορυφὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας. Ὅταν τὸ τρίγωνον εἶναι ἀμβλυγώνιον, τὸ ὀρθόκεντρον κεῖται ἐκτὸς τοῦ τριγώνου.

230. Θεώρημα. ***Αἱ τρεῖς διάμεσοι ἑνὸς τριγώνου τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ κάθε κορυφὴν ἀπόστασιν ἴσην μὲ τὰ δύο τρίτα τῆς ἀντιστοίχου διαμέσου.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (*Σχ. 179*) καὶ ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ αἱ τρεῖς διάμεσοί του.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ διάμεσοι αὐταὶ τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.



Σχ. 179.

Ὑπόθ.	ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ διάμεσοι
Συμπ.	1ον. Αἱ ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τέμν. εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον. 2ον. $ΑΘ = \frac{2}{3}ΑΔ$, $ΒΘ = \frac{2}{3}ΒΕ$, $ΓΘ = \frac{2}{3}ΓΖ$

Ἀπόδειξις: Αἱ διάμεσοι ΒΕ καὶ ΓΖ τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον, διότι αἱ γωνίαι ω καὶ ν, τὰς ὁποίας σχηματίζουν μὲ τὴν ΒΓ, ἔχουν ἄθροισμα μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν, ἐφ' ὅσον εἶναι μέρη τῶν δύο γωνιῶν Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἔστω Θ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς των. Ἔστω Η τὸ μέσον τῆς ΒΘ καὶ Κ τὸ μέσον τῆς ΓΘ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΗΚ, ΚΕ, ΕΖ, ΖΗ.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἡ εὐθεῖα ΖΕ συνδέει τὰ μέσα δύο πλευρῶν του καὶ ἑπομένως εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευράν του ΒΓ καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς.

Ὁμοίως εἰς τὸ τρίγωνον ΘΒΓ, ἡ ΗΘ συνδέει τὰ μέσα δύο πλευ-

ρῶν του καὶ ἑπομένως εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευράν του ΒΓ καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς.

Ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΗΚ καὶ ΖΕ εἶναι ἴσαι μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ΒΓ καὶ παράλληλοι πρὸς τὴν ΒΓ, θὰ εἶναι καὶ μεταξύ των ἴσαι καὶ παράλληλοι· ἄρα τὸ τετράπλευρον ΖΗΚΕ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἐπειδὴ αἱ διαγώνιοι παραλληλογράμμου διχοτομοῦνται, θὰ εἶναι: ΗΘ=ΘΕ καὶ ΖΘ=ΘΚ· ἐπειδὴ τὸ Η εἶναι τὸ μέσον τῆς ΒΘ εἶναι εἶναι

$$ΒΗ=ΗΘ=ΘΕ, \quad ἄρα \quad ΒΘ=\frac{2}{3}ΒΕ.$$

Ὁμοίως ἐπειδὴ τὸ Κ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΘΓ θὰ εἶναι

$$ΖΘ=ΘΚ=ΚΓ \quad ὁπότε \quad ΓΘ=\frac{2}{3}ΓΖ.$$

Ἐὰν λάβωμεν τὰς διαμέσους ΑΔ καὶ ΒΕ καὶ ἐργασθῶμεν ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι αὐταὶ τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Θ, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ΒΕ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Β καὶ εἰς τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ΑΔ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α· δηλ. τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Θ. Τὸ Θ λοιπὸν εἶναι κοινὸν σημεῖον καὶ τῆς τρίτης διαμέσου ΑΔ.

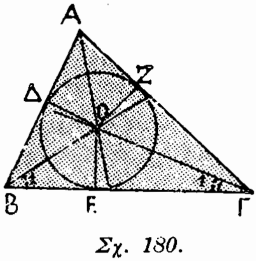
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Αἱ τρεῖς διάμεσοι ἑνὸς τριγώνου.***

231. Βαρύκεντρον. Τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων ἑνὸς τριγώνου λέγεται ***κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου*** ἢ καὶ ***βαρύκεντρον*** τοῦ τριγώνου.

232. Θεώρημα. ***Αἱ τρεῖς διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΒΟ, ΓΟ, ΑΟ, αἱ διχοτόμοι τῶν τριῶν γωνιῶν του Β, Γ, Α.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν ὅτι αἱ διχοτόμοι αὐταὶ τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.



Σχ. 180.

Ὑπόθ.	ΒΟ διχοτ. γων. Β ΓΟ » » Γ ΑΟ » » Α
Συμπ.	Αἱ ΒΟ, ΓΟ, ΑΟ τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον

Ἀπόδειξις: Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ θὰ τέμνωνται, διότι αἱ γωνίαι $Β_1$ καὶ $Γ_1$, ποὺ σχηματίζουν μὲ τὴν ΒΓ ἔχουν ἄθροισμα μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν· ἔστω Ο τὸ σημεῖον τῆς τομῆς των.

Ἐπειδὴ τὸ Ο κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Β, θὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τὰς πλευράς της ΒΑ καὶ ΒΓ· δηλ., ἐὰν φέρωμεν τὰς καθέτους ΟΔ καὶ ΟΕ ἐπὶ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας Β, θὰ εἶναι ΟΔ=ΟΕ (1).

Ὁμοίως ἐπειδὴ τὸ Ο κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Γ, αἱ ἀποστάσεις ΟΕ καὶ ΟΖ ἀπὸ τὰς πλευρὰς ΓΒ καὶ ΓΑ θὰ εἶναι ἴσαι, ἤτοι ΟΕ=ΟΖ (2). Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι ΟΔ=ΟΖ.

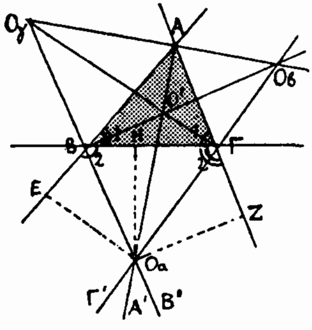
Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἰσότητα συνάγομεν, ὅτι τὸ Ο ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας Α· ἄρα τὸ Ο κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α. Ὥστε αἱ τρεῖς διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Αἱ τρεῖς διχοτόμοι τῶν γωνιῶν....***

233. Παρατήρησις. Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) τῆς προηγουμένης παραγράφου συνάγομεν, ὅτι ΟΔ=ΟΕ=ΟΖ· δηλ. ὅτι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ τριγώνου· τὸ σημεῖον αὐτὸ ὀνομάζεται ***κέντρον τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου*** εἰς τὸ τρίγωνον.

234. Θεώρημα. ***Ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος μιᾶς γωνίας ἑνὸς τριγώνου καὶ αἱ ἐξωτερικαὶ διχοτόμοι τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν του τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ *(Σχ. 181)*, ΑΑ′ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α, καὶ ΒΒ′, ΓΓ′ αἱ ἐξωτερικαὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ.



Σχ. 181.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι

Ὑπόθ.	ΑΑ′ διχοτ. ἐσωτ. γων. Α ΒΒ′ διχοτ. ἐξωτ. γων. Β ΓΓ′ διχοτ. ἐξωτ. γων. Γ
Συμπ.	Αἱ ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′ τέμν. εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον

ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′ τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Ἀπόδειξις: Ἐν πρώτοις θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ΒΒ′ καὶ ΓΓ′ τέμνονται. Αἱ γωνίαι $Β_1$ καὶ $Β_2$ εἶναι ἐφεξῆς παραπληρωματικαί· ἑπομένως αἱ διχοτόμοι των ΒΟ′ καὶ ΒΒ′ εἶναι κάθετοι (§ 71). Ὁμοίως αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $Γ_1$ καὶ $Γ_2$ εἶναι κάθετοι. Ἀλλὰ αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $Β_1$ καὶ $Γ_1$ τέμνονται (§ 232), ἄρα καὶ αἱ κάθετοι πρὸς αὐτὰς ΒΒ′ καὶ ΓΓ′ θὰ τέμνωνται (§ 167).

Ἔστω $O_α$ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ΒΒ′ καὶ ΓΓ′ καὶ $O_αE$, $O_αH$, $O_αZ$ αἱ ἀποστάσεις τοῦ $O_α$ ἀπὸ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ἐπειδὴ τὸ $O_α$ εἶναι σημεῖον τῆς διχοτόμου $BO_α$ τῆς γωνίας ΕΒΓ θὰ εἶναι $O_αE=O_αH$ (1)

Ὁμοίως ἐπειδὴ τὸ $O_α$ εἶναι σημεῖον τῆς διχοτόμου $ΓO_α$ τῆς γωνίας ΒΓΖ θὰ εἶναι $O_αZ=O_αH$ (2).

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι $O_αE=O_αZ$.

Τὸ $O_α$, ὡς ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας Α, κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α. Ὥστε τὸ $O_α$ εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν τριῶν διχοτόμων ΑΑ′, ΒΒ′ καὶ ΓΓ′.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: *Ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος....*

235. Πόρισμα. I. ***Αἱ διχοτόμοι τῶν ἐσωτερικῶν καὶ ἐξωτερικῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου τέμνονται, ἀνὰ τρεῖς, εἰς τέσσαρα διάφορα σημεῖα: τὰ O, $O_α$, $O_β$, $O_γ$.***

II. ***Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ ὑπάρχουν τέσσαρα σημεῖα, καθένα τῶν ὁποίων ἀπέχει ἰσάκις ἀπὸ τὰς τρεῖς πλευράς του.***

III. ***Αἱ ἐσωτερικαὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ὕψη τοῦ τριγώνου $O_αO_βO_γ$.***

Πράγματι· ἡ ΑΟ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν πλευρὰν $O_βO_γ$. Ἡ ΒΟ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν $O_γO_α$. Ἡ ΟΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν $O_αO_β$.

Ἀσκήσεις

261. (273). Εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, αἱ γωνίαι Β καὶ Δ εἶναι ὀρθαί. Προεκτείνομεν τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΓΔ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ε καὶ τὰς πλευρὰς ΒΓ καὶ ΑΔ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διαγώνιος ΑΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΕΖ.

262. (274). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α. Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΓΑ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς της λαμβάνομεν τμῆμα ΑΔ=ΓΑ. Ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν τὴν ΔΗ κάθετον ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ε. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΓΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΔΒ.

263. (275). Ἐὰν δύο διάμεσοι τριγώνου εἶναι ἴσαι, τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

264. (276). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν δύο πλευραὶ τριγώνου εἶναι ἄνισοι καὶ αἱ ἀντίστοιχοι διάμεσοί του εἶναι ἄνισοι καὶ εἰς τὴν μεγαλυτέραν πλευρὰν ἀντιστοιχεῖ μικροτέρα διάμεσος.

265. (277). Νὰ ἀποδειχθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν διαμέσων ἑνὸς τριγώνου εἶναι μεγαλύτερον τῶν τριῶν τετάρτων τῆς περιμέτρου του.

266. (278). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι κάθε διάμεσος τριγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματός τῶν δύο ἄλλων διαμέσων του.

267. (279). Ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο τῆς τομῆς τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν τὰς καθέτους ΟΑ′, ΟΒ′, ΟΓ′ ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου εἶναι κάθετοι εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου Α′Β′Γ′.

268. (280). Ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο τῆς τομῆς τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν τὴν κάθετον ΟΕ ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ. Ἐὰν Δ εἶναι τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ διχοτόμος ΑΔ τῆς γωνίας Α τέμνει τὴν πλευρὰν ΒΓ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι γων.ΒΟΔ=γων.ΕΟΓ.

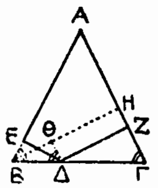
269. (281). Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὴν διχοτόμον ΑΟ τῆς γωνίας Α καὶ τὰς ἐξωτερικὰς διχοτόμους ΒΟ καὶ ΓΟ τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ο. Ἀπὸ τὸ Ο φέρομεν τὴν παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν πλευρὰν ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Ε καὶ τὴν πλευρὰν ΑΓ εἰς τὸ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΕΖ=ΑΖ−ΒΕ.

270. (282) Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἀπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν του εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ ἕνα ἀπὸ τὰ ἴσα ὕψη του.

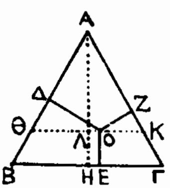
271. (283). Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων σημείου κειμένου ἐντὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου ἀπὸ τῶν πλευρῶν του εἶναι σταθερὸν (καὶ ἴσον μὲ τὸ ὕψος του).

272. (284). Αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τυχὸν σημεῖον τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου καὶ αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς ἴσας πλευράς του ὑπὸ ἴσας γωνίας ἔχουν ἄθροισμα σταθερόν.

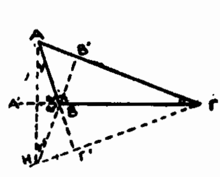
273. (285). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς βάσεως ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ἀπὸ τὰς ἴσας πλευράς του, εἶναι σταθερά.



Σχ. ἀσκ. 270.



Σχ. ἀσκ. 271.



Σχ. ἀσκ. 276.

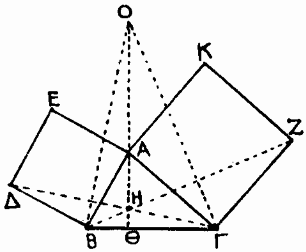
274. (286). Δίδονται δύο ἐφεξῆς γωνίαι ΑΟΒ καὶ ΒΟΓ, ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶναι 60°. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν ἕνα σημεῖον Σ κεῖται ἐπὶ τῆς πρώτης γωνίας, ἡ ἀπόστασίς του ΣΔ ἀπὸ τὴν ΟΓ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα ΣΕ+ΣΖ τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ τὰς εὐθείας ΑΟ καὶ ΟΒ.

275. (287). Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν ἕνα σημεῖον Σ κινῆται ἐπὶ τῆς περιμέτρου του, αἱ ἀποστάσεις του ἀπὸ τὰς διαγωνίους τοῦ ὀρθογωνίου ἔχουν ἄθροισμα σταθερόν.

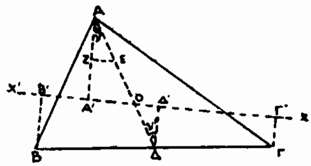
276. (288). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι Β−Γ=90°. Ἐὰν Η εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΗΒΓ εἶναι ἴσα.

277. (289). *Θεώρημα τοῦ Vecten.* Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, καὶ ἐκτὸς αὐτοῦ, κατασκευάζομεν τὰ τετράγωνα ΑΒΔΕ καὶ ΑΓΖΚ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΒΖ καὶ ΓΔ τέμνονται ἐπὶ τοῦ ὕψους ΑΘ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

278. (290). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἕνα τρίγωνον εἶναι ἰσόπλευρον, ἐὰν τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν καθέτων εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του συμπίπτῃ μὲ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν του καὶ ἀντιστρόφως.



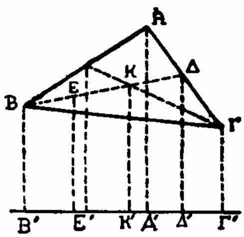
Σχ. ἀσκ. 277.



Σχ. ἀσκ. 279.

279. (291). Ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων ἑνὸς τριγώνου φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν δύο κορυφῶν τοῦ τριγώνου, αἱ ὁποῖαι κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας, ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν αὐτήν, εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἀπόστασιν τῆς τρίτης κορυφῆς τοῦ τριγώνου ἀπὸ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

280. (292). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου βάρους ἑνὸς τριγώνου, ἀπὸ εὐθεῖαν, ἡ ὁποία κεῖται ἐκτὸς τοῦ τριγώνου, εἶναι ἴση μὲ τὸ τρίτον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀποστάσεων τῶν τριῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου ἀπὸ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.



Σχ. ἀσκ. 280.

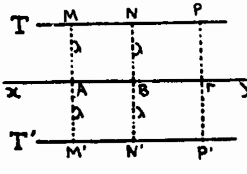
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι΄.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

236. Εἰς τὰς § 137 καὶ 145 εἴδομεν τί λέγεται γεωμετρικὸς τόπος καὶ ποία εἶναι ἡ χρῆσις του διὰ τὴν λύσιν ὡρισμένων γεωμετρικῶν προβλημάτων. Ἐδῶ θὰ ἐξετάσωμεν λεπτομερέστερον τὴν ἔννοιαν τοῦ γεωμετρικοῦ τόπου, λόγῳ τῆς μεγάλης συμβολῆς αὐτοῦ εἰς τὴν λύσιν διαφόρων γεωμετρικῶν προβλημάτων.

237. Πρόβλημα. ***Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν δοθεῖσαν ἀπόστασιν λ ἀπὸ δοθεῖσαν εὐθεῖαν.***

Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν γεωμετρικὸν τόπον τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἀπόστασιν λ ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν xy.



Σχ. 182.

Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Α τῆς xy *(Σχ. 182)* φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν xy καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου αὐτῆς λαμβάνομεν τμῆμα ΑΜ ἴσον μὲ τὴν δοθεῖσαν ἀπόστασιν λ. Τὸ σημεῖον Μ εἶναι προφανῶς σημεῖον τοῦ τόπου.

Ὁμοίως ἀπὸ ἕνα ἄλλο σημεῖον Β τῆς xy φέρομεν κάθετον ἐπ' αὐτὴν καὶ λαμβάνομεν τμῆμα ΒΝ ἴσον μὲ λ· καὶ τὸ σημεῖον Ν εἶναι προφανῶς σημεῖον τοῦ τόπου.

Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν Τ, ἡ ὁποία συνδέει τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν. Ἐκ κατασκευῆς αἱ ΑΜ καὶ ΒΝ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν xy· ἄρα εἶναι καὶ παράλληλοι· ἐπειδὴ δὲ εἶναι ΑΜ=ΒΝ=λ, ἐξ ὑποθέσεως, τὸ τετράπλευρον ΑΒΝΜ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι ἔχει δύο ἀπέναντι πλευράς, τὰς ΑΜ καὶ ΒΝ ἴσας καὶ παραλλήλους. Ἡ εὐθεῖα λοιπὸν ΤΜΝ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν xy.

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ τυχόντα σημεῖα Μ καὶ Ν τοῦ τόπου κεῖνται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν xy, ἡ ὁποία ἀπέχει ἀπὸ τὴν xy ἀπόστασιν ἴσην μὲ λ.

Ἀντιστρόφως. Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι κάθε σημεῖον τῆς εὐθείας

TMN, εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου· δηλ. ἀπέχει ἀπὸ τὴν xy ἀπόστασιν ἴσην μὲ λ.

Πράγματι· ἐπειδὴ ἡ TMN εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν xy, ὅλα τὰ σημεῖα της ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὴν xy (§ 196)· ἐπειδὴ δὲ ἐκ κατασκευῆς ἡ ἀπόστασις MA τοῦ M ἀπὸ τὴν xy εἶναι ἴση μὲ λ ἕπεται, ὅτι ὅλα τὰ σημεῖα τῆς TMN ἀπέχουν ἀπόστασιν λ ἀπὸ τὴν xy.

Ὥστε ἡ εὐθεῖα TMN εἶναι ὁ γεωμερικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἀπόστασιν λ ἀπὸ τὴν xy.

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἡ εὐθεῖα T′M′N′ εἶναι γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἀπόστασιν λ ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν xy. Ὥστε:

Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν δοθεῖσαν ἀπόστασιν λ ἀπὸ δοθεῖσαν εὐθεῖαν, εἶναι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἑκατέρωθεν αὐτῆς καὶ εἰς ἀπόστασιν λ.

238. Παρατήρησις. Εἰς τὸ πρόβλημα τῆς § 237 ἦτο ἄγνωστος ἡ ***φύσις*** τοῦ γεωμετρικοῦ τόπου καὶ διὰ νὰ τὸν προσδιορίσωμεν εἰργάσθημεν ὡς ἑξῆς:

Κατεσκευάσαμεν δύο σημεῖα M καὶ N, τὰ ὁποῖα εἶχον τὴν ἰδιότητα τοῦ τόπου, δηλ. ἀπεῖχον ἀπόστασιν λ ἀπὸ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν xy. Ἔπειτα ἐφέραμεν τὴν εὐθεῖαν MN καὶ ἐδείξαμεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα αὐτή, ἡ ὁποία περιέχει τὰ σημεῖα τοῦ τόπου, εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν xy. Τέλος ἐδείξαμεν, ὅτι κάθε σημεῖον τῆς εὐθείας αὐτῆς ἀπέχει ἀπόστασιν λ ἀπὸ τὴν xy καὶ οὕτω κατελήξαμεν εἰς τὸ συμπέρασμα, ὅτι ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι μία εὐθεῖα παράλληλος κλπ.

Γενικῶς: Ὅταν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸν γεωμετρικὸν τόπον τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν κοινὴν ἰδιότητα, ἀποδεικνύομεν:

1ον. ***Ὅτι κάθε σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν δοθεῖσαν ἰδιότητα κεῖται ἐπὶ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ σχήματος,*** καὶ

2ον. ***Ὅτι κάθε σημεῖον τοῦ σχήματος αὐτοῦ ἔχει τὴν δοθεῖσαν ἰδιότητα.***

239. Θεώρημα. ***Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ δύο παραλλήλους εὐθείας, εἶναι μία τρίτη παράλληλος πρὸς αὐτὰς εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἀπέχει ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὰς δύο πρώτας.***

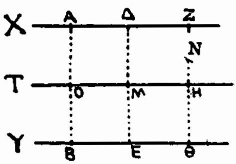
Ἔστωσαν X καὶ Y δύο παράλληλοι εὐθεῖαι *(Σχ. 183)*.

Φέρομεν τὴν κοινὴν κάθετον AB ἐπὶ τὰς X καὶ Y, καὶ ἔστω O

τὸ μέσον τῆς ΑΒ. Ἀπὸ τὸ Ο φέρομεν τὴν παράλληλον ΤΟ πρὸς τὰς Χ καὶ Υ.

Θὰ δείξωμεν ὅτι ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ΤΟ ἀπέχουν ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὰς Χ καὶ Υ.

Πράγματι· ἔστω Μ ἕνα τυχὸν σημεῖον τῆς ΤΟ. Ἀπὸ τὸ Μ φέρομεν τὴν κοινὴν κάθετον ἐπὶ τὰς Χ καὶ Υ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Χ εἰς τὸ Δ καὶ τὴν Υ εἰς τὸ Ε. Αἱ εὐθεῖαι ΔΕ καὶ ΑΒ εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν. Τὰ τετράπλευρα λοιπὸν ΑΟΜΔ καὶ ΟΒΕΜ εἶναι παραλληλόγραμμα καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ΟΑ=ΜΔ καὶ ΟΒ=ΜΕ καὶ ἐπειδὴ ΟΑ=ΟΒ, ἐκ κατασκευῆς, ἕπεται ὅτι ΜΔ=ΜΕ.



Σχ. 183.

Ὥστε τὸ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς ΤΟ ἀπέχει ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὰς παραλλήλους Χ καὶ Υ.

Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι κάθε σημεῖον, τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἐπὶ τῆς ΤΟ, δὲν εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου, δηλ. δὲν ἀπέχει ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὰς Χ καὶ Υ.

Ἔστω Ν τυχὸν σημεῖον, τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἐπὶ τῆς ΤΟ.

Ἀπὸ τὸ Ν φέρομεν τὴν κοινὴν κάθετον ἐπὶ τὰς εὐθείας Χ καὶ Υ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Χ εἰς τὸ Ζ, τὴν Τ εἰς τὸ Η καὶ τὴν Υ εἰς τὸ Θ. Ἐπειδὴ τὸ Η κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας Τ, θὰ ἀπέχῃ ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὰς Χ καὶ Υ, δηλ. θὰ εἶναι ΗΖ=ΗΘ. Εἶναι προφανὲς λοιπόν, ὅτι τὸ Ν, τὸ ὁποῖον κεῖται μεταξὺ τῶν σημείων Η καὶ Ζ, θὰ ἀπέχῃ ἀπόστασιν μικροτέραν ἀπὸ τὴν Χ καὶ μεγαλυτέραν ἀπὸ τὴν Υ. Ὥστε τὸ Ν δὲν εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι μόνον ἡ παράλληλος εὐθεῖα Τ πρὸς τὰς Χ καὶ Υ εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὰς εὐθείας Χ καὶ Υ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: *Ὁ γεωμετρικὸς τόπος. . . .*

240. Παρατήρησις. Εἰς τὴν § 239 ἐζητήθη νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ δύο παραλλήλους εὐθείας Χ καὶ Υ, εἶναι μία τρίτη παράλληλος εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἀπέχει ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὰς δύο πρώτας.

Καὶ διὰ νὰ ἀποδείξωμεν αὐτὸ εἰργάσθημεν ὡς ἑξῆς:

Ἀπεδείξαμεν, ὅτι κάθε σημεῖον τῆς εὐθείας ΤΟ ἔχει τὴν ἰδιότητα τῶν σημείων τοῦ τόπου, δηλ. ἀπέχει ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὰς

παραλλήλους εὐθείας X καὶ Y, ἐνῶ κάθε σημεῖον, τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἐπὶ τῆς ΤΟ δὲν ἔχει τὴν ἰδιότητα τοῦ τόπου.

Γενικῶς: Ὅταν θέλωμεν νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι ἕνα σχῆμα εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἔχουν δοθεῖσαν κοινὴν ἰδιότητα, ἀποδεικνύομεν:

1ον. ***Ὅτι κάθε σημεῖον τοῦ σχήματος αὐτοῦ ἔχει τὴν δοθεῖσαν ἰδιότητα*** καὶ

2ον. ***Ὅτι κάθε ἄλλο σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τοῦ σχήματος αὐτοῦ, δὲν ἔχει τὴν δοθεῖσαν ἰδιότητα.***

Ἀσκήσεις

281. (299). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κορυφῶν τῶν τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

282. (300). Μεταξὺ δύο παραλλήλων εὐθειῶν X καὶ Y φέρομεν καθέτους. Μὲ βάσεις τὰς καθέτους αὐτὰς κατασκευάζομεν τρίγωνα ἴσα μεταξύ των καὶ ἔχοντα τὸν αὐτὸν προσανατολισμόν. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῆς τρίτης κορυφῆς τῶν τριγώνων αὐτῶν.

283. (301). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν μέσων τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων τῶν περιεχομένων μεταξὺ δύο παραλλήλων εὐθειῶν.

284. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο παραλλήλους εὐθείας εἶναι ἴσον μὲ δοθὲν μῆκος λ.

285. (303). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν μέσων τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων, τὰ ὁποῖα ἄγονται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

286. (304). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν παραλληλογράμμων, τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

287. (305). Δίδεται ἡ γωνία ΑΟΒ· ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Μ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς τῆς γωνίας ΑΟΒ φέρομεν τὰς παραλλήλους ΜΓ καὶ ΜΔ ἀντιστοίχως πρὸς τὰς πλευρὰς ΟΒ καὶ ΟΑ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν ΟΑ εἰς τὸ Γ καὶ τὴν ΘΒ εἰς τὸ Δ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου Μ, ἵνα τὸ ἄθροισμα ΜΓ+ΜΔ εἶναι ἴσον μὲ δοθὲν μῆκος λ.

288. (306). Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο τεμνομένας εὐθείας εἶναι ἴσον μὲ δοθὲν μῆκος λ.

289. (307). Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο εὐθείας τεμνομένας εἶναι ἴση μὲ δοθὲν μῆκος λ.

290. (308). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Δ τῆς βάσεώς του φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς πλευράς του ΑΒ καὶ ΑΓ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν αὐτάς, ἀντιστοίχως, εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν παραλληλογράμμων ΑΖΔΕ, τὰ ὁ ποῖα σχηματίζονται, ὅταν τὸ Δ κινῆται ἐπὶ τῆς βάσεως ΒΓ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΠΙ ΤΟΥ Α' ΒΙΒΛΙΟΥ ΠΡΟΣ ΓΕΝΙΚΗΝ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ

Κατωτέρω συγκεντρώνομεν καὶ τακτοποιοῦμεν τὰς κυριωτέρας μεθόδους ἀποδείξεως, τὰς ὁποίας ἐχρησιμοποιήσαμεν κατὰ τὴν ἀπόδειξιν θεωρημάτων ἢ τὴν λύσιν γεωμετρικῶν προβλημάτων καὶ τὰς ὁποίας πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψει διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῶν κατωτέρω ἀσκήσεων.

I. Γωνίαι ἴσαι:

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι δύο γωνίαι εἶναι ἴσαι, πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν:

1ον. Ὅτι εἶναι ἄθροισμα ἢ διαφορὰ γωνιῶν ἀντιστοίχως ἴσων.

2ον. Ὅτι εἶναι συμπληρωματικαὶ ἢ παραπληρωματικαὶ ἴσων γωνιῶν.

3ον. Ὅτι εἶναι κατὰ κορυφὴν γωνίαι.

4ον. Ὅτι εἶναι παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι ἰσοσκελοῦς τριγώνου.

5ον. Ὅτι εἶναι ὁμόλογοι γωνίαι ἴσων τριγώνων.

6ον. Ὅτι εἶναι ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι, ἐκτὸς ἐναλλὰξ γωνίαι, ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι, ποὺ σχηματίζονται ὑπὸ δύο παραλλήλων καὶ μιᾶς τεμνούσης.

7ον. Ὅτι εἶναι γωνίαι, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι παράλληλοι καὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν φορὰν ἢ ἀντίθετον φοράν.

8ον. Ὅτι εἶναι ὀξεῖαι ἢ ἀμβλεῖαι γωνίαι, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι κάθετοι.

9ον. Ὅτι εἶναι συμμετρικαὶ γωνίαι ὡς πρὸς κέντρον ἢ πρὸς ἄξονα.

10ον. Ὅτι, κατὰ ἕνα γενικὸν τρόπον, εἶναι τὰ ἄκρα μιᾶς σειρᾶς ἴσων γωνιῶν.

II. Ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα:

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι δύο εὐθύγραμμα τμήματα εἶναι ἴσα, πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν:

1ον. Ὅτι εἶναι ἄθροισμα ἢ διαφορὰ εὐθυγράμμων τμημάτων ἀντιστοίχως ἴσων.

2ον. Ὅτι εἶναι δύο ὁμόλογοι πλευραὶ δύο ἴσων τριγώνων.

3ον. Ὅτι εἶναι αἱ ἀπέναντι πλευραὶ παραλληλογράμμου.

4ον. Ὅτι εἶναι αἱ διαγώνιοι ἑνὸς ὀρθογωνίου.

5ον. Ὅτι εἶναι τμήματα παραλλήλων περιεχομένων μεταξὺ παραλλήλων εὐθειῶν.

6ον. Ὅτι εἶναι δύο εὐθύγραμμα τμήματα συμμετρικὰ πρὸς ἄξονα ἢ πρὸς κέντρον.

7ον. Ὅτι εἶναι αἱ δύο πλευραὶ ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου.

8ον. Ὅτι εἶναι τὰ δύο τμήματα τῆς βάσεως ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται ἡ βάσις ἀπὸ τὸ ὕψος τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἢ ἀπὸ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς του.

9ον. Ὅτι, κατὰ ἕνα γενικὸν τρόπον, εἶναι τὰ ἄκρα μιᾶς σειρᾶς ἴσων εὐθυγράμμων τμημάτων.

III. **Εὐθεῖαι κάθετοι:**

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι δύο εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι μεταξύ των, πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν:

1ον. Ὅτι ἡ μία τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουν εἶναι ὀρθή, (πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι εἶναι 90° ἢ ὅτι εἶναι ἴση μὲ μίαν ἄλλην ὀρθὴν γωνίαν τοῦ σχήματος ἢ ὅτι εἶναι ἡ τρίτη γωνία ἑνὸς τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι εἶναι συμπληρωματικαί).

2ον. Ὅτι εἶναι διχοτόμοι δύο ἐφεξῆς παραπληρωματικῶν γωνιῶν.

3ον. Ὅτι ἡ μία εὐθεῖα εἶναι ἡ βάσις ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου καὶ ἡ ἄλλη εἶναι ἡ μεσοκάθετος τῆς βάσεως ἢ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς του.

4ον. Οτι ἡ μία εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς μίαν κάθετον πρὸς τὴν ἄλλην εὐθεῖαν.

5ον. Ὅτι εἶναι δύο πλευραὶ ἴσων γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς δύο ἄλλας πλευράς των ἀντιστοίχως καθέτους καὶ αἱ γωνίαι ἔχουν τὴν αὐτὴν φορὰν πρὸς τὰς τελευταίας πλευράς.

6ον. Ὅτι ἡ μία εὐθεῖα συνδέει δύο συμμετρικὰ σημεῖα πρὸς τὴν ἄλλην εὐθεῖαν.

IV. **Εὐθεῖαι παράλληλοι:**

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν:

1ον. Ὅτι εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

2ον. Ὅτι εἶναι κάθετοι πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

3ον. Ὅτι σχηματίζουν μὲ μίαν τέμνουσαν:

δύο ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας·
ἢ δύο ἐκτὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας·
ἢ δύο ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας ἴσας·
ἢ δύο ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτά μέρη γωνίας παραπληρωματικάς·
ἢ δύο ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας παραπληρωματικάς.

4ον. Ὅτι εἶναι δύο πλευραὶ δύο ἴσων γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους καὶ αἱ γωνίαι ἔχουν τὴν αὐτὴν φορὰν ὡς πρὸς τὰς τελευταίας πλευράς.

5ον. Ὅτι ἡ μία εἶναι ἡ βάσις ἑνὸς τριγώνου καὶ ἡ ἄλλη εἶναι ἡ εὐθεῖα, ποὺ συνδέει τὰ μέσα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

6ον. Ὅτι εἶναι εὐθεῖαι συνδέουσαι ἀντιστοίχως δύο ζεύγη σημείων συμμετρικῶν πρὸς τὸν αὐτὸν ἄξονα.

V. **Παραλληλόγραμμα:**

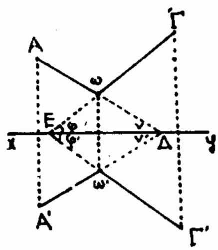
Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι ἕνα τετράπλευρον εἶναι παραλληλόγραμμον πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι:

1ον. Αἱ ἀπέναντι πλευραί του εἶναι παράλληλοι ἀνὰ δύο.

2ον. Αἱ ἀπέναντι γωνίαι του εἶναι ἴσαι ἀνὰ δύο.
3ον. Αἱ ἀπέναντι πλευραί του εἶναι ἴσαι ἀνὰ δύο
4ον. Δύο ἀπέναντι πλευραί του εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.
5ον. Αἱ διαγώνιοί του διχοτομοῦνται.

Ἀσκήσεις πρὸς γενικὴν ἐπανάληψιν

291. (295). Δύο σημεῖα Α καὶ Α' εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν εὐθεῖαν xy· συνδέομεν τὰ σημεῖα Α καὶ Α' μὲ δύο τυχόντα σημεῖα Β καὶ Γ τῆς xy. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι γων.ΒΑΓ=γων.ΒΑ'Γ.



Σχ. ἀσκ. 292.

292. (297). Τὸ συμμετρικὸν σχῆμα μιᾶς γωνίας πρὸς κέντρον συμμετρίας ἢ πρὸς ἄξονα συμμετρίας εἶναι γωνία ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν.

293. (309). Δίδεται ἡ εὐθεῖα xy καί, ἐκτὸς αὐτῆς καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος, δύο σημεῖα Α καὶ Β. Ἐκ τοῦ Α φέρομεν τὴν κάθετον ΑΓ ἐπὶ τὴν xy καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως αὐτῆς λαμβάνομεν τμῆμα ΓΑ'=ΑΓ. Φέρομεν τὴν Α'Β, ἡ ὁποία τέμνει τὴν xy εἰς τὸ σημεῖον Μ καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς xy ἕνα ἄλλο τυχὸν σημεῖον Ν. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι:

$$AM+MB<AN+NB.$$

294. (319). Τέμνομεν τὰς πλευρὰς μιᾶς γωνίας μὲ μίαν τυχοῦσαν τέμνουσαν. Φέρομεν τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ τέμνουσα αὐτὴ μὲ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ διχοτόμοι αὐταὶ τέμνονται ἀνὰ δύο ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς δοθείσης γωνίας.

295. (324). Ἐντὸς μιᾶς γωνίας xOy κεῖνται δύο σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ εὑρεθῇ ὁ συντομώτερος δρόμος μεταβάσεως ἀπὸ τοῦ σημείου Α εἰς τὸ Β καὶ ὁ ὁποῖος νὰ ἐγγίζῃ τὰς πλευρὰς Ox καὶ Oy τῆς γωνίας.

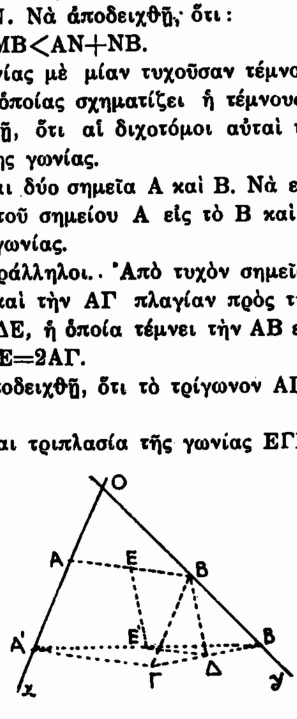
296. (325). Δίδονται δύο εὐθεῖαι Χ, Υ παράλληλοι.. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Α τῆς Χ φέρομεν τὴν ΑΒ κάθετον ἐπὶ τὴν Υ καὶ τὴν ΑΓ πλαγίαν πρὸς τὴν Υ. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ φέρομεν μίαν εὐθεῖαν ΓΔΕ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Δ καὶ τὴν Χ εἰς τὸ Ε καὶ τοιαύτην, ὥστε ΔΕ=2ΑΓ.

1ον. Ἐὰν Ζ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΔΕ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΓΖ εἶναι ἰσοσκελές.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία ΑΓΒ εἶναι τριπλασία τῆς γωνίας ΕΓΒ.

297. (353). Τρεῖς εὐθεῖαι Ox, Oy, Oz, σχηματίζουν μεταξύ των τὰς γωνίας xOy καὶ yOz ἴσας μὲ 60°. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Μ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς τῆς γωνίας xOy φέρομεν τὰς καθέτους ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ ἐπὶ τὰς εὐθείας Ox, Oy, Oz. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΜΑ+ΜΒ=ΜΓ.

298. (354). Δίδεται μία γωνία xOy. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Ox λαμβάνομεν δύο τυχόντα σημεῖα Α καὶ Α', ἐπὶ δὲ τῆς πλευρᾶς Oy δύο ἄλλα σημεῖα Β καὶ Β' καὶ τοιαῦτα, ὥστε ΑΑ'=ΒΒ'. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΕΕ',



Σχ. ἀσκ. 298.

ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα Ε καὶ Ε' τῶν ΑΒ καὶ Α'Β' εἶναι παράλληλος ἢ κάθετος πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας xOy.

299. (310). Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, (ΑΒ>ΑΓ) φέρομεν τὸ ὕψος ΑΕ καὶ τὴν διχοτόμον ΑΔ τῆς γωνίας Α.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι γων.ΔΑΕ$=\frac{\Gamma-\mathrm{B}}{2}$.

2ον. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Γ φέρομεν τὴν ΓΖ κάθετον ἐπὶ τὴν διχοτόμον ΑΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι γων.ΒΓΖ$=\frac{\Gamma-\mathrm{B}}{2}$.

3ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι γων.ΑΔΒ=1 ὀρθ.$+\frac{\Gamma-\mathrm{B}}{2}$.

300. (316). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ. Ἀπὸ τὴν κορυφήν του Α φέρομεν μίαν εὐθεῖαν xy κάθετον ἐπὶ τὴν διχοτόμον ΑΔ τῆς γωνίας Α. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν συνδέσωμεν τυχὸν σημεῖον Μ τῆς xy μὲ τὰς κορυφὰς Β καὶ Γ, λαμβάνομεν ἕνα τρίγωνον ΜΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι μεγαλυτέρα τῆς περιμέτρου τοῦ ΑΒΓ.

301. (333). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ ἡ γωνία Β εἶναι 45°. Ἀπὸ τὰ μέσα Μ καὶ Ν τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΒΓ φέρομεν, εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τοῦ τριγώνου, τὴν ΜΗ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ἴσην μὲ $\frac{\mathrm{AB}}{2}$ καὶ τὴν ΝΖ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ ἴσην μὲ $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$. Ἐὰν Ρ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΓ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΡΒ=ΡΗ=ΡΖ.

302. (337). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία Β εἶναι διπλασία τῆς γωνίας Γ. Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΗ καὶ προεκτείνομεν τὴν ΑΒ κατὰ κατὰ ἕνα μῆκος ΒΔ=ΒΗ. Ἐὰν Ε εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΓ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Δ, Η, Ε κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

303. (338). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ. Κατασκευάζομεν τὸ συμμετρικὸν Μ τοῦ Γ ὡς πρὸς τὸ μέσον Δ τῆς ΑΒ καὶ τὸ συμμετρικὸν Ν τοῦ Β ὡς πρὸς τὸ μέσον Ε τῆς ΑΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Μ, Ν καὶ Α κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

304. (341). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὴν διάμεσον ΑΔ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως αὐτῆς λαμβάνομεν τμῆμα ΔΕ=ΑΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΔΓ καὶ ΒΔΕ εἶναι ἴσα.

2ον. Ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΒΕΓ εἶναι παραλληλόγραμμον.

3ον. Ὅτι $\frac{\mathrm{AB}+\mathrm{A\Gamma}-\mathrm{B\Gamma}}{2}<\mathrm{A\Delta}<\frac{\mathrm{AB}+\mathrm{A\Gamma}}{2}$.

4ον. Συνδέομεν, μὲ εὐθεῖαν, τὸ σημεῖον Β μὲ τὸ μέσον Ζ τῆς ΑΓ καὶ τὸ σημεῖον Γ μὲ τὸ μέσον Θ τῆς ΒΕ· νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΒΖ καὶ ΓΘ τριχοτομοῦν τὴν ΑΕ.

305. (343). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐκ τῆς κορυφῆς Α φέρομεν τὴν ΑΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ἐσωτερικὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Β καὶ τὴν ΑΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ἐξωτερικὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Β. Ὁμοίως ἐκ τοῦ Α φέρομεν τὰς καθέτους ΑΖ καὶ ΑΗ ἐπὶ τὴν ἐσωτερικὴν διχοτόμον καὶ ἐξωτερικὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Γ. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι τὰ τετράπλευρα ΑΕΒΔ καὶ ΑΖΓΗ εἶναι ὀρθογώνια.

2ον. Ὅτι αἱ ΕΔ καὶ ΖΗ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν ΒΓ καὶ διχοτομοῦν ἀντιστοίχως τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ.

3ον. Ὅτι τὰ σημεῖα Ε, Δ, Ζ, Η κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

306. (349). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ γωνία Β εἶναι διπλασία τῆς Γ. Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ καὶ προεκτείνομεν τὴν ΑΒ κατὰ ἕνα μῆκος ΒΕ=ΒΔ. Ἡ εὐθεῖα ΕΔ συναντᾷ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι αἱ γωνίαι τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΕΖ εἶναι ἴσαι, μία πρὸς μίαν.

2ον. Ὅτι ΖΑ=ΖΓ=ΖΔ.

3ον. Ὅτι ΑΒ=ΔΓ—ΔΒ.

307. (350). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὰς διαμέσους ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ. φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΖΕ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμῆμα ΕΗ=ΖΕ. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι τὰ τετράπλευρα ΑΖΔΕ, ΒΔΕΖ, ΓΕΖΔ, ΑΖΓΗ καὶ ΒΔΗΕ εἶναι παραλληλόγραμμα.

2ον. Ὅτι αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΑΔΗ εἶναι ἴσαι μὲ τὰς διαμέσους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

3ον. Ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΔΗ εἶναι ἴσον μὲ τὰ 3/4 τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

308. (317). Εἰς ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον, τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων του, τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν μεσοκαθέτων του, τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων του, τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν τριῶν ὑψῶν του καὶ ἡ κορυφή του κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς.

309. (318). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἕνα τρίγωνον εἶναι ἰσόπλευρον, ἐὰν τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων του συμπίπτῃ μὲ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν καθέτων εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του καὶ ἀντιστρόφως.

310. (321). Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Δ τῆς βάσεως ΒΓ ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν παραλλήλους ΔΕ καὶ ΔΖ πρὸς τὰς ἴσας πλευράς του ΑΒ καὶ ΑΓ.

1ον. Διὰ ποίαν θέσιν τοῦ Δ ἐπὶ τῆς ΒΓ, τὸ παραλληλόγραμμον ΑΖΔΕ γίνεται ρόμβος;

2ον. Ποίους ὅρους πρέπει νὰ ἐκπληρῇ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἵνα τὸ παραλληλόγραμμον ΑΖΔΕ εἶναι ὀρθογώνιον, καὶ πληρουμένων τῶν ὅρων αὐτῶν, διὰ ποίαν θέσιν τοῦ Δ τὸ ὀρθογώνιον αὐτὸ εἶναι τετράγωνον;

311. (328). Δίδεται ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ· ἐπὶ τῶν πλευρῶν του ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα Α', Β', Γ' καὶ τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι $ΑΑ'=ΒΒ'=ΓΓ'=\frac{ΑΒ}{3}$. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' εἶναι ἰσόπλευρον.

2ον. Ὅτι αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου Α'Β'Γ' εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

312. (344). Εἰς ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, (ΑΒ=ΑΓ) φέρομεν τὰς διαμέσους ΒΒ', ΓΓ', αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ο. Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον. Ὅτι τὸ τρίγωνον ΟΒΓ εἶναι ἰσοσκελές, τὰ δὲ τρίγωνα ΟΒΓ' καὶ ΟΓΒ' εἶναι ἴσα. 2ον. Φέρομεν τυχοῦσαν παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Δ, τὴν διάμεσον ΒΒ' εἰς τὸ Ε, τὴν διάμεσον ΓΓ' εἰς τὸ Ζ καὶ τὴν πλευρὰν ΑΓ εἰς τὸ Θ· νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΔΕ=ΖΘ.

313. (347). Ἐπὶ τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώ-

νου κατασκευάζομεν, ἐξωτερικῶς τοῦ τριγώνου, τὰ τετράγωνα ΑΒΔΕ καὶ ΑΓΖΘ. Ἔστω Μ τὸ μέσον τῆς ΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι:

1ον. ΜΕ=ΜΘ.

2ον. ΒΖ=ΓΔ.

3ον. Αἱ ΕΘ καὶ ΑΜ εἶναι κάθετοι μεταξύ των.

4ον. ΕΘ=2ΑΜ.

5ον. Αἱ ΒΖ καὶ ΓΔ τέμνονται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΜ.

314. (312). Ἡ γωνία Β ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ εἶναι 30°. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διάμεσος καὶ τὸ ὕψος, τὰ ὁποῖα ἄγονται ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας Α, διαιροῦν τὴν γωνίαν Α εἰς τρία ἴσα μέρη.

315. (313). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α. Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ καὶ συνδέομεν μὲ εὐθείας τὸ Δ μὲ τὰ μέσα Ε καὶ Ζ τῶν πλευρῶν του ΑΒ καὶ ΑΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι τὸ τρίγωνον ΕΔΖ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Δ.

2ον. Ὅτι αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΕΔΖ εἶναι ἴσαι μὲ τὰ ἡμίση τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

316. (314). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α. Μὲ πλευρὰς τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ κατασκευάζομεν, πρὸς τὰ ἔξω τοῦ τριγώνου, τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΒΓ' καὶ ΑΓΒ'. Ἐὰν Α' εἶναι τὸ μέσον τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α'.

317. (315). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α. Φέρομεν τὴν διάμεσον ΑΔ καὶ μίαν τυχοῦσαν εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΔ εἰς τὸ σημεῖον Θ καὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ, ἢ τὰς προεκτάσεις των, εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὴν κορυφὴν Α μὲ τὸ μέσον Μ τῆς ΕΖ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ.

318. (320). Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ φέρομεν τὰς καθέτους ΜΒ' καὶ ΜΓ' ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ὅταν τὸ σημεῖον Μ κινῆται ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ, ἡ κάθετος, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ Μ ἐπὶ τὴν Β'Γ', διέρχεται πάντοτε ἀπὸ ἕνα σταθερὸν σημεῖον.

319. (329). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α. Φέρομεν τὴν διάμεσον ΑΜ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμῆμα ΜΔ=ΑΜ. Ἐκ τοῦ Δ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ε, τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Β εἰς τὸ Ζ καὶ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Γ εἰς τὸ Η. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι τὸ ΑΒΔΓ εἶναι ὀρθογώνιον.

2ον. Ὅτι ΑΓ=ΔΖ καὶ ΔΗ=ΑΒ.

320. (330). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α· φέρομεν τὸ ὕψος ΑΗ· ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Δ τοῦ ὕψους ΑΗ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ε. Ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν τὴν ΔΖ κάθετον ἐπὶ τὴν ΔΓ, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ΒΕ=ΑΖ.

321. (331). Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α τῆς ὀρθῆς γωνίας ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ καὶ τὴν διάμεσον ΑΕ. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι γων.ΔΑΕ=Β—Γ.

2ον. Ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ΔΑΕ καὶ ΒΑΓ συμπίπτουν.

322. (332). Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον. Ὅτι αἱ κάθετοι εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου τέμνονται ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης.

2ον. Ὅτι αἱ κάθετοι αὗται καὶ ἡ διάμεσος ἡ ἀγομένη ἐκ τῆς ὀρθῆς γωνίας διαιροῦν τὸ τρίγωνον εἰς τέσσαρα ἴσα ὀρθογώνια τρίγωνα.

323. (336). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α. Ἀπὸ τὴν κορυφήν του Γ φέρομεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ λαμβάνομεν τμῆμα ΓΕ=ΑΓ. Προεκτείνομεν τὴν ΓΒ κατὰ μῆκος ΒΔ=ΑΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Δ, Α, Ε κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

324. (339). Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Δ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ ἑνὸς ὀρθογ. τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Μ καὶ τὴν προέκτασιν τῆς ΒΑ εἰς τὸ Ν. Ἔστω Ο τὸ μέσον τῆς ΒΓ. Ὁρίζομεν ἐπὶ τῆς ΓΝ ἕνα σημεῖον Σ τοιοῦτον, ὥστε τὸ τρίγωνον ΟΓΣ νὰ εἶναι ἰσοσκελὲς μὲ κορυφὴν τὸ Ο. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Β, Μ καὶ Σ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

325. (346). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α. Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΗ καὶ λαμβάνομεν τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε συμμετρικὰ τοῦ Η ὡς πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Δ, Α, Ε κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΒΔ καὶ ΓΕ εἶναι παράλληλοι.

3ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΑΗ=ΔΑ=ΑΕ.

326. (348). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α. Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΗ καὶ ἐκ τοῦ Η τὰς καθέτους ΗΔ καὶ ΗΕ ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι αἱ ΑΗ καὶ ΔΕ εἶναι ἴσαι.

2ον. Ὅτι ἡ ΔΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διάμεσον ΑΜ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

3ον. Ὅτι αἱ γωνίαι ΒΔΕ καὶ ΕΓΒ εἶναι παραπληρωματικαί.

327. (334). Εἰς ἕνα τετράγωνον ΑΒΓΔ λαμβάνομεν τὰ μέσα Μ καὶ Ν τῶν δύο προσκειμένων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΔ καὶ φέρομεν τὰς εὐθείας ΓΜ καὶ ΓΝ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν διαγώνιον ΒΔ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΒΕ=ΕΖ=ΖΔ.

328. (322). Τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου κειμένου ἐκτὸς ρόμβου ἀπὸ δύο διαδοχικὰς πλευράς του ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν ἀποστάσεων τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀπὸ τὰς δύο ἄλλας πλευρὰς τοῦ ρόμβου.

329. (345). Δίδεται ὁ ρόμβος ΑΒΓΔ. Ἀπὸ τὰς κορυφάς του Β καὶ Δ φέρομεν τὰς καθέτους ΒΕ, ΒΖ, ΔΗ, ΔΘ ἐπὶ τὰς ἀπέναντι πλευράς του. Αἱ κάθετοι αὐταὶ τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Κ καὶ Λ. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι αἱ γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου ΒΛΔΚ εἶναι ἴσαι, μία πρὸς μίαν, μὲ τὰς γωνίας τοῦ ρόμβου.

2ον. Ὅτι τὸ τετράπλευρον ΒΛΔΚ εἶναι ρόμβος.

330. (360). Δίδεται ἕνας ρόμβος ΑΒΓΔ. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του ΑΓ καὶ ΒΔ φέρομεν τὰς καθέτους ΟΕ,ΟΖ,ΟΗ, ΟΘ ἐπὶ τὰς πλευ-

ράς του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. Ὅτι ΟΕ=ΟΖ=ΟΗ=ΟΘ.

2ον. Ὅτι αἱ διαγώνιοί του διχοτομοῦν τὰς γωνίας, τὰς ὁποίας σχηματίζουν ἀνὰ δύο αἱ ἀποστάσεις ΟΕ, ΟΖ, ΟΗ, ΟΘ.

3ον. Ὅτι τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ εἶναι κορυφαὶ ὀρθογωνίου.

331. (359). Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ. Φέρομεν δύο παραλλήλους πρὸς τὸν διαγώνιον ΑΓ, αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν ἰσάκις ἀπὸ τὴν ΑΓ καὶ τέμνουν τὰς προεκτάσεις τῶν πλευρῶν ΔΑ, ΔΓ, ΒΓ, ΒΑ εἰς τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν δύο διαδοχικῶν πλευρῶν του ἰσοῦται μὲ τὴν διαγώνιον τοῦ ὀρθογωνίου.

332. (368). Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ. Φέρομεν δύο παραλλήλους ΕΖ καὶ ΗΘ πρὸς τὴν διαγώνιον ΑΓ, αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν ἰσάκις ἀπὸ αὐτὴν καὶ αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου εἰς τὰς σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ ὀρθογώνιον τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν διαγωνίων τοῦ δοθέντος ὀρθογωνίου.

333. (370). Εἰς ἕνα ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ λαμβάνομεν ἐντὸς αὐτοῦ τυχὸν σημεῖον Μ. Εὑρίσκομεν τὰ συμμετρικὰ σημεῖα, Ε, Ζ, Η, Θ τοῦ Μ πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ τοῦ ὀρθογωνίου. Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. Ὅτι αἱ κορυφαὶ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου ΕΖΗΘ, καὶ νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαγώνιοί του, συναρτήσει τῶν πλευρῶν τοῦ δοθέντος ὀρθογωνίου.

2ον. Ποῦ πρέπει νὰ κεῖται τὸ δοθὲν σημεῖον Μ, ἵνα τὸ ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμον ; Ποῖον παραλληλόγραμμον, εἰδικῶς, λαμβάνομεν τότε ;

3ον. Τί πρέπει νὰ εἶναι τὸ δοθὲν ὀρθογώνιον, ἵνα τὸ ΕΖΗΘ εἶναι τετράγωνον ;

334. (371). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι δυνάμεθα νὰ ἐγγράψωμεν πάντοτε ἕνα παραλληλόγραμμον εἰς ἕνα ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς διαγωνίους τοῦ ὀρθογωνίου. Νὰ ἀποδειχθῇ δέ, ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν διαγωνίων τοῦ ὀρθογωνίου.

335. (365). Νὰ ἀποδειχθῇ : 1ον. Ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν παραλληλογράμμου, τεμνόμεναι σχηματίζουν ὀρθογώνιον.

2ον. Αἱ διαγώνιοι τοῦ σχηματιζομένου ὀρθογωνίου εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ παραλληλογράμμου καὶ ἑκάστη ἐξ αὐτῶν εἶναι ἴση μὲ τὴν διαφορὰν τῶν δύο διαδοχικῶν πλευρῶν τοῦ παραλληλογράμμου.

3ον. Ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ἑνὸς ὀρθογωνίου, τεμνόμεναι σχηματίζουν τετράγωνον.

336. (336). Αἱ διχοτόμοι τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν ἑνὸς παραλληλογράμμου, τεμνόμεναι σχηματίζουν ἕνα ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν διαγωνίων εἶναι ἴσον μὲ τὴν περίμετρον τοῦ παραλληλογράμμου.

337. (367). Δίδεται ἕνα παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι διπλασία τῆς ΒΓ. Ἐκ τῆς κορυφῆς Α φέρομεν τὴν κάθετον ΑΕ ἐπὶ

τὴν ΒΓ καὶ συνδέομεν τὸ Ε μὲ τὸ μέσον Ζ τῆς ΓΔ. Ἔστω Η τὸ μέσον τῆς ΑΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι τὸ ΗΒΓΖ εἶναι ρόμβος.

2ον. Ὅτι ΗΖ=ΗΕ=ΗΒ.

3ον. Ὅτι ἡ ΖΕ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΗΕΓ.

4ον. Ὅτι ἡ γων.ΔΖΕ εἶναι τριπλασία τῆς ΖΕΓ.

338. (369). Εἰς ἕνα παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ φέρομεν τὰς διχοτόμους ΑΕ, ΒΖ, ΓΗ, ΔΘ τῶν γωνιῶν του, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς ἀπέναντι πλευρὰς εἰς τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι κάθε διχοτόμος σχηματίζει, μὲ τὰς πλευρὰς τοῦ παραλληλογράμμου, ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον (π.χ. ἡ ΑΕ σχηματίζει τὸ τρίγωνον ΑΔΕ).

2ον. Τὸ τετράπλευρον ΚΛΜΝ, τὸ ὁποῖον σχηματίζουν αἱ διχοτόμοι, εἶναι ἕνα ὀρθογώνιον.

3ον. Τὸ κέντρον τοῦ ὀρθογωνίου αὐτοῦ συμπίπτει μὲ τὸ κέντρον τοῦ παραλληλογράμμου.

4ον. Τί πρέπει νὰ εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ, ἵνα τὸ ὀρθογώνιον ΚΛΜΝ εἶναι τετράγωνον;

339. (372). Δίδεται ἕνα παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Β φέρομεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΒ καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς καὶ ἑκατέρωθεν τοῦ Β τμήματα ΒΕ καὶ ΒΖ ἴσα πρὸς τὴν ΒΓ. Ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Β φέρομεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΑ καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς καὶ ἑκατέρωθεν τοῦ Β μήκη ΒΘ καὶ ΒΚ ἴσα μὲ ΑΒ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΕΚ καὶ ΘΖ εἶναι παράλληλοι.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἰσότης τῶν τριγώνων ΑΔΓ, ΑΒΓ, ΘΒΖ, ΕΒΚ.

3ον. Φέρομεν τὰ ὕψη ΒΗ καὶ ΒΗ' τῶν τριγώνων ΕΒΚ καὶ ΘΒΖ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΒΗ=ΒΗ' καὶ ὅτι τὰ σημεῖα Η, Β, Η' κεῖνται ἐπ' εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν ΑΓ.

4ον. Φέρομεν τὰ ὕψη ΒΜ καὶ ΒΝ τῶν τριγώνων ΒΕΘ καὶ ΒΖΚ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Δ, Μ, Β, Ν κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

340. (326). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τραπέζιον:

1ον. Ἡ διαφορὰ τῶν δύο βάσεών του εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του.

2ον. Ἑκάστη τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του εἶναι μικροτέρα τῆς ἄλλης, αὐξηθείσης κατὰ τὴν διαφορὰν τῶν βάσεών του.

3ον. Τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεών του εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν διαγωνίων του.

341. (327). Συνδέομεν μὲ εὐθείας τὰ μέσα Ε καὶ Ζ τῶν βάσεων ΑΒ καὶ ΓΔ ἑνὸς τραπεζίου ΑΒΓΔ μὲ τὰ μέσα Η καὶ Θ τῶν διαγωνίων του ΑΓ καὶ ΒΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ γωνίαι Ε καὶ Ζ τοῦ τετραπλεύρου ΕΘΖΗ εἶναι ἴσαι μὲ τὴν γωνίαν, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ ΑΔ καὶ ΒΓ, προεκτεινόμεναι μέχρι τῆς συναντήσεώς των εἰς τὸ σημεῖον Ο.

342. (362). Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον τραπέζιον ΑΒΓΔ, ($\widehat{A}=\widehat{\Delta}=90^{\circ}$). Ἡ μεγάλη βάσις ΔΓ εἶναι διπλασία τῆς μικρᾶς βάσεως ΑΒ καὶ ἡ ἀμβλεῖα γωνία Β εἶναι τριπλασία τῆς ὀξείας γωνίας Γ.

1ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι Β καὶ Γ.

2ον. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Β φέρομεν τὴν κάθετον ΒΕ ἐπὶ τὴν ΔΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διαγώνιος ΑΓ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς ΒΕ.

3ον. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΕ· νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΑΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΔ καὶ ἴση μὲ αὐτήν.

4ον. Ἐὰν Ν εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ΑΕ καὶ ΒΔ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΝΜ εἶναι ἴση μὲ τὸ τέταρτον τῆς βάσεως ΔΓ.

343. (363). Δίδεται ἕνα τραπέζιον ΑΒΓΔ μὲ βάσεις τὰς ΑΒ καὶ ΓΔ. Ἔστωσαν Ε καὶ Ζ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΔ καὶ ΒΓ, Η τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Α καὶ Δ καὶ Κ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ. Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. Ὅτι ἡ ΗΚ εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις καὶ ὅτι :

$$ΕΗ = \frac{ΑΔ}{2}, \quad ΖΚ = \frac{ΒΓ}{2}.$$

2ον. Ὅτι διὰ νὰ τέμνωνται αἱ τέσσαρες διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τραπεζίου εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεών του νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του.

344. (364). Δίδεται ἕνα τραπέζιον ΑΒΓΔ μὲ μεγάλην βάσιν τὴν ΑΒ.

1ον. Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Α καὶ Δ τέμνονται εἰς τὸ Η καὶ αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Γ καὶ Β τέμνονται εἰς τὸ Κ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΗΚ εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις καὶ τέμνει τὰς ΑΔ καὶ ΓΒ εἰς τὰ μέσα των Ε καὶ Ζ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ΕΗ συναρτήσει τῆς ΑΔ καὶ ἡ ΚΖ συναρτήσει τῆς ΒΓ.

2ον. Ὑποθέτομεν, ὅτι αἱ τέσσαρες διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τραπεζίου τέμνονται. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τότε τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεών του εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν τοῦ τραπεζίου.

3ον. Ὑποθέτομεν, ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Δ καὶ Γ τέμνονται ἐπὶ τῆς ΑΒ. Νὰ εὑρεθῇ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν πλευρῶν τοῦ τραπεζίου.

345. (335). Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ προεκτάσεις τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τετραπλεύρου, τέμνονται ὑπὸ γωνίαν, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἀπέναντι γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου.

346. (357). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν τεσσάρων κορυφῶν τετραπλεύρου ἀπὸ δοθεῖσαν εὐθεῖαν xy, εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετραπλάσιον τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν δύο εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν.

347. (358). Δίδεται ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ Ε, Ζ, Η, Θ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του 1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ, εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΒΓΔ.

2ον. Ἀπὸ τὰς κορυφὰς τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς διαγωνίους του νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ σχηματιζόμενον παραλληλόγραμμον ΚΛΜΝ εἶναι διπλάσιον τοῦ ΑΒΓΔ καὶ τετραπλάσιον τοῦ ΕΖΗΘ.

348. (373). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ. Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Σ, τὸ ὁποῖον κινεῖται ἐπὶ τῆς ΒΓ φέρομεν μίαν παράλληλον πρὸς τὴν διχοτόμον ΑΔ τῆς γωνίας Α, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ε καὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ζ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ μέσου τῆς ΕΖ.

349. (374). Εἰς ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΔΕ παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὰς ἴσας πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε· φέρομεν τὰς εὐθείας ΓΔ καὶ ΒΕ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου Μ, ὅταν ἡ εὐθεῖα ΔΕ κινῆται παραλλήλως πρὸς τὴν ΒΓ.

350. (375). Δίδεται ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Σ τῆς βάσεώς του ΒΓ φέρομεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ν καὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Μ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΑΜ=ΑΝ.

2ον. Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΗ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\text{ΑΗ} = \frac{\text{ΣΜ}+\text{ΣΝ}}{2}$ καὶ ἐξ αὐτοῦ νὰ ἐξαχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα ΣΜ+ΣΝ εἶναι σταθερόν, ὅταν τὸ σημεῖον Σ κινῆται ἐπὶ τῆς ΒΓ.

3ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ μέσου τῆς ΜΝ, ὅταν τὸ Σ κινῆται ἐπὶ τῆς ΒΓ.

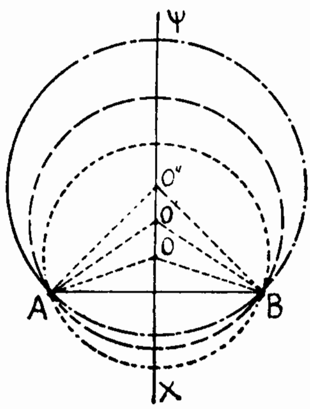
ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

Η ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

1. Περιφέρεια. Εὐθεῖα καὶ περιφέρεια

241. Περιφέρεια διερχομένη διὰ δύο σημείων. Ἔστωσαν δύο σημεῖα Α καὶ Β. Φέρομεν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ καὶ τὴν μεσοκάθετον ΧΨ αὐτοῦ. Κάθε σημεῖον Ο τῆς μεσοκαθέτου αὐτῆς θὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β, δηλ. θὰ εἶναι ΟΑ=ΟΒ. Ἂν λοιπὸν γράψωμεν περιφέρειαν μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα τὴν ΟΑ ἢ τὴν ἴσην της ΟΒ, αὕτη θὰ διέλθῃ ἀπὸ τὰ Α καὶ Β.



Σχ. 184.

Εἶναι φανερόν, ὅτι διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β δύνανται νὰ διέλθουν ἄπειροι περιφέρειαι, ἀρκεῖ νὰ λαμβάνωμεν ὡς κέντρα τὰ διάφορα σημεῖα τῆς μεσοκαθέτου καὶ ὡς ἀκτῖνας τὰς ἀποστάσεις τῶν κέντρων ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β.

Συμπέρασμα: Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι :

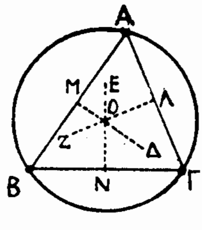
Ἡ μεσοκάθετος ΧΨ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὰ Α καὶ Β.

242. Θεώρημα. ***Διὰ τριῶν σημείων, μὴ κειμένων ἐπ' εὐθείας, διέρχεται μία καὶ μόνον περιφέρεια.***

Ἔστωσαν Α, Β, Γ τρία σημεῖα, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἀπὸ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ διέρχεται μία καὶ μόνον περιφέρεια.

Τὸ κέντρον μιᾶς περιφερείας, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀπέχει ἰσάκις ἀπὸ τὰ Α καὶ Β· ἑπομένως κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου ΜΔ τῆς ΑΒ. Ὁμοίως, τὸ κέντρον τῆς περιφερείας αὐτῆς, ὡς ἀπέχον ἰσάκις ἀπὸ τὰ σημεῖα Β καὶ Γ κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου ΝΕ τῆς ΒΓ.



Σχ. 185.

Αἱ μεσοκάθετοι αὐταὶ ΜΔ καὶ ΝΕ τέμνονται (§ 226) εἰς ἕνα σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας.

Ἐπειδὴ αἱ μεσοκάθετοι ΜΔ καὶ ΝΕ τέμνονται μόνον εἰς ἕνα σημεῖον, ἕπεται ὅτι διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ δύναται νὰ διέλθῃ μία καὶ μόνον περιφέρεια.

Ἐδείχθη, λοιπὸν ὅτι: ***Διὰ τριῶν . . .***

243. Πορίσματα: Ι. ***Μία εὐθεῖα καὶ μία περιφέρεια ἔχουν τὸ πολὺ δύο κοινὰ σημεῖα.***

ΙΙ. ***Δύο περιφέρειαι δὲν δύνανται νὰ ἔχουν κοινὰ σημεῖα περισσότερα τῶν δύο.***

Διότι, ἐὰν εἶχον κοινὰ σημεῖα περισσότερα τῶν δύο, ἔστω τρία, τότε αἱ περιφέρειαι θὰ συνέπιπτον καὶ θὰ ἀπετέλουν μίαν περιφέρειαν.

ΙΙΙ. ***Διὰ τῶν κορυφῶν ἑνὸς τριγώνου διέρχεται μία καὶ μόνον περιφέρεια.***

Ἡ περιφέρεια αὐτὴ εἶναι *περιγεγραμμένη περὶ τὸ τρίγωνον* καὶ τὸ τρίγωνον εἶναι *ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν περιφέρειαν* (§ 227).

244. Παρατήρησις. Τὸ θεώρημα τῆς § 242 μᾶς ἐπιτρέπει νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα:

Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ τριῶν σημείων.

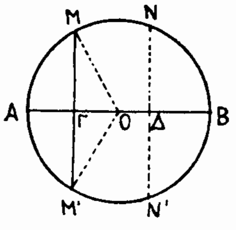
Τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι ἀδύνατον, ὅταν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ εἶναι διάφορα καὶ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, διότι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ μεσοκάθετοι τῶν ΑΒ καὶ ΒΓ εἶναι παράλληλοι. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι τὸ κέντρον *κεῖται εἰς τὸ ἄπειρον* κατὰ τὴν διεύθυνσιν, τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒΓ.

245. Θεώρημα. ***Κάθε διάμετρος κύκλου εἶναι ἄξων συμμετρίας τῶν σημείων τῆς περιφερείας του.***

Ἔστω ὁ κύκλος Ο *(Σχ. 186)* καὶ ΑΒ μία διάμετρός του. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι ἄξων συμμετρίας τῆς περιφερείας Ο.

Πράγματι· ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας Ο. Ἀπὸ τὸ Μ φέρομεν τὴν κάθετον ΜΓ ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέ-

μνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Μ'. Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΜ καὶ ΟΜ'. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΓΜ καὶ ΟΓΜ' εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των ΟΜ καὶ ΟΜ' ἴσας, ὡς ἀκτῖνας τοῦ αὐτοῦ κύκλου καὶ τὴν κάθετον πλευρὰν ΟΓ κοινήν· ἄρα θὰ εἶναι καὶ ΓΜ=ΓΜ'. Τὰ σημεῖα λοιπὸν Μ καὶ Μ' εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν ΑΒ (§ 154).



Σχ. 186.

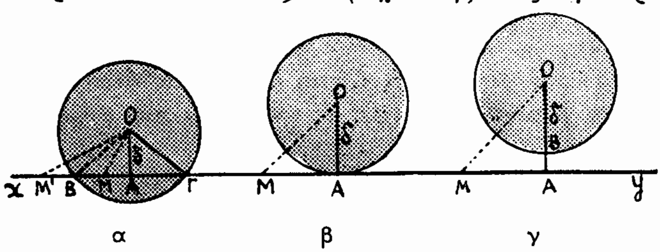
Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι κάθε σημεῖον τοῦ τόξου ΑΜΒ ἔχει τὸ συμμετρικόν του ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΜ'Β. Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας Ο εἶναι ἀνὰ δύο συμμετρικὰ πρὸς τὴν ΑΒ ἕπεται, ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι ἄξων συμμετρίας τῆς περιφερείας (§ 154).

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Κάθε διάμετρος....***

246. Πόρισμα. ***Κάθε διάμετρος κύκλου χωρίζει τὴν περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα τόξα (ἡμιπεριφερείας) καὶ τὸν κύκλον εἰς δύο ἴσα μέρη (ἡμικύκλια).***

247. Σχετικαὶ θέσεις μιᾶς εὐθείας καὶ μιᾶς περιφερείας. Ἔστω μία εὐθεῖα xy, ἡ ὁποία μετατίθεται παραλλήλως πρὸς ἑαυτὴν καὶ ΟΑ=δ ἡ μεταβλητὴ ἀπόστασίς της ἀπὸ τὸ κέντρον μιᾶς περιφερείας (Ο, R).

1η. Περίπτωσις. Ἔστω δ > R *(Σχ. 187γ).* Εἰς τὴν περίπτωσιν



Σχ. 187.

αὐτὴν τὸ σημεῖον Α κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου Ο. Κάθε ἄλλο σημεῖον Μ τῆς εὐθείας xy ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον Ο ἀπόστασιν μεγαλυτέραν τῆς ΟΑ, δηλ. εἶναι ΟΜ > ΟΑ καὶ ἑπομένως ΟΜ > R· ἄρα τὸ σημεῖον Μ κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου καὶ λέγομεν ὅτι *ἡ εὐθεῖα xy κεῖται ἐκτὸς τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου Ο.*

2α. Περίπτωσις. Ἔστω δ = R *(Σχ. 187β).* Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ σημεῖον Α κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου Ο. Κάθε ἄλλο σημεῖον Μ τῆς εὐθείας xy, διάφορον τοῦ Α, ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέν-

τρον Ο ἀπόστασιν μεγαλυτέραν τῆς ΟΑ, δηλ. εἶναι ΟΜ > ΟΑ καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ΟΜ>R. Ἡ εὐθεῖα λοιπὸν xy ἔχει ἕνα μόνον κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου Ο καὶ λέγομεν, ὅτι *ἡ εὐθεῖα xy εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας Ο.*

3η. Περίπτωσις. Ἔστω δ < R *(Σχ. 187α)*. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ σημεῖον Α κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς περιφερείας. Ἔστω Μ ἕνα ἄλλο σημεῖον τῆς εὐθείας xy. Ὅταν τὸ Μ ἀπομακρύνεται ἀπὸ τὸ Α ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας Αx, ἡ ἀπόστασίς του ΟΜ ἀπὸ τὸ κέντρον Ο αὐξάνει σταθερῶς ἀπὸ τὴν τιμὴν ΟΑ < R εἰς μίαν τιμὴν ὅσον θέλομεν μεγάλην. Ὑπάρχει λοιπὸν ἕνα σημεῖον Β ἐπὶ τῆς xy τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι ΟΒ=R. Τὸ σημεῖον αὐτὸ εἶναι κοινὸν σημεῖον τῆς εὐθείας xy καὶ τῆς περιφερείας Ο. Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ σημεῖον Μ κινεῖται ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας Αy, εὑρίσκομεν καὶ ἕνα δεύτερον σημεῖον Γ συμμετρικὸν τοῦ Α καὶ τοιοῦτον, ὥστε ΟΓ=R.

Ἡ εὐθεῖα xy καὶ ἡ περιφέρεια Ο ἔχουν λοιπὸν δύο κοινὰ σημεῖα καὶ δὲν δύνανται νὰ ἔχουν τρίτον (§ 243 II) καὶ λέγομεν ὅτι *ἡ εὐθεῖα xy εἶναι τέμνουσα τῆς περιφερείας Ο.*

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι:

Ἐὰν δ > R	ἡ	εὐθεῖα	*κεῖται ἐκτὸς*	τῆς περιφερείας
Ἐὰν δ = R	»	»	εἶναι *ἐφαπτομένη*	τῆς περιφερείας
Ἐὰν δ < R	»	»	» *τέμνουσα*	τῆς περιφερείας

Τὰ ἀντίστροφα τῶν προτάσεων, ποὺ εὑρίσκονται εἰς τὸν ἀνωτέρω πίνακα, ἀληθεύουν καὶ ἀποδεικνύονται διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

Π.χ. ***ἐὰν μία εὐθεῖα εἶναι ἐφαπτομένη περιφερείας θὰ εἶναι δ=R.***

Πράγματι· ἐὰν δὲν ἦτο δ=R θὰ ἦτο εἴτε δ>R, εἴτε δ<R.

Ἐὰν ἦτο δ>R, ἡ εὐθεῖα θὰ ἔκειτο ἐκτὸς τῆς περιφερείας, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας.

Ἐὰν ἦτο δ<R, ἡ εὐθεῖα θὰ ἔτεμνε τὴν περιφέρειαν, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἀντίκειται καὶ πάλιν πρὸς τὴν ὑπόθεσίν μας. Ὥστε ἀπομένει νὰ εἶναι δ=R.

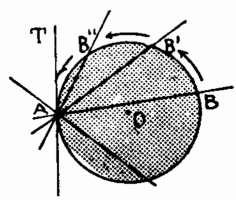
2. Ἐφαπτομένη περιφερείας καὶ ἰδιότητες αὐτῆς

248. Ἐφαπτομένη περιφερείας. Ὅπως ἴδωμεν (§ 247) ***ἐφαπτομένη κύκλου*** ἢ ***ἐφαπτομένη περιφερείας*** *λέγεται κάθε εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἔχει ἕνα κοινὸν σημεῖον καὶ μόνον ἕνα μὲ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου.*

Τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας λέγεται *σημεῖον ἐπαφῆς* ἢ *σημεῖον ἀφῆς*.

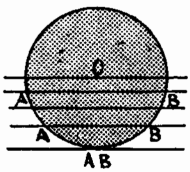
Ὅταν μία εὐθεῖα εἶναι ἐφαπτομένη μιᾶς περιφερείας εἰς ἕνα σημεῖον αὐτῆς καὶ ἡ περιφέρεια εἶναι ἐφαπτομένη τῆς εὐθείας εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Ἡ ἐφαπτομένη ΑΤ ἑνὸς κύκλου Ο *(Σχ. 188)* εἰς ἕνα σημεῖόν του Α δύναται νὰ θεωρηθῇ, ὡς ἡ τελικὴ (ὁριακὴ) θέσις, τὴν ὁποίαν ἔρχεται νὰ λάβῃ μία τέμνουσα ΑΒ, στρεφομένη περὶ τὸ σημεῖον Α οὕτως, ὥστε τὸ μὲν σημεῖον Α νὰ μένῃ ἀκίνητον, τὸ δὲ σημεῖον Β, γράφον τὴν περιφέρειαν, ἔρχεται νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Α.



Σχ. 188.

Πράγματι· ὅταν τὰ δύο σημεῖα τῆς τομῆς Β καὶ Α συμπέσουν εἰς ἕνα καὶ μόνον σημεῖον Α, ἡ εὐθεῖα ΑΤ δὲν ἔχει παρὰ ἕνα καὶ μόνον κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν περιφέρειαν καὶ ἐπομένως εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας.



Σχ. 189.

Ὁ ὁρισμὸς αὐτὸς τῆς ἐφαπτομένης ἰσχύει δι' ὅλας τὰς καμπύλας γραμμάς.

Ἐπίσης ἡ ἐφαπτομένη ἑνὸς κύκλου δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἡ τελικὴ θέσις μιᾶς τεμνούσης ΑΒ, ἡ ὁποία μετατίθεται παραλλήλως πρὸς ἑαυτὴν καὶ τῆς ὁποίας ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τοῦ κέντρου πλησιάζει νὰ γίνῃ ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου *(Σχ. 189)*.

249. Ὁρισμός. ***Γωνία μιᾶς περιφερείας καὶ μιᾶς τεμνούσης αὐτὴν εὐθείας*** *λέγεται ἡ γωνία, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὴν δοθεῖσαν τέμνουσαν καὶ ἀπὸ τὴν ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς.*

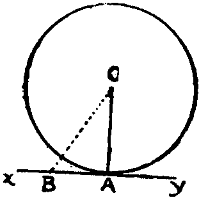
Π.χ. ἡ γωνία ΒΑΤ *(Σχ. 188)* εἶναι γωνία τῆς περιφερείας Ο καὶ τῆς τεμνούσης ΑΒ.

250. Θεώρημα. ***Κάθε εὐθεῖα, κάθετος εἰς τὸ ἄκρον μιᾶς ἀκτῖνος ἑνὸς κύκλου, εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας του.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω ὁ κύκλος Ο καὶ ΟΑ *(Σχ. 190)* μία ἀκτὶς αὐτοῦ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν xy κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΑ εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς Α.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ xy εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας Ο· δηλ. θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ xy καὶ ἡ περιφέρεια Ο δὲν ἔχουν ἄλλο κοινὸν σημεῖον ἐκτὸς τοῦ Α.

Ἀπόδειξις: Ἔστω ἕνα ἄλλο τυχὸν σημεῖον Β τῆς xy. Φέρομεν τὴν ΟΒ. Ἐπειδὴ ἡ ΟΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν xy, ἡ ΟΒ θὰ εἶναι πλαγία πρὸς αὐτὴν καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΟΑ. Τὸ σημεῖον Β θὰ κεῖται λοιπὸν ἐκτὸς τῆς περιφερείας Ο, ὡς ἀπέχον ἀπόστασιν μεγαλυτέραν τῆς ἀκτῖνος.



Σχ. 190.

Ὑπόθ.	ΟΑ=ἀκτὶς xy ⊥ ΟΑ, εἰς τὸ Α
Συμπ.	xy ἐφαπτ. τῆς Ο

Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ κάθε ἄλλο σημεῖον τῆς xy, ἐκτὸς τοῦ Α. Ὥστε ἡ εὐθεῖα xy δὲν ἔχει ἄλλο κοινὸν σημεῖον, μὲ τὴν περιφέρειαν Ο, ἐκτὸς τοῦ Α καὶ ἑπομένως ἡ xy εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας Ο εἰς τὸ σημεῖον Α.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Κάθε εὐθεῖα. . . .***

251. Θεώρημα. *(Ἀντίστροφον).* ***Κάθε ἐφαπτομένη περιφερείας εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα, ἡ ὁποία καταλήγει εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω, ὅτι ἡ εὐθεῖα xy *(Σχ. 190)* εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας Ο εἰς τὸ σημεῖον Α. Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΑ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ xy εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΑ εἰς τὸ σημεῖον Α.

Ὑπόθ.	xy ἐφαπτομένη τῆς Ο εἰς τὸ Α ΟΑ=ἀκτὶς
Συμπ.	xy ⊥ ΟΑ εἰς τὸ Α

Ἀπόδειξις: Ἡ xy, ὡς ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας Ο εἰς τὸ σημεῖον Α, δὲν ἔχει κανένα ἄλλο κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν περιφέρειαν, ἐκτὸς τοῦ Α. Ὅλα λοιπὸν τὰ σημεῖα τῆς xy, ἐκτὸς τοῦ Α, κεῖνται ἐκτὸς τῆς περιφερείας καὶ ἑπομένως αἱ ἀποστάσεις των ἀπὸ τὸ κέντρον Ο θὰ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ἀκτῖνος ΟΑ. Ἐπειδὴ ἡ ΟΑ εἶναι ἡ μικροτέρα ἀπὸ ὅλας τὰς εὐθείας, τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο πρὸς τὰ διάφορα σημεῖα τῆς xy, ἕπεται (§ 100), ὅτι ἡ ΟΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΑ εἰς τὸ σημεῖον Α.

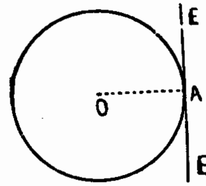
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Κάθε ἐφαπτομένη. . . .***

252. Πόρισμα. ***Εἰς κάθε σημεῖον περιφερείας μία καὶ μόνη ἐφαπτομένη ἄγεται.***

Διότι μία καὶ μόνον κάθετος ἐπὶ ἀκτῖνα ἄγεται εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς.

253. 'Εφαρμογή. *Πρόβλημα.* ***Νὰ ἀχθῇ μία ἐφαπτομένη περιφερείας Ο εἰς δοθὲν σημεῖον αὐτῆς Α.***

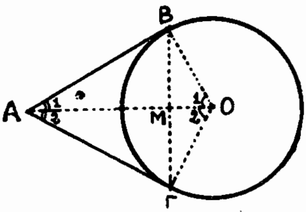
Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν τὴν ἀκτῖνα ΟΑ καὶ τὴν κάθετον ΕΑΕ' ἐπὶ τὴν ΟΑ εἰς τὸ σημεῖον Α *(Σχ. 191).*



Σχ. 191.

254. Θεώρημα. ***Αἱ δύο ἐφαπτόμεναι περιφερείας, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς αὐτῆς, εἶναι ἴσαι καὶ σχηματίζουν ἴσας γωνίας μὲ τὴν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία συνδέει τὸ δοθὲν σημεῖον μὲ τὸ κέντρον τῆς περιφερείας.***

'Υπόθεσις: "Εστω ἡ περιφέρεια Ο καὶ Α ἕνα σημεῖον ἐκτὸς αὐτῆς *(Σχ. 192).* Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΟ καὶ τὰς ἐφαπτομένας ΑΒ καὶ ΑΓ πρὸς τὴν περιφέρειαν Ο.



Σχ. 192.

'Υπόθ.	ΑΒ ἐφαπτομένη τῆς Ο ΑΓ » » Ο
Συμπ.	ΑΒ=ΑΓ $\widehat{A}_1=\widehat{B}_2$

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι: ΑΒ=ΑΓ καὶ $\widehat{A}_1=\widehat{A}_2$.

'Απόδειξις: Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΒ καὶ ΟΓ εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς. Αἱ ΟΒ καὶ ΟΓ, ὡς ἀκτῖνες καταλήγουσαι εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς, εἶναι κάθετοι ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰς ἐφαπτομένας ΑΒ καὶ ΑΓ.

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΒΑ καὶ ΟΓΑ ἔχουν: τὴν ΑΟ κοινὴν καὶ ΟΒ=ΟΓ, ὡς ἀκτῖνας τοῦ κύκλου Ο· δηλ. ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των ἴσας καὶ μίαν κάθετον πλευρὰν ἴσην· ἄρα εἶναι ἴσα καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι ΑΒ=ΑΓ καὶ $\widehat{A}_1=\widehat{A}_2$.

'Εδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Αἱ δύο ἐφαπτόμεναι. . . .***

255. Πόρισμα 1ον. 'Εδείξαμεν ἀνωτέρω, ὅτι τὰ τρίγωνα ΟΒΑ καὶ ΟΓΑ εἶναι ἴσα· ἄρα θὰ εἶναι $\widehat{A}_1=\widehat{A}_2$ καὶ $\widehat{O}_1=\widehat{O}_2$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΟ εἶναι διχοτόμος τῶν γωνιῶν ΒΑΓ καὶ ΒΟΓ.

'Εὰν φέρωμεν τὴν χορδὴν ΒΓ, παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ΑΟ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ· ἄρα ἡ ΑΟ θὰ εἶναι διάμεσος καὶ κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν του ΒΓ. 'Εκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι:

Ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὸ κέντρον ἑνὸς κύκλου καὶ τὸ σημεῖον, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἄγονται αἱ δύο ἐφαπτόμεναι τῆς περιφερείας αὐτοῦ, εἶναι:

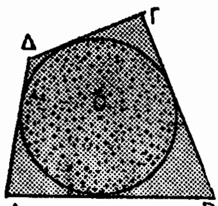
1ον. ***διχοτόμος τῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ δύο ἀκτῖνες, αἱ καταλήγουσαι εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς.***

2ον. ***κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς, ἡ ὁποία συνδέει τὰ σημεῖα ἐπαφῆς.***

256. Πόρισμα 2ον. Εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΒΟΓ, αἱ γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι ὀρθαί, ἑπομένως αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι του Α καὶ Ο ἔχουν ἄθροισμα ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς γωνίας, δηλ. εἶναι παραπληρωματικαί· ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι:

Ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ δύο ἐφαπτόμεναι περιφερείας, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον ἐκτὸς αὐτῆς, εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ δύο ἀκτῖνες, αἱ καταλήγουσαι εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς.

257. Ἐγγεγραμμένα καὶ περιγεγραμμένα σχήματα περὶ κύκλον. *Ἕνα πολύγωνον λέγεται* ***περιγεγραμμένον περὶ κύκλον,*** *ὅταν ὅλαι αἱ πλευραί του ἐφάπτωνται τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου αὐτοῦ.*

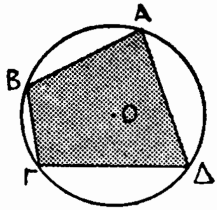


Σχ. 193.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ κύκλος λέγεται ***ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ πολύγωνον.***

Π.χ. Τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ *(Σχ. 193)* εἶναι περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον Ο, ὁ δὲ κύκλος Ο εἶναι ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ.

Ἕνα πολύγωνον λέγεται ***ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον,*** *ὅταν ὅλαι αἱ κορυφαί του κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.*



Σχ. 194.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ κύκλος λέγεται ***περιγεγραμμένος περὶ τὸ πολύγωνον.***

Π.χ. Τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ *(Σχ. 194)*, εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Ο, ὁ δὲ κύκλος Ο εἶναι περιγεγραμμένος περὶ τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ.

258. Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ περιφέρειαν. Ἔστω μία περιφέρεια Ο ἀκτῖνος R καὶ ἕνα τυχὸν σημεῖον Σ, τοῦ ὁποίου θὰ ζητήσωμεν τὴν ἀπόστασιν ἀπὸ τὴν περιφέρειαν, δηλ. τὴν ἀπόστασιν τοῦ

Σ ἀπὸ τὸ πλησιέστερον σημεῖον τῆς περιφερείας. Διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις:

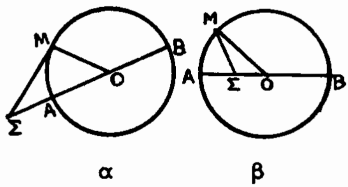
1ον. Τὸ δοθὲν σημεῖον Σ (Σχ. 195α), εἶναι εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τῆς περιφερείας Ο. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΣΟ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Α. Λέγομεν, ὅτι τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΣΑ εἶναι τὸ **βραχύτερον** ἀπὸ ὅλα τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, ποὺ συνδέουν τὸ Σ μὲ τυχὸν ἄλλο σημεῖον Μ τῆς περιφερείας Ο.

Πράγματι· ἐὰν φέρωμεν τὴν ΣΜ, ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΣΜΟ, ἔχομεν:

$$ΣΟ<ΟΜ+ΣΜ \quad ἢ \quad ΣΑ+R<R+ΣΜ \quad ἢ \quad ΣΑ<ΣΜ.$$

Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΣΑ παριστάνει τὴν ἀπόστασιν τοῦ Σ ἀπὸ τὴν περιφέρειαν.

2ον. Τὸ σημεῖον Σ (Σχ. 195β) εἶναι εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς περιφερείας Ο. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΟΣ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Α. Λέγομεν, ὅτι τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΣΑ εἶναι τὸ **βραχύτερον**, ἀπὸ ὅλα τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, ποὺ συνδέουν τὸ Σ μὲ τυχὸν ἄλλο σημεῖον Μ τῆς περιφερείας.



Σχ. 195.

Πράγματι, ἐὰν φέρωμεν τὰς ΟΜ καὶ ΣΜ, θὰ ἔχωμεν ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΟΣΜ,

$$ΣΜ>ΟΜ-ΟΣ \quad ἢ \quad ΣΜ>ΟΑ-ΟΣ \quad ἢ \quad ΣΜ>ΣΑ.$$

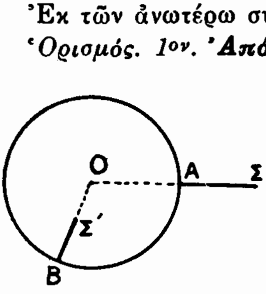
Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΣΑ παριστάνει τὴν ***ἀπόστασιν*** τοῦ Σ ἀπὸ τὴν περιφέρειαν.

3ον. Τὸ σημεῖον Σ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας Ο. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἀπόστασίς του ἀπὸ τὴν περιφέρειαν εἶναι μηδέν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν:

Ὁρισμός. 1ον. ***Ἀπόστασις ἑνὸς σημείου Σ ἀπὸ δοθεῖσαν περιφέρειαν*** *λέγεται ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου Σ ἀπὸ τὸ πλησιέστερον σημεῖον τῆς περιφερείας.*

2ον. Ἡ ἀπόστασις ἑνὸς σημείου ἀπὸ μίαν περιφέρειαν μετρᾶται ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία συνδέει τὸ σημεῖον αὐτὸ μὲ τὸ κέντρον τῆς περιφερείας.



Σχ. 196.

Π.χ. αἱ ἀποστάσεις τῶν σημείων Σ καὶ Σ′ ἀπὸ τὴν περιφέρειαν Ο *(Σχ. 196)* εἶναι αἱ ΣΑ καὶ Σ′Β.

Ἀσκήσεις

351. (376). Νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη περιφερείας παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν

352. (377). Νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη δοθείσης περιφερείας κάθετος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

353. (378). Νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη δοθείσης περιφερείας, ἡ ὁποία νὰ σχηματίζῃ μὲ δοθεῖσαν εὐθεῖαν AB γωνίαν ἴσην μὲ ω.

354. (379). Νὰ δειχθῇ, ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι περιφερείας: 1ον. εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου εἶναι παράλληλοι. 2ον. εἰς τὰ ἄκρα δύο καθέτων διαμέτρων σχηματίζουν τετράγωνον.

355. (380). Εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου AB ἑνὸς κύκλου O φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας. Ἑκατέρωθεν τῆς AB λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν ἐφαπτομένων τμήματα AE=BE'=AB. 1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον *Α*EBE' εἶναι παραλληλόγραμμον. 2ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ παραλληλογράμμου αὐτοῦ.

356. (381). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν τετραπλεύρου, περιγεγραμμένου περὶ κύκλον, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του.

357. (382). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι κάθε παραλληλόγραμμον, περιγγεγραμμένον περὶ κύκλον, εἶναι ρόμβος ἢ τετράγωνον.

358. (383). Αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὸ κέντρον ἑνὸς κύκλου μὲ τὰς τομὰς δύο παραλλήλων ἐφαπτομένων ὑπὸ τρίτης ἐφαπτομένης, εἶναι κάθετοι μεταξύ των.

359. (384). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῆς ὑποτεινούσης του καὶ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον αὐτό.

360. (385). Δύο σημεῖα μιᾶς ἐφαπτομένης κύκλου, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς, ἀπέχουν ἴσην ἀπόστασιν καὶ ἀπὸ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου.

3. Σχετικαὶ θέσεις δύο περιφερειῶν

259. Σχῆμα σχηματιζόμενον ὑπὸ δύο περιφερειῶν. Τὸ σχῆμα, ποὺ σχηματίζουν δύο περιφέρειαι O καὶ O' ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν θέσιν τῶν κέντρων των O καὶ O' καὶ ἀπὸ τὸ μέγεθος τῶν ἀκτίνων των R καὶ R.

Ἡ εὐθεῖα OO' (Σχ. 197), ἡ συνδέουσα τὰ κέντρα O καὶ O' δύο περιφερειῶν λέγεται ***διάκεντρος.***

Ἐπειδὴ κάθε διάμετρος κύκλου εἶναι ἄξων συμμετρίας τῶν σημείων τῆς περιφερείας του συνάγομεν, ὅτι:

Ἡ διάκεντρος δύο κύκλων O καὶ O' εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος, ποὺ σχηματίζουν οἱ δύο αὐτοὶ κύκλοι.

Εἰς τὴν § 243 II ἐδείξαμεν, ὅτι δύο διάφοροι περιφέρειαι δὲν δύνανται νὰ ἔχουν περισσότερα ἀπὸ δύο κοινὰ σημεῖα. Ἑπομένως, διὰ νὰ γνωρίσωμεν τὰς σχετικὰς θέσεις δύο περιφερειῶν, πρέπει νὰ ἐξετάσωμεν τὰς τρεῖς κατωτέρω περιπτώσεις:

Αἱ περιφέρειαι:

1ον. Ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα.

2ον. Ἔχουν ἕνα κοινὸν σημεῖον.

3ον. Δέν ἔχουν κανένα κοινὸν σημεῖον.

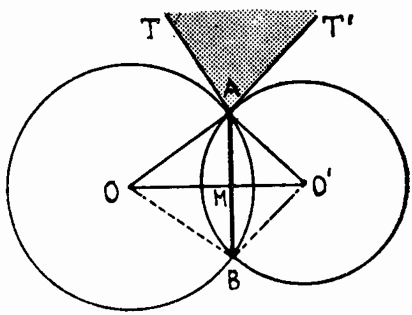
260. Τεμνόμεναι περιφέρειαι. *Δύο περιφέρειαι λέγονται* ***τεμνόμεναι περιφέρειαι,*** *ὅταν ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα.*

261. Θεώρημα. ***Ὅταν δύο περιφέρειαι ἔχουν ἕνα κοινὸν σημεῖον, ἐκτὸς τῆς διακέντρου των, ἔχουν καὶ ἕνα δεύτερον κοινὸν σημεῖον, συμμετρικὸν τοῦ πρώτου ὡς πρὸς τὴν διάκεντρόν των.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν αἱ περιφέρειαι Ο καὶ Ο′, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἕνα κοινὸν σημεῖον Α *(Σχ. 197).*

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ περιφέρειαι αὐταὶ ἔχουν καὶ ἕνα δεύτερον κοινὸν σημεῖον, συμμετρικὸν τοῦ Α πρὸς τὴν διάκεντρον ΟΟ′.

Ἀπόδειξις: Ἔστω Β τὸ συμμετρικὸν τοῦ Α πρὸς τὴν διάκεντρον ΟΟ′. Τὸ σημεῖον Β, θὰ κεῖται (§ 245) καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας Ο καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας Ο′· ἄρα θὰ εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν περιφερειῶν Ο καὶ Ο′.



Σχ. 197.

Αἱ περιφέρειαι λοιπὸν Ο καὶ Ο′ ἔχουν καὶ ἕνα δεύτερον κοινὸν σημεῖον, τὸ Β, τὸ συμμετρικὸν τοῦ Α πρὸς τὴν διάκεντρον ΟΟ′

Αἱ περιφέρειαι Ο καὶ Ο′ δὲν δύνανται νὰ ἔχουν καὶ ἕνα τρίτον κοινὸν σημεῖον, διότι τότε θὰ συνέπιπτον (§ 243 II) καὶ θὰ ἀπετέλουν μίαν περιφέρειαν.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ὅταν δύο περιφέρειαι. . . .***

262. Ὁρισμοί. *Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ λέγεται* ***κοινὴ χορδὴ*** *τῶν δύο περιφερειῶν Ο καὶ Ο′ (Σχ· 197).*

Ἐὰν εἰς τὸ σημεῖον Α φέρωμεν τὰς ἐφαπτομένας ΑΤ καὶ ΑΤ′

τῶν περιφερειῶν O καὶ O', ἡ γωνία TAT' λέγεται ***γωνία τῶν δύο τεμνομένων περιφερειῶν.***

'Εὰν ἡ γωνία TAT' εἶναι ὀρθή, λέγομεν ὅτι αἱ περιφέρειαι O καὶ O' τέμνονται ὀρθογωνίως.

263. Πορίσματα: I. ***Ὅταν δύο περιφέρειαι τέμνωνται, ἡ διάκεντρός των εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς κοινῆς χορδῆς των.***

Πράγματι· ἐπειδὴ OA=OB, τὸ κέντρον O κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τῆς χορδῆς AB. Ὁμοίως ἐπειδὴ O'A=O'B, τὸ κέντρον O' κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τῆς χορδῆς AB. Ἄρα τὰ κέντρα O καὶ O' εἶναι σημεῖα τῆς μεσοκαθέτου τῆς κοινῆς χορδῆς AB καὶ ἑπομένως ἡ διάκεντρος OO' εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς κοινῆς χορδῆς AB.

II. ***Ὅταν δύο περιφέρειαι τέμνωνται, ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων των εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων των καὶ μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς των.***

Δηλ. θὰ εἶναι $OA - O'A < OO' < OA + O'A$ (1)

Διότι εἰς τὸ τρίγωνον OAO', ἡ πλευρὰ OO' εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων καὶ μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς των.

'Εὰν παραστήσωμεν μὲ R καὶ R' τὰς ἀκτῖνας τῶν κύκλων O καὶ O' καὶ μὲ δ τὴν ἀπόστασιν τῶν κέντρων, ἡ σχέσις (1) γράφεται

$$\boxed{R - R' < \delta < R + R'}$$

264. 'Εφαπτόμεναι περιφέρειαι. *Δύο διάφοροι περιφέρειαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἕνα κοινὸν σημεῖον καὶ μόνον ἕνα, λέγονται* ***ἐφαπτόμεναι περιφέρειαι.***

265. Θεώρημα. ***Ὅταν δύο διάφοροι περιφέρειαι ἔχουν ἕνα κοινὸν σημεῖον, κείμενον ἐπὶ τῆς διακέντρου των, αἱ περιφέρειαι αὐταὶ δὲν ἔχουν ἄλλο κοινὸν σημεῖον καὶ ἐφάπτονται εἰς τὸ σημεῖον αὐτό.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν αἱ περιφέρειαι O καὶ O', αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἕνα κοινὸν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς διακέντρου των OO'.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ περιφέρειαι αὐταὶ ἐφάπτονται εἰς τὸ σημεῖον O.

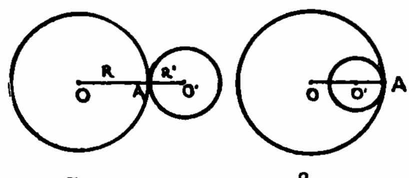
'Απόδειξις: Δύο περιπτώσεις σχετικῶς μὲ τὴν θέσιν τοῦ σημείου A ὡς πρὸς τὰ κέντρα O καὶ O' δύνανται νὰ παρουσιασθοῦν. Τὸ σημεῖον A κεῖται:

1ον. Μεταξὺ τῶν O καὶ O' (Σχ. 198 α).

2ον. 'Επὶ τῆς προεκτάσεως τῆς OO' (Σχ. 198 β).

Ἐὰν αἱ περιφέρειαι Ο καὶ Ο′ εἶχον καὶ ἕνα δεύτερον κοινὸν σημεῖον ***κείμενον ἐπὶ τῆς διακέντρου των***, θὰ εἶχον μίαν κοινὴν διάμετρον καὶ θὰ συνέπιπτον. Ἀλλὰ τοῦτο ἀντίκειται πρὸς τὴν ὑπόθεσίν μας.

Ἐὰν αἱ περιφέρειαι Ο καὶ Ο′ εἶχον ἕνα δεύτερον κοινὸν σημεῖον Β ***ἐκτὸς τῆς διακέντρου των***, θὰ εἶχον καὶ ἕνα τρίτον κοινὸν σημεῖον, τὸ συμμετρικὸν τοῦ Β πρὸς τὴν διάκεντρον ΟΟ′ καὶ ἑπομένως θὰ συνέπιπτον. Ἀλλὰ τοῦτο ἀντίκειται ἐπίσης πρὸς τὴν ὑπόθεσίν μας.



Σχ. 198.

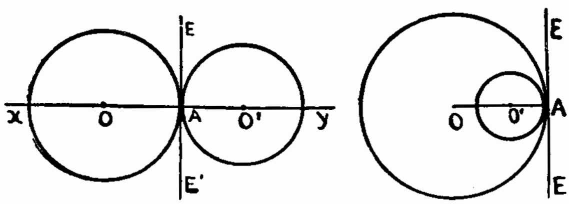
Ὥστε αἱ περιφέρειαι δὲν δύνανται νὰ ἔχουν ἄλλο κοινὸν σημεῖον ἐκτὸς τοῦ Α.

Ἐπειδὴ αἱ περιφέρειαι αὐταὶ ἔχουν ἕνα μόνον κοινὸν σημεῖον ἐφάπτονται εἰς τὸ σημεῖον Α.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ὅταν δύο διάφοροι περιφέρειαι. . . .***

266. Ὁρισμοί. *Τὸ κοινὸν σημεῖον δύο ἐφαπτομένων περιφερειῶν λέγεται* ***σημεῖον ἐπαφῆς*** *ἢ* ***σημεῖον ἁφῆς αὐτῶν*** *καὶ εὑρίσκεται πάντοτε ἐπὶ τῆς διακέντρου των.*

Ὅταν τὸ σημεῖον ἐπαφῆς κεῖται μεταξὺ τῶν δύο κέντρων, λέγομεν, ὅτι αἱ περιφέρειαι ***ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς*** *(Σχ. 199 α).*



Σχ. 199.

Εἰς τὴν ἐναντίαν περίπτωσιν λέγομεν ὅτι αἱ περιφέρειαι ***ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς*** *(Σχ. 199 β).*

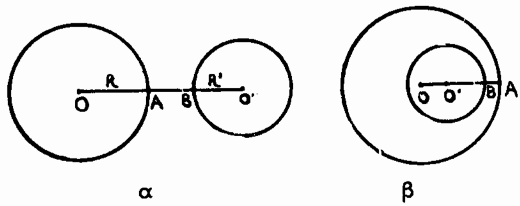
Καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις αἱ περιφέρειαι ἔχουν τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην ΕΕ′ εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον, ἡ ὁποία λέγεται ***κοινὴ ἐφαπτομένη*** τῶν δύο περιφερειῶν.

267. Περιφέρειαι μὴ ἔχουσαι κανένα κοινὸν σημεῖον.

Εἶναι φανερὸν ὅτι, ὅταν δύο περιφέρειαι δὲν ἔχουν κανένα κοινὸν σημεῖον τότε:

1ον. Ὅλα τὰ σημεῖα τῆς μιᾶς κεῖνται ἐξωτερικῶς τῆς ἄλλης· ἢ

2ον. Ὅλα τὰ σημεῖα τῆς μιᾶς κεῖνται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς ἄλλης.



Σχ. 200.

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν λέγομεν, ὅτι ἡ ***μία περιφέρεια κεῖται ἐκτὸς τῆς ἄλλης*** *(Σχ. 200 α).*

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν λέγομεν, ὅτι ἡ ***μικροτέρα κεῖται ὁλόκληρος ἐντὸς τῆς ἄλλης*** *(Σχ. 200 β).*

268. Σχετικαὶ θέσεις δύο περιφερειῶν. Ἀπὸ ὅσα εἴδομεν εἰς τὰς § 243 II, 266, 268 συνάγομεν, ὅτι δύο διάφοροι περιφέρειαι O καὶ O′ δύνανται νὰ καταλάβουν, ἡ μία πρὸς τὴν ἄλλην, πέντε διαφόρους θέσεις:

1ον. Ἡ μία περιφέρεια δύναται νὰ κεῖται ἐκτὸς τῆς ἄλλης (Σχ. 200 α).

Ἂν παραστήσωμεν τὴν ἀπόστασιν OO′ μὲ δ καὶ τὰς ἀκτῖνας των μὲ R καὶ R′ θὰ εἶναι $\boxed{\delta > \mathbf{R} + \mathbf{R}'}$.

2ον. Αἱ περιφέρειαι δύνανται νὰ ἐφάπτωνται ἐξωτερικῶς (Σχ. 199α).

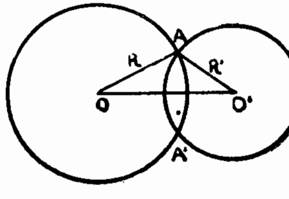
Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ εἶναι:

$$OO' = OA + AO' \quad ἢ \quad \boxed{\delta = \mathbf{R} + \mathbf{R}'}$$

3ον. Αἱ περιφέρειαι δύνανται νὰ τέμνωνται (Σχ. 201).

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ εἶναι

$$\boxed{\mathbf{R} - \mathbf{R}' < \delta < \mathbf{R} + \mathbf{R}'}.$$



Σχ. 201.

4ον. Αἱ περιφέρειαι δύνανται νὰ ἐφάπτωνται ἐσωτερικῶς (Σχ. 199 β).

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ εἶναι:

$$OO' = OA - O'A \quad ἢ \quad \boxed{\delta = \mathbf{R} - \mathbf{R}'}.$$

5ον. Ἡ μία περιφέρεια δύναται νὰ κεῖται ἐντὸς τῆς ἄλλης (Σχ. 200β).

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ εἶναι;

$OA=OO'+O'B+BA$ ἢ $R=\delta+R'+BA$ ἢ $R-R'=\delta+BA$·

ἄρα $\boxed{\delta<R-R'}$.

Ἐὰν τὰ κέντρα δύο τοιούτων περιφερειῶν συμπίπτουν αἱ περιφέρειαι λέγονται ***ὁμόκεντροι*** *καὶ θὰ εἶναι* $\boxed{\delta=0}$.

269. Ἀντίστροφα ***(τῶν ἀνωτέρω προτάσεων).*** Αἱ σχέσεις αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουν μεταξὺ τῆς ἀποστάσεως δ τῶν κέντρων O καὶ O′ δύο περιφερειῶν καὶ τῶν ἀκτίνων των R καὶ R′, εἶναι ***χαρακτηριστικαί.*** Δηλ. καὶ τὰ ἀντίστροφα τῶν προηγουμένων προτάσεων εἶναι ἀληθῆ.

Ὑπόθεσις		*Συμπέρασμα*
1ον. Ἐὰν $\delta>R+R'$ ······	αἱ περιφέρ.	*εἶναι ἡ μία ἐκτὸς τῆς ἄλλης*
2ον. Ἐὰν $\delta=R+R'$ ······	» »	*ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς*
3ον. Ἐὰν $R-R'<\delta<R+R'$	» »	*τέμνονται*
4ον. Ἐὰν $\delta=R-R'$ ······	» »	*ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς*
5ον. Ἐὰν $\delta<R-R'$ ······	» »	*εἶναι ἡ μία ἐντὸς τῆς ἄλλης*

Αἱ πέντε αὗται προτάσεις ἀποδεικνύονται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς:

Π.χ. *ἐὰν εἶναι* $\delta<R+R'$, θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ περιφέρειαι O καὶ O′ τέμνονται.

Ἐὰν αἱ περιφέρειαι δὲν ἐτέμνοντο, θὰ ἐφάπτοντο ἐξωτερικῶς ἢ ἐσωτερικῶς ἢ ἡ μία θὰ ἔκειτο ἐκτὸς τῆς ἄλλης ἢ ἐντὸς αὐτῆς.

Ἐὰν ἐφάπτοντο ἐξωτερικῶς, θὰ ἦτο $\delta=R+R'$, τὸ ὁποῖον ἀντιβίνει εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ἐὰν ἐφάπτοντο ἐσωτερικῶς, θὰ ἦτσ $\delta=R-R'$, τὸ ὁποῖον ἀντιβαίνει πάλιν εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ἐὰν ἡ μία ἔκειτο ἐκτὸς τῆς ἄλλης, θὰ ἦτο $\delta>R+R'$, τὸ ὁποῖον ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ἐὰν ἡ μία ἔκειτο ἐντὸς τῆς ἄλλης, θὰ ἦτο $\delta<R-R'$, τὸ ὁποῖον ἀντιβαίνει πάλιν εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ὥστε αἱ περιφέρειαι O καὶ O′ τέμνονται.

270. Σπουδαία παρατήρησις. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι:

1ον. ***Διὰ νὰ τέμνωνται δύο περιφέρειαι πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων των νὰ περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ ἀθροίσματος καὶ τῆς διαφορᾶς τῶν ἀκτίνων των.***

Δηλ. πρέπει νὰ εἶναι: $\boxed{R-R'<\delta<R+R'}$

2ον. ***Διὰ νὰ ἐφάπτωνται δύο περιφέρειαι πρέπει καὶ ἀρκεῖ***

ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων των νὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων των.

Δηλ. πρέπει νὰ εἶναι: $\boxed{\mathbf{\delta = R + R'}}$, εἴτε $\boxed{\mathbf{\delta = R - R'}}$.

Ἀσκήσεις

361. (386). Αἱ ἀκτῖνες δύο κύκλων εἶναι 5 ἑκ. καὶ 6 ἑκ. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων τῶν δύο κύκλων διὰ νὰ ἐφάπτωνται ἐξωτερικῶς ἢ ἐσωτερικῶς.

362. (387). Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀκτῖνες δύο κύκλων, οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων των εἶναι 15 ἑκ. καὶ ἡ διαφορὰ τῶν ἀκτίνων των 7 ἑκ.

363. (388). Νὰ προσδιορισθοῦν αἱ σχετικαὶ θέσεις δύο περιφερειῶν, ἐὰν εἶναι:

1ον.	δ= 8 ἑκ.,	R=5 ἑκ.,	R′=3 ἑκ.
2ον.	δ= 5 ἑκ.,	R=3 ἑκ.,	R′=3 ἑκ.
3ον.	δ=10 ἑκ.,	R=6 ἑκ.,	R′=3 ἑκ.
4ον.	δ=12 ἑκ.,	R=7 ἑκ.,	R′=3 ἑκ.
5ον.	δ= 5 ἑκ.,	R=7 ἑκ.,	R′=2 ἑκ.

364. (389). Δίδονται δύο ὁμόκεντροι κύκλοι Α καὶ Β ἀκτίνων 1 ἑκ. καὶ 4 ἑκ. καὶ ἕνας τρίτος κύκλος Γ ἀκτῖνος 2 ἑκ. Ποῦ πρέπει νὰ τοποθετηθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου Γ, ἵνα ὁ κύκλος Γ τέμνῃ τοὺς δύο πρώτους;

365. (390). Δίδονται δύο ὁμόκεντροι κύκλοι Α καὶ Γ ἀκτίνων 3 ἑκ. καὶ 1 ἑκ. καὶ ἕνας τρίτος κύκλος Γ, ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται τῶν δύο πρώτων κύκλων. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου Γ καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου του ἀπὸ τὰ κέντρα τῶν δύο πρώτων κύκλων.

366. (391). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ κοιναὶ ἐφαπτόμεναι δύο ἴσων περιφερειῶν εἶναι ἴσαι.

367. (392). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη δύο ἀνίσων περιφερειῶν εἶναι μικροτέρα τῆς ἀποστάσεως τῶν κέντρων των.

368. (393). Δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο′ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον Α. Ἀπὸ τὸ Α φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὸ σημεῖον Β καὶ τὴν Ο′ εἰς τὸ Γ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ ἀκτῖνες ΟΒ καὶ Ο′Γ εἶναι παράλληλοι.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν.

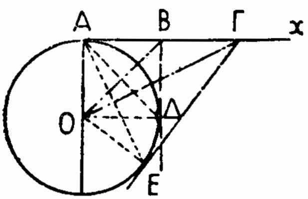
369. (394). Εἰς τυχὸν σημεῖον Α μιᾶς περιφερείας Ο φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην αὐτῆς Αx. Ἐπὶ τῆς Αx λαμβάνομεν δύο τυχόντα σημεῖα Β καὶ Γ καὶ ἀπὸ τὰ Β καὶ Γ φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ΒΔ καὶ ΓΕ τῆς περιφερείας Ο. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ γωνίαι ΒΟΓ καὶ ΔΑΕ εἶναι ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί.

370. (395). Δίδεται ἕνα τραπέζιον ΑΒΓΔ, ὀρθογώνιον εἰς τὰ Α καὶ Δ καὶ τοιοῦτον, ὥστε ἡ ΒΓ νὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο βάσεών του ΑΒ

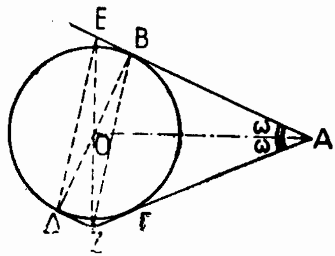
καὶ ΓΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ περιφέρεια, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὴν ΒΓ ἐφάπτεται τῆς πλευρᾶς ΑΔ.

371. (396). Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου Ο, φέρομεν μίαν τέμνουσαν ΑΓΔ τοῦ κύκλου, τῆς ὁποίας τὸ ἐκτὸς τοῦ κύκλου μέρος ΑΓ εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου Ο· ἐπίσης φέρομεν τὴν τέμνουσαν ΑΟΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι γων.ΒΟΔ=3 γων.ΓΟΑ.

372. (397). Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Μ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς κύκλου Ο, φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ΜΑ καὶ ΜΒ τοῦ κύκλου Ο. Προεκτείνομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΒ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμῆμα ΒΓ=ΟΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία ΑΜΓ εἶναι τριπλασία τῆς γωνίας ΒΜΓ.



Σχ. ἀσκ. 369.



Σχ. ἀσκ. 374.

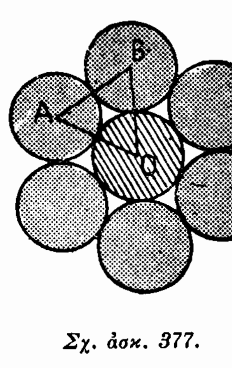
373. (398). Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς κύκλου Ο φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΑΒ τοῦ κύκλου Ο καὶ τὴν ΑΟ. Ἐπὶ τῆς ΑΟ λαμβάνομεν τμῆμα ΑΓ=ΑΒ καὶ φέρομεν τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὸ σημεῖον Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΟΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΓ.

374. (399). Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς κύκλου Ο, φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας αὐτοῦ ΑΒ καὶ ΑΓ. Ἀπὸ τὸ κέντρον Ο φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΟΑ, ἡ ὁποία τέμνει τὰς προεκτάσεις τῶν ἐφαπτομένων ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως. Ἐὰν φέρωμεν τὴν διάμετρον ΒΟΔ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΔΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ.

375. (400). Δίδονται δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο'· φέρομεν τὴν κοινὴν ἐξωτερικὴν ἐφαπτομένην των ΑΑ' καὶ τὰς ἐσωτερικὰς ἐφαπτομένας των ΒΒ' καὶ ΓΓ'. Αἱ ΒΒ' καὶ ΓΓ', προεκτεινόμεναι τέμνουν τὴν ΑΑ' εἰς τὰ σημεῖα Ν καὶ Μ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ γωνίαι ΟΜΟ' καὶ ΟΝΟ' εἶναι ὀρθαί.

376. (401). Δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο' ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον Α. Ἀπὸ τὸ Α φέρομεν τυχοῦσαν χορδὴν ΑΜ τοῦ κύκλου Ο καὶ μίαν ἄλλην χορδὴν ΑΝ τοῦ κύκλου Ο', κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΜ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ ἀκτῖνες ΟΜ καὶ Ο'Ν' εἶναι παράλληλοι.

377. (402). Ἔχομεν κυκλικοὺς δίσκους ἴσους, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ ἕνας εἶναι μαῦρος καὶ οἱ λοιποὶ

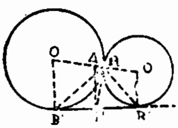


Σχ. ἀσκ. 377.

λευκοί. Πόσους λευκοὺς δίσκους δυνάμεθα νὰ θέσωμεν γύρω ἀπὸ τὸν μαῦρον δίσκον, οὕτως ὥστε οἱ λευκοὶ δίσκοι νὰ ἐφάπτωνται τοῦ μαύρου καὶ κάθε λευκὸς δίσκος νὰ ἐφάπτεται τοῦ προηγουμένου καὶ τοῦ ἑπομένου του;

378. (403). Δίδεται μία περιφέρεια Ο ἀκτῖνος R. Νὰ εὑρεθῇ πόσους κυκλικοὺς δίσκους ἀκτῖνος R/3 δυνάμεθα νὰ θέσωμεν ἐντὸς τῆς περιφερείας Ο οὕτως, ὥστε ὅλοι νὰ ἐφάπτωνται ἐσωτερικῶς τῆς περιφερείας Ο καὶ καθένας ἐξ αὐτῶν, νὰ ἐφάπτεται τοῦ προηγουμένου καὶ τοῦ ἑπομένου του;

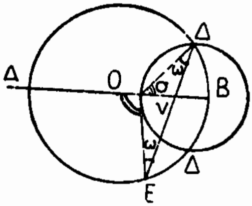
379. (404). Δίδονται δύο κύκλοι Ο καὶ Ο', οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ μία κοινὴ ἐφαπτομένη αὐτῶν ΒΒ'. Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον ὅτι γων.ΒΑΒ'=1 ὀρθή. 2ον ὅτι ὁ κύκλος, ὁ ὁποῖος ἔχει διάμετρον τὴν ΒΒ' ἐφάπτεται τῆς διακέντρου ΟΟ'. 3ον ὅτι ὁ κύκλος, ὁ ὁποῖος ἔχει διάμετρον τὴν ΟΟ', ἐφάπτεται τῆς ΒΒ' εἰς τὸ μέσον της.



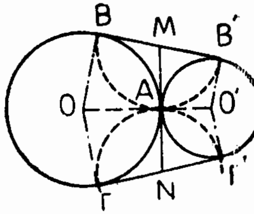
Σχ. ἀσκ. 379.

380. (405). Ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΑΒ ἑνὸς κύκλου Ο λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Γ. Μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΓΟ γράφομεν ἄλλην περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς δύο σημεῖα Δ καὶ Δ'. Φέρομεν τὴν ΔΓ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὸ σημεῖον Ε. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία ΑΟΕ εἶναι τριπλασία τῆς γωνίας ΔΟΒ.

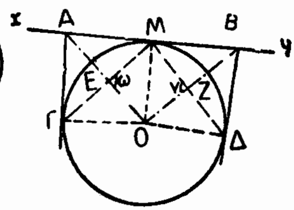
381. (406). Δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο' ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς ἕνα σημεῖον Α. Φέρομεν τὰς κοινὰς ἐξωτερικὰς ἐφαπτομένας ΒΒ' καὶ ΓΓ'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ δύο περιφέρειαι αἱ διερχόμεναι διὰ τῶν σημείων ἐπαφῆς Β, Α, Β' καὶ Γ, Α, Γ' ἐφάπτονται μεταξύ των.



Σχ. ἀσκ. 380.



Σχ. ἀσκ. 381.



Σχ. ἀσκ. 382.

382. (407). Δίδεται ἕνας κύκλος καὶ μία ἐφαπτομένη αὐτοῦ xy εἰς ἕνα σημεῖον Μ. Ἐπὶ τῆς xy λαμβάνομεν δύο σημεῖα Α καὶ Β, ἑκατέρωθεν τοῦ Μ καὶ ἀπὸ τὰ Α καὶ Β φέρομεν ἐφαπτομένας ΑΓ καὶ ΒΔ τοῦ κύκλου. Φέρομεν τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν ΜΑΓ καὶ ΜΒΔ. αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ Ο. Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον ὅτι ἡ ΟΜ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν xy. 2ον ὅτι αἱ γωνίαι ΓΜΔ καὶ ΑΟΒ εἶναι παραπληρωματικαί.

383. (408). Δίδονται δύο εὐθεῖαι παράλληλοι Χ καὶ Υ καὶ μία εὐθεῖα ΑΒ κάθετος ἐπ' αὐτάς, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Χ εἰς τὸ Α καὶ τὴν Υ εἰς τὸ Β. Μία ὀρθὴ γωνία ἔχει τὴν κορυφήν της εἰς τὸ μέσον Ο τῆς ΑΒ, αἱ δὲ πλευραί της τέμνουν τὴν Χ εἰς τὸ Γ καὶ τὴν Υ εἰς τὸ Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΓΔ

ἐφάπτεται τοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει διάμετρον τὴν ΑΒ.

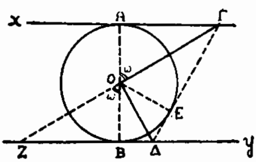
384. (409). Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς κύκλου Ο φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ΑΕ καὶ ΑΖ. Εἰς τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ τόξου τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τῶν ἐφαπτομένων ΑΕ καὶ ΑΖ, φέρομεν τρίτην ἐφαπτομένην, ἡ ὁποία τέμνει τὰς ΑΕ καὶ ΑΖ εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον ὅτι γων.ΖΟΜ=γων.ΑΓΒ καὶ γων.ΜΟΕ=γων.ΑΒΓ.

2ον ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση μὲ 2ΑΕ, οἱανδήποτε θέσιν καὶ ἂν ἔχῃ τὸ σημεῖον Μ ἐπὶ τοῦ τόξου ΕΜΖ.

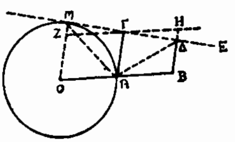
3ον ὅτι ἡ γωνία ΒΟΓ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας ΕΟΖ.

385. (410). Προεκτείνομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΑ ἑνὸς κύκλου Ο καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμῆμα ΑΒ=ΟΑ· φέρομεν μίαν τυχοῦσαν ἐφαπτομένην ΜΕ τοῦ κύκλου Ο καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β καθέτους ΑΓ καὶ ΒΔ ἐπὶ τὴν ΜΕ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι γων.ΑΔΒ=$^1/_3$ γων.ΟΑΔ.

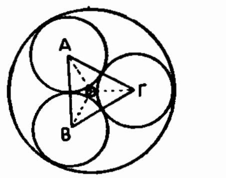
386. (411). Δίδεται ἕνα τρίγωνον, ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α. Μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν Α καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης γράφομεν ἕνα τόξον κύκλου, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ΒΓ ἢ τὴν προέκτασίν της εἰς τὸ Δ. Ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν τὴν Δx παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ καὶ μὲ τὴν αὐτὴν φοράν. Ἐὰν ΑΒ>ΑΓ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία ΑΔx εἶναι τριπλασία τῆς γωνίας ΑΒΓ.



Σχ. ἀσκ. 383.

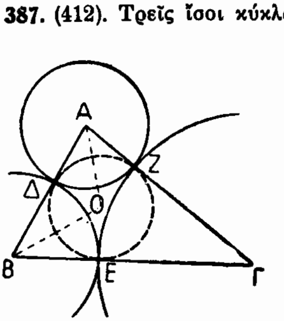


Σχ. ἀσκ. 385.



Σχ. ἀσκ. 387.

387. (412). Τρεῖς ἴσοι κύκλοι ἐφάπτονται μεταξύ των ἀνὰ δύο. Νὰ προσδιορισθοῦν τὰ κέντρα καὶ αἱ ἀκτῖνες τῶν δύο κύκλων, οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται ὁ μὲν ἐξωτερικῶς, ὁ δὲ ἐσωτερικῶς τῶν τριῶν αὐτῶν κύκλων.

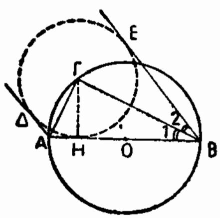


Σχ. ἀσκ. 388.

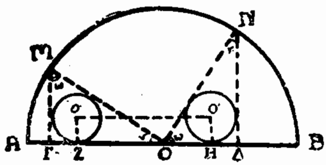
388. (413). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ περιφέρειαι, αἱ ὁποῖαι γράφονται μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς ἑνὸς τριγώνου καὶ αἱ ὁποῖαι διέρχονται διὰ τῶν σημείων ἐπαφῆς τοῦ τριγώνου καὶ τῆς περιφερείας τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ τρίγωνον, ἐφάπτονται ἀνὰ δύο.

389. (489). Δίδεται ἕνας κύκλος Ο, μία διάμετρός του ΑΒ καὶ Γ τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερερείας του. Μὲ κέντρον τὸ Γ γράφομεν περιφέρειαν ἐφαπτομένην τῆς διαμέτρου ΑΒ. Ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β φέρομεν ἐφαπτομένας ΑΔ καὶ ΒΕ τῆς περιφερείας Γ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ ΑΔ καὶ ΒΕ εἶναι παράλληλοι.

390. (490). Δίδεται ἡμικύκλιον Ο διαμέτρου ΑΒ. Φέρομεν δύο ἀκτῖνας ΟΜ καὶ ΟΝ καθέτους μεταξύ των καὶ τὰς ΜΓ καὶ ΝΔ καθέτους ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ κέντρα Ο' καὶ Ο'' τῶν κύκλων τῶν ἐγγεγραμ-



Σχ. ἀσκ. 389.



Σχ. ἀσκ. 390.

μένων εἰς τὰ τρίγωνα ΟΜΓ καὶ ΟΝΔ κεῖνται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν ΑΒ

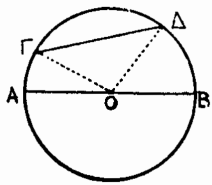
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'

ΧΟΡΔΑΙ

1. Ἰδιότητες τῶν τόξων καὶ τῶν χορδῶν

271. Ἰδιότητες τῆς διαμέτρου. Θεώρημα Ι. ***Ἡ διάμετρος ἑνὸς κύκλου εἶναι ἡ μεγαλυτέρα χορδὴ αὐτοῦ.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω ὁ κύκλος Ο *(Σχ. 202)*. ΑΒ μία διάμετρός του καὶ ΓΔ μία τυχοῦσα χορδή του.



Σχ. 202.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΑΒ>ΓΔ.

Ὑπόθ.	ΑΒ=διάμετρ. ΓΔ=χορδή
Συμπ.	ΑΒ>ΓΔ

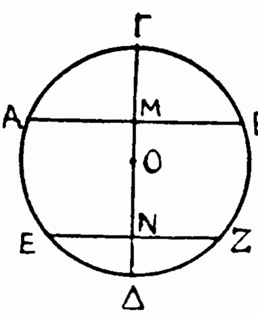
Ἀπόδειξις: Ἐὰν φέρωμεν τὰς ἀκτῖνας ΟΓ καὶ ΟΔ, τότε ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΟΓΔ θὰ ἔχωμεν ΓΔ<ΓΟ+ΟΔ (1).

Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα ΓΟ+ΟΔ, ὡς ἄθροισμα δύο ἀκτίνων τοῦ κύκλου Ο εἶναι ἴσον μὲ μίαν διάμετρον τοῦ κύκλου, ἔστω τὴν ΑΒ, ἡ σχέσις (1) γράφεται ΓΔ<ΑΒ ἢ ΑΒ>ΓΔ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἡ διάμετρος ἑνὸς κύκλου. . . .***

272. Θεώρημα ΙΙ. ***Ἡ διάμετρος κύκλου, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ μίαν χορδήν του, διαιρεῖ τὴν χορδὴν καὶ τὰ δύο τόξα, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν χορδὴν αὐτήν, εἰς δύο ἴσα μέρη.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω ΑΒ μία τυχοῦσα χορδὴ τοῦ κύκλου Ο *(Σχ. 203)* καὶ ΓΔ μία διάμετρος αὐτοῦ, κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Μ.



Σχ. ἀσκ. 203.

Ὑπόθ.	ΓΔ ⊥ ΑΒ
Συμπ.	ΑΜ=ΜΒ $\widehat{ΑΔ}=\widehat{ΔΒ}$ $\widehat{ΑΓ}=\widehat{ΒΓ}$

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι:

$$ΑΜ=ΜΒ, \quad \widehat{ΑΔ}=\widehat{ΔΒ} \text{ καὶ } \widehat{ΑΓ}=\widehat{ΒΓ}.$$

Ἀπόδειξις: Ἡ ΓΔ, ὡς διάμετρος τοῦ

κύκλου Ο, εἶναι ἄξων ἄξων συμμετρίας αὐτοῦ. Τὰ σημεῖα λοιπὸν Α καὶ Β εἶναι συμμετρικά, ὡς πρὸς τὴν διάμετρον ΓΔ καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ΑΜ=ΜΒ.

Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ εἶναι συμμετρικὰ ἑαυτῶν, ἕπεται ὅτι

$$\overset{\frown}{A\Gamma}=\overset{\frown}{B\Gamma} \quad \text{καὶ} \quad \overset{\frown}{A\Delta}=\overset{\frown}{B\Delta}.$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἡ διάμετρος κύκλου. . . .***

273. Παρατήρησις. Ἀπὸ τὸ προηγούμενον θεώρημα παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΓΔ:

1ον. ***Διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον Ο***

2ον. ***Εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν ΑΒ.***

3ον. ***Διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον Μ τῆς χορδῆς ΑΒ.***

4ον. ***Διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον Δ τοῦ τόξου ΑΔΒ.***

5ον. ***Διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον Γ τοῦ τόξου ΑΓΒ.***

Ὅταν μία εὐθεῖα ἱκανοποιῇ δύο ἀπὸ τοὺς πέντε αὐτοὺς ὅρους, θὰ ἱκανοποιῇ καὶ τοὺς ἄλλους τρεῖς ὅρους.

Π.χ. ἡ κάθετος, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ μέσον μιᾶς χορδῆς, θὰ διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου καὶ ἀπὸ τὰ μέσα τῶν δύο ἀντιστοίχων τόξων.

274. Βέλος τόξου. *Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα τὸ ὁποῖον συνδέει τὸ μέσον μιᾶς χορδῆς μὲ τὸ μέσον τοῦ ἀντιστοίχου τόξου λέγεται* ***βέλος τόξου.***

Ἐὰν Μ εἶναι τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΑΒ *(Σχ. 203)* καὶ Γ καὶ Δ τὰ μέσα τῶν τόξων ΑΓΒ καὶ ΑΔΒ, τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΜΓ καὶ ΜΔ εἶναι βέλη τῆς χορδῆς ΑΒ.

Ὁμοίως καὶ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΝΓ καὶ ΝΔ εἶναι βέλη τῆς χορδῆς ΕΖ.

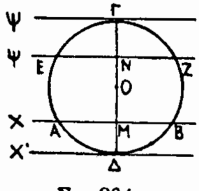
275. Θεώρημα. ***Τὰ τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας, τὰ περιεχόμενα μεταξὺ δύο παραλλήλων εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν περιφέρειαν εἶναι ἴσα.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι Χ καὶ Ψ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἡ Χ καὶ Ε καὶ Ζ ἡ Ψ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι:

$$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BZ}.$$

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὴν διάμετρον ΓΔ κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν



Σχ. 204.

Ὑπόθ.	Χ//Ψ
Συμπ.	$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BZ}$

Χ. Ἡ ΓΔ θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν Ψ, παράλληλον τῆς Χ. Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, ἡ ΓΔ θὰ διχοτομῇ τὰ τόξα, ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς χορδὰς ΑΒ καὶ ΓΔ. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$\widehat{ΑΓ}=\widehat{ΒΓ} \quad καὶ \quad \widehat{ΕΓ}=\widehat{ΖΓ}.$$

Ἀφαιροῦμεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\widehat{ΑΓ}-\widehat{ΕΓ}=\widehat{ΒΓ}-\widehat{ΖΓ} \quad ἢ \quad \widehat{ΑΕ}=\widehat{ΒΖ}.$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Τὰ τόξα τῆς αὐτῆς. . . .***

Παρατήρησις. Ἡ ἀνωτέρω πρότασις εἶναι ἀληθὴς καὶ ὅταν ἡ μία ἀπὸ τὰς εὐθείας Χ καὶ Ψ ἢ καὶ αἱ δύο γίνουν ἐφαπτόμεναι τῆς περιφερείας εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ.

276. Πόρισμα. ***Αἱ ἀκτῖνες, αἱ ὁποῖαι ἄγονται εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν παραλλήλων ἐφαπτομένων τῆς αὐτῆς περιφερείας κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς.***

Ἀσκήσεις

391. (420). Μία χορδὴ τέμνει δύο ὁμοκέντρους περιφερείας, τὴν μικροτέραν εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ τὴν μεγαλυτέραν εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΑΓ=ΒΔ καὶ ΑΔ=ΒΓ.

392. (421). Ἀπὸ ἕνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς περιφερείας φέρομεν μέχρις αὐτῆς δύο εὐθείας ἴσας. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας τῶν δύο αὐτῶν εὐθειῶν διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς περιφερείας.

393. (422). Ἀπὸ τὸ μέσον Μ μιᾶς ἀκτῖνος ΟΑ ἑνὸς κύκλου Ο φέρομεν μίαν χορδὴν ΒΜΓ κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΑ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ γωνίαι ΒΟΓ καὶ ΒΑΓ εἶναι ἴσαι.

394. (423). Ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ μέσα δύο παραλλήλων χορδῶν κύκλου, διέρχεται καὶ ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

395. (424). Ἡ ἐφαπτομένη κύκλου, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ μέσον ἑνὸς τόξου του, εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν χορδὴν τοῦ τόξου.

396. (425). Δίδεται ἡμιπεριφέρεια Ο διαμέτρου ΑΒ. Ἐπὶ τῆς ΑΒ λαμβάνομεν δύο σημεῖα Γ καὶ Δ καὶ τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι ΟΓ=ΑΔ· ἀπὸ τὰ Γ καὶ Δ φέρομεν δύο παραλλήλους ΓΓ' καὶ ΔΔ', αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Γ' καὶ Δ'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ Γ'Δ' εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς δύο αὐτὰς παραλλήλους.

2. Σχέσεις μεταξὺ τῶν τόξων καὶ τῶν χορδῶν των

277. Τόξα ἀντιστοιχοῦντα εἰς χορδήν. Εἰς κάθε χορδὴν ἀντιστοιχοῦν δύο τόξα.

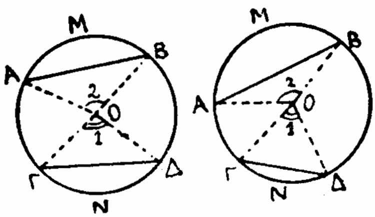
Π.χ. εἰς τὴν χορδὴν ΑΒ *(Σχ. 205)* ἀντιστοιχοῦν τὰ ἄνισα τόξα ΑΜΒ καὶ ΑΝΒ. Κατωτέρω ὅταν θὰ ἀναφέρωμεν τόξον ἀντιστοιχοῦν εἰς δοθεῖσαν χορδήν, θὰ θεωροῦμεν τὸ τόξον, τὸ μικρότερον ἡμιπεριφερείας.

278. Θεώρημα. ***Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους:***

1ον. ***Εἰς ἴσας χορδὰς ἀντιστοιχοῦν ἴσα τόξα.***

2ον. ***Εἰς ἀνίσους χορδὰς ἀντιστοιχοῦν ἄνισα τόξα καὶ εἰς τὴν μεγαλυτέραν χορδὴν ἀντιστοιχεῖ μεγαλύτερον τόξον.***

1ον. Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν αἱ ἴσαι χορδαὶ ΑΒ καὶ ΓΔ τοῦ κύκλου Ο *(Σχ. 205 α')*.



α' *Σχ. 205.* β'

Ὑπόθ.	$\overline{AB}=\overline{ΓΔ}$
Συμπ.	$\overset{\frown}{AMB}=\overset{\frown}{ΓΝΔ}$

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\overset{\frown}{AMB}=\overset{\frown}{ΓΝΔ}$.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ. Τὰ τρίγωνα ΟΑΒ καὶ ΟΓΔ ἔχουν τὰς τρεῖς πλευράς των ἴσας μίαν πρὸς μίαν· ἄρα εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι $A\hat{O}B=Γ\hat{O}Δ$. Ἐπειδὴ αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι ΑΟΒ καὶ ΓΟΔ εἶναι ἴσαι, τὰ τόξα ἐπὶ τῶν ὁποίων βαίνουν θὰ εἶναι ἴσα, δηλ. θὰ εἶναι $\overset{\frown}{AMB}=\overset{\frown}{ΓΝΔ}$.

2ον. Ἔστωσαν αἱ ἄνισοι χορδαὶ ΑΒ καὶ ΓΔ *(Σχ. 205β')* καὶ ἔστω, ὅτι ΑΒ>ΓΔ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\overset{\frown}{AMB}>\overset{\frown}{ΓΝΔ}$.

Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ· τὰ σχηματισθέντα τρίγωνα ΟΑΒ καὶ ΟΓΔ ἔχουν ΟΑ=ΟΓ, ΟΒ=ΟΔ καὶ ΑΒ>ΓΔ· ἄρα τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἄνισα καὶ ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς θὰ κεῖται μεγαλυτέρα γωνία· δηλ. θὰ εἶναι $A\hat{O}B>Γ\hat{O}Δ$.

Ἐπειδὴ ἡ ἐπίκεντρος γωνία ΑΟΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἐπικέντρου γωνίας ΓΟΔ, θὰ εἶναι καὶ $\overset{\frown}{AMB}>\overset{\frown}{ΓΝΔ}$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον. . . .***

279. Θεώρημα. *(Ἀντίστροφον).* ***Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους:***

1ον. ***Εἰς ἴσα τόξα ἀντιστοιχοῦν ἴσαι χορδαί.***

2ον. ***Εἰς ἄνισα τόξα ἀντιστοιχοῦν ἄνισοι χορδαὶ καὶ εἰς τὸ μεγαλύτερον τόξον ἀντιστοιχεῖ μεγαλυτέρα χορδή.***

1ον. Ὑπόθεσις: Ἔστω *(Σχ. 205α')* ὁ κύκλος Ο καὶ δύο ἴσα τόξα αὐτοῦ ΑΜΒ καὶ ΓΝΔ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ χορδαί των ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι ἴσαι.

Ὑπόθ.	$\overset{\frown}{AMB}=\overset{\frown}{ΓΝΔ}$
Συμπ.	$\overline{AB}=\overline{ΓΔ}$

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ. Ἐπειδὴ $\overset{\frown}{AMB}=\overset{\frown}{\Gamma N\Delta}$ θὰ εἶναι καὶ $\widehat{AOB}=\widehat{\Gamma O\Delta}$. Ἐπειδὴ εἶναι καὶ ΟΑ=ΟΒ==ΟΓ=ΟΔ, τὰ τρίγωνα ΟΑΒ καὶ ΟΓΔ εἶναι ἴσα. Ἄρα θὰ εἶναι καὶ ΑΒ=ΓΔ.

2ον. *Ὑπόθεσις:* Ἔστωσαν τὰ ἄνισα τόξα ΑΜΒ καὶ ΓΝΔ καὶ ἔστω, ὅτι $\overset{\frown}{AMB}>\overset{\frown}{\Gamma N\Delta}$.

Ὑπόθ.	$\overset{\frown}{AMB}>\overset{\frown}{\Gamma N\Delta}$
Συμπ.	$\overline{AB}>\overline{\Gamma\Delta}$

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\overline{AB}>\overline{\Gamma\Delta}$.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ.

Τὰ σχηματισθέντα τρίγωνα ΟΑΒ καὶ ΟΓΔ ἔχουν: ΟΑ=ΟΓ, ΟΒ=ΟΔ ὡς ἀκτῖνας τοῦ αὐτοῦ κύκλου καὶ $\widehat{AOB}>\widehat{\Gamma O\Delta}$· δηλ. ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἄνισον· ἄρα θὰ εἶναι ἄνισα καὶ ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας γωνίας θὰ κεῖται μεγαλυτέρα πλευρά· ἤτοι θὰ εἶναι $\overline{AB}>\overline{\Gamma\Delta}$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ὅτι εἰς τὸν αὐτόν. . . .***

Ἀσκήσεις

397. (427). Ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Ο. Ἀπὸ τὸ μέσον Μ τοῦ τόξου ΒΓ φέρομεν τὴν χορδὴν ΜΝ παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΜΝ=ΑΒ.

398. (428). Ἐὰν δύο ἴσαι περιφέρειαι τέμνωνται, τὰ δύο τόξα τῆς πρώτης εἶναι ἀντιστοίχως ἴσα μὲ τὰ τόξα τῆς δευτέρας.

399. (497). Εἰς ἕνα κύκλον Ο δίδεται ἡ ἐπίκεντρος γωνία ΑΟΒ· φέρομεν τὴν διχοτόμον ΟΓ τῆς γωνίας αὐτῆς καὶ μίαν χορδὴν ΜΝ κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΟΑ εἰς τὸ σημεῖον Δ καὶ τὴν ΟΒ εἰς τὸ σημεῖον Ε. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΜΔ=ΕΝ καὶ ΑΔ=ΒΕ.

3. Σχέσεις μεταξὺ χορδῶν καὶ τῶν ἀποστάσεών των ἀπὸ τὸ κέντρον

280. Θεώρημα. ***Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς δύο ἴσους κύκλους:***

1ον. ***Δύο ἴσαι χορδαὶ ἀπέχουν ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ κέντρον.***

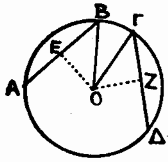
2ον. ***Δύο ἄνισοι χορδαὶ ἀπέχουν ἄνισον ἀπὸ τὸ κέντρον καὶ ἡ μεγαλυτέρα χορδὴ ἀπέχει ὀλιγώτερον ἀπὸ τὸ κέντρον.***

1ον. *Ὑπόθεσις:* Ἔστω ὁ κύκλος Ο *(Σχ. 206)* καὶ δύο ἴσαι χορδαί του ΑΒ καὶ ΓΔ. Ἀπὸ τὸ κέντρον Ο φέρομεν τὰς καθέτους ΟΕ καὶ ΟΖ ἐπὶ τὰς χορδὰς ΑΒ καὶ ΓΔ.

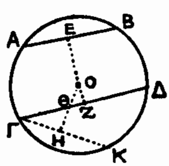
Ὑπόθ.	ΑΒ=ΓΔ ΟΕ ⊥ ΑΒ ΟΖ ⊥ ΓΔ
Συμπ.	ΟΕ=ΟΖ

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΟΕ=ΟΖ.

Ἀπόδειξις: Τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ εἶναι τὰ μέσα τῶν χορδῶν ΑΒ καὶ ΓΔ. Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΒ καὶ ΟΓ. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΕΒ καὶ ΟΖΓ ἔχουν: ΟΒ=ΟΓ, ὡς ἀκτῖνας τοῦ αὐτοῦ κύκλου καὶ ΒΕ=ΖΓ, ὡς ἡμίση τῶν ἴσων χορδῶν ΑΒ καὶ ΓΔ· δηλ. ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των ἴσας καὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν ἴσην· ἄρα εἶναι ἴσα καὶ ἐπομένως ἔχουν καὶ ΟΕ=ΟΖ.



Σχ. 206.



Σχ. 207.

2ον. *Ὑπόθεσις:* Ἔστω ὁ κύκλος Ο *(Σχ. 207)* καὶ ΑΒ καὶ ΓΔ δύο χορδαὶ αὐτοῦ ἄνισοι καὶ ἔστω, ὅτι ΓΔ>ΑΒ. Ἀπὸ τὸ κέντρον Ο φέρομεν τὰς καθέτους ΟΕ καὶ ΟΖ ἐπὶ τὰς χορδὰς ΑΒ καὶ ΓΔ.

Ὑπόθ.	ΓΔ>ΑΒ ΟΕ ⊥ ΑΒ ΟΖ ⊥ ΓΔ
Συμπ.	ΟΖ<ΟΕ

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΟΖ<ΟΕ.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ ἡ χορδὴ ΓΔ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΑΒ, τὸ τόξον ΓΚΔ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τόξου ΑΒ. Ἐπὶ τοῦ τόξου ΓΚΔ λαμβάνομεν τὸ τόξον ΓΚ ἴσον μὲ τὸ τόξον ΑΒ, ὁπότε ἡ χορδὴ ΓΚ θὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν χορδὴν ΑΒ. Φέρομεν τὴν ΟΗ κάθετον ἐπὶ τὴν χορδὴν ΓΚ. Ἐπειδὴ αἱ χορδαὶ ΑΒ καὶ ΓΚ εἶναι ἴσαι, αἱ ἀποστάσεις των ΟΕ καὶ ΟΗ ἀπὸ τὸ κέντρον Ο θὰ εἶναι ἴσαι· ἤτοι θὰ εἶναι ΟΕ=ΟΗ. Ἡ ΟΗ τέμνει τὴν ΓΔ εἰς τὸ Θ, τὸ ὁποῖον κεῖται μεταξὺ τῶν Ο καὶ Η. Ἀλλὰ ἡ κάθετος ΟΖ, ἐπὶ τὴν ΓΔ, εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὴν πλαγίαν ΟΘ καὶ κατὰ μείζονα λόγον θὰ εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὴν ΟΗ, ἢ τὴν ἴσην της ΟΕ· ἤτοι εἶναι ΟΖ<ΟΕ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον....***

281. Θεώρημα. *(Ἀντίστροφον).* ***Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς δύο ἴσους κύκλους:***

1ον. ***Δύο χορδαί, αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὸ κέντρον εἶναι ἴσαι.***

2ον. ***Δύο χορδαί, αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν ἄνισον ἀπὸ τὸ κέντρον εἶναι ἄνισοι καὶ ἡ ἀπέχουσα ὀλιγώτερον ἀπὸ τὸ κέντρον εἶναι ἡ μεγαλυτέρα.***

1ον. Ὑπόθεσις: Ἔστω ὁ κύκλος Ο *(Σχ. 206)*, ΑΒ καὶ ΓΔ δύο χορδαὶ αὐσοῦ καὶ ΟΕ, ΟΖ αἱ ἀποστάσεις αὐτῶν ἀπὸ τὸ κέντρον Ο. Τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ εἶναι μέσα τῶν χορδῶν ΑΒ καὶ ΓΔ. Ἔστω ὅτι εἶναι ΟΕ=ΟΖ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν ὅτι αἱ χορδαὶ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι ἴσαι.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΒ καὶ ΟΓ. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΕΒ καὶ ΟΖΓ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των ἴσας καὶ μίαν κάθετον πλευρὰν ἴσην· ἤτοι ἔχουν ΟΒ=ΟΓ, ὡς ἀκτῖνας τοῦ αὐτοῦ κύκλου καὶ ΟΕ=ΟΖ ἐξ ὑποθέσεως· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ ΕΒ=ΖΓ. Ἐπειδὴ τὰ ἡμίση τῶν χορδῶν ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι ἴσα, θὰ εἶναι ἴσαι καὶ ὁλόκληροι αἱ χορδαί· ἤτοι θὰ εἶναι ΑΒ=ΓΔ.

Ὑπόθ.	ΟΕ ⊥ ΑΒ ΟΖ ⊥ ΓΔ ΟΕ=ΟΖ
Συμπ.	ΑΒ=ΓΔ

2ον. *Ὑπόθεσις*: Ἔστω ὁ κύκλος Ο (*Σχ. 207)*, ΑΒ καὶ ΓΔ δύο χορδαὶ αὐτοῦ καὶ ΟΕ καὶ ΟΖ αἱ ἀποστάσεις αὐτῶν ἀπὸ τὸ κέντρον Ο. Ἔστω ὅτι εἶναι ΟΖ<ΟΕ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΓΔ>ΑΒ.

Ἀπόδειξις: Πράγματι· ἐὰν ἡ χορδὴ ΓΔ δὲν ἦτο μεγαλυτέρα τῆς ΑΒ, θὰ ἦτο ἴση μὲ αὐτὴν ἢ μικροτέρα αὐτῆς.

Ὑπόθ.	ΟΕ ⊥ ΑΒ ΟΖ ⊥ ΓΔ ΟΖ<ΟΕ
Συμπ.	ΓΔ>ΑΒ

Ἐὰν ἡ ΓΔ ἦτο ἴση μὲ τὴν ΑΒ, τότε καὶ αἱ ἀποστάσεις των ΟΖ καὶ ΟΕ ἀπὸ τὸ κέντρον Ο θὰ ἦσαν ἴσαι, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας.

Ἐὰν ἡ ΓΔ ἦτο μικροτέρα ἀπὸ τὴν ΑΒ, τότε ἡ ἀπόστασις ΟΖ τῆς ΓΔ θὰ ἦτο μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν ἀπόστασιν ΟΕ τῆς ΑΒ, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἀντίκειται πάλιν εἰς τὴν ὑπόθεσιν.

Ὥστε ἡ ΓΔ εἶναι μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν ΑΒ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον....***

Ἀσκήσεις

400. (429). Δύο χορδαὶ κύκλου κάθετοι εἰς τὰ ἄκρα τρίτης χορδῆς εἶναι ἴσαι

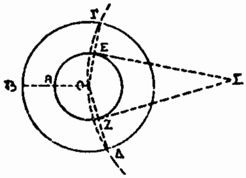
401. (430). Δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο' τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Α'· συνδέομεν μὲ εὐθεῖαν ΑΜ τὸ σημεῖον Α μὲ τὸ μέσον Μ τῆς ΟΟ' καὶ ἀπὸ τὸ Α φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΜ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὸ Γ καὶ τὴν Ο' εἰς τὸ Γ'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΑΓ=ΑΓ'.

402. (431). Ἡ μικροτέρα χορδή, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς κύκλου, εἶναι ἡ κάθετος χορδὴ ἐπὶ τὴν διάμετρον, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ δοθὲν σημεῖον.

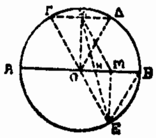
403. (432). Ἐὰν δύο χορδαὶ κύκλου εἶναι ἴσαι καὶ προεκτείνωμεν αὐτὰς μέχρι τῆς συναντήσεώς των, αἱ εὐθεῖαι, αἱ περιεχόμεναι μεταξὺ τοῦ σημείου τῆς τομῆς καὶ τῶν ἄκρων τῶν χορδῶν, εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι.

404. (433). Δύο σημεῖα μιᾶς χορδῆς κύκλου, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὸ μέσον αὐτῆς, ἀπέχουν ἴσην ἀπόστασιν καὶ ἀπὸ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλο

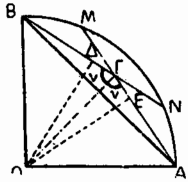
405. (434). Δίδονται δύο ὁμόκεντροι περιφέρειαι Ο ἀκτίνων ΟΑ καὶ ΟΒ καὶ τοιαῦται, ὥστε ΟΒ=2 ΟΑ. Μὲ κέντρον τυχὸν σημεῖον Σ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου (Ο, ΟΒ) καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΣΟ γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν (Ο, ΟΒ) εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΟΓ καὶ ΟΔ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου (Ο, ΟΑ) εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΣΕ καὶ ΣΖ εἶναι ἐφαπτόμεναι τῆς περιφερείας (Ο, ΟΑ).



Σχ. ἀσκ. 405.



Σχ. ἀσκ. 406.



Σχ. ἀσκ. 407.

406. (435). Εἰς ἕνα κύκλον Ο φέρομεν τὴν διάμετρον ΑΒ καὶ μίαν χορδὴν ΓΔ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ καὶ ἴσην μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου Ο. 'Απὸ τὸ μέσον Μ τῆς ἀκτῖνος ΟΒ, φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν, ἡ ὁποία δὲν περιέχει τὸ τόξον ΓΔ, εἰς τὸ σημεῖον Ε. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διάμετρος ΑΒ διχοτομεῖ τὴν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία συνδέει τὸ σημεῖον Ε μὲ τὸ μέσον Ζ τῆς χορδῆς ΓΔ.

407 (436). Δίδεται ἕνα τεταρτοκύκλιον ΟΑΒ 'Απὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β φέρομεν δύο ἴσας χορδὰς ΑΜ καὶ ΒΝ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Γ. Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. Ὅτι γων·ΟΓΒ=γων.ΟΓΑ.

2ον. Ὅτι ΒΓ=ΓΑ καὶ ΓΝ=ΓΜ.

3ον. Ὅτι ἡ ΟΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν ΑΒ.

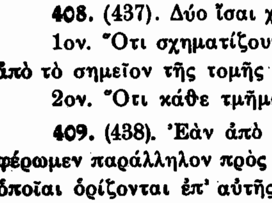
408. (437). Δύο ἴσαι χορδαὶ κύκλου τέμνονται ἐντὸς αὐτοῦ. Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. Ὅτι σχηματίζουν ἴσας γωνίας μὲ τὴν διάμετρον, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς των.

2ον. Ὅτι κάθε τμῆμα τῆς μιᾶς εἶναι ἴσον μὲ ἕνα τμῆμα τῆς ἄλλης.

409. (438). 'Εὰν ἀπὸ τὸ ἕνα κοινὸν σημεῖον δύο τεμνομένων περιφερειῶν φέρωμεν παράλληλον πρὸς τὴν διάκεντρόν των, τὸ ἄθροισμα τῶν χορδῶν, αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ἐπ' αὐτῆς εἶναι διπλάσιον τῆς ἀποστάσεως τῶν κέντρων των.

410. (439). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἀπὸ ὅλας τὰς τεμνούσας, τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἀπὸ τὸ ἕνα κοινὸν σημεῖον δύο τεμνομένων περιφερειῶν, μεγαλυτέρα εἶναι ἡ τέμνουσα, ἡ ὁποία εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάκεντρον.

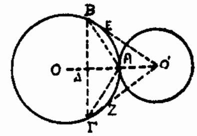


Σχ. ἀσκ. 411.

411. (440). Δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο' τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. 'Απὸ τὸ Α φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὸ Γ καὶ τὴν Ο' εἰς τὸ Δ. 'Απὸ τὰ κέντρα Ο καὶ Ο' φέρομεν τὰς καθέτους ΟΗ καὶ

Ο'Θ ἐπὶ τὴν ΓΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΗΘ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἡμιάθροισμα ἢ μὲ τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν χορδῶν ΑΓ καὶ ΑΔ.

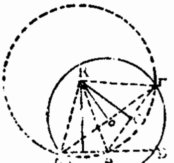
412. (441). Δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο' ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς ἕνα σημεῖον Α. Ἐὰν δύο σημεῖα Β καὶ Γ τῆς περιφερείας Ο ἀπέχουν ἰσάκις ἀπὸ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Α νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Β καὶ Γ ἀπέχουν ἰσάκις καὶ ἀπὸ τὴν περιφέρειαν Ο'.



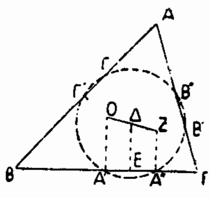
Σχ. ἀσκ. 412.

413. (442). Εἰς ἕνα κύκλον Ο φέρομεν μίαν χορδὴν ΑΒ καὶ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Δ αὐτῆς, τὸ ὁποῖον συνδέομεν, δι' εὐθείας, μὲ τυχὸν σημεῖον Γ τῆς περιφερείας Ο. Ἀπὸ τὰ μέσα Ε καὶ Ζ τῶν ΑΔ καὶ ΔΓ φέρομεν καθέτους ἐπ' αὐτὰς ἀντιστοίχως, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Κ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΟΚ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν ΑΓ.

414. (443). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ· ἀπὸ ἕνα σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς τοῦ τριγώνου φέρομεν τὰς καθέτους ΟΑ', ΟΒ', ΟΓ' ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ. Ἡ περιφέρεια, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ τρία σημεῖα Α', Β', Γ' τέμνει τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου εἰς τρία ἄλλα σημεῖα Α'', Β'', Γ''. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Α'', Β'', Γ'' τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

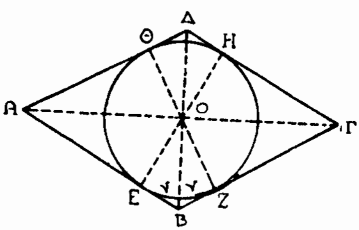


Σχ. ἀσκ. 413.

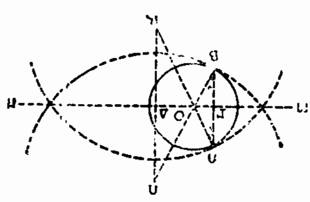


Σχ. ἀσκ. 414.

415. (444). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι δύο παράλληλοι χορδαὶ κύκλου, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου τοῦ κύκλου, εἶναι ἴσαι καὶ ὅτι ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὰ δύο ἄλλα ἄκρα τῶν χορδῶν αὐτῶν εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου.



Σχ. ἀσκ. ἀσκ. 417.


Σχ. ἀσκ. 418.

416. (445). Εἰς ἕνα κύκλον Ο φέρομεν μίαν χορδὴν ΑΒ· ἐπὶ τῆς χορδῆς ΑΒ καὶ ἀπὸ τὸ μέσον Γ αὐτῆς λαμβάνομεν, ἑκατέρωθεν τοῦ Γ, δύο τμήματα ΓΔ=ΓΕ. Ἀπὸ τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε φέρομεν καθέτους ΔΖ καὶ ΕΗ ἐπὶ τὴν ΑΒ,

αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὸ τόξον ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Ζ καὶ Η. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΔΖ=ΕΗ.

417. (446). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ πλευραὶ ῥόμβου εἶναι ἐφαπτόμεναι ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου.

418. (447). Ἐὰν δύο τόξα, ἴσων κύκλων, ἐφάπτωνται τῆς αὐτῆς περιφερείας Ο, ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἑνώνει τὸ κέντρον Ο μὲ τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῶν δύο τόξων, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χορδήν, ἡ ὁποία συνδέει τὰ σημεῖα ἐπαφῆς καὶ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς.

419. (448). Εἰς ἕνα κύκλον Ο φέρομεν μίαν διάμετρον ΑΒ καὶ μίαν τυχοῦσαν χορδὴν ΓΔ. Ἀπὸ τὰ Α καὶ Β φέρομεν τὰ καθέτους ΑΕ καὶ ΒΖ ἐπὶ τὴν ΓΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ ἀπέχουν ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ μέσον Η τῆς χορδῆς ΓΔ.

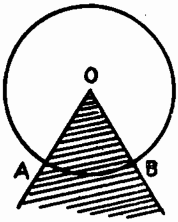
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑΙ ΓΩΝΙΑΙ

1. Μέτρον τῶν ἐγγεγραμμένων γωνιῶν

282. Ὁρισμοί. Ἔστω, ὅτι δίδεται μία γωνία καὶ μία περιφέρεια. Ἡ κορυφὴ τῆς γωνίας δύναται νὰ καταλάβῃ, ὡς πρὸς τὴν περιφέρειαν, τέσσαρας χαρακτηριστικὰς θέσεις.

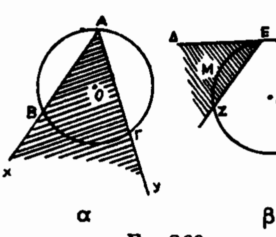
I. *Ἡ κορυφὴ τῆς γωνίας εἶναι εἰς τὸ κέντρον τῆς περιφερείας (Σχ. 208).* Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ὡς εἴδομεν, ἡ γωνία λέγεται ***ἐπίκεντρος γωνία***.



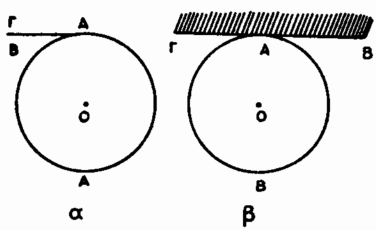
Σχ. 208.

II. *Ἡ κορυφὴ τῆς γωνίας κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας.* Αἱ πλευραὶ τῆς γωνίας δύνανται νὰ εἶναι τέμνουσαι τῆς περιφερείας *(Σχ. 209α)* ἢ ἡ μία νὰ εἶναι τέμνουσα καὶ ἡ ἄλλη ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας *(Σχ. 209β)*. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ γωνίαι λέγοντοι ***ἐγγεγραμμέναι γωνίαι.***

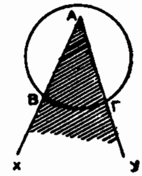
Γενικῶς: *Μία γωνία λέγεται **ἐγγεγραμμένη** εἰς περιφέρειαν, ὅταν ἡ κορυφή της κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, αἱ δὲ πλευραί της εἶναι τέμνουσαι αὐτῆς ἢ ἡ μία εἶναι τέμνουσα καὶ ἡ ἄλλη ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας.*



Σχ. 209.



Σχ. 210.



Σχ. 211.

Τὸ τόξον τῆς περιφερείας, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν **πλευρῶν** τῆς γωνίας, λέγεται ***ἀντίστοιχον τόξον*** αὐτῆς.

Π.χ. ἡ γωνία xAy *(Σχ. 209α)* εἶναι ἐγγεγραμμένη γωνία· ἡ κορυφή της A κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας καὶ αἱ πλευραί της Ax καὶ Ay εἶναι τέμνουσαι αὐτῆς. Ἀντίστοιχον τόξον αὐτῆς εἶναι τὸ ΒΓ.

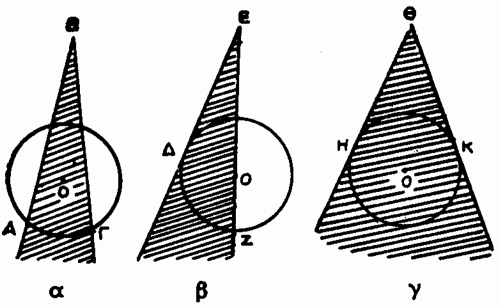
Ἐπίσης ἡ γωνία ΔΕΖ *(Σχ. 209β)* εἶναι ἐγγεγραμμένη γωνία· ἡ κορυφή της Ε κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἡ μία πλευρά της ΕΖ εἶναι τέμνουσα καὶ ἡ ΕΔ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας. Εἰδικώτερον ἡ γωνία ΔΕΖ λέγεται *γωνία σχηματιζομένη ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης*. Ἀντίστοιχον τόξον αὐτῆς εἶναι τὸ τόξον ΕΜΖ.

Σημ. Ὅταν μία γωνία ἔχῃ τὴν κορυφήν της ἐπὶ τῆς περιφερείας καὶ αἱ δύο πλευραί της εἶναι ἐφαπτόμεναι τῆς περιφερείας, αἱ πλευραὶ αὐταὶ δύνανται νὰ συμπίπτουν, ὁπότε ἡ γωνία εἶναι μηδὲν *(Σχ. 210α)* ἢ ἡ μία πλευρὰ εἶναι προέκτασις τῆς ἄλλης, ὁπότε ἡ γωνία εἶναι πεπλατυσμένη γωνία *(Σχ. 210β)*.

III. *Ἡ κορυφὴ τῆς γωνίας εἶναι εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς περιφερείας (Σχ. 211)*. Π.χ. ἡ γωνία xAy ἔχει τὴν κορυφὴν εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς περιφερείας.

Αἱ τοιαῦται γωνίαι λέγονται *γωνίαι κείμεναι εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς περιφερείας*.

IV. *Ἡ κορυφὴ τῆς γωνίας κεῖται εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τῆς περιφερείας*. Αἱ πλευραὶ τῆς γωνίας αὐτῆς δύνανται νὰ εἶναι:



Σχ. 212.

1ον. Τέμνουσαι τῆς περιφερείας.

Π.χ. ἡ γωνία ΑΒΓ *(Σχ. 212α)* ἔχει τὴν κορυφήν της ἐκτὸς τῆς περιφερείας Ο καὶ αἱ πλευραί της ΒΑ καὶ ΒΓ εἶναι τέμνουσαι αὐτῆς.

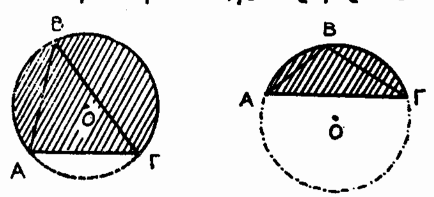
2ον. Ἡ μία νὰ εἶναι τέμνουσα τῆς περιφερείας καὶ ἡ ἄλλη ἐφαπτομένη αὐτῆς.

Π.χ. ἡ γωνία ΔΕΖ *(Σχ. 212β)* ἔχει τὴν κορυφήν της Ε εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τῆς περιφερείας Ο, ἡ πλευρά της ΕΖ εἶναι τέμνουσα τῆς περιφερείας καὶ ἡ πλευρὰ ΕΔ ἐφαπτομένη αὐτῆς.

3ον. Καὶ αἱ δύο πλευραὶ εἶναι ἐφαπτόμεναι τῆς περιφερείας.

Π.χ. ἡ γωνία ΗΘΚ *(Σχ. 212γ)* ἔχει τὴν κορυφήν της εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τῆς περιφερείας καὶ αἱ πλευραὶ ΘΗ καὶ ΘΚ εἶναι ἐφαπτόμεναι αὐτῆς.

283. Ὁρισμός. *Μία γωνία λέγεται* ***ἐγγεγραμμένη***



Σχ. 213.

***εἰς κυκλικὸν τμῆμα**, ὅταν ἡ κορυφὴ τῆς γωνίας κεῖται ἐπὶ τοῦ τόξου τοῦ κυκλικοῦ τμήματος, αἱ δὲ πλευραί της διέρχονται ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς χορδῆς τοῦ κυκλικοῦ τμήματος.*

Π.χ. ἡ γωνία ΑΒΓ *(Σχ. 213)* εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΑΒΓΑ.

284. Θεώρημα. ***Κάθε ἐγγεγραμμένη γωνία εἰς κύκλον εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἀντιστοίχου ἐπικέντρου γωνίας.***

Ἔστω ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ΑΒΓ καὶ ἡ ἀντίστοιχος ἐπίκεντρος γωνία ΑΟΓ. Θὰ δείξωμεν ὅτι:

$$\widehat{ΑΒΓ}=\frac{1}{2}\widehat{ΑΟΓ}.$$

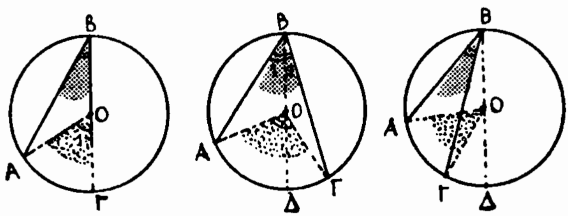
Ὑπόθ.	$\widehat{ΑΒΓ}$=ἐγγεγρ. γωνία $\widehat{ΑΟΓ}$=ἐπικεντρ. »
Συμπ.	$\widehat{ΑΒΓ}=\frac{1}{2}\widehat{ΑΟΓ}$

Διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις, αἱ ὁποῖαι ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὴν θέσιν τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ὡς πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας.

Ι. ***Περίπτωσις.*** *Μία ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου.*

Ὑπόθεσις: Ἔστω ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ΑΒΓ *(Σχ. 214α)*, τῆς ὁποίας ἡ πλευρὰ ΒΓ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου Ο.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν ὅτι $\widehat{ΑΒΓ}=\frac{1}{2}\widehat{ΑΟΒ}$.



Σχ. 214.

Ἀπόδειξις: Ἡ γωνία $Ο_1$, ὡς ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΑΟΒ θὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν Α καὶ Β· ἤτοι εἶναι

$$\widehat{Ο_1}=\widehat{Α}+\widehat{Β} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΟΒ εἶναι ἰσοσκελές, θὰ εἶναι $\widehat{Α}=\widehat{Β}$. Ἑπομένως ἡ ἰσότης (1) γίνεται:

$$\widehat{Ο_1}=\widehat{Α}+\widehat{Β} \text{ ἢ } \widehat{Ο_1}=2\widehat{Β} \text{ ἢ } \widehat{Β}=\frac{1}{2}Ο_1 \text{ ἢ } \widehat{ΑΒΓ}=\frac{1}{2}\widehat{ΑΟΓ}.$$

II. ***Περίπτωσις.*** *Τὸ κέντρον τοῦ κύκλου κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας.* Ἔστω ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ΑΒΓ καὶ ΑΟΓ ἡ ἀντίστοιχος ἐπίκεντρος γωνία *(Σχ. 214 β).*

Θὰ δείξωμεν πάλιν ὅτι $\widehat{ΑΒΓ}=\frac{1}{2}\widehat{ΑΟΓ}$.

Ἀπόδειξις. Φέρομεν τὴν διάμετρον ΒΟΔ. Ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἄθροισμα τῶν γωνιῶν $Β_1$ καὶ $Β_2$. Ἀλλὰ αἱ γωνίαι $Β_1$ καὶ $Β_2$ εἶναι γωνίαι ἐγγεγραμμέναι, τῶν ὁποίων ἡ μία πλευρὰ ΒΔ διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον· ἑπομένως, κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν, θὰ εἶναι

$$\widehat{Β}_1=\frac{1}{2}\widehat{ΑΟΔ},\qquad \widehat{Β}_2=\frac{1}{2}\widehat{ΔΟΓ}.$$

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\widehat{Β}_1+\widehat{Β}_2=\frac{1}{2}\widehat{ΑΟΔ}+\frac{1}{2}\widehat{ΔΟΓ} \quad ἢ \quad \widehat{Β}_1+\widehat{Β}_2=\frac{1}{2}(\widehat{ΑΟΔ}+\widehat{ΔΟΓ})$$

$$ἢ \qquad \widehat{ΑΒΓ}=\frac{1}{2}\widehat{ΑΟΓ}.$$

III. ***Περίπτωσις.*** *Τὸ κέντρον τοῦ κύκλου κεῖται ἐκτὸς τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας.* Ἔστω ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ΑΒΓ *(Σχ. 214 γ)* καὶ ΑΟΓ ἡ ἀντίστοιχος ἐπίκεντρος γωνία. Θὰ δείξωμεν πάλιν ὅτι

$$\widehat{ΑΒΓ}=\frac{1}{2}\widehat{ΑΟΓ}.$$

Φέρομεν τὴν διάμετρον ΒΔ. Ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι διαφορὰ τῶν γωνιῶν ΑΒΔ καὶ ΓΒΔ, τῶν ὁποίων ἡ μία πλευρὰ ΒΔ διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον Ο. Κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν θὰ εἶναι:

$$\widehat{ΑΒΔ}=\frac{1}{2}\widehat{ΑΟΔ},\qquad \widehat{ΓΒΔ}=\frac{1}{2}\widehat{ΓΟΔ}.$$

Ἀφαιροῦμεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν:

$$\widehat{ΑΒΔ}-\widehat{ΓΒΔ}=\frac{1}{2}\widehat{ΑΟΔ}-\frac{1}{2}\widehat{ΓΟΔ}$$

$$ἢ \quad \widehat{ΑΒΔ}-\widehat{ΓΒΔ}=\frac{1}{2}(\widehat{ΑΟΔ}-\widehat{ΓΟΔ}) \quad ἢ \quad \widehat{ΑΒΓ}=\frac{1}{2}\widehat{ΑΟΓ}$$

Καὶ εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις ἐδείχθη ὅτι ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἀντιστοίχου ἐπικέντρου γωνίας.

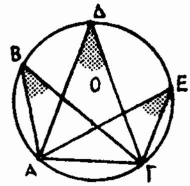
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Κάθε ἐγγεγραμμένη γωνία. . . .***

Παρατήρησις. Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὡς ἑξῆς, ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψει μας τὴν § 93.

Τὸ μέτρον μιᾶς ἐγγεγραμμένης γωνίας εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ μέτρου τοῦ ἀντιστοίχου τόξου της.

285. Πόρισμα I. ***Ὅλαι αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι, αἱ ὁποῖαι βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου, εἶναι ἴσαι.***

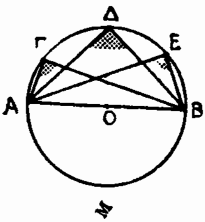
Πράγματι· διότι ὅλαι ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον: τὸ ἥμισυ τοῦ μέτρου τοῦ τόξου ἐπὶ τοῦ ὁποίου βαίνουν. Π. χ. αἱ γωνίαι ΑΒΓ, ΑΔΓ *(Σχ. 215)*, εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουν μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ μέτρου τοῦ τόξου ΑΓ.



Σχ. 215.

286. Πόρισμα II. ***Κάθε γωνία ἐγγεγραμμένη καὶ βαίνουσα ἐπὶ ἡμιπεριφερείας εἶναι ὀρθή.***

Ἐν πρώτοις ὅλαι ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον: τὸ ἥμισυ τοῦ μέτρου τοῦ τόξου ἐπὶ τοῦ ὁποίου βαίνουν, δηλ. τῆς ἡμιπεριφερείας.



Σχ. 216.

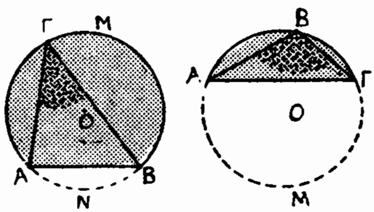
Π.χ. αἱ γωνίαι ΑΓΒ, ΑΔΒ *(Σχ. 216)*, ἔχουν μέτρον ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ μέτρου τῆς ἡμιπεριφερείας ΑΜΒ.

Ἔπειτα ἐπειδὴ τὸ μέτρον τῆς ἡμιπεριφερείας εἶναι 2 ὀρθ. ἢ 180^0 ἕπεται, ὅτι τὸ μέτρον τῶν γωνιῶν ΑΓΒ, ΑΔΒ, εἶναι 1 ὀρθὴ ἢ $180^0 : 2 = 90^0$.

287. Πόρισμα III. ***Μία γωνία, ἐγγεγραμμένη εἰς κυκλικὸν τμῆμα, εἶναι ὀξεῖα, ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα, καθόσον τὸ κυκλικὸν τμῆμα εἶναι μεγαλύτερον, ἴσον ἢ μικρότερον ἡμικυκλίου.***

1ον. Ἔστω ἡ γωνία ΑΓΒ *(Σχ. 217)*, ἡ ὁποία εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΑΜΒΑ, τὸ ὁποῖον εἶναι μεγαλύτερον ἡμικυκλίου. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ γωνία ΑΓΒ εἶναι ὀξεῖα.

Πράγματι· ἡ γωνία ΑΓΒ ἔχει ὡς μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ μέτρου τοῦ τόξου ΑΝΒ, τὸ ὁποῖον εἶναι μικρότερον ἡμιπεριφερείας· δηλ. ἡ γωνία αὐτὴ θὰ ἔχῃ μέτρον μικρότερον τῶν 90^0 καὶ ἑπομένως εἶναι ὀξεῖα.



Σχ. 217. *Σχ. 218.*

2ον. Ἐδείχθη εἰς τὸ πόρισμα II.

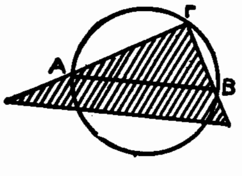
3ον. Ἔστω ἡ γωνία ΑΒΓ *(Σχ. 218)*, ἡ ὁποία εἶναι ἐγεγγραμμένη εἰς τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΑΒΓΑ, τὸ ὁποῖον εἶναι μικρότερον ἡμικυκλίου· θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἀμβλεῖα.

Πράγματι· ἡ γωνία ΑΒΓ ἔχει ὡς μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ μέτρου τοῦ τόξου ΑΜΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι μεγαλύτερον ἡμιπεριφερείας, δηλ. ἡ γωνία αὐτὴ θὰ ἔχῃ μέτρον μεγαλύτερον τῶν 90° καὶ ἑπομένως εἶναι ἀμβλεῖα.

288. Πόρισμα IV. ***Κάθε τρίγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς ἡμικύκλιον εἶναι ὀρθογώνιον.***

Πράγματι· τὸ τρίγωνον ΑΓΒ, *(Σχ. 216)* ἔχει τὴν γωνίαν του Γ ὀρθήν, διότι εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ ἡμικύκλιον ΑΓΒΟΑ· ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΓΒ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Γ. Ὁμοίως τὰ τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΕΒ εἶναι ὀρθογώνια.

289. Ἐφαρμογή. Μὲ τὴν βοήθειαν ἑνὸς γνώμονος δυνάμεθα τὰ εὕρωμεν τὸ κέντρον ἑνὸς κύκλου. Τοποθετοῦμεν τὸν γνώμονα ἐπὶ τοῦ κύκλου οὕτως, ὥστε ἡ κορυφὴ Γ *(Σχ. 219)* τῆς ὀρθῆς γωνίας του νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου καὶ αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ τοῦ γνώμονος νὰ τέμνουν τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Σημειώνομεν αὐτὰ τὰ σημεῖα καὶ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, ἡ ὁποία εἶναι μία διάμετρος τοῦ κύκλου. Μία δευτέρα ὁμοία ἐργασία δίδει μίαν δευτέραν διάμετρον. Ἡ τομὴ τῶν δύο αὐτῶν διαμέτρων δίδει τὸ ζητούμενον κέντρον.



Σχ. 219.

Ἀσκήσεις

420. (449). Ἐπὶ μιᾶς περιφερείας λαμβάνομεν κατὰ σειρὰν τὰ τόξα: $\widehat{AB}=70^\circ$, $\widehat{B\Gamma}=120^\circ$. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

421. (450). Ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον Ο. Φέρομεν τὴν διάμετρον ΑΔ καὶ τὸ ὕψος ΓΗ τοῦ τριγώνου. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ χορδὴ ΔΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΗ.

422. (451). Εἰς ἕνα κύκλον Ο φέρομεν μίαν διάμετρον ΑΒ καὶ μίαν χορδὴν ΓΔ παράλληλον τῆς ΑΒ· νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι δύο γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΔΓ διαφέρουν κατὰ μίαν ὀρθὴν γωνίαν.

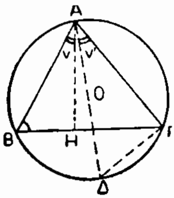
423. (452). Ἐὰν δύο περιφέρειαι ἐφάπτωνται ἐσωτερικῶς εἰς ἕνα σημεῖον Α καὶ ἐὰν ἡ μία ἀπὸ αὐτὰς διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς ἄλλης, ἡ ἐσωτερικὴ περιφέρεια διχοτομεῖ τὰς χορδὰς τῆς ἐξωτερικῆς, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ σημεῖον Α.

424. (453). Δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο′ τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Ἀπὸ τὸ Α φέρομεν μίαν τυχοῦσαν τέμνουσαν ΓΑΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Ο εἰς

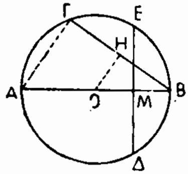
τὸ σημεῖον Γ καὶ τὴν Ο′ εἰς τὸ Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία ΓΒΔ εἶναι σταθερά.

425. (454). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζει τὸ ὕψος ΑΗ μὲ τὴν πλευρὰν ΑΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ ΑΓ μὲ τὴν ἀκτῖνα ΑΟ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τὸ τρίγωνον.

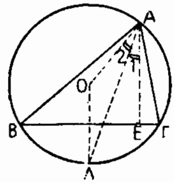
426. (455). Ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον Ο. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Β φέρομεν τὴν χορδὴν ΒΔ κάθετον ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ. Ἐὰν Η εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΑΗ=ΒΔ.



Σχ. ἀσκ. 425.



Σχ. ἀσκ. 427.



Σχ. ἀσκ. 428.

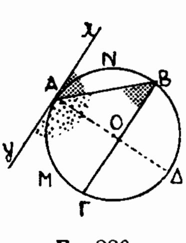
427. (456). Εἰς ἕνα κύκλον Ο φέρομεν τὴν διάμετρον ΑΒ καὶ τὴν χορδὴν ΒΓ, ἡ ὁποία σχηματίζει μὲ τὴν ΒΑ γωνίαν 30°. Ἀπὸ τὸ μέσον Μ τῆς ΒΟ φέρομεν τὴν χορδὴν ΔΜΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΒΓ=ΔΕ.

428. (457). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας ἑνὸς τριγώνου σχηματίζει γωνίας ἴσας μὲ τὸ ὕψος καὶ μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον, τὰ ὁποῖα ἄγονται ἀπὸ τὴν αὐτὴν κορυφήν.

290. Θεώρημα. ***Ἡ γωνία, ἡ ὁποία σχηματίζεται ὑπὸ χορδῆς κύκλου καὶ ἐφαπτομένης αὐτοῦ εἰς τὸ ἕνα ἄκρον τῆς χορδῆς, ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ μέτρου τοῦ τόξου τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τῶν πλευρῶν της.***

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθόσον ἡ γωνία εἶναι ὀξεῖα ἢ ἀμβλεῖα.

Ι. ***Περίπτωσις.*** *Ὑπόθεσις:* Ἔστω ἡ ὀξεῖα γωνία ΒΑx *(Σχ. 220)*, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὴν χορδὴν ΑΒ καὶ τὴν



Σχ. 220.

Ὑπόθ.	ΑΒ=χορδὴ xAy=ἐφαπτομένη
Συμπ.	$\mu\epsilon\tau\rho.\widehat{BAx}=\frac{1}{2}\mu\epsilon\tau\rho.\overset{\frown}{ANB}$

ἐφαπτομένην xAy τοῦ κύκλου Ο εἰς τὸ σημεῖον Α, ἄκρον τῆς χορδῆς ΑΒ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι: $\mu\epsilon\tau\rho.\widehat{BAx}=\frac{1}{2}\mu\epsilon\tau\rho.\overset{\frown}{ANB}$.

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὸ Β φέρομεν τὴν χορδὴν ΒΓ, *παράλληλον* πρὸς τὴν xy. Τὰ τόξα ΑΝΒ καὶ ΑΜΓ, εἶναι ἴσα, διότι περιέχονται μεταξὺ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν xy καὶ ΒΓ· ἄρα αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι, αἱ ὁποῖαι βαίνουν ἐπὶ τῶν τόξων αὐτῶν ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον: τὸ ἥμισυ τοῦ μέτρου τῶν τόξων ΑΜΓ καὶ ΑΝΒ, ἤτοι εἶναι:

$$\text{μέτρ.}\widehat{ΑΒΓ}=\frac{1}{2}\,\text{μέτρ.}\overset{\frown}{ΑΜΓ} \quad ἢ \quad \text{μέτρ.}\widehat{ΑΒΓ}=\frac{1}{2}\,\text{μέτρ.}\overset{\frown}{ΑΝΒ} \quad (1).$$

Ἀλλὰ ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν ΒΑx, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων xy καὶ ΒΓ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΒ καὶ ἐπομένως ἡ (1) γίνεται $\text{μέτρ.}\widehat{ΒΑx}=\frac{1}{2}\,\text{μέτρ.}\overset{\frown}{ΑΝΒ}$.

II. ***Περίπτωσις.*** Ἔστω ἡ ἀμβλεῖα γωνία ΒΑy *(Σχ. 220)*, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὴν χορδὴν ΑΒ καὶ ἀπὸ τὴν ἐφαπτομένην Αy τοῦ κύκλου Ο εἰς τὸ σημεῖον Α. Θὰ δείξωμεν πάλιν, ὅτι:

$$\text{μετρ.}\widehat{ΒΑy}=\frac{1}{2}\,\text{μετρ.}\overset{\frown}{ΑΜΒ}.$$

Φέρομεν τὴν διάμετρον ΑΟΔ. Ἡ γωνία ΒΑy εἶναι ἄθροισμα τῆς ὀρθῆς γωνίας yΑΔ καὶ τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας ΔΑΒ καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι:

$$\text{μετρ.}\widehat{ΒΑy}=\text{μετρ.}\widehat{yΑΔ}+\text{μετρ.}\widehat{ΔΑΒ}$$

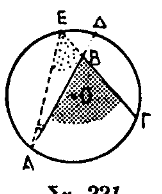
$$ἢ \quad \text{μετρ.}\widehat{ΒΑy}=\frac{1}{2}\,\text{μετρ.}\overset{\frown}{ΑΜΔ}+\frac{1}{2}\,\text{μετρ.}\overset{\frown}{ΔΒ}$$

$$ἢ \quad \text{μετρ.}\widehat{ΒΑy}=\frac{1}{2}\,(\text{μετρ.}\overset{\frown}{ΑΜΔ}+\text{μετρ.}\overset{\frown}{ΔΒ})=\frac{1}{2}\,\text{μετρ.}\overset{\frown}{ΑΜΔΒ}.$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἡ γωνία, ἡ ὁποία.....***

291. Θεώρημα. ***Κάθε γωνία, ἡ ὁποία ἔχει τὴν κορυφήν της ἐντὸς κύκλου ἔχει μέτρον ἴσον μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν μέτρων τῶν τόξων, τὰ ὁποῖα περιέχονται μεταξὺ τῶν πλευρῶν της καὶ τῶν προεκτάσεων τῶν πλευρῶν της.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω ἡ γωνία ΑΒΓ *(Σχ. 221)*, ἡ ὁποία ἔχει τὴν κορυφήν της ἐντὸς τοῦ κύκλου Ο. Προεκτείνομεν τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΓΒ πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς της Β καὶ ἔστωσαν Δ καὶ Ε τὰ σημεῖα εἰς τὰ ὁποῖα τέμνουν τὴν περιφέρειαν αἱ προεκτάσεις τῶν ΑΒ καὶ ΓΒ.



Σχ. 221.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι:

$$\text{μετρ.}\widehat{ΑΒΓ}=\frac{\text{μετρ.}\overset{\frown}{ΑΓ}+\text{μετρ.}\overset{\frown}{ΕΔ}}{2}.$$

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὴν χορδὴν ΑΕ. Ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΑΕΒ καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι

$$\widehat{ΑΒΓ}=\widehat{Ε}+\widehat{Α} \quad ἢ \quad μετρ.\widehat{ΑΒΓ}=μετρ.\widehat{Ε}+μετρ.\widehat{Α} \qquad (1)$$

Ἀλλὰ αἱ γωνίαι Ε καὶ Α εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸν κύκλον Ο καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι $μετρ.\widehat{Ε}=\frac{μετρ.\widehat{ΑΓ}}{2}$ καὶ $μετρ.\widehat{Α}=\frac{μετρ.\widehat{ΕΔ}}{2}$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὰ $μετρ.\widehat{Ε}$ καὶ $μετρ.\widehat{Α}$ μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν

$$μετρ.\widehat{ΑΒΓ}=\frac{μετρ.\widehat{ΑΓ}}{2}+\frac{μετρ.\widehat{ΕΔ}}{2}$$

$$ἢ \quad μετρ.\widehat{ΑΒΓ}=\frac{μετρ.\widehat{ΑΓ}+μετρ.\widehat{ΕΔ}}{2}$$

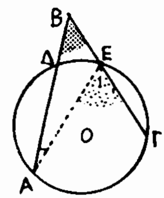
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Κάθε γωνία, ἡ ὁποία....***

292. Θεώρημα. ***Κάθε γωνία, ἡ ὁποία ἔχει τὴν κορυφήν της ἐκτὸς κύκλου, αἱ δὲ πλευραί της τέμνουν τὴν περιφέρειάν του, ἔχει μέτρον ἴσον μὲ τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν μέτρων τῶν δύο τόξων τῆς περιφερείας, τὰ ὁποῖα περιέχονται μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω ἡ γωνία ΑΒΓ *(Σχ. 222)*, ἡ ὁποία ἔχει τὴν κορυφήν της ἐκτὸς τοῦ κύκλου Ο καὶ τῆς ὁποίας αἱ πλευραί ΒΑ καὶ ΒΓ τέμνουν τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Α ἡ μία καὶ Ε καὶ Γ ἡ ἄλλη.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι:

$$μέτρ.\widehat{ΑΒΓ}=\frac{μετρ.\widehat{ΑΓ}-μετρ.\widehat{ΔΕ}}{2}.$$



Σχ. 222.

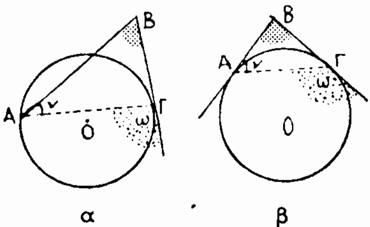
Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὴν χορδὴν ΑΕ. Ἡ γωνία $Ε_1$ εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΑΕΒ καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι:

$$\widehat{Ε}_1=\widehat{Α}+\widehat{Β} \quad ἢ \quad \widehat{Β}=\widehat{Ε}_1-\widehat{Α} \quad ἢ \quad μετρ.\widehat{ΑΒΓ}=μετρ.\widehat{Ε}_1-μετρ.\widehat{Α} \quad (1)$$

Ἀλλὰ ἡ γωνία $Ε_1$ εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸν κύκλον Ο καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι $μετρ.\widehat{Ε}_1=\frac{μέτρ.\widehat{ΑΓ}}{2}$.

Ὁμοίως, ἐπειδὴ ἡ γωνία Α εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸν κύκλον Ο, θὰ εἶναι $μετρ.\widehat{Α}=\frac{μετρ.\widehat{ΔΕ}}{2}$. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1)

τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν $Ε_1$ καὶ Α μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν



Σχ. 223.

$$\text{μέτρ.}\widehat{ΑΒΓ}=\frac{\text{μέτρ.}\overset{\frown}{ΑΓ}}{2}-\frac{\text{μέτρ.}\overset{\frown}{ΔΕ}}{2}$$

$$\text{ἢ μέτρ.}\widehat{ΑΒΓ}=\frac{\text{μέτρ.}\overset{\frown}{ΑΓ}-\text{μέτρ.}\overset{\frown}{ΔΕ}}{2}.$$

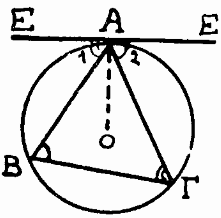
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Κάθε γωνία ἡ ὁποία....***

Παρατήρησις. Τὸ προηγούμενον θεώρημα εἶναι ἀληθὲς καὶ ὅταν ἀκόμη ἡ μία ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας εἶναι ἐφαπτομένη *(Σχ. 223α)*, ἢ καὶ ὅταν καὶ αἱ δύο πλευραί της εἶναι ἐφαπτόμεναι περιφερείας *(Σχ. 223β)*.

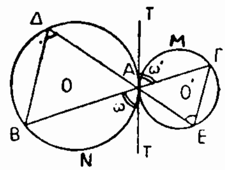
Ἀσκήσεις

429. (458). Ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον Ο. Φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΕΑΕ′ τοῦ κύκλου εἰς τὴν κορυφὴν Α. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\widehat{ΕΑΒ}=\widehat{Γ}$ καὶ $\widehat{Ε'ΑΓ}=\widehat{Β}$.

430. (459). Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται καὶ διὰ τοῦ σημείου τῆς ἁφῆς των ἀχθοῦν δύο εὐθεῖαι περατούμενοι εἰς τὰς περιφερείας των, αἱ χορδαί, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ ἄκρα τῶν εὐθειῶν αὐτῶν, εἶναι παράλληλοι.



Σχ. ἀσκ. 429.



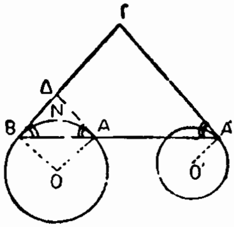
Σχ. ἀσκ. 430.

431. (460). Δίδονται δύο κύκλοι Ο καὶ Ο′ καὶ δύο ἀκτῖνες ΟΑ, Ο′Α′ παράλληλοι. Ἡ εὐθεῖα ΑΑ′ τέμνει τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου Ο εἰς τὸ σημεῖον Β. Φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας τῶν περιφερειῶν εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Α′, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Γ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΓΒ=ΓΑ′.

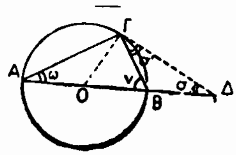
432. (461). Δίδεται κύκλος Ο καὶ μία χορδὴ ΑΒ, τῆς ὁποίας τὸ ἀντίστοιχον τόξον εἶναι 120^0. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ τόξου αὐτοῦ φέρομεν τὰς ΜΑ καὶ ΜΒ, αἱ ὁποῖαι προεκτεινόμεναι τέμνουν τὰς ἐφαπτομένας ΑΓ καὶ ΒΓ τοῦ κύκλου εἰς τὰ σημεῖα Α′ καὶ Β′. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΑΑ′=ΒΒ′.

433. (462). Εἰς ἕνα κύκλον Ο φέρομεν τὴν διάμετρον ΑΒ καὶ μία χορδὴν ΑΓ, ἡ ὁποία νὰ σχηματίζῃ μὲ τὴν ΑΒ γωνίαν 30^0. Εἰς τὸ Γ φέρομεν ἐφαπτο-

μένην τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΓΔ εἶναι ἰσοσκελές.



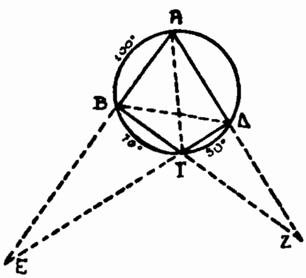
Σχ. ἀσκ. 431.



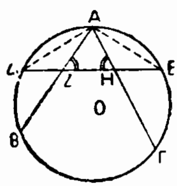
Σχ. ἀσκ. 433.

434. (463). Δύο εὐθεῖαι ΒΑΒ′ καὶ ΓΑΓ′ τέμνουν μίαν περιφέρειαν Ο εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία ΒΑΓ′ ἔχει μέτρον ἴσον μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν μέτρων τῶν τόξων ΑΒ καὶ ΑΓ, τά ὁποῖα περιέχονται μεταξὺ τῶν πλευρῶν της καὶ τῶν πλευρῶν τῆς κατὰ κορυφήν της γωνίας.

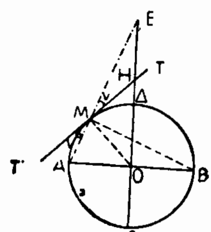
435. (464). Ἐπὶ τῆς περιφερείας ἑνὸς κύκλου λαμβάνομεν κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν τὰ τόξα: $\widehat{AB}=100^\circ$, $\widehat{B\Gamma}=70^\circ$, $\widehat{\Gamma\Delta}=50^\circ$. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, αἱ γωνίαι τῶν διαγωνίων του καὶ αἱ γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ ἀπέναντι πλευραί του.



Σχ. ἀσκ. 435.



Σχ. ἀσκ. 436.



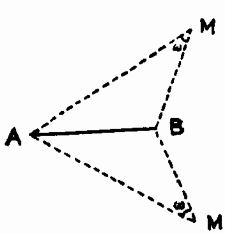
Σχ. ἀσκ. 437.

436. (465). Ἐπὶ μιᾶς περιφερείας Ο λαμβάνομεν δύο τόξα ΑΒ καὶ ΑΓ τῶν 120° ἕκαστον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ χορδὴ ΔΕ, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα Δ καὶ Ε τῶν τόξων ΑΒ καὶ ΑΓ διαιρεῖται εἰς τρία ἴσα μέρη ὑπὸ τῶν χορδῶν ΑΒ καὶ ΑΓ.

437. (466). Εἰς ἕνα κύκλον Ο φέρομεν δύο καθέτους διαμέτρους ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας του λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Μ. Φέρομεν τὰς χορδὰς ΜΑ καὶ ΜΒ καὶ τὴν ἐφαπτομένην ΜΤ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν ΓΔ ἢ τὴν προέκτασίν της εἰς τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΕΗ=ΗΖ.

2. Τόξα δεχόμενα δοθεῖσαν γωνίαν.

293. Ὁρισμός. Ἔστω ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ *(Σχ. 224)* καὶ ἕνα σημεῖον Μ ἐκτὸς αὐτοῦ. Ἐὰν ἡ γωνία ΑΜΒ εἶναι ἴση μὲ δοθεῖσαν γωνίαν ω, λέγομεν, ὅτι *τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ* ***φαίνεται ἀπὸ τὸ Μ ὑπὸ γωνίαν ω*** ἢ ὅτι *ἀπὸ τὸ σημεῖον Μ βλέπομεν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ὑπὸ γωνίαν ω.*



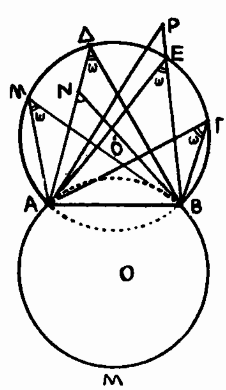
Σχ. ἀσκ. 224.

Ἐπίσης ἀπὸ τὸ σημεῖον Μ′, συμμετρικὸν τοῦ Μ πρὸς τὴν ΑΒ, τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ φαίνεται ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν ω.

294. Θεώρημα. ***Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων ἑνὸς ἐπιπέδου, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἕνα δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ φαίνεται ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν ω, εἶναι δύο τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὴν χορδὴν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ καὶ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὸ ΑΒ.***

Ἔστω Μ *(Σχ. 225)* ἕνα σημεῖον, ἀπὸ τὸ ὁποῖον τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ φαίνεται ὑπὸ γωνίαν ΑΜΒ ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω. Τὸ σημεῖον Μ εἶναι προφανῶς σημεῖον τοῦ τόπου.

Γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α, Μ, Β. Εἶναι φανερόν, ὅτι ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ τόξου ΑΜΒ εἶναι σημεῖα τοῦ τόπου, διότι ὅλαι αἱ γωνίαι, αἱ ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΑΜΒΑ, ὅπως ἡ γωνία ΑΓΒ, εἶναι ἴσαι μὲ τὴν γωνίαν ω, διότι βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΑΒ.



Σχ. 225.

Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι κάθε σημεῖον, τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΜΒ, δὲν ἔχει τὴν ἰδιότητα αὐτήν, δηλ. νὰ φαίνεται τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ, ἀπὸ τὸ σημεῖον αὐτό, ὑπὸ γωνίαν ω·

Πράγματι· ἔστω Ν ἕνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΑΜΒ.

Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΝ καὶ ΝΒ. Ἡ ΑΝ προεκτεινομένη τέμνει τὸ τόξον εἰς ἕνα σημεῖον Δ· φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΔΒ. Ἡ γωνία ΑΝΒ, ὡς ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΝΔΒ, εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας Δ καὶ ἐπομένως καὶ τῆς ἴσης της ω. Ὥστε τὸ σημεῖον Ν δὲν εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.

Ἔστω τώρα ἕνα ἄλλο σημεῖον Ρ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τοῦ κυκλικοῦ τμήματος· φέρομεν τὰς εὐθείας ΡΑ καὶ ΡΒ. Ἡ ΡΒ τέμνει τὸ τόξον εἰς τὸ σημεῖον Ε.

Φέρομεν καὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΕ. Ἡ γωνία ΑΡΒ εἶναι μικροτέρα τῆς γωνίας ΑΕΒ. δηλ. τῆς ω, καὶ ἑπομένως καὶ τὸ σημεῖον Ρ δὲν εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.

Ὁ ζητούμενος λοιπὸν τόπος εἶναι τὸ τόξον ΑΜΒ τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΑΜΒΑ.

Ἐργαζόμενοι ὁμοίως καὶ ἐπὶ τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ, εὑρίσκομεν, ὅτι ὑπάρχει καὶ ἕνα ἄλλο τόξον ΑΜ'Β, συμμετρικὸν τοῦ ΑΜΒ πρὸς τὸ ΑΒ καὶ τοῦ ὁποίου τὰ σημεῖα ἔχουν τὴν δοθεῖσαν ἰδιότητα.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ὁ γεωμετρικὸς τόπος. . . .***

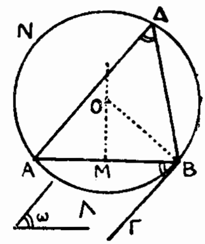
295. Πόρισμα. Ἐὰν ἡ δοθεῖσα γωνία ω ἦτο ὀρθή, τὰ δύο τόξα ΑΜΒ καὶ ΑΜ'Β θὰ ἦσαν ἡμιπεριφέρειαι μὲ διάμετρον τὴν ΑΒ· ἑπομένως:

Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, ἀπὸ τὰ ὁποῖα δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα φαίνεται ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν, εἶναι περιφέρεια κύκλου, ἡ ὁποία γράφεται μὲ διάμετρον τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα.

296. Ὁρισμός. *Λέγομεν, ὅτι* ***ἕνα κυκλικὸν τμῆμα δέχεται μίαν δοθεῖσαν γωνίαν ω,*** *ὅταν ὅλαι αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι εἰς τὸ κυκλικὸν τμῆμα εἶναι ἴσαι μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω.*

297. Κατασκευὴ τοῦ τόπου. Πρόβλημα. ***Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα κυκλικὸν τμῆμα, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν χορδὴν ΑΒ καὶ νὰ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ δοθεῖσαν γωνίαν ω.***

Μὲ πλευρὰν τὴν δοθεῖσαν χορδὴν ΑΒ *(Σχ. 226)* καὶ μὲ κορυφὴν τὸ Β κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν ΑΒΓ ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω. Φέρομεν τὴν μεσοκάθετον ΜΟ τῆς χορδῆς ΑΒ καὶ τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Β. Αἱ κάθετοι αὐταὶ τέμνονται (§ 167) εἰς ἕνα σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ κέντρον τοῦ ζητουμένου κυκλικοῦ τμήματος.



Σχ. 226.

Πράγματι· ἐπειδὴ τὸ Ο κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τῆς ΑΒ, θὰ εἶναι ΟΑ=ΟΒ. Ἐπο-

μένως ἡ περιφέρεια, ἡ ὁποία γράφεται μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα τὴν ΟΒ, διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ ἐφάπτεται τῆς ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Β, ἐπειδὴ ἡ ΒΓ εἶναι κάθετος, ἐκ κατασκευῆς, εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος ΟΒ.

Τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΑΝΒ εἶναι τὸ ζητούμενον κυκλικὸν τμῆμα.

Πράγματι· ἐὰν ἐγγράψωμεν, εἰς αὐτὸ μίαν τυχοῦσαν γωνίαν ΑΔΒ, ἡ γωνία αὐτὴ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν ΑΒΓ=ω, διότι καὶ αἱ δύο ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον, τὸ ἥμισυ τοῦ μέτρου τοῦ τόξου ΑΛΒ (§ 290).

298. Παρατήρησις. Ἔχοντες ὑπ' ὄψει τὴν § 295 καὶ τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα, δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν, ὅτι :

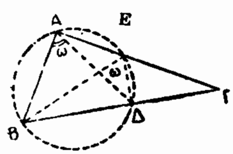
Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων ἀπὸ τὰ ὁποία δοθὲν εὐθύγρ. τμῆμα φαίνεται ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν, εἶναι τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ χορδὴν τὸ δοθὲν εὐθύγρ. τμῆμα καὶ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν.

Ἀσκήσεις

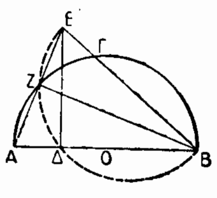
438. (467). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α. Φέρομεν τὴν διχοτόμον ΑΔ τῆς γωνίας Α, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ εἰς τὸ Δ. Ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ σημεῖον Ε. Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. Ὅτι τὰ σημεῖα Α, Β, Δ, Ε κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

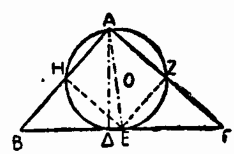
2ον. Ὅτι ΒΔ=ΔΕ.



Σχ. ἀσκ. 438.



Σχ. ἀσκ. 439.



Σχ. ἀσκ. 440.

439. (468). Δίδεται ἕνα ἡμικύκλιον διαμέτρου ΑΒ. Φέρομεν χορδὴν ΒΓ καὶ ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Δ τῆς ΑΒ φέρομεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν χορδὴν ΒΓ ἢ τὴν προέκτασίν της εἰς ἕνα σημεῖον Ε. Μὲ διάμετρον τὴν ΒΕ γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν πρώτην ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΑΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΖ.

440. (469). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἡ κορυφὴ Α τῆς ὀρθῆς γωνίας, ὁ πούς Δ τοῦ ὕψους ΑΔ καὶ τὰ μέσα τῶν τριῶν πλευρῶν του κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

3. Ἐγγεγραμμένα τετράπλευρα

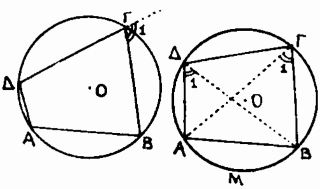
299. Θεώρημα. ***Ἐὰν ἕνα τετράπλευρον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον:***

1ον. ***Αἱ ἀπέναντι γωνίαι του εἶναι παραπληρωματικαί.***

2ον. ***Κάθε γωνία τοῦ τετραπλεύρου εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν τοῦ τετραπλεύρου, ἡ ὁποία σχηματίζεται εἰς τὴν ἀπέναντι κορυφήν.***

3ον. ***Κάθε πλευρὰ τοῦ τετραπλεύρου φαίνεται ἀπὸ τὰς δύο ἀπέναντι αὐτῆς κορυφάς, ὑπὸ γωνίας ἴσας.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ *(Σχ. 227)*, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Ο.



Σχ. 227. *Σχ. 228.*

Συμπέρασμα 1ον: Θὰ δείξωμεν, ὅτι:

$\widehat{A}+\widehat{\Gamma}=2$ ὀρθ. καὶ $\widehat{B}+\widehat{\Delta}=2$ ὀρθ.

Ἀπόδειξις: Αἱ γωνίαι Α καὶ Γ εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸν κύκλον Ο καὶ ἑπομένως τὰ μέτρα των εἶναι ἴσα μὲ τὰ ἡμίση τῶν μέτρων τῶν τόξων ΔΓΒ καὶ ΔΑΒ, ἐπὶ τῶν ὁποίων βαίνουν· δηλ. εἶναι

$$\text{μέτρ.}\widehat{A}=\frac{\text{μέτρ.}\widehat{\Delta\Gamma B}}{2},\qquad \text{μέτρ.}\widehat{\Gamma}=\frac{\text{μέτρ.}\widehat{\Delta A B}}{2}.$$

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\text{μέτρ.}\widehat{A}+\text{μέτρ.}\widehat{\Gamma}=\frac{\text{μέτρ.}\widehat{\Delta\Gamma B}}{2}+\frac{\text{μέτρ.}\widehat{\Delta A B}}{2}$$

ἢ $$\text{μέτρ.}\widehat{A}+\text{μέτρ.}\widehat{\Gamma}=\frac{\text{μέτρ.}\widehat{\Delta\Gamma B}+\text{μέτρ.}\widehat{\Delta A B}}{2} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ $\text{μέτρ.}\widehat{\Delta\Gamma B}+\text{μέτρ.}\widehat{\Delta A B}=360^\circ=4$ ὀρθ., ἡ ἰσότης (1) γίνεται

$$\text{μέτρ.}\widehat{A}+\text{μέτρ.}\widehat{\Gamma}=\frac{4\ \text{ὀρθ.}}{2}=2\ \text{ὀρθ.}\ \ \text{ἢ}\ \ \widehat{A}+\widehat{\Gamma}=2\ \text{ὀρθαί}.$$

Αἱ γωνίαι λοιπὸν Α καὶ Γ εἶναι παραπληρωματικαί.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι $\widehat{B}+\widehat{\Delta}=2$ ὀρθαί.

Συμπέρασμα 2ον: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\widehat{A}=\widehat{\Gamma}_1$ *(Σχ. 227)*.

Ἀπόδειξις: Αἱ γωνίαι Α καὶ Γ εἶναι παραπληρωματικαί, ὅπως ἐδείχθη ἀνωτέρω. Ὁμοίως αἱ γωνίαι Γ καὶ Γ_1 εἶναι παραπληρωματι-

καί, ὡς ἐφεξῆς τῶν ὁποίων αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ κεῖνται ἐπ' εὐθείας· ἑπομένως αἱ γωνίαι Α καὶ $Γ_1$ εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν παραπληρωματικὴν γωνίαν Γ.

Συμπέρασμα 3ον: Θὰ δείξωμεν, ὅτι μία πλευρὰ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, ἔστω ἡ ΑΒ *(Σχ. 228)*, φαίνεται ἀπὸ τὰς κορυφὰς Γ καὶ Δ, ὑπὸ ἴσας γωνίας· δηλ. θὰ δείξωμεν, ὅτι $\widehat{Δ}_1=\widehat{Γ}_1$.

Ἀπόδειξις: Αἱ γωνίαι $Δ_1$ καὶ $Γ_1$ εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΑΜΒ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν ἕνα τετράπλευρον. . . .***

300. Ὁρισμός. *Ἕνα τετράπλευρον καὶ γενικῶς ἕνα πολύγωνον λέγεται* ***ἐγγράψιμον εἰς κύκλον****, ὅταν ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου δύναται νὰ διέλθῃ ἀπὸ ὅλας τὰς κορυφάς του.*

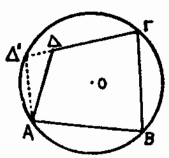
301. Θεώρημα. *(Ἀντίστροφον).* ***Ἕνα τετράπλευρον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον:***

1ον. ***Ὅταν δύο ἀπέναντι γωνίαι του εἶναι παραπληρωματικαί.***

2ον. ***Ὅταν μία ἐκ τῶν γωνιῶν του εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν, ἡ ὁποία σχηματίζεται εἰς τὴν ἀπέναντι κορυφήν του.***

3ον. ***Ὅταν μία πλευρά του φαίνεται ὑπὸ ἴσας γωνίας ἀπὸ δύο ἀπέναντι αὐτῆς κορυφάς.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ *(Σχ. 229)* εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι $\widehat{Α}+\widehat{Γ}=2$ ὀρθ. καὶ $\widehat{Β}+\widehat{Δ}=2$ ὀρθ.



Σχ. 229.

Συμπέρασμα 1ον: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον· δηλ. ὅτι ὑπάρχει μία περιφέρεια, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰς τέσσαρας κορυφάς του.

Ἀπόδειξις: Γνωρίζομεν, ὅτι διὰ τριῶν σημείων, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, διέρχεται μία καὶ μόνη περιφέρεια. Γράφομεν λοιπὸν τὴν περιφέρειαν Ο, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ· λέγομεν, ὅτι ἡ περιφέρεια αὐτὴ θὰ διέλθῃ καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον Δ.

Πράγματι· ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ περιφέρεια αὐτὴ δὲν διέρχεται ἀπὸ τὸ Δ, τότε ἡ ΓΔ ἢ ἡ προέκτασις αὐτῆς θὰ ἔτεμνε τὴν περιφέρειαν εἰς ἕνα σημεῖον Δ'. Φέρομεν τὴν ΑΔ'. Τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ' εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Ο καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι

$$\widehat{Β}+\widehat{Δ'}=2 \text{ ὀρθ.} \qquad (1)$$

Ἀλλά, ἐξ ὑποθέσεως εἶναι καὶ $\widehat{Β}+\widehat{Δ}=2$ ὀρθ. (2)

Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ γωνίαι Δ′ καὶ Δ ἔχουν τὴν αὐτὴν παραπληρωματικὴν γωνίαν Β· ἄρα θὰ εἶναι ἴσαι· δηλ. θὰ εἶναι $\widehat{\Delta}=\widehat{\Delta'}$· τοῦτο ὅμως εἶναι ἄτοπον, διότι ἡ ἐξωτερικὴ γωνία Δ τοῦ τριγώνου ΑΔΔ′ δὲν δύναται νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐσωτερικὴν γωνίαν Δ′. Εἰς τὸ ἄτοπον αὐτὸ ἐπέσαμεν, διότι ὑπεθέσαμεν, ὅτι ἡ περιφέρεια Ο δὲν θὰ διέλθῃ ἀπὸ τὴν τετάρτην κορυφὴν Δ· ἄρα ἡ περιφέρεια Ο θὰ διέλθῃ καὶ ἀπὸ τὴν τετάρτην κορυφὴν Δ.

2ον. *Ὑπόθεσις*: Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ *(Σχ. 227)*, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι $\widehat{A}=\widehat{\Gamma}_1$.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν εἰς τὴν ἰσότητα $\widehat{\Gamma}+\widehat{\Gamma}_1=2$ ὀρθ. ἀντικαταστήσωμεν τὴν γωνίαν Γ_1 μὲ τὴν ἴσην της, ἐξ ὑποθέσεως, γωνίαν Α, λαμβάνομεν

$$\widehat{\Gamma}+\widehat{A}=2 \text{ ὀρθαί· ἄρα θὰ εἶναι καὶ } \widehat{B}+\widehat{\Delta}=2 \text{ ὀρθ.}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἔχει τὰς ἀπέναντι γωνίας του παραπληρωματικάς· ἄρα θὰ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, ὅπως ἐδείχθη εἰς τὴν 1ην περίπτωσιν.

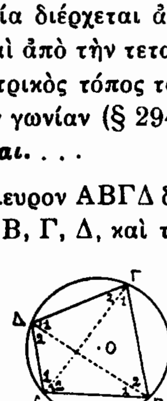
3ον. *Ὑπόθεσις*: Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ *(Σχ. 230)* εἰς τὸ ὁποῖον ἡ πλευρὰ ΑΒ φαίνεται ἀπὸ τὰς κορυφὰς Γ καὶ Δ ὑπὸ ἴσας γωνίας· δηλ. ἔστω ὅτι $\widehat{\Gamma}_1=\widehat{\Delta}_2$.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τετράπλευρον αὐτὸ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

Ἀπόδειξις: Γράφομεν τὴν περιφέρειαν, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ. Ἡ περιφέρεια αὐτὴ θὰ περάσῃ καὶ ἀπὸ τὴν τετάρτην κορυφὴν Δ, διότι τὸ τόξον ΑΔΓΒ εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἡ ΑΒ φαίνεται ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν (§ 294).

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἕνα τετράπλευρον εἶναι*** . . .

302. Σπουδαία παρατήρησις. Εἰς κάθε τετράπλευρον ΑΒΓΔ δυνάμεθα νὰ ἐξετάσωμεν τὰς τέσσαρας γωνίας του Α, Β, Γ, Δ, καὶ τὰς ὀκτὼ γωνίας $A_1, A_2, B_1, B_2, \Gamma_1, \Gamma_2, \Delta_1, \Delta_2$ *(Σχ. 230)*, τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ πλευραί του μὲ τὰς διαγωνίους του.



Σχ. 230.

Ἐὰν τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον:

1ον. *Αἱ γωνίαι Α καὶ Γ εἶναι παραπληρωματικαί.*

2ον. *Αἱ γωνίαι Β καὶ Δ* » »

3ον. Αἱ γωνίαι A_1 καὶ B_2 εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΔΓ.

4ον. Αἱ γωνίαι A_2 καὶ Δ_1 εἶναι ἴσαι, δι' ὅμοιον λόγον.

5ον. Αἱ γωνίαι B_1 καὶ Γ_2 εἶναι ἴσαι » » »

6ον, Αἱ γωνίαι Γ_1 καὶ Δ_2 εἶναι ἴσαι » » »

Ἀντιστρόφως. Ἐὰν ἡ μία ἀπὸ τὰς ἓξ αὐτὰς περιπτώσεις ἀληθεύῃ, τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

Ἀσκήσεις

441. (470). Κάθε ἰσοσκελὲς τραπέζιον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

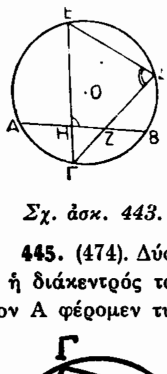
442. (471). Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τετραπλεύρου σχηματίζουν τετράπλευρον ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

443. (472). Ἀπὸ τὸ μέσον Γ ἑνὸς τόξου ΑΒ ἑνὸς κύκλου Ο, φέρομεν δύο χορδὰς ΓΔ καὶ ΓΕ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν χορδὴν ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Ζ καὶ Η. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΗΖΔ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

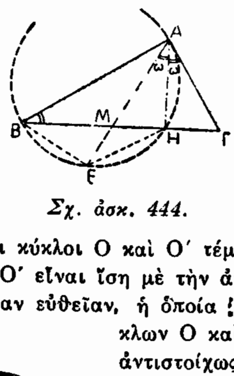
444. (473). Δίδεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία Β εἶναι 30°. Φέρομεν τὸ ὕψος του ΑΗ, τὴν διάμεσον ΑΜ καὶ ἀπὸ τὸ Β τὴν κάθετον ΒΕ ἐπὶ τὴν προέκτασιν τῆς ΑΜ. Ἐπίσης φέρομεν τὴν ΕΗ. Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. Ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΒΕΗ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

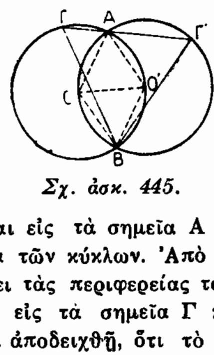
2ον. Ὅτι ΒΕ=ΕΗ=ΑΗ.



Σχ. ἀσκ. 443.

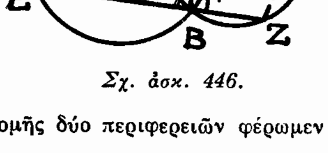


Σχ. ἀσκ. 444.



Σχ. ἀσκ. 445.

445. (474). Δύο ἴσοι κύκλοι Ο καὶ Ο' τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ ἡ διάκεντρός των ΟΟ' εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα τῶν κύκλων. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Α φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία τέμνει τὰς περιφερείας τῶν κύκλων Ο καὶ Ο' εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Γ' ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΒΓΓ' εἶναι ἰσόπλευρον.



Σχ. ἀσκ. 446.

446. (475). Ἐὰν δύο περιφέρειαι τέμνωνται καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς τομῆς των ἀχθοῦν δύο τυχοῦσαι εὐθεῖαι περατούμεναι εἰς τὰς περιφερείας των, αἱ χορδαὶ αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ ἄκρα τῶν εὐθειῶν εἶναι παράλληλοι.

447 (476). Ἐὰν διὰ τῶν σημείων τῆς τομῆς δύο περιφερειῶν φέρωμεν παραλλήλους, τὰ τμήματα τῶν παραλλήλων

.ὑτῶν, τὰ ὁποῖα ὁρίζουν αἱ περιφέρειαι αὐταί, εἶναι ἴσα.

448. (477). Κάθε τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων ἀπέναντι πλευρῶν του εἶναι περιγράψιμον περὶ κύκλον.

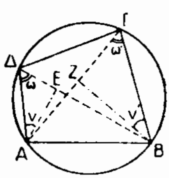
449. (478). Μία γωνία ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς ἕνα κύκλον Ο· ἡ διχοτόμος ΒΔ τῆς γωνίας αὐτῆς τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὸ σημεῖον Δ. Ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν τὴν χορδὴν ΔΕ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΔΕ=ΒΓ.

450. (479). Εἰς ἕνα κύκλον Ο δύο χορδαὶ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι κάθετοι μεταξύ των. Φέρομεν τὴν διάμετρον ΓΟΕ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΒΔ=ΑΕ.

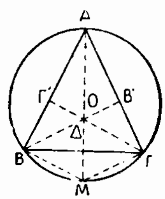
451. (480). Ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον Ο. Συνδέομεν μὲ εὐθεῖαν τὴν κορυφήν του Α μὲ τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ τόξου ΒΓ. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Β φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΜ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν χορδὴν ΜΓ, εἰς τὸ σημεῖον Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΜΒ=ΜΔ.

452. (481). Ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Ο. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α φέρομεν τὴν κάθετον ΑΕ ἐπὶ τὴν διαγώνιον ΒΔ καὶ ἀπὸ τὴν Β τὴν κάθετον ΒΖ ἐπὶ τὴν διαγώνιον ΑΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι γων.ΔΑΕ=γων.ΓΒΖ.

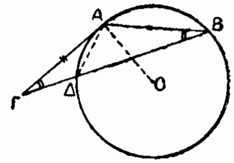
453. (482). Ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον Ο· φέρομεν τὰ ὕψη ΒΒ′ καὶ ΓΓ′ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τὰ ὁποῖα τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Δ. Ἐπίσης φέρομεν καὶ τὴν διάμετρον ΑΟΜ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ γωνίαι Β′ΔΓ′ καὶ ΒΜΓ εἶναι ἴσαι.



Σχ. ἀσκ. 452.



Σχ. ἀσκ. 453.



Σχ. ἀσκ. 454.

454. (483). Δίδεται μία περιφέρεια Ο, μία χορδὴ ΑΒ καὶ ἡ ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας εἰς τὸ σημεῖον Α. Ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης λαμβάνομεν τμῆμα ΑΓ=ΑΒ καὶ φέρομεν τὴν ΓΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς ἕνα δεύτερον σημεῖον Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΔΓ=ΔΑ.

455. (484). Ἀπὸ τὸ ἄκρον Α μιᾶς διαμέτρου ΑΒ ἑνὸς κύκλου Ο φέρομεν μίαν χορδὴν ΑΓ, καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο ἄκρον Β, τὴν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου. Φέρομεν τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας ΓΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν χορδὴν ΓΒ εἰς τὸ Ζ, τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Η καὶ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΒΔ=ΒΖ καὶ ὅτι ΖΗ=ΗΔ.

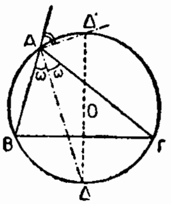
456. (485). Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου Ο, φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ΑΒ καὶ ΑΓ· φέρομεν τὴν διάμετρον ΓΟΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΟ καὶ ΒΔ εἶναι παράλληλοι.

457. (486). Δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο′ ἐφάπτονται εἰς τὸ σημεῖον Α. Ἀπὸ τὸ Α φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν ΒΑΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο

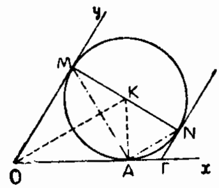
εἰς τὸ σημεῖον Β καὶ τὴν Ο′ εἰς τὸ Γ. Ἀπὸ τὸ Β φέρομεν τὴν χορδὴν ΒΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ἀπὸ τὸ Γ τὴν χορδὴν ΓΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΔΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν κοινὴν ἐφαπτομένην ΑΤ τῶν περιφερειῶν Ο καὶ Ο′ εἰς τὸ σημεῖον Α.

458. (487). Ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον Ο· φέρομεν τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Α, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Δ· ἐπίσης φέρομεν καὶ τὴν διχοτόμον τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Δ′. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΔΔ′ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ.

459. (488). Προεκτείνομεν τὴν διάμετρον ΑΒ ἑνὸς κύκλου Ο κατὰ ἕνα μῆκος ΒΓ ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΓΔ καὶ τὴν χορδὴν ΔΑ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ΑΔ=ΔΓ.



Σχ. ἀσκ. 458.



Σχ. ἀσκ. 460.

460. (491). Δίδεται μία γωνία xOy καὶ ἕνα σημεῖον Α ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Οx. Γράφομεν περιφέρειαν κύκλου Κ ἐφαπτομένην τῆς Οx εἰς τὸ Α καὶ φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας Κ, τὰς παραλλήλους πρὸς τὴν Οy. Ἐὰν Μ καὶ Ν εἶναι τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν ἐφαπτομένων τούτων, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ ΑΜ καὶ ΑΝ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς διχοτόμους τῆς γωνίας xOy.

461. (492). Αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς δύο σημεῖα Α καὶ Β μιᾶς περιφερείας κέντρου Ο τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Γ. Ἡ κάθετος, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ Α ἐπὶ τὴν ΓΒ τέμνει τὴν ΟΓ εἰς τὸ σημεῖον Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου Ο.

462. (493). Δύο χορδαὶ κύκλου, κάθετοι εἰς τὰ ἄκρα τρίτης χορδῆς, εἶναι αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ὀρθογωνίου ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον.

463. (494). Αἱ ἐφαπτόμεναι ΑΓ καὶ ΒΓ μιᾶς περιφερείας κέντρου Ο εἰς δύο σημεῖα Α καὶ Β αὐτῆς, τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Γ. Φέρομεν τὴν διάμετρον ΑΟΔ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΓ λαμβάνομεν ἕνα τμῆμα ΓΕ=ΑΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Δ, Β, Ε κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

464. (495). Ἐπὶ μιᾶς περιφερείας Ο λαμβάνομεν τρία τυχόντα σημεῖα Α, Β, Γ, τὸ μέσον Α′ τοῦ τόξου ΒΓ καὶ τὸ σημεῖον Β′, ἄκρον τῆς διαμέτρου ΒΟΒ′. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ Α′Β′, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Δ καὶ τὰς εὐθείας ΑΑ′ καὶ Β′Γ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ε. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΔΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν χορδὴν ΒΓ.

465. (496). Δίδεται περιφέρεια διαμέτρου ΑΟΒ καὶ Γ τυχὸν σημεῖον τῆς διαμέτρου ΑΒ. Ἀπὸ τὸ ἄκρον Δ τῆς ἀκτῖνος ΟΔ, καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΒ, φέρομεν τὴν ΔΓ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὸ σημεῖον Ε. Φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας εἰς τὸ σημεῖον Ε, ἡ ὁποία τέμνει τὴν

προέκτασιν τῆς διαμέτρου ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΖΓ=ΖΕ.

466. (498). Εἰς ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐγγράφομεν ἕνα τετράγωνον, τοῦ ὁποίου μία πλευρὰ νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας μὲ τὸ κέντρον τοῦ τετραγώνου, εἶναι διχοτόμος τῆς ὀρθῆς γωνίας.

467. (499). Ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον Ο. Τὰ ὕψη του τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Η.

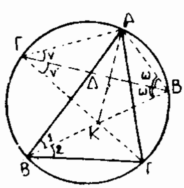
1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΜΝ, ἡ ὁποία συνδέει τὸ μέσον Μ τῆς ΑΗ μὲ τὸ μέσον Ν τῆς ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΟΔ, ἡ ὁποία συνδέει τὸ κέντρον Ο μὲ τὸ μέσον τῆς ΑΓ.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΟΔΜΝ εἶναι παραλληλόγραμμον.

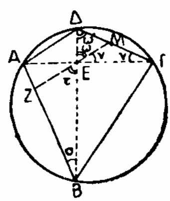
468. (500). Δίδεται ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ. Μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν Α καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΑΒ γράφομεν τόξον ΒΔΓ μικρότερον ἡμιπεριφερείας. Ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΔΓ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Δ καὶ φέρομεν τὰς χορδὰς ΒΔ καὶ ΔΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὸ μέσον Ε τῆς πλευρᾶς ΑΒ μὲ τὸ μέσον Ζ τῆς ΔΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν. ἡ ὁποία συνδέει τὸ μέσον Η τῆς πλευρᾶς ΑΓ. μὲ τὸ μέσον Θ τῆς ΒΔ.

469. (501). Εἰς ἕνα κύκλον Ο φέρομεν τυχοῦσαν χορδὴν ΑΒ· ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς περιφερείας Ο φέρομεν τὰς χορδὰς ΜΑ καὶ ΜΒ· προεκτείνομεν τὴν ΑΜ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμῆμα ΜΔ=ΜΒ. Ἐὰν Γ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τόξου ΑΜΒ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ΜΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΔ.

470. (502). Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ τέμνουν τὴν περιφέρειαν, τὴν περιγγεγραμμένην περὶ τὸ τρίγωνον, εἰς τὰ σημεῖα Β′ καὶ Γ′. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα Β′Γ′ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΑΚ· ὅπου Κ εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.



Σχ. ἀσκ. 470.



Σχ. ἀσκ. 471.

471. (503). Ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι κάθετοι μεταξύ των καὶ τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Ε, εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον Ο. Ἀπὸ τὸ μέσον Μ τῆς ΓΔ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΜΕ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΜΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ.

472· (504). Ἐπὶ περιφερείας Ο λαμβάνομεν τόξον ΑΒ. Ἀπὸ τὸ μέσον Γ τοῦ τόξου ΑΒ φέρομεν κάθετον ΓΕ ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΟΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν χορδὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Φέρομεν τὴν χορδὴν ΓΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Η. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΑΖ=ΖΗ=ΓΖ.

473. (505). Ἐπὶ μιᾶς περιφερείας λαμβάνομεν κατὰ σειρὰν τὰ τέσσαρα

σημεῖα Α, Β, Γ, Δ. Ἐὰν α, β, γ, δ εἶναι τὰ μέσα τῶν τόξων ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ. νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι αγ καὶ βδ εἶναι κάθετοι μεταξύ των.

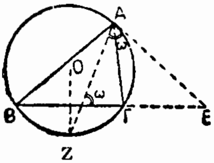
474. (506). Ἐπὶ μιᾶς περιφερείας λαμβάνομεν κατὰ σειρὰν τὰ σημεῖα Β, Α, Γ οὕτως, ὥστε τὰ τόξα ΒΑ καὶ ΑΓ νὰ εἶναι μικρότερα τῆς ἡμιπεριφερείας. Φέρομεν τὴν χορδὴν ΔΕ, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα Δ καὶ Ε τῶν τόξων ΒΑ καὶ ΑΓ καὶ ἡ ὁποία τέμνει τὰς χορδὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Ζ καὶ Η ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΑΖ=ΑΗ.

475. (507). Ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον Ο· φέρομεν τὴν διχοτόμον ΑΔ τῆς γωνίας Α, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΒΓ, εἰς τὸ Δ. Ἐπίσης φέρομεν καὶ τὴν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου εἰς τὸ σημεῖον Α, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Ε, Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΕΑ=ΕΔ.

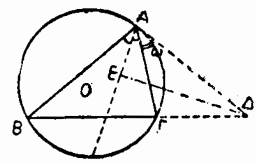
476. (508). Ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον Ο. Ἡ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου εἰς τὸ σημεῖον Α τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Δ.

1ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΓΔ, ἐὰν γνωρίζωμεν τὰς γωνίας Α, Β, Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

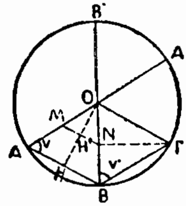
2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Δ τοῦ τριγώνου ΑΓΔ.



Σχ. ἀσκ. 475.



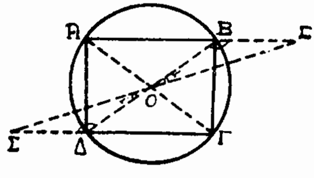
Σχ. ἀσκ. 476.



Σχ. ἀσκ. 477.

477. (509). Ἐπὶ τῆς περιφερείας ἑνὸς κύκλου Ο λαμβάνομεν τρία σημεῖα Α, Β, Γ, οὕτως ὥστε τοξ.ΑΒ=τοξ.ΒΓ· φέρομεν τὰς διαμέτρους ΑΟΑ′ καὶ ΒΟΒ′· ἐπίσης φέρομεν τὴν ΒΜ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΑ′ καὶ τὴν ΓΝ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΒ′. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΜΝ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διχοτόμον ΟΗ τῆς γωνίας ΑΟΒ.

478. (510). Ἐξ ἑνὸς σημείου Α, κειμένου ἐκτὸς κύκλου Ο, φέρομεν τὴν τέμνουσαν ΑΒΓ τοῦ κύκλου Ο. Εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ φέρομεν ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου, αἱ ὁποῖαι συναντοῦν εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν τὴν κάθετον, τὴν ἀγομένην ἐκ τοῦ Α ἐπὶ τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου, τὴν διερχομένην ἐκ τοῦ Α. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι: ΒΜ=ΓΝ καὶ ΑΜ=ΑΝ.



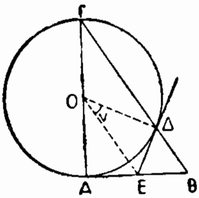
Σχ. ἀσκ. 479.

479. (511. Ἐξετάζομεν ὅλα τὰ ὀρθογώνια τὰ ἐγγεγραμμένα εἰς ἕνα κύκλον Ο καὶ τῶν ὁποίων μία πλευρά, ἢ ἡ προέκτασις αὐτῆς, διέρχεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Σ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ἀπέναντι πλευρὰ διέρχεται ἐπίσης ἀπὸ ἕνα ὡρισμένον σημεῖον.

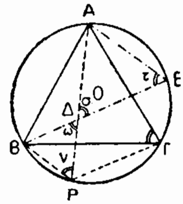
480. (512). Ἐὰν μία τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι

διάμετρος κύκλου, ἡ ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου αὐτοῦ εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῆς περιφερείας καὶ τῆς ὑποτεινούσης, διχοτομεῖ τὴν ἄλλην κάθετον πλευράν.

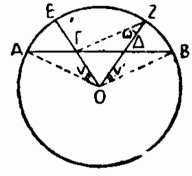
481. (513). Ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον Ο. Ἐὰν ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΓ λάβωμεν τυχὸν σημεῖον Ρ καὶ φέρωμεν τὰς χορδὰς ΡΑ, ΡΒ, ΡΓ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΡΑ=ΡΒ+ΡΓ.



Σχ. ἀσκ. 480.



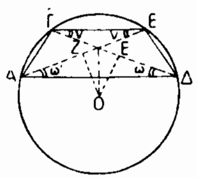
Σχ. ἀσκ. 481.



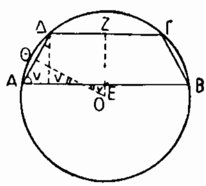
Σχ. ἀσκ. 482.

482. (514). Ἐὰν χορδὴ τόξου διαιρεθῇ εἰς τρία ἴσα μέρη καὶ ἀχθοῦν αἱ ἀκτῖνες, αἱ διερχόμεναι ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως, αὗται διαιροῦν τὸ ἀντίστοιχον τόξον τῆς χορδῆς εἰς τρία τόξα, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ μεσαῖον εἶναι μεγαλύτερον τῶν δύο ἄλλων, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα μεταξύ των.

482. (515). Ἴσαι χορδαὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου τεμνόμεναι (εἰς σημεῖον διάφορον τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου), εἶναι διαγώνιοι ἰσοσκελοῦς τραπεζίου.



Σχ. ἀσκ. 482.



Σχ. ἀσκ. 483.

483. (516). Ἕνα τραπέζιον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον Ο. Ἡ γωνία Α, ἡ προσκειμένη εἰς τὴν μεγάλην βάσιν ΑΒ, εἶναι 45°. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ μικρὰ βάσις ΓΔ εἶναι διπλασία τῆς ἀποστάσεως ΟΕ τοῦ κέντρου ἀπὸ τὴν μεγάλην βάσιν.

484. (517). 1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ περιφέρειαι Ο καὶ Ο', αἱ ὁποῖαι ἔχουν διαμέτρους ἀντιστοίχως τὰς δύο πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ ἔχουν τὸ δεύτερον κοινὸν σημεῖον Α' ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ.

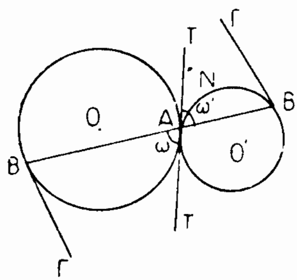
2ον. Ἀπὸ τὰ σημεῖα Β καὶ Γ φέρομεν δύο τυχούσας χορδὰς παραλλήλους μεταξύ των, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς περιφερείας Ο καὶ Ο' εἰς τὰ σημεῖα Β' καὶ Γ'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα Β'Γ' διέρχεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α.

485. (518). Δύο κύκλοι Ο καὶ Ο' ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον Α. Ἀπὸ τὸ ἄκρον Β τῆς διαμέτρου ΑΒ τῆς μεγαλυτέρας περιφερείας φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΒΓ τῆς μικροτέρας περιφερείας Ο', ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὸ σημεῖον Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΑΓ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΒΑΔ.

486. (519). Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἐξωτερικῶς ἢ ἐσωτερικῶς καὶ φέρωμεν ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς ἀφῆς των μίαν εὐθεῖαν περατουμένην εἰς τὰς περιφερείας τῶν κύκλων, νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. Ὅτι τὰ τόξα τῶν δύο περιφερειῶν, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας, ἔχουν τὰ αὐτὰ μέτρα.

2ον. Ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν περιφερειῶν εἰς τὰ ἄκρα τῆς εὐθείας εἶναι παράλληλοι.



Σχ. ἀσκ. 486.

487. (520). Εἰς ἕνα κύκλον Ο δίδεται μία διάμετρος αὐτοῦ ΑΒ· μὲ κέντρον τυχὸν σημεῖον Γ τῆς περιφερείας Ο γράφομεν περιφέρειαν ἐφαπτομένην τῆς διαμέτρου ΑΒ· ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β φέρομεν ἐφαπτομένας ΑΔ καὶ ΒΕ τοῦ κύκλου Γ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι ΑΔ καὶ ΒΕ εἶναι παράλληλοι, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ θέσις τοῦ σημείου Γ.

488. (521). Δίδεται μία περιφέρεια Ο, ἕνα σημεῖον Μ ἐπὶ τῆς περιφερείας Ο, μία εὐθεῖα xy ἐκτὸς τῆς περιφερείας Ο καὶ ἕνα σημεῖον Ν ἐπὶ τῆς xy. Γράφομεν μίαν περιφέρειαν μὲ μεταβλητὴν ἀκτῖνα, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν καὶ νὰ τέμνῃ τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ τὴν εὐθεῖαν xy εἰς τὸ σημεῖον Β. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΒΑ τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς ἕνα δεύτερον σημεῖον Σ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὡρισμένον.

489. (522). Δύο περιφέρειαι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ ἡ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη ἐφάπτεται αὐτῶν εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ ἀντιστοίχως. Ἐάν, διὰ τοῦ σημείου Α, ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα αὐτὰς εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε ἀντιστοίχως καὶ προεκταθοῦν αἱ ΔΒ καὶ ΕΓ, μέχρι τῆς συναντήσεώς των εἰς ἕνα σημεῖον Ζ, νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία ΔΖΕ εἶναι ὀρθή.

490. (523). Δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο′ διέρχονται διὰ τῶν κορυφῶν Β καὶ Γ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ καὶ τέμνουν τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ, ἡ μὲν Ο εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε ἀντιστοίχως, ἡ δὲ Ο′ εἰς τὰ σημεῖα Ζ καὶ Η. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΔΕ καὶ ΖΗ εἶναι παράλληλοι.

491. (534). Εἰς ἕνα κύκλον Ο φέρομεν δύο χορδὰς ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ τὴν ἐφαπτομένην του ΑΕ εἰς τὸ Α. Φέρομεν μίαν χορδὴν παράλληλον πρὸς τὴν ἐφαπτομένην ΑΕ, ἡ ὁποία τέμνει τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Β, Γ, Ζ καὶ Δ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

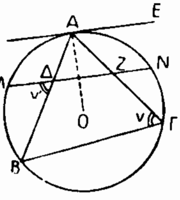
492. (535). Δίδεται μία διάμετρος ΑΒ ἑνὸς κύκλου Ο καὶ ἕνα σημεῖον Γ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἢ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΒ. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ ὑψοῦμεν κάθετονx Γy. Εἰς τυχὸν σημεῖον Δ τῆς περιφερείας φέρομεν ἐφαπτομένην αὐτῆς, ἡ ὁποία τέμνει τὴν xy εἰς τὸ σημεῖον Ε. Ὁ κύκλος ὁ περιγεγραμμένος περὶ τὸ τρίγωνον ΓΒΔ τέμνει τὴν xy εἰς τὸ σημεῖον Ζ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Α, Ζ, Δ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

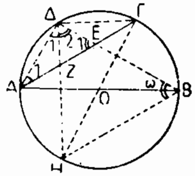
2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΕΔ=ΕΖ.

493. (536). Ἀπὸ τὰ ἄκρα Α καὶ Β μιᾶς διαμέτρου ΑΒ ἑνὸς κύκλου Ο φέρομεν δύο χορδὰς ΑΓ καὶ ΒΔ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ε καὶ τοι-

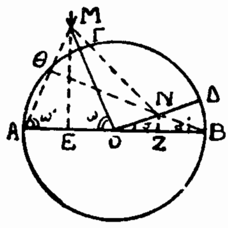
αὐτας, ὥστε τὸ Γ νὰ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τόξου ΒΔ. Ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν τὴν χορδὴν ΔΗ κάθετον ἐπὶ τὴν ΔΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΑΖ=ΖΕ.



Σχ. ἀσκ. 491.



Σχ. ἀσκ. 493.



Σχ. ἀσκ. 494.

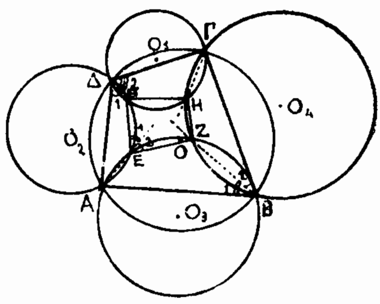
494. (537). Εἰς ἕνα κύκλον Ο δίδεται μία διάμετρός του ΑΒ· ἀπὸ τὸ κέντρον Ο φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΓ καὶ ΟΔ καθέτους μεταξύ των· ἀπὸ τὰ μέσα Ε καὶ Ζ τῶν ἀκτίνων ΟΑ καὶ ΟΒ φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὴν ΑΒ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς ἀκτῖνας ΟΓ καὶ ΟΔ, ἢ τὰς προεκτάσεις των εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν ἀντιστοίχως· φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΜ καὶ ΒΝ, αἱ ὁποῖαι τέμνοντα εἰς τὸ σημεῖον Θ. Θὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. Ὅτι τὸ σημεῖον Θ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου Ο.

2ον. Ὅτι τὰ τέσσαρα σημεῖα Μ, Θ, Ο, Ν κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

495. (538). Δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο′ ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς εἰς ἕνα σημεῖον Α. Φέρομεν τυχοῦσαν χορδὴν ΒΓ τῆς περιφερείας Ο, ἐφαπτομένην τῆς μικροτέρας περιφερείας Ο′ εἰς ἕνα σημεῖον Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΒΑΓ.

496. (539). Αἱ περιφέρειαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν χορδὰς τὰς πλευρὰς ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου, τέμνονται εἰς σημεῖα, τὰ ὁποῖα εἶναι κορυφαὶ ἄλλου τετραπλεύρου ἐγγραψίμου εἰς κύκλον.



Σχ. ἀσκ. 496.

497. (524). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἕνα σημεῖον Δ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ. Γράφομεν τὴν περιφέρειαν, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ Δ καὶ ἐφάπτεται τῆς πλευρᾶς ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Β καὶ τὴν περιφέρειαν Ο, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ Δ καὶ ἐφάπτεται τῆς ΑΓ εἰς τὸ Γ. Αἱ περιφέρειαι, αὗται τέμνονται εἰς ἕνα δεύτερον σημεῖον Ε. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ Ε κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

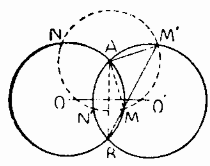
498. (525). Δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο′ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς ἕνα σημεῖον Α. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Β τῆς περιφερείας Ο φέρομεν τὴν ΒΔ ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας Ο′ εἰς τὸ σημεῖον Δ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς ἕνα δεύτερον σημεῖον Γ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ χορδὴ ΑΔ διχοτομεῖ τὴν παραπληρωματικὴν γωνίαν τῆς γωνίας ΒΑΓ.

499. (526). Δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο′ τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β·

ἀπὸ τὸ σημεῖον Α φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν ΓΑΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὰς περιφερείας Ο καὶ Ο′ εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ. Φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ΓΕ καὶ ΔΕ εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ Ε. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία ΓΕΔ μένει σταθερά, ὅταν ἡ τέμνουσα στρέφεται περὶ τὸ Α.

500. (527). Δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο′ τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β· ἀπὸ τὸ σημεῖον Α φέρομεν δύο τεμνούσας ΓΑΓ′ καὶ ΔΑΔ′, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν Ο εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ καὶ τὴν Ο′ εἰς τὰ Γ′ καὶ Δ′. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΓΔ καὶ Γ′Δ′ τέμνονται ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν.

501. (528). Δύο ἴσαι περιφέρειαι Ο καὶ Ο′ τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Μὲ κέντρον τὸ Α γράφομεν μίαν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὰς δύο πρώτας. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ σημεῖον Β καὶ τὰ δύο σημεῖα τῆς τομῆς τῆς τρίτης περιφερείας μὲ τὰς δοθείσας Ο καὶ Ο′, κεῖνται ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς.



Σχ. ἀσκ. 501.

502. (529). Δύο κύκλοι Ο καὶ Ο′ κεῖνται ὁ ἕνας ἐκτὸς τοῦ ἄλλου· φέρομεν τὴν κοινὴν ἐξωτερικὴν ἐφαπτομένην ΜΜ′. Ἡ διάκεντρος ΟΟ′ προεκτεινομένη τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ τὴν Ο′ εἰς τὰ σημεῖα Α′ καὶ Β′ (ἡ σειρὰ τῶν σημείων εἶναι Α, Β, Α′, Β′). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΜΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν Μ′Β′ καὶ ἡ ΜΒ κάθετος ἐπὶ τὴν Μ′Α′.

503. (530). Δίδεται μία γωνία xOy, ἕνα σημεῖον Ε ἐπὶ τῆς διχοτόμου της ΟΔ καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐπὶ τῆς Οx. Αἱ περιφέρειαι αἱ περιγεγραμμέναι περὶ τὰ τρίγωνα ΟΑΕ, ΟΒΕ τέμνουν τὴν Οy εἰς τὰ σημεῖα Ζ καὶ Η. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΑΒ=ΗΖ.

504. (531). Δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο′ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον Α. Ἡ περιφέρεια Ο′ ἐφάπτεται καὶ μιᾶς εὐθείας xy εἰς ἕνα σημεῖον αὐτῆς Β. Φέρομεν τὴν χορδὴν ΒΑ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὸ σημεῖον Γ, Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. Ὅτι ἡ διάμετρος ΓΟΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν xy εἰς τὸ σημεῖον Ε.

2ον. Ὅτι τὰ τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Ε, Δ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

505. (532). Δίδεται ὁ κύκλος Ο καὶ ἕνα σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτοῦ· μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα τὴν ΑΟ γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου Ο εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ, τὴν δὲ προέκτασιν τῆς ΟΑ εἰς τὸ Δ. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου Ο φέρομεν τὰς χορδὰς ΜΒ καὶ ΜΓ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου Α εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΜΕ=ΔΖ.

506. (533). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ τοιαῦτα ὥστε ΑΒ=ΒΓ=ΓΔ· μὲ πλευρὰν τὴν ΒΓ κατασκευάζομεν ἰσόπλευρον τρίγωνον ΜΒΓ· φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΜ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν κάθετον, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Δ ἐπὶ τὴν ΑΔ, εἰς τὸ σημεῖον Ν. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι ΑΜ=ΜΝ.

2ον. Ὅτι ἡ ΒΜ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΝ.

3ον. Ὅτι τὸ τετράπλευρον ΜΓΔΝ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

---

303. Λύσις καὶ διερεύνησις γεωμετρικῶν προβλημάτων. Εἰς τὴν § 75 ἐδώσαμεν τὸν ὁρισμὸν τοῦ Γεωμετρικοῦ προβλήματος καὶ εἰς προηγούμενα κεφάλαια ἐλύσαμεν μερικὰ ἁπλᾶ γεωμετρικὰ προβλήματα, ἀλλὰ δὲν ἐζητήσαμεν νὰ 'εὕρωμεν ποίας συνθήκας ὀφείλουν νὰ πληροῦν τὰ δεδομένα ἑνὸς προβλήματος διὰ νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ λύσις του. Διότι δὲν ἀρκεῖ νὰ τίθενται οἱ ὅροι (συνθῆκαι) ἑνὸς προβλήματος διὰ νὰ ἔχῃ τοῦτο λύσιν.

Π.χ. Ἔστω ὅτι ἔχομεν τρία στελέχη τῶν 16 ἑκ., 20 ἑκ. καὶ τῶν 60 ἑκ. Ἐὰν θεωρήσωμεν τὰ στελέχη αὐτὰ ὡς πλευρὰς ἑνὸς τριγώνου, εἶναι φανερόν, ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ κατασκευάσωμεν ἕνα τρίγωνον, ὁπωσδήποτε καὶ ἂν τὰ προσαρμόσωμεν.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι ***τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.***

Ἐπίσης ἀδύνατος εἶναι ἡ κατασκευὴ ἑνὸς τριγώνου, ὅταν δίδεται μία πλευρά του καὶ δύο προσκείμεναι γωνίαι (§ 176), ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν εἶναι ἴσον ἢ μεγαλύτερον τῶν δύο ὀρθῶν.

Ἐὰν ἔχωμεν δύο στελέχη τῶν 16 ἑκ. καὶ 20 ἑκ. δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τόσα τρίγωνα, ὅσα θέλομεν, ἀρκεῖ νὰ ἀφήσωμεν αὐθαίρετον τὸ μῆκος τῆς τρίτης πλευρᾶς του. Πάντως τὸ μῆκος της πρέπει νὰ περιέχεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 4 ἑκ., (διαφορὰ δύο πλευρῶν) καὶ 36 ἑκ., (ἄθροισμα δύο πλευρῶν).

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ***ἔχει ἀπείρους λύσεις*** ἢ ὅτι ***εἶναι ἀόριστον.***

Τέλος, ἐὰν ἔχωμεν τρία στελέχη τῶν 16 ἑκ., 20 ἑκ. καὶ 28 ἑκ. δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἕνα καὶ μόνον τρίγωνον, ἂν θεωρήσωμεν τὰ στελέχη αὐτὰ ὡς πλευρὰς ἑνὸς τριγώνου.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ***ἔχει μίαν λύσιν καὶ μίαν μόνον καὶ εἶναι ὡρισμένον.***

Τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα δεικνύουν, ὅτι εἰς ἕνα γεωμετρικὸν πρόβλημα εἶναι ἀπαραίτητον, ὄχι μόνον νὰ κατασκευάζωμεν τὸ ζητούμενον σχῆμα, ἀλλὰ καὶ ***νὰ διερευνῶμεν αὐτό,*** δηλ. *νὰ ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν ποίας συνθήκας ὀφείλουν νὰ πληροῦν τὰ δεδομένα τοῦ προ-*

βλήματος, ἵνα τὸ πρόβλημα ἔχῃ ***μίαν λύσιν*** *ἢ* ***ἀπείρους λύσεις*** *ἢ* ***καμμίαν.***

Κατωτέρω θὰ λύσωμεν καὶ ἄλλα γεωμετρικὰ προβλήματα καὶ θὰ διερευνήσωμεν αὐτά, ἂν τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος εἶναι τοιαῦτα, ὥστε νὰ δικαιολογοῦν τοιαύτην διερεύνησιν.

1. Κατασκευὴ τριγώνων

304. Εἰς τὴν § 128 ἐλύσαμεν τὸ πρόβλημα:

Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν μίαν πλευράν του $ΒΓ=α$ καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας $Β=ω$ καὶ $Γ=ν$.

Διὰ νὰ ἔχῃ τὸ πρόβλημα αὐτὸ λύσιν, πρέπει αἱ δοθεῖσαι γωνίαι ω καὶ ν νὰ ἔχουν ἄθροισμα μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν· δηλ. πρέπει νὰ εἶναι $\widehat{ω}+\widehat{ν}<2$ ὀρθ.

Ὁμοίως εἰς τὴν § 129 ἐλύσαμεν τὸ πρόβλημα:

Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν δύο πλευράς του καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν.

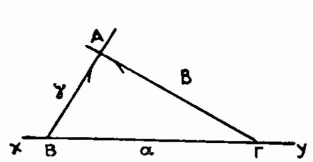
305. Πρόβλημα. ***Νὰ κατασκευασθῇ, ἕνα τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὰς τρεῖς πλευράς του α, β, γ.***

Ἡ κατασκευὴ τοῦ τριγώνου γίνεται, ὅπως ἐδείχθη εἰς τὴν § 130.

Διερεύνησις. 1ον. Ἐὰν αἱ δύο περιφέρειαι τέμνωνται ἐκτὸς τῆς ΒΓ *(Σχ. 231)*, δηλ. ἐὰν εἶναι

$$β-γ<α<β+γ$$

τὸ τρίγωνον ΑΒΓ δύναται νὰ κατασκευασθῇ καὶ εἶναι τελείως ὡρισμένον.



Σχ. 231.

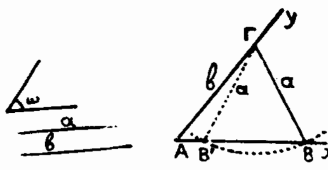
2ον. Ἐὰν αἱ δύο περιφέρειαι τέμνωνται ἐπὶ τῆς ΒΓ, δηλ. ἐὰν εἶναι $α=β+γ$, αἱ περιφέρειαι ἐφάπτονται καὶ τὸ τρίγωνον γίνεται μία εὐθεῖα γραμμὴ ΒΑΓ, δηλ. τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

3ον. Ἐὰν αἱ περιφέρειαι δὲν τέμνωνται. δηλ. ἐὰν $α>β+γ$, τὸ σημεῖον Α δὲν ὑπάρχει καὶ τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

306. Πρόβλημα. ***Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν δύο πλευράς του καὶ τὴν γωνίαν, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς μιᾶς αὐτῶν.***

Ἔστωσαν α καὶ β αἱ δύο δοθεῖσαι πλευραὶ καὶ $\widehat{Α}=ω$ ἡ δοθεῖσα γωνία, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς α.

Κατασκευάζομεν *(Σχ. 232)* μίαν γωνίαν xAy ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Ay λαμβάνομεν τμῆμα ΑΓ ἴσον μὲ τὴν δοθεῖσαν πλευρὰν β. Μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Γ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν πλευρὰν α γράφομεν ἕνα τόξον κύκλου· ἔστω Β ἕνα σημεῖον τῆς τομῆς τοῦ τόξου αὐτοῦ καὶ τῆς πλευρᾶς Ax. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΓΒ. Τὸ σχηματισθὲν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον· διότι ἔχει τὴν γωνίαν Α ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω, καὶ τὰς πλευρὰς ΑΓ=β καὶ ΓΒ=α.



Σχ. 232.

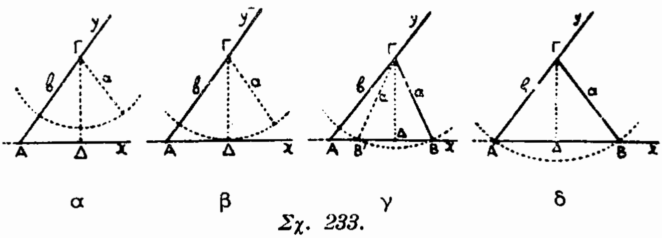
Διερεύνησις. Διὰ νὰ εἶναι τὸ πρόβλημα δυνατόν, πρέπει ἡ περιφέρεια, ἡ ὁποία γράφεται μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Γ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν α, νὰ τέμνῃ τὴν ἡμιευθεῖαν Ax.

Τὸ πρόβλημα λοιπὸν θὰ ἔχῃ τόσας λύσεις, ὅσα εἶναι τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς περιφερείας (Γ, α) καὶ τῆς ἡμιευθείας Ax.

Ὁ ἀριθμὸς τῶν λύσεων ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ εἶδος τῆς γωνίας Α=ω καὶ ἀπὸ τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν α καὶ β.

I. ***Ἡ γωνία Α εἶναι ὀξεῖα*** *(Σχ. 233).* Ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ φέρομεν τὴν κάθετον ΓΔ ἐπὶ τὴν Ax. Διὰ νὰ ἔχῃ τὸ πρόβλημα λύσιν πρέπει ἡ περιφέρεια (Γ, α) νὰ συναντᾷ τὴν ἡμιευθεῖαν Ax.

Ἐὰν ἡ πλευρὰ α εἶναι μικροτέρα τῆς ΓΔ, ἡ περιφέρεια (Γ, α) δὲν συναντᾷ τὴν Ax καὶ τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει λύσιν *(Σχ. 233 α).*



Σχ. 233.

Ἐὰν ἡ πλευρὰ α εἶναι ἴση μὲ τὴν ΓΔ, ἡ περιφέρεια (Γ, α) ἐφάπτεται τῆς Ax εἰς τὸ σημεῖον Δ καὶ τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν, τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΓ *(Σχ. 233 β).*

Ἐὰν ἡ πλευρὰ α εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΓΔ, ἀλλὰ μικροτέρα τῆς β, ἡ περιφέρεια (Γ, α) τέμνει τὴν ἡμιευθεῖαν Ax εἰς δύο σημεῖα Β καὶ Β′ καὶ τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις, τὰ τρίγωνα ΑΓΒ καὶ ΑΓΒ′ *(Σχ. 233 γ).*

Ἐὰν ἡ πλευρὰ α εἶναι ἴση μὲ τὴν β, τὸ σημεῖον Β′ συμπίπτει μὲ τὸ σημεῖον Α καὶ τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν, τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΓΒ *(Σχ. 233 δ)*.

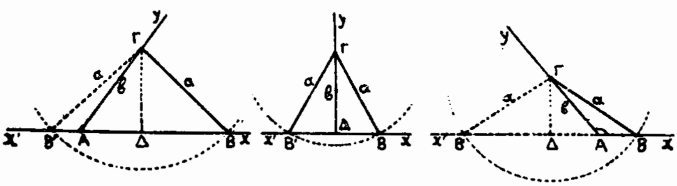
Τέλος, ὅταν ἡ πλευρὰ α εἶναι μεγαλυτέρα τῆς β, τὸ σημεῖον Β′ εὑρίσκεται ἀριστερὰ τοῦ Α *(Σχ. 234 α)* καὶ μόνον τὸ τρίγωνον ΑΓΒ εἶναι λύσις τοῦ προβλήματος.

ΙΙ. ***Ἡ γωνία Α εἶναι ὀρθὴ*** *(Σχ. 234 β)*. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ πρόβλημα εἶναι προφανῶς ἀδύνατον, ἐὰν ἡ πλευρὰ α εἶναι μικροτέρα τῆς β ἢ ἴση μὲ β.

Ὅταν ἡ πλευρὰ α εἶναι μεγαλυτέρα τῆς β, ἡ περιφέρεια (Γ, α) τέμνει τὴν x′Ax εἰς δύο σημεῖα Β καὶ Β′, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ Α καὶ λαμβάνομεν δύο ἴσα τρίγωνα, ΓΑΒ καὶ ΓΑΒ′, τὰ ὁποῖα εἶναι λύσις τοῦ προβλήματος. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσα, τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν.

ΙΙΙ. ***Ἡ γωνία Α εἶναι ἀμβλεῖα*** *(Σχ. 234 γ)*. Ἐὰν ἡ πλευρὰ α εἶναι μικροτέρα τῆς β, ἡ περιφέρεια (Γ, α) δὲν συναντᾷ τὴν ἡμιευθεῖαν Ax καὶ τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

Ὅταν ἡ πλευρὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς β, ἡ περιφέρεια (Γ, α) τέ-



α β γ

Σχ. 234.

μνει τὴν Ax εἰς τὸ σημεῖον Β καί τὴν Ax′ εἰς τὸ Β′. Ἐὰν φέρωμεν τὰς εὐθείας ΓΒ καὶ ΓΒ′ σχηματίζονται τὰ τρίγωνα ΓΑΒ καὶ ΓΑΒ′· ἐκ τῶν τριγώνων αὐτῶν μόνον τὸ τρίγωνον ΓΑΒ εἶναι παραδεκτόν, καὶ ἑπομένως τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν.

Τὰ ἐξαγόμενα τῆς ἀνωτέρω διερευνήσεως συνοψίζονται εἰς τὸν κατωτέρω πίνακα:

$A < 90^0$	$\alpha < \beta$	$\alpha < \Gamma\Delta$	0 λύσις
		$\alpha = \Gamma\Delta$	1 λύσις
		$\alpha > \Gamma\Delta$	2 λύσεις
	$\alpha = \beta$		1 λύσις
	$\alpha > \beta$		1 λύσις

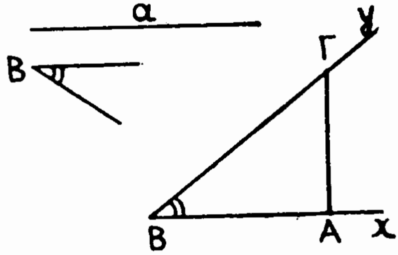
$$A = 90^\circ \begin{cases} \alpha > \beta \cdots\cdots\cdots\cdots & 1 \text{ λύσις} \\ \alpha = \beta \cdots\cdots\cdots\cdots & 0 \text{ λύσις} \\ \alpha < \beta \cdots\cdots\cdots\cdots & 0 \text{ λύσις} \end{cases}$$

$$A > 90^\circ \begin{cases} \alpha > \beta \cdots\cdots\cdots\cdots & 1 \text{ λύσις} \\ \alpha = \beta \cdots\cdots\cdots\cdots & 0 \text{ λύσις} \\ \alpha < \beta \cdots\cdots\cdots\cdots & 0 \text{ λύσις} \end{cases}$$

307. Πρόβλημα. ***Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ὑποτείνουσάν του καὶ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν.***

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος εἶναι: $\widehat{A}=1$ ὀρθή, ΒΓ=α, καὶ ἡ ὀξεῖα γωνία $\widehat{B}$.

Κατασκευή. Κατασκευάζομεν μίαν γωνίαν xBy ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν Β. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς By λαμβάνομεν τμῆμα ΒΓ=α καὶ ἀπὸ τὸ Γ φέρομεν τὴν κάθετον ΓΑ ἐπὶ τὴν Bx. Τὸ κατασκευασθὲν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.



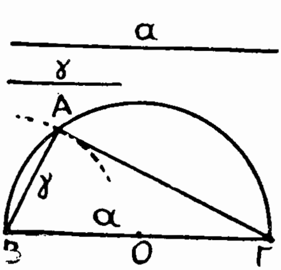
Σχ. 235.

Τὸ πρόβλημα ἔχει πάντοτε μίαν λύσιν καὶ μίαν μόνον.

308. Πρόβλημα. ***Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ὑποτείνουσάν του καὶ μίαν κάθετον πλευράν του.***

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος εἶναι: $\widehat{A}=1$ ὀρθή, ΒΓ=α, ΑΒ=γ.

Κατασκευή: Μὲ διάμετρον ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν ὑποτείνουσαν ΒΓ γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν κύκλου. Μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν κάθετον πλευρὰν γ γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς ἕνα σημεῖον Α. Φέρομεν τὰς χορδὰς ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ τὸ προκῦπτον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.



Σχ. 236.

Ἀπόδειξις: Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α, διότι ἡ γωνία Α εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον· εἶναι δὲ καὶ τὸ ζητούμενον, διότι ἐκ κατασκευῆς εἶναι ΒΓ=α καὶ ΒΑ=γ.

Τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν καὶ μίαν μόνον, ἐὰν $\alpha > \gamma$.

Γεωμετρικὰ προβλήματα πρὸς λύσιν

507. (553). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, (ΑΒ=ΑΓ), ἂν γνωρίζωμεν:

1ον. Τὴν βάσιν του καὶ τὴν ἀπέναντι γωνίαν.

2ον. Τὴν βάσιν του καὶ μίαν ἀπὸ τὰς ἴσας γωνίας του.

3ον. Τὴν βάσιν του καὶ τὸ ἀντίστοιχον ὕψος του.

508. (554). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν:

1ον. Τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς Α καὶ τὸ ὕψος $υ_α$.

2ον. Τὴν γωνίαν Β καὶ τὰς ἴσας πλευρὰς β=γ.

3ον. Τὴν γωνίαν Β καὶ τὸ ὕψος $υ_α$.

509. (555). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν:

1ον. Τὰς πλευρὰς β=γ καὶ τὸ ὕψος $υ_β$.

2ον. Τὰς πλευρὰς β=γ καὶ τὸ ὕψος $υ_α$.

510. (557). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν ΒΓ=α καὶ τὴν ἀκτῖνα R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

511. (544). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ τὸ ὕψος $υ_α$.

512. (545). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν β=γ καὶ τὴν ἀκτῖνα R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

513. (546). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὰ τρία ὕψη του.

514. (543). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, τὴν γωνίαν Β καὶ τὴν διάμεσον $μ_γ$.

515. (558). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν:

1ον. Τὰς πλευρὰς β, γ καὶ τὸ ὕψος $υ_α$.

2ον. Τὰς πλευρὰς α, β καὶ τὸ ὕψος $υ_β$.

516. (559). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν δύο γωνίας του καὶ ἕνα ὕψος του.

517. (560). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὰς πλευρὰς α, γ καὶ τὴν διάμεσον $μ_α$.

518. (540). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα παραλληλόγραμμον, ἐὰν γνωρίζωμεν μίαν πλευράν του καὶ τὰς διαγωνίους του.

519. (561). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν βάσιν του, τὸ ὕψος του καὶ μίαν γωνίαν του.

520. (562). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ, ἂν γνωρίζωμεν, τὴν διαγώνιον ΑΓ καὶ τὴν γωνίαν ΓΑΒ.

521. (541). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ὀρθογώνιον, ἂν γνωρίζωμεν μίαν πλευράν του καὶ μίαν διαγώνιόν του.

522. (547). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνας ρόμβος ΑΒΓΔ, ἂν γνωρίζωμεν:

1ον. Μίαν διαγώνιόν του καὶ τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ ἐγγεγραμ. κύκλου.

2ον. Μίαν γωνίαν του καὶ μίαν διαγώνιόν του.

523. (548). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ἰσοσκελὲς τραπέζιον ΑΒΓΔ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν μεγαλυτέραν βάσιν του ΑΒ, τὸ ὕψος του καὶ τὰς μὴ παραλλήλους πλευράς του.

524. (549). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τραπέζιον, ἂν γνωρίζωμεν τὰς μὴ παραλλήλους πλευράς του καὶ τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ ἐγγεγρ. κύκλου.

525. (563). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ἰσοσκελὲς τραπέζιον ΑΒΓΔ, ἂν γνωρίζωμεν:

1ον. Τὰς βάσεις του ΑΒ, ΓΔ καὶ τὸ ὕψος του.

2ον. Τὰς βάσεις του ΑΒ, ΓΔ καὶ τὴν ἀκτῖνα R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

526. (564). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ἰσοσκελὲς τραπέζιον ΑΒΓΔ, ἂν γνωρίζωμεν, μίαν βάσιν του, μίαν γωνίαν καὶ τὸ ὕψος του.

527. (565). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τραπέζιον ΑΒΓΔ, ἂν γνωρίζωμεν:

1ον. Τὰς γωνίας του, μίαν βάσιν του καὶ μίαν ἀπὸ τὰς μὴ παραλλήλους πλευράς.

2ον. Τὰ γωνίας του, μίαν βάσιν του καὶ μίαν διαγώνιόν του.

528. (566). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τραπέζιον ΑΒΓΔ, ἂν γνωρίζωμεν:

1ον. Μίαν βάσιν του, τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ μίαν ἀπὸ τὰς μὴ παραλλήλους πλευράς του.

2ον. Τὰς μὴ παραλλήλους πλευράς του καὶ τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

529. (567). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τραπέζιον ΑΒΓΔ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν βάσιν του ΑΒ, τὴν γωνίαν Β, τὴν διαγώνιον ΑΓ καὶ τὴν πλευρὰν ΑΔ.

530. (550). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ἂν γνωρίζωμεν:

1ον. Τὰς πλευράς του ΑΔ, ΓΔ καὶ τὰς γωνίας Α, Β, Γ.

2ον. Τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΔ, τὴν διαγώνιον ΑΓ καὶ τὰς γωνίας ΓΑΒ καὶ ΔΒΑ.

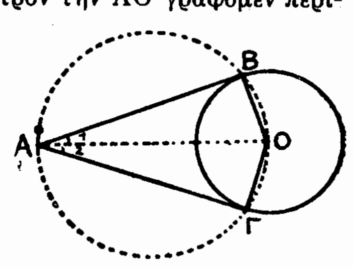
531. (551). Νὰ τριχοτομηθῇ, δηλ. νὰ διαιρεθῇ εἰς τρία ἴσα μέρη, μία ὀρθὴ γωνία.

532. (552). Νὰ κατασκευασθῇ ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας, τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ κεῖται ἐκτὸς τοῦ φύλλου σχεδιάσεως.

2. Διάφοροι ἄλλαι κατασκευαὶ

309. Πρόβλημα. ***Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη πρὸς δοθεῖσαν περιφέρειαν Ο ἀκτῖνος R (Σχ. 237).***

Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΟ. Μὲ διάμετρον τὴν ΑΟ γράφομεν περιφέρειαν κύκλου, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ. Αἱ ΑΒ καὶ ΑΓ εἶναι αἱ ζητούμεναι ἐφαπτόμεναι.



Σχ. 237.

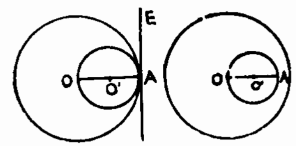
Πράγματι· ἐὰν φέρωμεν τὴν ἀκτῖνα ΟΒ, ἡ σχηματιζομένη γωνία ΑΒΟ εἶναι ὀρθή, διότι εἶναι ἐγγεγραμμένη καὶ βαίνει ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας ΑΓΟ. Ἡ ΑΒ εἶναι λοιπὸν κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος ΟΒ καὶ ἐπομένως εἶναι ἐφαπτομένη (§ 250) τῆς περιφερείας Ο εἰς τὸ σημεῖον Β.

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἡ ΑΓ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας Ο.

Διερεύνησις. Τὸ πρόβλημα ἔχει τόσας λύσεις, ὅσα εἶναι τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν δύο περιφερειῶν. Διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις:

1ον. ***Τὸ σημεῖον Α κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου Ο*** (ΟΑ > R). Αἱ δύο περιφέρειαι ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα Β καὶ Γ καὶ τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις: τὰς ἐφαπτομένας ΑΒ καὶ ΑΓ *(Σχ. 237)*.

2ον. ***Τὸ σημεῖον Α κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας Ο*** (ΟΑ=R). *(Σχ. 238 α)*. Αἱ δύο περιφέρειαι ἐφάπτονται εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν: Ἡ εὐθεῖα ΑΕ, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΑ εἰς τὸ σημεῖον Α, εἶναι ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη.

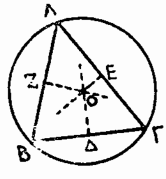


Σχ. 238.

3ον. ***Τὸ σημεῖον Α κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου Ο*** (ΟΑ<R) *(Σχ. 238 β)*. Αἱ δύο περιφέρειαι δὲν ἔχουν κανένα κοινὸν σημεῖον καὶ τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

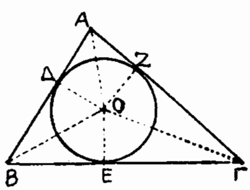
310. Πρόβλημα. ***Νὰ περιγραφῇ περιφέρεια περὶ δοθὲν τρίγωνον.***

Ἔστω τὸ δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ *(Σχ. 239)*. Αἱ κορυφαί του Α, Β, Γ εἶναι τρία σημεῖα, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπ᾿ εὐθείας· ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ γράψωμεν (§ 242) περιφέρειαν διερχομένην διὰ τῶν τριῶν κορυφῶν του.



Σχ. 239.

311. Πρόβλημα. ***Νὰ ἐγγραφῇ κύκλος εἰς δοθὲν τρίγωνον.***



Σχ. 240.

Γνωρίζομεν (§ 232, 233), ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἰσάκις ἀπὸ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου. Τὸ κέντρον λοιπὸν τοῦ ζητουμένου κύκλου εἶναι τὸ σημεῖον Ο τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν του καὶ ἡ ἀκτίς του εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ Ο ἀπὸ μίαν ἀπὸ τὰς πλευράς του.

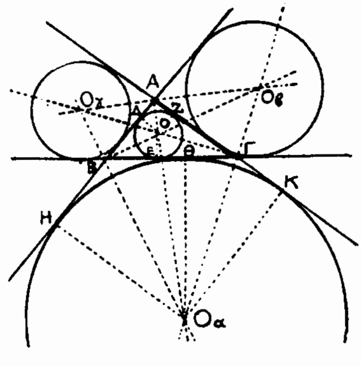
312. Πρόβλημα. ***Νὰ κατασκευασθῇ μία περιφέρεια ἐφαπτομένη τῶν τριῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου ἢ τῶν προεκτάσεών των.***

Ἔστω ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ.

1ον. Γνωρίζομεν, ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου τέ-

μνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὰς τρεῖς πλευράς του.

Ἐὰν Ο (*Σχ. 241*) εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, αἱ ἀποστάσεις του ΟΔ, ΟΕ, ΟΖ ἀπὸ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου, θὰ εἶναι ἴσαι. Ἐὰν λοιπὸν γράψωμεν περιφέρειαν κύκλου, μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν κοινὴν ἀπόστασιν ΟΔ=ΟΕ=ΟΖ, ἡ περιφέρεια αὐτὴ θὰ περάσῃ ἀπὸ τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ καὶ ἑπομένως θὰ ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, διότι αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ εἶναι κάθετοι, ἀντιστοίχως, ἐπὶ τὰς ἀκτῖνας ΟΔ, ΟΕ, ΟΖ τοῦ κύκλου Ο.



Σχ. 241.

2ον. Γνωρίζομεν (§ 234), ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν δύο ἐξωτερικῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου καὶ ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος τῆς τρίτης γωνίας του τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ μίαν πλευρὰν τοῦ τριγώνου καὶ ἀπὸ τὰς προεκτάσεις τῶν δύο ἄλλων.

Ἐὰν $Ο_α$ εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου καὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α καὶ $Ο_αΗ$, $Ο_αΘ$, $Ο_αΚ$, αἱ ἀποστάσεις τοῦ $Ο_α$ ἀπὸ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τοῦ τριγώνου, θὰ εἶναι $Ο_αΗ=Ο_αΘ=Ο_αΚ$. Ἐὰν λοιπὸν γράψωμεν περιφέρειαν κύκλου, μὲ κέντρον τὸ σημεῖον $Ο_α$ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν κοινὴν ἀπόστασιν $Ο_αΗ=Ο_αΘ=Ο_αΚ$, ἡ περιφέρεια αὐτὴ θὰ περάσῃ ἀπὸ τὰ σημεῖα Η, Θ, Κ καὶ αἱ προεκτάσεις τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ, καθὼς καὶ ἡ πλευρὰ ΒΓ θὰ εἶναι ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου $Ο_α$, διότι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς ἀκτῖνας $Ο_αΗ$, $Ο_αΘ$, $Ο_αΚ$ ἀντιστοίχως.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι ὑπάρχει καὶ δεύτερος κύκλος $Ο_β$, ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται τῆς πλευρᾶς ΑΓ καὶ τῶν προεκτάσεων τῶν ΑΒ καὶ ΒΓ καὶ τέλος καὶ τρίτος κύκλος $Ο_γ$, ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται τῆς πλευρᾶς ΑΒ καὶ τῶν προεκτάσεων τῶν δύο ἄλλων ΒΓ καὶ ΓΑ.

Ὥστε ὑπάρχουν τέσσαρες κύκλοι, οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου καὶ οἱ ὁποῖοι ἔχουν κέντρα τὰ σημεῖα Ο, $Ο_α$, $Ο_β$, $Ο_γ$ καὶ ἀκτῖνας τὰς ἀποστάσεις τῶν σημείων αὐτῶν ἀπὸ ἑκάστην τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

313. Παρεγγεγραμμένοι κύκλοι. Οἱ κύκλοι, οἱ ὁποῖοι ἔχουν

κέντρα τὰ σημεῖα O_α, O_β, O_γ *(Σχ. 241)* λέγονται ***παρεγγεγραμμένοι κύκλοι*** τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἰς τὰς γωνίας Α, Β, Γ ἀντιστοίχως.

314. Ὑπολογισμὸς εὐθυγράμμων τμημάτων ὁριζομένων ἐπὶ τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου. Πρόβλημα. ***Νὰ ὑπολογισθοῦν, συναρτήσει τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου:***

1ον. ***Αἱ ἀποστάσεις τῶν σημείων ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ παρεγγεγραμμένου κύκλου, ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστοίχου πλευρᾶς τοῦ τριγώνου.***

2ον. ***Τὰ μήκη τῶν τμημάτων, τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ἐπὶ τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου, διὰ τῶν σημείων ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ παρεγγεγραμμένων κύκλων.***

Ἔστω Ο ὁ ἐγγεγραμμένος κύκλος εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ *(Σχ. 241)* καὶ Δ, Ε, Ζ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς του μὲ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τοῦ τριγώνου. Ἔστω ἐπίσης O_α ὁ παρεγγεγραμμένος κύκλος εἰς τὴν γωνίαν Α τοῦ τριγώνου καὶ Η, Θ, Κ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς του μὲ τὰς πλευράς του ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ.

Ἂν παραστήσωμεν μὲ α, β, γ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ μὲ 2τ τὴν περίμετρόν του, ζητεῖται νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη:

$$ΑΔ, ΑΖ, ΒΔ, ΒΕ, ΓΕ, ΓΖ \text{ κλπ.}$$

1ον. ***Ὑπολογισμὸς τῶν ΑΔ, ΑΖ, ΒΔ, ΒΕ, ΓΖ, ΑΗ, ΒΘ,...***

Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα ἔχομεν

$$ΑΔ+ΑΖ+ΒΔ+ΒΕ+ΓΕ+ΓΖ=2τ \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ ΑΔ=ΑΖ, ΒΔ=ΒΕ, ΓΕ=ΓΖ, ὡς ἐφαπτόμεναι κύκλου, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον, ἡ ἰσότης (1) γράφεται

$$2ΑΔ+2ΒΕ+2ΓΕ=2τ \quad ἢ \quad ΑΔ+ΒΕ+ΓΕ=2 \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ ΒΕ+ΓΕ=ΒΓ=α, ἡ ἰσότης (2) γράφεται

$$ΑΔ+α=τ, \quad ἄρα \quad ΑΔ=τ-α \quad ἢ \quad \mathbf{ΑΔ=ΑΖ=τ-α}.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

$$\mathbf{ΒΔ=ΒΕ=τ-β} \quad καὶ \quad \mathbf{ΓΖ=ΓΕ=τ-γ}.$$

Ὑπολογίζομεν τώρα τὰ μήκη ΑΗ, ΒΗ, ΓΘ κλπ.

Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα 241 ἔχομεν

$$ΑΒ+ΒΘ+ΘΓ+ΓΑ=2τ. \qquad (3)$$

Ἐπειδὴ ΒΘ=ΒΗ καὶ ΓΘ=ΓΚ, ὡς ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου O_α, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον, ἡ ἰσότης (3) γράφεται

$$ΑΒ+ΒΗ+ΓΚ+ΓΑ=2τ. \qquad (4)$$

Ἐπειδὴ ΑΒ+ΒΗ=ΑΗ καὶ ΓΚ+ΓΑ=ΑΚ, ἡ ἰσότης (4) γράφεται

$$ΑΗ+ΑΚ=2τ \quad ἢ \quad 2ΑΗ=2τ \quad ἢ \quad ΑΗ=τ.$$

Ὥστε εἶναι $\mathbf{AH = AK = \tau}$.

Διὰ τὴν ΒΗ=ΒΘ ἔχομεν

$$BH = AH - AB \quad \text{ἢ} \quad \mathbf{BH = \tau - \gamma = B\Theta}.$$

Διὰ τὴν ΓΘ=ΓΚ ἔχομεν

$$\Gamma K = AK - A\Gamma \quad \text{ἢ} \quad \mathbf{\Gamma K = \tau - \beta = \Gamma\Theta}.$$

2ον. ***Υπολογισμὸς τῶν μηκῶν ΔΗ, ΕΘ, ΖΚ.***

Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα 241 ἔχομεν

$$\Delta H = AH - A\Delta \tag{5}$$

Ἐπειδὴ ΑΗ=τ καὶ ΑΔ=τ—α, ἡ ἰσότης (5) γράφεται

$$\Delta H = \tau - (\tau - \alpha) = \alpha.$$

Ἐπειδὴ τὰ τμήματα ΔΗ καὶ ΖΚ εἶναι ἴσα, ὡς ὑπόλοιπα τῶν ἴσων τμημάτων ΔΗ καὶ ΖΚ, ἀπὸ τῶν ὁποίων ἀφῃρέθησαν τὰ ἴσα τμήματα ΑΔ=ΑΖ, θὰ εἶναι καὶ ΖΚ=ΔΗ=α.

Διὰ τὸ μῆκος ΕΘ ἔχομεν:

$$E\Theta = B\Theta - BE \quad \text{ἢ} \quad E\Theta = (\tau - \gamma) - (\tau - \beta) \quad \text{ἢ} \quad E\Theta = \beta - \gamma.$$

Συνοψίζοντες τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν:

ΑΔ=ΑΖ=τ—α	ΑΗ=ΑΚ=τ	ΔΗ=ΖΚ=α
ΒΔ=ΒΕ=τ—β	ΒΗ=ΒΘ=τ—γ	ΕΘ=β—γ
ΓΕ=ΓΖ=τ—γ	ΓΘ=ΓΚ=τ—β	

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

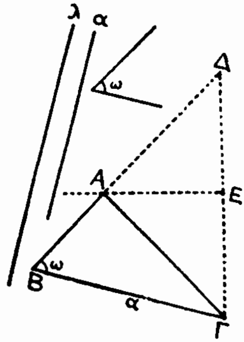
ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ

---

315. Πρόβλημα. ***Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευράν του ΒΓ=α, τὴν γωνίαν του Β=ω καὶ τὸ ἄθροισμα ΑΒ+ΑΓ=λ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του.***

Ἐπειδὴ δὲν γνωρίζομεν πῶς νὰ ἀρχίσωμεν τὴν κατασκευὴν τοῦ ζητουμένου τριγώνου ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω ΑΒΓ *(Σχ. 242)* τὸ ζητούμενον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν πλευρὰν ΒΓ=α, τὴν γωνίαν Β ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω καὶ τὸ ἄθροισμα ΑΒ+ΑΓ=λ, τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του.



Σχ. 242.

Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΒΑ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμῆμα ΑΔ=ΑΓ. Τότε θὰ εἶναι

ΒΔ=ΒΑ+ΑΔ ἢ ΒΔ=ΒΑ+ΑΓ=λ.

Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΔΓ. Τὸ σχηματισθὲν τρίγωνον ΔΒΓ ἔχει τὴν πλευρὰν ΔΒ ἴσην μὲ τὸ δοθὲν ἄθροισμα λ τῶν δύο πλευρῶν, τὴν πλευρὰν ΒΓ ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν πλευρὰν α καὶ τὴν γωνίαν Β ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω· ἄρα τὸ τρίγωνον ΔΒΓ δύναται νὰ κατασκευασθῇ, διότι γνωρίζομεν δύο πλευράς του ΒΓ καὶ ΒΔ καὶ τὴν ὑπ᾿ αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν Β (§ 129).

Ἐκ κατασκευῆς εἶναι ΑΔ=ΑΓ· ἄρα τὸ τρίγωνον ΔΑΓ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως ἡ κορυφή του Α κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου ΕΑ τῆς βάσεώς του ΔΓ. Ἀλλὰ ἡ κορυφὴ Α, δηλ. ἡ τρίτη κορυφὴ τοῦ ζητουμένου τριγώνου ΑΒΓ, κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΔ τοῦ τριγώνου ΔΒΓ. Ὥστε ἡ τρίτη κορυφὴ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῆς πλευρᾶς ΒΔ καὶ τῆς μεσοκαθέτου ΕΑ τῆς πλευρᾶς ΔΓ.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὸ ζητούμενον τρίγωνον ὡς ἑξῆς:

Κατασκευή: Κατασκευάζομεν μίαν γωνίαν ΔΒΓ ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ λαμβάνομεν τμῆμα ΒΓ ἴσον μὲ τὴν δοθεῖσαν πλευρὰν α τοῦ τριγώνου· ἐπίσης ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΔ λαμβάνομεν τμῆμα ΒΔ ἴσον μὲ τὸ δοθὲν ἄθροισμα λ τῶν δύο πλευρῶν τοῦ τριγώνου· φέρομεν τὴν ΔΓ. Ἀπὸ τὸ μέσον Ε τῆς ΔΓ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΔΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν πλευρὰν ΒΔ εἰς τὸ σημεῖον Α· φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΓ καὶ τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἀπόδειξις: Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει, ἐκ κατασκευῆς, τὴν πλευρὰν ΒΓ ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν πλευρὰν α, τὴν προσκειμένην γωνίαν Β ἴσην, ἐκ κατασκευῆς, μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω· ἐπειδὴ τὸ Α κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τῆς ΔΓ, θὰ εἶναι ΑΔ=ΑΓ. Θὰ εἶναι λοιπόν:

$$ΒΑ+ΑΓ=ΒΑ+ΑΔ \quad ἢ \quad ΒΑ+ΑΓ=ΒΔ=λ.$$

Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον, διότι ἔχει τὴν πλευρὰν ΒΓ=α, τὴν γωνίαν Β=ω καὶ τὸ ἄθροισμα ΒΑ+ΑΓ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του ἴσον μὲ τὸ δοθὲν ἄθροισμα λ.

316. Ἀνάλυσις καὶ σύνθεσις. Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ προηγούμενον πρόβλημα ἠκολουθήσαμεν τὴν κάτωθι πορείαν:

Ὑπεθέσαμεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ κατεσκευάσαμεν ἕνα τυχὸν τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον ὑπεθέσαμεν, ὅτι εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον, δηλαδή, ὅτι ἔχει τὰ δοθέντα στοιχεῖα.

Ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἐφθάσαμεν εἰς ἕνα ἄλλο βοηθητικὸν τρίγωνον ΔΒΓ, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ κατασκευασθῇ μὲ τὰ δοθέντα στοιχεῖα τοῦ προβλήματος. Ἔπειτα ἐφέραμεν τὴν μεσοκάθετον τῆς πλευρᾶς ΔΓ τοῦ βοηθητικοῦ τριγώνου ΔΒΓ, ἡ ὁποία μᾶς ἔδωσε τὴν τρίτην κορυφὴν τοῦ ζητουμένου τριγώνου.

Ἡ ἐργασία αὐτή, τὴν ὁποίαν ἠκολουθήσαμεν, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τρόπον τῆς κατασκευῆς τοῦ ζητουμένου τριγώνου μὲ τὰ δοθέντα στοιχεῖα, λέγεται ***ἀνάλυσις τοῦ προβλήματος***, ἡ δὲ μέθοδος τῆς ἀναζητήσεως τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος λέγεται ***ἀναλυτικὴ μέθοδος***.

Ἔπειτα, κατὰ τὴν κατασκευὴν ἠκολουθήσαμεν ἀντίθετον πορείαν:

Κατεσκευάσαμεν τὸ τρίγωνον ΔΒΓ μὲ τὰ δοθέντα στοιχεῖα τοῦ προβλήματος· ἀπὸ τὸ μέσον Ε τῆς πλευρᾶς του ΔΓ ἐφέραμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΔΓ καὶ οὕτω προσδιωρίσαμεν τὴν τρίτην κορυφὴν Α τοῦ ζητουμένου τριγώνου ΑΒΓ.

Ἡ δευτέρα αὐτὴ ἐργασία λέγεται ***σύνθεσις τοῦ προβλήματος***, ἡ δὲ μέθοδος τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος λέγεται ***συνθετικὴ μέθοδος***.

Τέλος ἀπεδείξαμεν, ὅτι τὸ κατασκευασθὲν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον, δηλ. ἔχει ὅλα τὰ δοθέντα στοιχεῖα τοῦ προβλήματος. Ἡ τρίτη αὐτὴ ἐργασία λέγεται ***ἀπόδειξις***.

Γενικῶς: Ἡ ***ἀνάλυσις*** εἶναι μία μέθοδος δια τῆς ὁποίας μία ἄγνωστος πρότασις Α ἀνάγεται εἰς μίαν ἄλλην ἄγνωστον πρότασιν Β, ἔπειτα ἡ δευτέρα πρότασις Β εἰς μίαν τρίτην Γ, ἡ Γ εἰς μίαν τετάρτην Δ κ.ο.κ. μέχρις ὅτου φθάσωμεν εἰς μίαν τελικὴν πρότασιν Μ, ἡ ὁποία εἶναι προφανῶς ἀληθής, ἢ ἔχει ἀποδειχθῆ προηγουμένως.

Ἡ ***σύνθεσις*** εἶναι μία μέθοδος διὰ τῆς ὁποίας, ἀναχωροῦντες ἀπὸ μίαν γνωστὴν καὶ ἀληθῆ πρότασιν Δ, φθάνομεν εἰς μίαν ἄλλην γνωστὴν πρότασιν Γ, ἔπειτα ἀπὸ τὴν δευτέραν πρότασιν Γ φθάνομεν εἰς μίαν τρίτην γνωστὴν πρότασιν Β καὶ ἐξ αὐτῆς εἰς μίαν τετάρτην κ.ο.κ. μέχρις ὅτου φθάσωμεν εἰς τὴν πρότασιν Α, τὴν ὁποίαν ἔπρεπε νὰ ἀποδείξωμεν.

Ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ σύνθεσις ἀκολουθοῦν λοιπὸν δύο δρόμους ἀντιθέτους. Ἐνῷ ἡ ἀνάλυσις ἀναχωρεῖ συνήθως ἀπὸ τὸ ζήτημα, τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τὴν ἀπόδειξιν, ἢ τὴν κατασκευήν, διὰ νὰ φθάσῃ εἰς ἕνα γνωστὸν ζήτημα, ἢ εἰς μίαν γνωστὴν κατασκευήν, ἡ σύνθεσις ἀναχωρεῖ ἀπὸ ἕνα ζήτημα γνωστόν, ἢ ἀπὸ γνωστὴν κατασκευήν, διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸ ζήτημα, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἀποδειχθῇ, ἢ πρέπει νὰ κατασκευασθῇ.

Εἰς τὴν πραγματικότητα ἡ σύνθεσις εἶναι μία μέθοδος ἐκθέσεως. Εἶναι, πράγματι, εὐκολωτέρα ἀπὸ τὴν ἀνάλυσιν, ἀλλά, ὡς ὀλιγώτερον διδακτικὴ τῆς ἀναλύσεως, δὲν πρέπει νὰ χρησιμοποιῆται παρὰ μόνον εἰς ἁπλᾶς περιπτώσεις, τῶν ὁποίων ἡ λύσις εἶναι προφανής.

Γενικῶς, ὅταν πρόκειται νὰ λύσωμεν ἕνα δύσκολον γεωμετρικὸν πρόβλημα ἢ νὰ ἀποδείξωμεν μίαν δύσκολον πρότασιν, πρέπει νὰ ἀρχίζωμεν μὲ μίαν σύντομον ἀνάλυσιν καὶ νὰ ἀφήνωμεν εἰς τὴν σύνθεσιν τὴν φροντίδα τῆς διαφωτίσεως τῶν λεπτομερειῶν. Οὕτω ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ σύνθεσις ἀλληλοβοηθοῦνται, ἡ μὲν πρώτη ***διευθύνουσα*** τὴν πορείαν, ἡ δὲ δευτέρα ***ἀσφαλίζουσα*** αὐτήν.

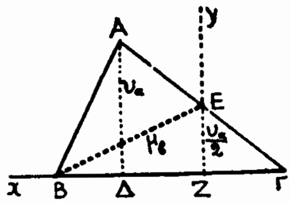
317. Πρόβλημα. ***Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν ΒΓ=α, τὴν διάμεσον ΒΕ=μ_β καὶ τὸ ὕψος του ΑΔ=υ_α.***

Ἀνάλυσις: Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω ΑΒΓ (*Σχ. 243*) τὸ ζητούμενον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν πλευρὰν ΒΓ=α, τὴν διάμεσον ΒΕ=μ_β καὶ τὸ ὕψος ΑΔ=υ_α.

Ἀπὸ τὸ Ε φέρομεν τὴν ΕΖ παράλληλον τῆς ΑΔ. Εἰς τὸ τρίγωνον

ΑΔΓ, ἡ ΕΖ ἄγεται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΑΓ καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΔ· ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ΑΔ· δηλ. εἶναι $ΕΖ=\frac{υ_α}{2}$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΖΕ ἔχει τὴν ὑποτείνουσάν του ΒΕ ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν διάμεσον $μ_β$ καὶ τὴν κάθετον πλευρὰν ΕΖ ἴσην μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους $υ_α$· ἄρα τὸ τρίγωνον αὐτὸ δύναται νὰ κατασκευασθῇ.



Σχ. 243.

Ἡ πλευρὰ ΒΓ τοῦ ζητουμένου τριγώνου εἶναι προέκτασις τῆς καθέτου πλευρᾶς ΒΖ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΒΖΕ καὶ ἴση μὲ α. Ἡ θέσις τῆς πλευρᾶς ΑΓ εἶναι τελείως ὡρισμένη, διότι γνωρίζομεν δύο σημεῖα της, τὰ Γ καὶ Ε.

Ἐπειδὴ τὸ Ε εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΓ, ἡ ΑΓ εἶναι διπλασία τῆς ΕΓ, ἡ ὁποία εἶναι τελείως ὡρισμένη.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι κατασκευήν:

Σύνθεσις: Κατασκευάζομεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΖΕ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν ὑποτείνουσαν ἴσην μὲ $μ_β$ καὶ τὴν κάθετον πλευρὰν ΕΖ ἴσην μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ δοθέντος ὕψους. Πρὸς τοῦτο κατασκευάζομεν μίαν ὀρθὴν γωνίαν xZy καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Zy ἕνα τμῆμα ΖΕ ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ $υ_α$. Μὲ κέντρον τὸ Ε καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν διάμεσον $μ_β$ γράφομεν τόξον κύκλου, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν Zx εἰς τὸ σημεῖον Β. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΕΒ καὶ ἔχομεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΖΕ.

Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΒΖ καὶ λαμβάνομεν τμῆμα ΒΓ=α· ἀπὸ τὸ Γ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΓΕ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς της λαμβάνομεν τμῆμα ΕΑ=ΓΕ· φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ τὸ σχηματισθὲν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἀπόδειξις: Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει τὴν ΒΓ=α καὶ τὴν $ΒΕ=μ_β$ ἐκ κατασκευῆς· εἶναι δὲ ἡ ΒΕ διάμεσος, διότι ἐλήφθη ΓΕ=ΕΑ. Φέρομεν τὴν ΑΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ. Αἱ ΑΔ καὶ ΕΖ εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΒΓ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΔΓ, ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΔ καὶ ἄγεται ἀπὸ τὸ μέσον Ε τῆς πλευρᾶς ΑΓ· ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ΑΔ· δηλ. εἶναι $ΕΖ=\frac{ΑΔ}{2}$· ἐπειδὴ $ΕΖ=\frac{υ_α}{2}$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$$\frac{υ_α}{2}=\frac{ΑΔ}{2} \quad ἢ \quad υ_α=ΑΔ.$$

Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΑΒΓ ἔχει καὶ τὸ ὕψος ΑΔ ἴσον μὲ τὸ δοθὲν ὕψος $υ_α$ καὶ ἑπομένως εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἐὰν λάβωμεν ΒΓ′=α, πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῆς ΒΖ, καὶ ἐργασθῶμεν ὁμοίως εὑρίσκομεν καὶ ἕνα ἄλλο τρίγωνον Γ′ΒΑ΄, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰ δοθέντα στοιχεῖα.

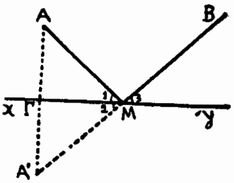
Διερεύνησις: Τὸ πρόβλημα ἔχει λύσιν, ὅταν δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὸ τρίγωνον ΒΖΕ, δηλ. ὅταν $\frac{υ_α}{2} < μ_β$ ἢ $υ_α < 2μ_β$.

Ὥστε, ἐὰν $υ_α < 2μ_β$, τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις.

318. Πρόβλημα. ***Δίδεται μία εὐθεῖα xy καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς xy. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας xy ἕνα σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $\widehat{AMx}=\widehat{BMy}$.***

Ἀνάλυσις: Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω Μ *(Σχ. 244)* τὸ ζητούμενον σημεῖον τῆς εὐθείας xy καὶ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι: γων.ΑΜx=γων.ΒΜy.

Προεκτείνομεν τὴν ΒΜ καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον Α φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν xy, ἡ ὁποία τέμνει τὴν xy εἰς τὸ σημεῖον Γ καὶ τὴν προέκτασιν τῆς ΒΜ εἰς τὸ σημεῖον Α′. Τὰ σχηματισθέντα ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΓΜ καὶ Α′ΓΜ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὴν κάθετον πλευρὰν ΓΜ κοινὴν καὶ τὰς γωνίας $Μ_1$ καὶ $Μ_2$ ἴσας, ὡς ἴσας πρὸς τὴν $Μ_3$ πράγματι ἡ γωνία $Μ_1$ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν $Μ_3$ ἐξ ὑποθέσεως, ἡ δὲ γωνία $Μ_2$ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν $Μ_3$, ὡς κατὰ κορυφήν· ἄρα θὰ εἶναι γων.$Μ_1$=γων.$Μ_2$. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων αὐτῶν συνάγομεν, ὅτι ΑΓ=ΓΑ′· δηλ. τὸ σημεῖον Α′ δύναται νὰ ὁρισθῇ ὡς συμμετρικὸν τοῦ Α πρὸς τὴν xy.



Σχ. 244.

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ζητούμενον σημεῖον Μ εἶναι σημεῖον τομῆς τῆς δοθείσης εὐθείας xy καὶ τῆς εὐθείας Α′Β, τῆς ὁποίας ἡ θέσις ὁρίζεται ἀκριβῶς, ὕστερα ἀπὸ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ σημείου Α′.

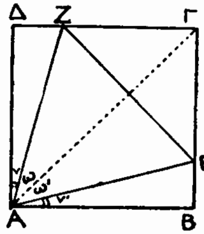
Σύνθεσις: Ἀπὸ τὸ δοθὲν σημεῖον Α φέρομεν τὴν κάθετον ΑΓ ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν xy καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως αὐτῆς λαμβάνομεν τμῆμα ΓΑ′=ΑΓ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν Α′Β, ἡ ὁποία τέμνει τὴν xy εἰς τὸ σημεῖον Μ· λέγομεν, ὅτι τὸ σημεῖον Μ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΜ. Τὰ σχηματισθέντα ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΓΜ καὶ Α′ΓΜ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς καθέτους πλευράς των ἴσας· ἤτοι ἔχουν τὴν πλευρὰν ΓΜ κοινήν, τὴν ΑΓ=ΓΑ′

ἐκ κατασκευῆς· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ γων.M_1=γων.M_2. Ἀλλὰ γων.M_2=γων.M_3 ὡς κατὰ κορυφήν· ἄρα θὰ εἶναι καὶ
γων.M_1=γων.M_3, δηλ. γων.AMx=γων.BMy.

319. Πρόβλημα. ***Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθὲν τετράγωνον, ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου μία κορυφὴ νὰ συμπίπτῃ μὲ μίαν κορυφὴν τοῦ τετραγώνου.***

Ἀνάλυσις: Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω ΑΕΖ *(Σχ. 245)* τὸ ζητούμενον ἰσόπλευρον τρίγωνον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ δοθὲν τετράγωνον ΑΒΓΔ.



Σχ. 245.

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΑΔΖ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των ἴσας, ἤτοι ΑΕ=ΑΖ, ὡς πλευρὰς τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΕΖ καὶ τὰς καθέτους πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΔ ἴσας, ὡς πλευρὰς τοῦ δοθέντος τετραγώνου· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ γων.ν=γων.ν′.

Φέρομεν τὴν διαγώνιον ΑΓ, ἡ ὁποία εἶναι καὶ διχοτόμος τῶν ἀπέναντι γωνιῶν Α καὶ Γ τοῦ τετραγώνου. Ἂν λοιπὸν ἀπὸ τὰς ἴσας γωνίας ΔΑΓ καὶ ΓΑΒ ἀφαιρέσωμεν τὰς ἴσας γωνίας ν καὶ ν′, αἱ ἀπομένουσαι γωνίαι ω καὶ ω′ εἶναι ἴσαι, ἤτοι εἶναι γων.ω=γων.ω′.

Ὥστε ΑΓ εἶναι διχοτόμος καὶ τῆς γωνίας Α τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΕΖ, ὁπότε θὰ εἶναι γων.ω=γων.ω′=30°.

Ὥστε αἱ πλευραὶ ΑΕ καὶ ΑΖ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου σχηματίζουν μὲ τὴν διαγώνιον ΑΓ τοῦ τετραγώνου γωνίαν 30°.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι κατασκευήν:

Σύνθεσις: Φέρομεν τὴν διαγώνιον ΑΓ τοῦ τετραγώνου. Μὲ κορυφὴν τὸ Α καὶ πλευρὰν τὴν ΑΓ κατασκευάζομεν μίαν γωνίαν ω′ ἴσην μὲ 30°. Ἡ πλευρὰ ΑΕ τῆς γωνίας αὐτῆς τέμνει τὴν πλευρὰν ΒΓ τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ εἰς τὸ σημεῖον Ε. Μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ ΑΕ γράφομεν ἕνα τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν πλευρὰν ΓΔ τοῦ τετραγώνου εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΖ καὶ ΖΕ καὶ τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΕΖ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἀπόδειξις: Τὸ τρίγωνον ΑΕΖ εἶναι ἰσοσκελές, ἐπειδὴ ΑΕ=ΑΖ, ὡς ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου. Ἀπὸ τὰ ἴσα ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΑΔΖ συνάγομεν, ὅτι γων.ν′=γων.ν. Ἂν ἀπὸ τὰς ἴσας γωνίας ΓΑΒ καὶ ΓΑΔ ἀφαιρέσωμεν τὰς ἴσας γωνίας ν καὶ ν′ αἱ ἀπομένουσαι γωνίαι ω καὶ ω′ εἶναι ἴσαι· ἤτοι εἶναι $\widehat{\omega'}=\widehat{\omega}$. Ἐπειδὴ $\widehat{\omega}=\widehat{\omega'}=30°$, ἡ

γωνία Α τῆς κορυφῆς τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΕΖ εἶναι 60°· ἄρα καὶ αἱ ἄλλαι δύο γωνίαι του θὰ εἶναι ἀπὸ 60° καὶ ἑπομένως τὸ τρίγωνον ΑΕΖ εἶναι ἰσόπλευρον.

Γεωμετρικὰ προβλήματα πρὸς λύσιν

533. (571). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν β καὶ τὴν διαφορὰν $\alpha-\gamma=\lambda$.

534. (572). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ὑποτείνουσαν α καὶ τὴν διαφορὰν $\beta-\gamma=\lambda$.

535. (600). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν μίαν κάθετον πλευρὰν καὶ τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ ἐγγεγραμ. κύκλου.

536. (601). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν μίαν ὀξεῖαν γωνίαν του καὶ τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ ἐγγεγραμ. κύκλου.

537. (608). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὴν κάθετον πλευρὰν β καὶ τὸ ὕψος υ_α.

538. (609). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν μίαν ὀξεῖαν γωνίαν καὶ τὴν ἀκτῖνα R τοῦ περιγεγραμ. κύκλου

539. (610). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ὑποτείνουσαν α καὶ τὴν διαφορὰν $B-\Gamma=\omega$.

540. (611). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ὕψος υ_α καὶ τὴν διάμεσον μ_α.

541. (612). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν Β καὶ τὴν διαφορὰν $\alpha-\gamma=\lambda$.

542. (613). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ὑποτείνουσαν α καὶ τὴν διαφορὰν $\beta-\gamma=\lambda$.

543. (614). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν Β καὶ τὸ ἄθροισμα $\alpha+\gamma=\lambda$.

544. (573). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν μίαν ἀπὸ τὰς ἴσας γωνίας του καὶ τὸ ἄθροισμα τῆς βάσεως καὶ μιᾶς τῶν ἴσων πλευρῶν του.

545. (599). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν, τὴν γωνίαν Β=Γ καὶ τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ ἐγγεγρ. κύκλου.

546. (597). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν Α τῆς κορυφῆς καὶ τὴν διαφορὰν τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους του υ_α.

547. (598). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν, τὰ τρία ὕψη του.

548. (568). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν:

1ον. Τὴν πλευρὰν ΒΓ=α καὶ τὰς διαμέσους α_μ καὶ β_μ.

2ον. Τὴν πλευρὰν ΒΓ=α καὶ τὰς διαμέσους α_μ καὶ γ_μ.

549. (569). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν ΒΓ=α, τὸ ὕψος υ_α καὶ τὴν διάμεσον α_μ.

550. (570). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὰς γωνίας του καὶ τὴν περίμετρόν του 2τ.

551. (574). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, τὴν γωνίαν Β καὶ τὴν διαφορὰν γ—β=λ.

552. (596). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν, τὰς γωνίας του καὶ τὸ ἄθροισμα δύο πλευρῶν του.

553. (602). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὰ μέσα τῶν τριῶν πλευρῶν του.

554. (603). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν δύο κορυφάς του καὶ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν του.

555. (604). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν δύο κορυφὰς καὶ τὸ ὀρθόκεντρον.

556. (605). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὰς γωνίας του καὶ τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ ἐγγεγραμ. κύκλου.

557. (606). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν διάμεσον μ_α καὶ τὰς γωνίας, τὰς ὁποίας σχηματίζει αὕτη μὲ τὰς πλευρὰς β καὶ γ.

558. (607). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν:

1ον. Τὰς πλευρὰς β καὶ γ καὶ τὴν διάμεσον μ_α.

2ον. Τὰς τρεῖς διαμέσους του.

559. (615). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν:

1ον. Τὴν κορυφὴν Α καὶ τοὺς πόδας Δ καὶ Ε τῶν ὑψῶν ΑΔ καὶ ΒΕ.

2ον. Τὴν κορυφὴν Α καὶ τοὺς πόδας Ε καὶ Ζ τῶν ὑψῶν ΒΕ καὶ ΓΖ.

560. (616). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, τὴν ἀκτῖνα R καὶ ὅτι Β=3Γ.

561. (617). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, τὸ ὕψος υ_β καὶ τὴν διάμεσον μ_α.

562. (618). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, τὸ ὕψος υ_β καὶ τὴν διάμεσον μ_β.

563. (619). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ὕψος υ_α, τὴν διχοτόμον δ_α καὶ τὴν ἀκτῖνα R.

564. (620). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν διάμεσον μ_α, τὴν διχοτόμον δ_α καὶ τὸ ὕψος υ_α.

565. (621). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὰ κέντρα τῶν τριῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων.

566. (622). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν Α καὶ τὰ μεγέθη ΒΗ καὶ ΓΗ τῶν τμημάτων, τὰ ὁποῖα περιλαμβάνονται μεταξὺ τῶν κορυφῶν Β καὶ Γ καὶ τοῦ ὀρθοκέντρου Η.

567. (623). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα παραλληλόγραμμον, ἂν γνωρίζωμεν μίαν γωνίαν του, μίαν πλευράν του καὶ μίαν διαγώνιόν του.

568. (637). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου δύο ἀπέναντι κορυφαὶ νὰ εἶναι δοθέντα σημεῖα, αἱ δὲ δύο ἄλλαι κορυφαὶ νὰ κεῖνται ἐπὶ δοθείσης περιφερείας Ο.

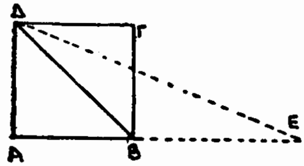
569. (632). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν *περίμετρόν του 2τ* καὶ τὴν διαγώνιόν του.

570. (633). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν

τὴν διαφορὰν τῶν δύο διαδοχικῶν πλευρῶν του καὶ τὴν γωνίαν τῶν διαγωνίων του.

571. (624). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράγωνον ΑΒΓΔ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν διαφορὰν τῆς διαγωνίου καὶ τῆς πλευρᾶς του.

572. (634). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράγωνον ἂν γνωρίζωμεν τὴν ἀπόστασιν τοῦ μέσου μιᾶς πλευρᾶς του ἀπὸ μίαν διαγώνιόν του.



Σχ. ἀσκ. 573.

573. (635). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ἄθροισμα τῆς πλευρᾶς του καὶ τῆς διαγωνίου του.

574. (636). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνας ρόμβος, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν περίμετρόν του καὶ τὴν διαφορὰν δύο προσκειμένων γωνιῶν του.

575. (625). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τραπέζιον, ἂν γνωρίζωμεν τὰς δύο βάσεις του καὶ τὰς δύο γωνίας, αἱ ὁποῖαι πρόσκεινται εἰς μίαν ἀπὸ τὰς βάσεις του.

576. (626). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τραπέζιον, ἂν γνωρίζωμεν τὰς τέσσαρας πλευράς του.

577. (627). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τραπέζιον, ἂν γνωρίζωμεν τὰς δύο βάσεις του καὶ τὰς διαγωνίους του.

578. (628). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράπλευρον, ἂν γνωρίζωμεν τὰ μέσα τῶν τριῶν πλευρῶν του καὶ μίαν εὐθεῖαν παράλληλον καὶ ἴσην πρὸς τὴν τετάρτην πλευράν.

579. (629). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράπλευρον, ἂν γνωρίζωμεν τὰς τέσσαρας πλευράς του καὶ τὴν γωνίαν, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν δύο ἀπέναντι πλευραί του.

580. (630). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα πεντάγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του (Lionnet).

581. (631). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράπλευρον, ἂν γνωρίζωμεν τὰς τέσσαρας πλευράς του καὶ τὴν μίαν ἀπὸ τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ μέσα δύο ἀπέναντι πλευρῶν του.

582. (578). Εἰς δοθὲν τετράγωνον νὰ ἐγγραφῇ ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ μία κορυφὴ νὰ κεῖται εἰς τὸ μέσον μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου.

583. (579). Εἰς δοθὲν παραλληλόγραμμον νὰ ἐγγραφῇ ἕνα παραλληλόγραμμον.

584. (580). Εἰς δοθέντα κύκλον, νὰ ἐγγραφῇ ἕνα τραπέζιον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὸ ὕψος του καὶ τὴν διαφορὰν τῶν βάσεών του.

585. (581). Εἰς δοθέντα κυκλικὸν τομέα, νὰ ἐγγραφῇ κύκλος.

586. (575). Δίδεται μία γωνία xOy καὶ ἕνα σημεῖον Μ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Ox. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς Ox ἕνα ἄλλο σημεῖον Ν, τὸ ὁποῖον νὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τὸ Μ καὶ ἀπὸ τὴν πλευρὰν Oy.

587. (576). Νὰ ἀχθῇ μία εὐθεῖα ΔΕ παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ εἰς τρόπον, ὥστε νὰ εἶναι ΒΔ=ΑΕ.

588. (577). Δίδεται τὸ ἰσοσκελὲς καὶ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($\widehat{A}$ ὀρθή) καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τοῦ ὕψους του ΑΔ ἕνα σημεῖον Ο τοιοῦτον, ὥστε

αἱ κάθετοι ΟΕ καὶ ΟΖ, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ Ο ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως, νὰ ἔχουν ἄθροισμα ἴσον μὲ τὴν ΟΔ.

589. (582). Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι $Π_1$ καὶ $Π_2$ καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ ἀχθοῦν ἀπὸ τὰ σημεῖα αὐτὰ παράλληλοι εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι νὰ τέμνουν τὰς $Π_1$ καὶ $Π_2$ οὕτως, ὥστε τὸ σχηματιζόμενον παραλληλόγραμμον νὰ εἶναι ρόμβος.

590. (583). Δίδεται περιφέρεια Ο καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ μία χορδὴ τοιαύτη, ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν δύο τόξων, ποὺ ὁρίζει, νὰ εἶναι ἴση μὲ δοθὲν τόξον τῆς δοθείσης περιφερείας.

591. (584). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Ρ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς δοθείσης γωνίας xOy, νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα περατουμένη εἰς τὰς πλευράς της καὶ τοιαύτη, ὥστε νὰ διαιρῆται εἰς δύο ἴσα μέρη ὑπὸ τοῦ σημείου Ρ.

592. (585). Δίδεται κύκλος Ο καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐκτὸς αὐτοῦ. Νὰ ἀχθῇ ἐκ τοῦ Α μία χορδή, τῆς ὁποίας τὰ ἄκρα νὰ ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἐκ τοῦ σημείου Β.

593. (586). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Ρ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς κύκλου Ο νὰ ἀχθῇ μία χορδὴ ΑΡΒ τοιαύτη, ὥστε ἡ σχηματιζομένη γωνία ΑΓΒ ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων τῆς περιφερείας Ο εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β νὰ εἶναι μεγίστη.

594 (587). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Ρ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς δοθείσης γωνίας xOy, νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὰς πλευρὰς Ox καὶ Oy εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ τοιαύτη ὥστε, ΡΑ=ΑΒ.

595. (588). Νὰ ἀχθοῦν ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β δύο παράλληλοι, τῶν ὁποίων ἡ ἀπόστασις νὰ εἶναι ἴση μὲ δοθὲν μῆκος δ.

596. (589). Δίδονται δύο ζεύγη παραλλήλων τεμνομένων καὶ ἕνα σημεῖον Ρ. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Ρ μία τέμνουσα τοιαύτη, ὥστε τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, τὰ περιλαμβανόμενα μεταξὺ τῶν παραλλήλων, νὰ εἶναι ἴσα.

597. (590). Δύο κύκλοι Ο καὶ Ο′ τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β· ἀπὸ τὸ Α φέρομεν μίαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὸ Μ καὶ τὴν Ο′ εἰς τὸ Μ′. Ἐὰν Δ εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ΜΑΜ′, ἡ ὁποία ἄγεται εἰς τὸ Α καὶ τῆς διακέντρου ΟΟ′, νὰ ὁρισθῇ ἡ θέσις τοῦ Δ, ἵνα τὸ σημεῖον Α εἶναι τὸ μέσον τῆς ΜΜ′.

598. (591). Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς βάσεως ΒΓ ἑνὸς δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ ἕνα σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε, ἐὰν φέρωμεν τὰς παραλλήλους ΜΔ καὶ ΜΕ πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ, τὸ σχηματιζόμενον παραλληλόγραμμον ΑΕΜΔ νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν περίμετρον 2τ.

599. (592) Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Ρ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς δοθείσης γωνίας xAy νὰ ἀχθῇ μία τέμνουσα τοιαύτη, ὥστε ἡ περίμετρος τοῦ σχηματιζομένου τριγώνου νὰ εἶναι ἴση μὲ δοθὲν μῆκος 2τ.

600. (593). Εἰς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε καὶ τοιαύτη ὥστε νὰ εἶναι ΔΕ=ΔΒ+ΕΓ.

601. (594). Ἀπὸ δύο σημεῖα Α καὶ Β, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ δοθείσης περιφερείας, νὰ ἀχθοῦν δύο χορδαὶ παράλληλοι, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ νὰ εἶναι ἴση μὲ δοθὲν μῆκος λ.

602. (595). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας νὰ εὑρεθῇ ἕνα σημεῖον, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα νὰ εἶναι ἐλάχιστον. (Δύο περιπτώσεις).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ'.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

---

320. Εἰς προηγούμενα κεφάλαια τοῦ Πρώτου Βιβλίου ἐδώσαμεν τὸν ὁρισμὸν τοῦ γεωμετρικοῦ τόπου καὶ ἐγνωρίσαμεν τοὺς κάτωθι 8 γεωμετρικοὺς τόπους:

1ον. ***Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὰ ἄκρα ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος, εἶναι ἡ μεσοκάθετος αὐτοῦ.*** (§ 137).

2ον. ***Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὰς πλευρὰς μιᾶς γωνίας εἶναι ἡ διχοτόμος αὐτῆς.*** (§ 144).

3ον. ***Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν δοθεῖσαν ἀπόστασιν λ ἀπὸ δοθεῖσαν εὐθεῖαν, εἶναι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἑκατέρωθεν αὐτῆς καὶ εἰς ἀπόστασιν λ.*** (§ 195).

4ον. ***Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ δύο παραλλήλους εὐθείας, εἶναι μία τρίτη παράλληλος εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἀπέχει ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὰς δύο πρώτας.*** (§ 239).

5ον. ***Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσην ἀπόστασιν λ ἀπὸ ὡρισμένον σημεῖον Ο, εἶναι ἡ περιφέρεια κύκλου, ἡ ὁποία, ἔχει κέντρον τὸ δοθὲν σημεῖον Ο καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν ἀπόστασιν λ.*** (§ 79).

6ον. ***Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ.*** (§ 241).

7ον. ***Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, ἀπὸ τὰ ὁποῖα δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα φαίνεται ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν, εἶναι ἡ περιφέρεια κύκλου, ἡ ὁποία γράφεται μὲ διάμετρον τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα.*** (§ 295).

8ον. *Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, ἀπὸ τὰ ὁποῖα δοθεῖσα εὐθεῖα φαίνεται ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν, εἶναι τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ χορδὴν τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν καὶ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν*. (§ 295).

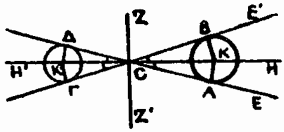
321. Προσδιορισμὸς τοῦ τόπου. Διὰ νὰ ἀναγνωρίσωμεν τὴν ***φύσιν*** τοῦ γεωμετρικοῦ τόπου τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἔχουν δοθεῖσαν ἰδιότητα, καὶ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν ***θέσιν*** τούτου, ὡς πρὸς τὰ δοθέντα ἢ γνωστὰ μεγέθη, ἐξετάζομεν ἕνα ἢ μερικὰ μεμονωμένα σημεῖα τοῦ τόπου καὶ ἀναζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν ποία εἶναι ἡ γραμμή, ἡ ὁποία δύναται νὰ διέλθῃ διὰ τῶν σημείων τούτων.

Τὰ κάτωθι προβλήματα θὰ μᾶς δείξουν τὴν πορείαν, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἀκολουθοῦμεν διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς φύσεως καὶ τῆς θέσεως ἑνὸς γεωμετρικοῦ τόπου.

322. Πρόβλημα. ***Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται δύο δοθεισῶν εὐθειῶν.***

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθ' ὅσον αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι τέμνονται ἢ εἶναι παράλληλοι.

Ι. Περίπτωσις. Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι Ε καὶ Ε′, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ Ο καὶ Κ τὸ κέντρον μιᾶς περιφερείας, ἡ ὁποία ἐφάπτεται τῶν Ε καὶ Ε′ εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Τὸ Κ εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.



Σχ. 246.

Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΚΑ καὶ ΚΒ εἰς τὰ σημεῖα τῆς ἐπαφῆς. Αἱ ΚΑ καὶ ΚΒ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς ΟΕ καὶ ΟΕ′ ἀντιστοίχως, ὡς ἀκτῖνες καταλήγουσαι εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ ἴσαι, ὡς ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου, ἕπεται, ὅτι τὸ Κ κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου Η′ΟΗ τῆς γωνίας ΕΟΕ′.

Ἀντιστρόφως. Ἔστω Κ′ τυχὸν σημεῖον τῆς διχοτόμου Η′ΟΗ τῆς γωνίας τῶν εὐθειῶν Ε καὶ Ε′. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ Κ′ εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου, δηλ. εἶναι κέντρον περιφερείας, ἡ ὁποία ἐφάπτεται τῶν εὐθειῶν Ε καὶ Ε′.

Πράγματι· ἀπὸ τὸ Κ′ φέρομεν τὴν Κ′Γ κάθετον ἐπὶ τὴν Ε′ καὶ τὴν Κ′Δ κάθετον ἐπὶ τὴν Ε. Ἐπειδὴ τὸ Κ′ εἶναι σημεῖον τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας τῶν εὐθειῶν Ε καὶ Ε′, θὰ εἶναι Κ′Γ=Κ′Δ. Ἐὰν λοι-

πὸν γράψωμεν περιφέρειαν μὲ κέντρον τὸ Κ' καὶ ἀκτῖνα Κ'Γ=Κ'Δ, ἡ περιφέρεια αὐτὴ θὰ ἐφάπτεται τῶν εὐθειῶν Ε καὶ Ε'.

Τὸ τυχὸν λοιπὸν σημεῖον Κ' τῆς διχοτόμου Η'ΟΗ εἶναι κέντρον περιφερείας, ἡ ὁποία ἐφάπτεται τῶν εὐθειῶν Ε καὶ Ε'.

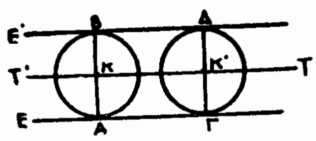
Ὥστε ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι ἡ διχοτόμος Η'ΟΗ τῆς γωνίας Ε, ποὺ σχηματίζουν αἱ τεμνόμεναι εὐθεῖαι.

Ἐὰν φέρωμεν καὶ τὴν διχοτόμον ΟΖ τῆς παραπληρωματικῆς γωνίας τῆς ΕΟΕ', ἀποδεικνύομεν ὁμοίως, ὅτι καὶ ἡ ΖΟΖ' εἶναι ὁ ζητούμενος τόπος.

Ὥστε ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν, ποὺ σχηματίζουν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι Ε καὶ Ε'.

ΙΙ. Περίπτωσις. Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι Ε καὶ Ε', αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι καὶ Κ τὸ κέντρον μιᾶς περιφερείας, ἡ ὁποία ἐφάπτεται τῶν εὐθειῶν αὐτῶν εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Τὸ Κ εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.

Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, ἡ ὁποία, ὡς συνδέουσα τὰ σημεῖα ἐπαφῆς δύο παραλλήλων ἐφαπτομένων τῆς περιφερείας Κ, θὰ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου Κ. Ἐπειδὴ ΚΑ=ΚΒ, ὡς ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου, ἕπεται, ὅτι τὸ κέντρον Κ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς παραλλήλους Ε καὶ Ε' ἑπομένως τὸ Κ (§ 320. 4ον) κεῖται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὰς Ε καὶ Ε' καὶ ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως αὐτῶν.

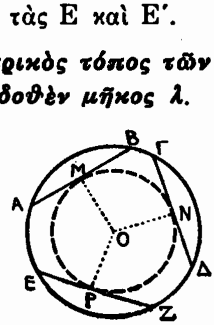


Σχ. 247.

Ὥστε ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι ἡ παράλληλος Τ'Τ πρὸς τὰς Ε καὶ Ε' καὶ ἡ ὁποία ἀπέχει ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὰς Ε καὶ Ε'.

323. Πρόβλημα. ***Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν μέσων ἴσων χορδῶν κύκλου, αἱ ὁποῖαι ἔχουν δοθὲν μῆκος λ.***

Λύσις. Ἔστω ὁ κύκλος Ο *(Σχ. 248)* καὶ ΑΒ καὶ ΓΔ δύο χορδαί του ἴσαι μὲ λ. Ἔστω Μ τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΑΒ καὶ Ν τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΓΔ. Τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν εἶναι προφανῶς σημεῖα τοῦ τόπου.



Σχ. 248.

Φέρομεν τὰς εὐθείας ΟΜ καὶ ΟΝ. Αἱ ΟΜ καὶ ΟΝ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς χορδὰς ΑΒ καὶ ΓΔ, διότι συνδέουν τὸ κέντρον τοῦ κύκλου μὲ τὰ μέσα Μ καὶ Ν τῶν χορδῶν αὐτῶν· εἶναι δὲ καὶ ἴσαι, ὡς ἀποστά-

σεις τῶν ἴσων χορδῶν ΑΒ καὶ ΓΔ. Παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν ἀπέχουν ἀπὸ τὸ κέντρον Ο ἀπόστασιν σταθεράν· ἄρα (§ 320. 5ον) κεῖνται ἐπὶ περιφερείας, ἡ ὁποία γράφεται μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου Ο ἀπὸ μιᾶς χορδῆς, ἴσης μὲ τὸ δοθὲν μῆκος λ.

Ἀντιστρόφως. Ἔστω Ρ τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας.(Ο, ΟΜ). Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ Ρ εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου, δηλ. ὅτι εἶναι τὸ μέσον μιᾶς χορδῆς τοῦ δοθέντος κύκλου ἴσης πρὸς τὴν δοθεῖσαν χορδὴν λ.

Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΡ τῆς ἐσωτερικῆς περιφερείας καὶ κάθετον εἰς τὸ ἄκρον Ρ αὐτῆς, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ. Τὸ σημεῖον Ρ εἶναι μέσον τῆς χορδῆς ΕΖ, διότι ἡ ΟΡ εἶναι κάθετος, ἐκ κατασκευῆς, ἐπὶ τὴν ΕΖ. Αἱ χορδαὶ ΕΖ καὶ ΑΒ εἶναι ἴσαι, διότι αἱ ἀποστάσεις των ΟΜ καὶ ΟΡ εἶναι ἴσαι, ὡς ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου. Ὥστε τὸ τυχὸν σημεῖον Ρ τῆς περιφερείας (Ο, ΟΜ) εἶναι μέσον μιᾶς χορδῆς ἴσης πρὸς τὴν δοθεῖσαν.

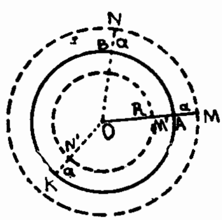
Ὥστε ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι περιφέρεια κύκλου, ὁμόκεντρος πρὸς τὴν δοθεῖσαν καὶ ἡ ὁποία ἔχει ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου Ο ἀπὸ χορδὴν ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν λ.

324. Πρόβλημα. ***Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν δοθεῖσαν ἀπόστασιν α ἀπὸ περιφέρειαν ἀκτῖνος R.***

Ἔστω Ο τὸ κέντρον τῆς δοθείσης περιφερείας *(Σχ. 249)*. Φέρομεν μίαν τυχοῦσαν ἀκτῖνα ΟΑ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς της λαμβάνομεν τμῆμα ΑΜ=α.

Ἐπειδὴ τὸ Μ ἀπέχει ἀπὸ τὴν περιφέρειαν Ο ἀπόστασιν ΑΜ=α, τὸ Μ εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.

Ἐπειδὴ ΟΜ=ΟΑ+ΑΜ ἢ ΟΜ=R+α, τὸ σημεῖον Μ ἀπέχει ἀπὸ τὸ σταθερὸν σημεῖον Ο ἀπόστασιν σταθερὰν καὶ ἴσην μὲ R+α. Ἄρα (§ 320. 5ον) τὸ Μ κεῖται ἐπὶ περιφερείας κύκλου, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα R+α.



Σχ. 249.

Γράφομεν τὴν ὁμόκεντρον περιφέρειαν (Ο, ΟΜ).

Ἀντιστρόφως. Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι τὸ τυχὸν σημεῖον Ν τῆς περιφερείας (Ο, ΟΜ) εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου, δηλ. ἀπέχει ἀπόστασιν α ἀπὸ τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν Ο.

Πράγματι· φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ON τῆς ἐξωτερικῆς περιφερείας, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ἐσωτερικὴν περιφέρειαν εἰς ἕνα σημεῖον B. Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $ON = R + α$ καὶ $OB = R$.

Ἀφαιροῦμεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$ON - OB = (R + α) - R \quad ἢ \quad BN = α.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ τυχὸν σημεῖον N τῆς περιφερείας (O, OM) ἀπέχει ἀπὸ τὴν περιφέρειαν (O, R) ἀπόστασιν $BN = α$. Ἄρα εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.

Ὥστε ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι μία περιφέρεια, ὁμόκεντρος τῆς δοθείσης καὶ ἡ ὁποία ἔχει ἀκτῖνα ἴσην μὲ $R + α$.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος OA λάβωμεν ἕνα μῆκος $AM' = α$ καὶ ἐργασθῶμεν ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι καὶ ἡ περιφέρεια, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τὸ O καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν διαφορὰν $R - α$, εἶναι ὁ ζητούμενος τόπος.

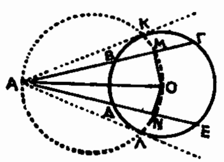
Ὥστε ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν δοθεῖσαν ἀπόστασιν α ἀπὸ δοθεῖσαν περιφέρειαν ἀκτῖνος R, εἶναι δύο ὁμόκεντροι περιφέρειαι πρὸς τὴν δοθεῖσαν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἀκτῖνας, ἡ μὲν μία $R + α$, ἡ δὲ ἄλλη $R - α$.

325. Πρόβλημα. ***Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν μέσων χορδῶν κύκλου, αἱ ὁποῖαι προεκτεινόμεναι διέρχονται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον.***

Διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις, καθόσον τὸ δοθὲν σημεῖον κεῖται ἐκτὸς τῆς περιφερείας, ἐπὶ τῆς περιφερείας ἢ ἐντὸς τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.

I. Περίπτωσις. Τὸ δοθὲν σημεῖον κεῖται ἐκτὸς τῆς περιφερείας.

Ἔστω ὁ κύκλος O *(Σχ. 250)* καὶ ἕνα σημεῖον A ἐκτὸς αὐτοῦ· ἀπὸ τὸ A φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν ΑΒΓ τῆς περιφερείας O, ἡ ὁποία τέμνει αὐτὴν εἰς τὰ σημεῖα B καὶ Γ. Ἔστω M τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΒΓ· τὸ σημεῖον M εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου, διότι εἶναι τὸ μέσον χορδῆς, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ A.



Σχ. 250.

Φέρομεν τὴν OM· ἡ OM εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν ΒΓ, διότι συνδέει τὸ κέντρον τοῦ κύκλου O μὲ τὸ μέσον M τῆς χορδῆς καὶ ἑπομένως ἡ γωνία AMO εἶναι ὀρθή. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν AO, ἡ ὁποία συνδέει τὸ δοθὲν σημεῖον A καὶ τὸ κέντρον O τοῦ κύκλου. Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα

ΑΟ, φαίνεται ἀπὸ τὸ Μ ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν ΑΜΟ· ἄρα τὸ Μ κεῖται (§ 320. 7ον) ἐπὶ περιφερείας κύκλου, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὴν ΑΟ.

Γράφομεν λοιπὸν τὴν περιφέρειαν, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὴν ΑΟ καὶ ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὰ σημεῖα Κ καὶ Λ. Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ τόξον ΚΟΛ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου Ο καὶ τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ τὰς ἐφαπτομένας ΑΚ καὶ ΑΛ, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ δοθὲν σημεῖον Α πρὸς τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν Ο, εἶναι ὁ τόπος τῶν μέσων χορδῶν τοῦ κύκλου Ο, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὸ Α.

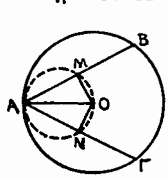
Ἀντιστρόφως. Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι κάθε σημεῖον τοῦ τόξου ΚΟΛ εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου· δηλ. εἶναι τὸ μέσον μιᾶς χορδῆς τοῦ κύκλου Ο, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ δοθὲν σημεῖον Α.

Πράγματι· ἔστω Ν *(Σχ. 250)* τυχὸν σημεῖον τοῦ τόξου ΚΟΛ· φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΝΑ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε· φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΟΝ· ἡ γωνία ΑΝΟ εἶναι ὀρθή, ὡς ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ ἡμικύκλιον ΑΝΟ καὶ ἑπομένως ἡ ΟΝ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ· ἐπειδὴ ἡ ΟΝ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν ΔΕ, τὸ σημεῖον Ν εἶναι τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΔΕ· ὥστε τὸ σημεῖον Ν εἶναι μέσον τῆς χορδῆς ΔΕ, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Α καὶ ἑπομένως εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.

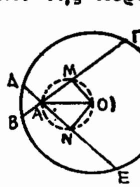
Ὥστε ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι τόξον περιφερείας κύκλου, ὁ ὁποῖος γράφεται μὲ διάμετρον τὴν ΑΟ καὶ τὸ ὁποῖον τόξον κεῖται ἐντὸς τοῦ δοθέντος κύκλου.

ΙΙ. Περίπτωσις. Τὸ δοθὲν σημεῖον κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας.

Ἔστω ὁ κύκλος Ο *(Σχ. 251)* καὶ ἕνα σημεῖον Α ἐπὶ τῆς περιφερείας του· ἀπὸ τὸ Α φέρομεν μίαν τυχοῦσαν χορδὴν ΑΒ τοῦ κύκλου Ο. Ἔστω Μ τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΑΒ· τὸ Μ εἶναι προφανῶς σημεῖον τοῦ τόπου.



Σχ. 251.



Σχ. 252.

Φέρομεν τὴν ΟΜ καὶ τὴν ΟΑ καὶ ἀποδεικνύομεν, ὅπως εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, ὅτι τὸ Μ κεῖται ἐπὶ περιφερείας κύκλου, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὴν ΑΟ.

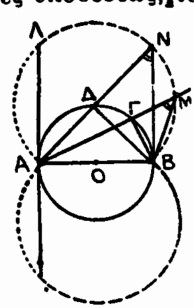
ΙΙΙ. Περίπτωσις. Τὸ δοθὲν σημεῖον κεῖνται ἐντὸς τοῦ κύκλου.

Ἔστω ὁ κύκλος Ο *(Σχ. 252)* καὶ Α τὸ δοθὲν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου. Φέρομεν μίαν τυχοῦσαν χορδὴν ΒΑΓ· ἔστω Μ τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΒΓ· τὸ Μ εἶναι προφανῶς σημεῖον τοῦ τόπου.

Φέρομεν τὴν ΟΜ καὶ τὴν ΟΑ καὶ ἀποδεικνύομεν, ὅπως εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, ὅτι τὸ Μ κεῖται ἐπὶ περιφερείας, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὴν ΟΑ.

326. Πρόβλημα. ***Ἀπὸ τὸ ἄκρον μιᾶς διαμέτρου ΑΒ ἑνὸς κύκλου Ο φέρομεν μίαν χορδὴν ΑΓ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως αὐτῆς λαμβάνομεν τμῆμα ΓΜ=ΓΒ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου Μ, ὅταν ἡ χορδὴ ΑΓ στρέφεται περὶ τὸ σημεῖον Α.***

Φέρομεν τὴν χορδὴν ΒΓ *(Σχ. 253)* καὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΜ· ἡ γωνία ΑΓΒ εἶναι ὀρθή, ὡς ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ ἡμικύκλιον ΑΓΒ· ἄρα καὶ ἡ παραπληρωματική της γωνία ΒΓΜ εἶναι ὀρθή. Ἐπειδὴ ΓΜ=ΓΒ, ἐξ ὑποθέσεως, τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΓΜ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἐπομένως ἡ γωνία Μ εἶναι 45°. Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ διάμετρος ΑΒ, ἡ ὁποία εἶναι ὡρισμένη κατὰ τὴν θέσιν καὶ τὸ μέγεθος, φαίνεται ἀπὸ τὸ Μ ὑπὸ γωνίαν 45°· ἄρα τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τόξου κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ χορδὴν τὴν ΑΒ καὶ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ 45°. Γράφομεν τὸ κυκλικὸν τμῆμα (§ 297) ΑΜΒ, τὸ ὁποῖον δέχεται γωνίαν 45°.



Σχ. 253.

Ὅταν ἡ ΑΓ, στρεφομένη περὶ τὸ Α, γίνῃ ἐφαπτομένη ΑΛ τοῦ κύκλου Ο εἰς τὸ Α, εἶναι φανερόν, ὅτι τὰ σημεῖα τοῦ τόξου ΑΛ δὲν εἶναι σημεῖα τοῦ τόπου.

Ἀντιστρόφως. Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι κάθε τυχὸν σημεῖον τοῦ τόξου ΒΜΛ εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.

Πράγματι· ἔστω Ν τυχὸν σημεῖον τοῦ τόξου ΒΜΛ· φέρομεν τὴν χορδὴν ΑΝ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὸ σημεῖον Δ. Φέρομεν τὰς χορδὰς ΒΔ καὶ ΒΝ. Ἡ γωνία ΑΔΒ εἶναι ὀρθή, ὡς ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον. Τὸ τρίγωνον ΒΔΝ εἶναι ὀρθογώνιον, διότι ἡ γωνία ΒΔΝ εἶναι ὀρθή, ὡς παραπληρωματικὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας ΑΔΒ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία Ν εἶναι 45°, διότι εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΑΜΒ, τὸ ὁποῖον δέχεται γωνίαν 45°, ἕπεται ὅτι καὶ ἡ ἄλλη ὀξεῖα γωνία τοῦ ὀρθογ. τριγώνου ΒΔΝ εἶναι 45°. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΒΔΝ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι ΔΝ=ΔΒ· ἄρα τὸ Ν εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.

Ὥστε ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι τὸ μέρος ΒΜΛ τοῦ τόξου τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΑΜΒ.

Ἐὰν ἡ χορδὴ ΑΓ κινηθῇ πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῆς διαμέτρου ΑΒ, εὑρίσκομεν καὶ ἕνα ἄλλο τόξον ΒΜ'Λ' συμμετρικὸν τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΒΜΑ, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ ζητούμενος τόπος.

Ἀσκήσεις ἐπὶ τοῦ Κεφαλαίου τῶν γεωμετρικῶν τόπων

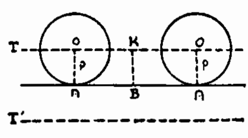
603. (638). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν κύκλων, οἱ ὁποῖοι τέμνουν, ἀπὸ τὰς πλευρὰς δοθείσης γωνίας, χορδὰς ἴσας.

604. (639). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν κύκλων, οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται δοθείσης περιφερείας εἰς δοθὲν σημεῖον αὐτῆς.

605. (640). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν δοθεῖσαν ἀκτῖνα ρ καὶ αἱ ὁποῖαι ἀποτέμνουν ἀπὸ δοθεῖσαν εὐθεῖαν xy χορδὰς δοθέντος μήκους.

606. (641). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τῶν τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

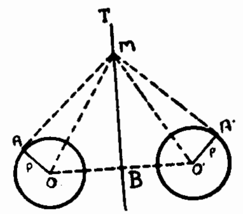
607. (642). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν δοθεῖσαν ἀκτῖνα καὶ ἐφάπτονται δοθείσης εὐθείας.



Σχ. ἀσκ. 607.

608. (643). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἄγονται ἴσαι ἐφαπτόμεναι πρὸς δύο δοθείσας καὶ ἴσας περιφερείας.

609. (644). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α καὶ ἔχουν δοθεῖσαν ἀκτῖνα.



Σχ. ἀσκ. 608.

610. (645). Δίδονται δύο ὁμόκεντροι περιφέρειαι καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κορυφῶν τῶν ὀρθῶν γωνιῶν, τῶν ὁποίων ἡ μία πλευρὰ ἐφάπτεται τῆς ἐσωτερικῆς περιφερείας καὶ ἡ ἄλλη τῆς ἐξωτερικῆς.

611. (646). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κορυφῶν τῶν ὀρθῶν γωνιῶν, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ ἐφάπτονται δοθείσης περιφερείας.

612. (647). Δίδονται δύο ὁμόκεντροι περιφέρειαι καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κορυφῶν τῶν ἴσων γωνιῶν, τῶν ὁποίων ἡ μία πλευρὰ ἐφάπτεται τῆς ἐξωτερικῆς περιφερείας καὶ ἡ ἄλλη πλευρὰ τῆς ἐσωτερικῆς.

613. (648). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων ἀπὸ τὰ ὁποῖα αἱ ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι πρὸς δοθεῖσαν περιφέρειαν σχηματίζουν ἴσας γωνίας.

614. (649). Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Α δοθείσης περιφερείας Ο φέρομεν ἐφαπτομένην καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς καὶ ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου ἐπαφῆς Α μήκη $AM=AM'=\lambda$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων Μ καὶ Μ', ὅταν τὸ Α γράφῃ τὴν περιφέρειαν.

615. (650). Δίδεται μία γωνία xOy καὶ ἕνα σταθερὸν σημεῖον Α ἐπὶ τῆς Ox. Γράφομεν περιφέρειαν Κ ἐφαπτομένην τῆς Ox εἰς τὸ Α καὶ τῆς Oy εἰς ἕνα σημεῖον Β. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου Β, ὅταν ἡ πλευρὰ Oy στρέφεται περὶ τὸ Ο.

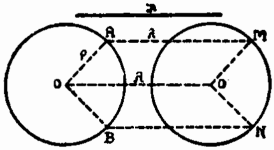
616. (651). Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν δοθεῖσαν ἀκτῖνα καὶ αἱ ὁποῖαι τέμνουσαι δοθεῖσαν περιφέρειαν, ὁρίζουν μίαν κοινὴν χορδὴν δοθέντος μήκους.

617. (652). Μία εὐθεῖα, δοθέντος μήκους λ, κινεῖται οὕτως, ὥστε νὰ μένῃ

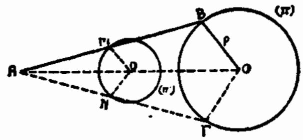
παράλληλος πρὸς ἑαυτὴν καὶ νὰ ἐγγίζῃ δοθεῖσαν περιφέρειαν μὲ ἕνα ἀπὸ τὰ ἄκρα της. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ ἄλλου ἄκρου της.

618. (653). Εὐθεῖα μήκους λ κινεῖται οὕτως, ὥστε τὰ ἄκρα της νὰ ἐγγίζουν δύο καθέτους εὐθείας. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ μέσου τῆς δοθείσης εὐθείας.

619. (654). Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν μέσων τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς δοθέντος κύκλου, μέχρι τῆς περιφερείας του.



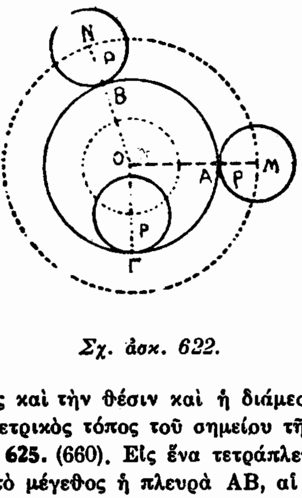
Σχ. ἀσκ. 617.



Σχ. ἀσκ. 619.

620. (655). Μία εὐθεῖα ΑΒ κινεῖται, οὕτως ὥστε τὰ ἄκρα της νὰ ἐγγίζουν δύο εὐθείας καθέτους Ox, Oy. Σχηματίζομεν τὸ ὀρθογώνιον ΒΟΑΓ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῆς κορυφῆς Γ.

621. (656). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου ἐπαφῆς Μ δύο περιφερειῶν μεταβλητῶν ἀκτίνων, αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται ἀντιστοίχως μιᾶς εὐθείας xy εἰς δύο δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β.



Σχ. ἀσκ. 622.

622. (657). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ κέντρου ἑνὸς κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει δοθεῖσαν ἀκτῖνα καὶ ἐφάπτεται δοθείσης περιφερείας.

623. (658). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ συμμετρικοῦ δοθέντος σημείου Α πρὸς ὅλας τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Ο.

624. (659). Ἡ πλευρὰ ΒΓ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι σταθερὰ κατὰ τὸ μέγεθος καὶ τὴν θέσιν καὶ ἡ διάμεσός του ΑΔ ἔχει δοθὲν μῆκος λ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τῶν τριγώνων ΑΒΓ.

625. (660). Εἰς ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ὡρισμένη κατὰ τὴν θέσιν καὶ τὸ μέγεθος ἡ πλευρὰ ΑΒ, αἱ δὲ δύο ἄλλαι πλευραὶ ΑΔ καὶ ΒΓ καὶ μία διαγώνιος ἔχουν δοθέντα μήκη. Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τοῦ μέσου Μ τῆς ἄλλης διαγωνίου του καὶ ὁ τόπος τοῦ μέσου Ο τῆς εὐθείας ΜΝ, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα τῶν δύο διαγωνίων του;

626. (661). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς κύκλου Ο φέρομεν τὴν τέμνουσαν αὐτοῦ ΑΒΓ. Ἀπὸ τὸ Γ ὑψοῦμεν κάθετον ΓΔ ἐπὶ τὴν ΑΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Δ. Κατασκευάζομεν ἔπειτα ἕνα ὀρθογώνιον ΑΓΔΕ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου Ε, ὅταν τὸ Γ γράφῃ τὴν περιφέρειαν.

622. (662). Μία σταθερὰ γωνία εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς μίαν περιφέρειαν

κύκλου Ο καὶ μία ἀπὸ τὰς πλευράς της διέρχεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Ρ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ μέσου τῆς χορδῆς, ἡ ὁποία συνδέει τὰ ἄκρα τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας.

628. (663). Μία σταθερὰ γωνία ΑΒΓ ἔχει τὴν κορυφήν της Β ἐπὶ μιᾶς περιφερείας, αἱ δὲ πλευραί της εἶναι χορδαὶ αὐτῆς. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ μέσου τῆς χορδῆς, ἡ ὁποία συνδέει τὰ ἄκρα τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας αὐτῆς.

629 (664). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῆς κορυφῆς Γ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι ὡρισμένη καὶ τοῦ ὁποίου ἡ διάμεσος ΑΔ ἔχει δοθὲν μῆκος λ.

630. (665). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων τῶν ἰσοσκελῶν τραπεζίων, τὰ ὁποῖα σχηματίζονται, ἂν φέρωμεν παραλλήλους πρὸς τὴν βάσιν ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου.

631. (666). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Δ τῆς βάσεως ΒΓ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς ΒΑ καὶ ΓΑ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς πλευρὰς εἰς τὰς σημεῖα Ε καὶ Ζ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου Μ τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων τοῦ σχηματιζομένου παραλληλογράμμου, ὅταν τὸ Δ διαγράφῃ τὴν βάσιν ΒΓ.

632. (667). Εἰς μίαν περιφέρειαν Ο, μία χορδὴ ΑΒ εἶναι ἡ μία ἐκ τῶν βάσεων ἑνὸς τραπεζίου ἐγγεγραμμένου. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ μέσου ἑκάστης διαγωνίου καὶ τοῦ μέσου ἑκάστης τῶν δύο προσκειμένων πλευρῶν πρὸς τὴν βάσιν ΑΒ

633. (668). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν μέσων τῶν βάσεων τῶν τραπεζίων, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡς διαγωνίους δύο τεμνούσας, ἀγομένας ἀπὸ τὸ κοινὸν σημεῖον ἐπαφῆς δύο ἐφαπτομένων περιφερειῶν, ὅταν αἱ τέμνουσαι αὗται τέμνωνται ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν.

634. (669). Μία περιφέρεια Ο σταθερὰ στρέφεται περὶ ἕνα ἀπὸ τὰ σημεῖα της Α. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ κέντρου της Ο. Εἰς ἑκάστην νέαν θέσιν τῆς περιφερείας φέρομεν τὴν διάμετρον, τὴν παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν ἄκρων τῶν διαμέτρων αὐτῶν.

635. (670). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ δύο εὐθείας παραλλήλους, x'x καὶ y'y φέρομεν δύο εὐθείας ΑΟΒ καὶ Α'ΟΒ' καθέτους μεταξύ των, αἱ ὁποῖαι συναντοῦν τὴν x'x εἰς τὰ Α καὶ Α' καὶ τὴν y'y εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Β'. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν ποδῶν Μ καὶ Μ' τῶν καθέτων, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο ἐπὶ τὰς εὐθείας Α'Β καὶ ΑΒ', ὅταν ἡ ΑΒ στρέφεται περὶ τὸ Ο.

636. (671). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν δοθεῖσαν ἀκτῖνα καὶ διχοτομοῦν δοθεῖσαν περιφέρειαν.

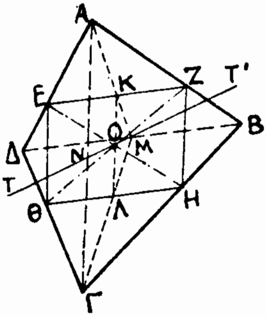
637. (672). Μία εὐθεῖα ΑΒ σταθερὰ κατὰ τὸ μῆκος κινεῖται οὕτως, ὥστε τὰ ἄκρα της Α καὶ Β νὰ μένουν ἐπὶ τῶν πλευρῶν δοθείσης γωνίας xOy. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον ΟΑΒ.

638. (673). Δίδεται μία εὐθεῖα xy καὶ ἕνα σημεῖον της Α.

1ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν κύκλων, οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται τῆς xy εἰς τὸ σημεῖον Α.

2ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν ἄκρων τῶν διαμέτρων τῶν κύκλων αὐτῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι τῆς xy.

639. (674). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν παραλληλογράμμων, τὰ ὁποῖα εἶναι ἐγγεγραμμένα εἰς δοθὲν τεράπλευρον.



Σχ. ἀσκ. 639.

640. (675). Δίδονται δύο εὐθεῖαι x'x καὶ y'y κάθετοι μεταξύ των, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ Ο καὶ ἕνα σταθερὸν σημεῖον Ρ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς τῆς γωνίας yOx. Μία ὀρθὴ γωνία, μὲ κορυφὴν τὸ Ρ, στρέφεται περὶ τὸ σημεῖον Ρ. Ἐὰν Α καὶ Β εἶναι τὰ σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα αἱ πλευραί της τέμνουν, ἀντιστοίχως, τὰς εὐθείας x'x καὶ y'y, νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ μέσου τῆς εὐθείας ΑΒ.

641. (676). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν ποδῶν τῶν καθέτων, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ τὰς ἀκτῖνας δοθέντος κύκλου.

642. (677). Μία ἀπὸ τὰς ἴσας πλευρὰς ΑΒ ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ὡρισμένη κατὰ τὴν θέσιν καὶ κατὰ τὸ μέγεθος, ἐνῷ ἡ γωνία τῆς κορυφῆς Α μεταβάλλεται. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ ποδὸς τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α.

643. (678). Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Ε τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Δ καὶ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ζ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΓΔ καὶ ΒΖ καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν ΓΔ καὶ ΒΖ

644. (679). Δύο ἴσοι κύκλοι Ο καὶ Ο' τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Διὰ τοῦ Β φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν, ἡ ὁποία τέμνει τὰς περιφερείας Ο καὶ Ο' εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Γ' ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. Ὅτι ΑΓ=ΑΓ'.

2ον. Ὅτι ἡ γωνία ΓΑΓ' διατηρεῖ τὴν αὐτὴν τιμήν, ὅταν ἡ τέμνουσα ΓΒΓ' στρέφεται περὶ τὸ Β.

3ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ μέσου Μ τῆς ΓΓ'.

645. (680). Δίδεται ἕνας ὡρισμένος κύκλος Ο ἀκτῖνος ΟΑ=ρ καὶ ἕνας ἄλλος μεταβλητός, ὁμόκεντρος τοῦ πρώτου καὶ ὁ ὁποῖος τέμνει τὴν διάμετρον ΑΟΒ τοῦ πρώτου εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Γ'. Ἀπὸ τὰ σημεῖα Γ καὶ Γ' φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὴν ΑΒ, αἱ ὁποῖαι συναντοῦν τὴν περιφέρειαν τοῦ δοθέντος κύκλου εἰς τὰ σημεῖα Δ, Δ' καὶ Ε, Ε' ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων τῆς τομῆς τῶν ἀκτίνων ΟΔ, ΟΕ, ΟΔ', ΟΕ' καὶ τῆς μεταβλητῆς περιφερείας.

646. (681). Λαμβάνομεν ὅλα τὰ τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΓ καὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς Α. Νὰ εὑρεθῇ :

1ον. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῆς κορυφῆς Α.

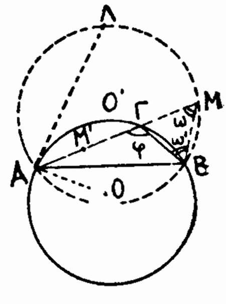
2ον. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν ὑψῶν των.

647. (682). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν μέσων τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι ὡρισμένη κατὰ τὴν θέσιν καὶ τὸ μέγεθος καὶ ἡ γωνία Α τῆς κορυφῆς σταθερά.

648. (683). Δίδεται ἕνα κυκλικὸν τμῆμα ΑΚΒΑ χορδῆς ΑΒ. Κάθε σημεῖον

Κ τοῦ τόξου του εἶναι τὸ κέντρον ἑνὸς κύκλου ἐφαπτομένου τῆς χορδῆς ΑΒ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν ἐφαπτομένων τῶν κύκλων, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β πρὸς τοὺς κύκλους αὐτούς.

649 (684). Ἀπὸ τὸ ἄκρον Α μιᾶς χορδῆς ΑΒ ἑνὸς κύκλου Ο φέρομεν τυχοῦσαν χορδὴν ΑΓ καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς χορδῆς αὐτῆς καὶ ἑκατέρωθεν τοῦ Γ δύο τμήματα ΓΜ καὶ ΓΜ′ ἴσα μὲ τὸ εὐθυγρ. τμῆμα ΒΓ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων Μ καὶ Μ′, ὅταν τὸ Γ γράφῃ ἕνα ἀπὸ τὰ τόξα τῆς χορδῆς.



Σχ. ἀσκ. 649.

650. (685). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς κύκλου Ο φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν ΑΒΓ αὐτοῦ. Ἀπὸ τὸ μέσον Δ τῆς χορδῆς ΒΓ ὑψοῦμεν κάθετον ἐπ' αὐτὴν καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς τμήματα ΔΜ=ΔΜ′=ΔΑ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων Μ καὶ Μ′, ὅταν ἡ τέμνουσα ΑΒΓ στρέφεται περὶ τὸ Α.

651. (686). Λαμβάνομεν ὅλα τὰ τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς Α.

1ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν κύκλων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ.

2ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν κύκλων τῶν παρεγγεγραμμένων εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

652. (687). Δίδεται ἕνα τόξον ΑΝΒ μιᾶς περιφερείας Ο, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ τὴν χορδὴν ΑΒ. Ἕνα σημεῖον Γ κινεῖται ἐπὶ τοῦ τόξου αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ κέντρου τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

653. (688). Εἰς δοθέντα κύκλον Ο λαμβάνομεν μίαν σταθερὰν κατὰ τὴν θέσιν χορδὴν ΑΒ καὶ μίαν μεταβλητὴν χορδὴν ΓΔ, σταθεροῦ ὅμως μήκους. Νὰ εὑρεθῇ:

1ον. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου Μ τῆς τομῆς τῶν χορδῶν ΑΓ καὶ ΒΔ.

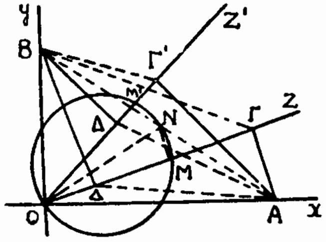
2ον. Ὁ τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν χορδῶν ΑΔ καὶ ΒΓ.

654. (689). Δίδεται ἡμιπεριφέρεια Ο διαμέτρου ΑΒ. Ἡ ἐφαπτομένη εἰς τυχὸν σημεῖον Γ αὐτῆς τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς διαμέτρου εἰς ἕνα σημεῖον Δ· ἀπὸ τὸ κέντρον Ο φέρομεν τὴν κάθετον πρὸς τὴν διχοτόμον ΔΕ τῆς γωνίας ΓΟΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ἐφαπτομένην ΓΔ εἰς τὸ Μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου Μ.

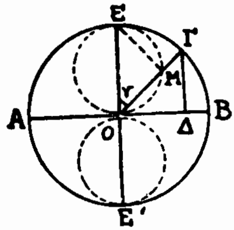
655. (691). Δίδονται δύο εὐθεῖαι Οx καὶ Οy κάθετοι μεταξύ των καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν Οx καὶ Οy. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΟΖ. Ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β φέρομεν τὰς καθέτους ΑΓ καὶ ΒΔ ἐπὶ τὴν ΟΖ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ μέσου τῆς ΓΔ, ὅταν ἡ ΟΖ στρέφεται περὶ τὸ Ο.

656 (692). Εἰς δοθέντα κύκλον Ο φέρομεν μίαν διάμετρόν του ΑΟΒ καὶ μίαν τυχοῦσαν ἀκτῖνα ΟΓ. Ἀπὸ τὸ Γ φέρομεν τὴν ΓΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ.

Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος ΟΓ τμῆμα ΟΜ=ΓΔ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ Μ, ὅταν ἡ ΟΓ στρέφεται περὶ τὸ Ο



Σχ. ἀσκ. 655.



Σχ. ἀσκ. 656.

657. (693). Δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο' τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Α'. Ἀπὸ τὸ Α φέρομεν μίαν ὡρισμένην τέμνουσαν ΒΑΓ καὶ μίαν μεταβλητὴν ΜΑΝ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Ο εἰς τὸ Μ καὶ τὴν Ο' εἰς τὸ Ν. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΒΜ καὶ ΓΝ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ Δ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ Δ, ὅταν ἡ ΜΝ στρέφεται περὶ τὸ Α.

658. (694). Λαμβάνομεν ὅλα τὰ τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΓ καὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς Α. Νὰ εὑρεθῇ:

1ον. Ὁ τόπος τῶν μέσων Δ καὶ Ε τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ.

2ον. Ὁ τόπος τοῦ μέσου Μ τῆς εὐθείας ΔΕ.

659. (695). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον Ο. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ λαμβάνομεν ἕνα μεταβλητὸν σημεῖον Μ καὶ ἐπὶ τῆς ΑΓ ἕνα σημεῖον Ρ τοιοῦτον, ὥστε ΡΑ=ΡΜ καὶ τέλος ἐπὶ τῆς ΒΓ ἕνα σημεῖον Δ τοιοῦτον, ὥστε ΔΒ=ΔΜ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου Μ', συμμετρικοῦ τοῦ Μ πρὸς τὴν ΡΔ.

660. (696). Στρέφομεν μίαν δοθεῖσαν περιφέρειαν περὶ ἕνα τῶν σημείων της καὶ εἰς καθεμίαν ἀπὸ τὰς θέσεις της φέρομεν ἐφαπτομένας παραλλήλους πρὸς μίαν, ὡρισμένην κατὰ θέσιν, εὐθεῖαν. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων ἐπαφῆς.

661. (697). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων Μ τοιούτων, ὥστε τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ, τὸ ὁποῖον συνδέει τοὺς πόδας Α καὶ Β τῶν καθέτων ΜΑ καὶ ΜΒ ἐπὶ δύο δοθείσας εὐθείας, νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος λ.

662. (698). Μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν Α ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἀκτῖνα τὴν πλευρὰν αὐτοῦ ΑΒ γράφομεν περιφέρειαν κύκλου. Ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτῆς καὶ ἀπὸ τὸ Γ λαμβάνομεν δύο τόξα ΓΔ καὶ ΓΕ τοιαῦτα, ὥστε τόξον ΓΔ νὰ εἶναι διπλάσιον τοῦ τόξου ΓΕ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΒΔ καὶ ΟΕ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ΓΖ εἶναι ὕψος τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ, ἐὰν τὰ τόξα ΓΔ καὶ ΓΕ ἔχουν ἀντίθετον φορὰν καὶ νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου Ζ, ἐὰν τὰ τόξα αὐτὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν.

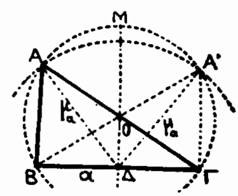
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ΄.

ΧΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΤΟΠΩΝ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

---

327. Πρόβλημα. ***Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν ΒΓ=α, τὴν ἀπέναντι γωνίαν Α=ω καὶ τὴν διάμεσον ΑΔ=μ_α.***

Ἀνάλυσις: Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω ΑΒΓ *(Σχ. 254)* τὸ ζητούμενον τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν πλευρὰν ΒΓ=α, τὴν γωνίαν Α ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω καὶ τὴν διάμεσον ΑΔ=μ_α.



Σχ. 254.

Ἐπειδὴ ἡ πλευρὰ ΒΓ φαίνεται ἀπὸ τὸ Α ὑπὸ γωνίαν σταθερὰν καὶ ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω, ἡ κορυφὴ Α κεῖται ἐπὶ τόξου κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ χορδὴν τὴν ΒΓ καὶ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω. Φέρομεν τὴν διάμεσον ΔΑ.

Ἐπειδὴ ἡ ΔΑ εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση μὲ τὴν δοθεῖσαν διάμεσον μ_α, τὸ Α κεῖται ἐπὶ περιφερείας, ἡ ὁποία γράφεται μὲ κέντρον τὸ μέσον Δ τῆς ΒΓ καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσην μὲ δοθεῖσαν διάμεσον μ_α.

Ἡ τομὴ τῶν δύο αὐτῶν τόξων ὁρίζει τὴν τρίτην κορυφὴν τοῦ ζητουμένου τριγώνου. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι κατασκευήν.

Σύνθεσις: Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν ἕνα τμῆμα ΒΓ ἴσον μὲ τὴν δοθεῖσαν πλευρὰν α. Μὲ χορδὴν τὴν ΒΓ κατασκευάζομεν τόξον κυκλικοῦ τμήματος ΒΜΓ, τὸ ὁποῖον νὰ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω. Μὲ κέντρον τὸ μέσον Δ τῆς ΒΓ καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν διάμεσον μ_α, γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ τμήματος εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Α΄. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ. Τὸ σχηματισθὲν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἐὰν φέρωμεν καὶ τὰς εὐθείας Α΄Β καὶ Α΄Γ λαμβάνομεν καὶ ἕνα δεύτερον τρίγωνον Α΄ΒΓ.

Ἀπόδειξις: Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει τὴν ΒΓ ἴσην μὲ τὴν δοθεῖ-

σαν πλευρὰν α ἐκ κατασκευῆς, τὴν γωνίαν Α ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω, διότι εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΒΜΓ, τὸ ὁποῖον δέχεται, ἐκ κατασκευῆς, γωνίας ἴσας μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω. Φέρομεν τὴν ΑΔ· ἡ ΑΔ εἶναι διάμεσος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ εἶναι ἴση μὲ τὴν δοθεῖσαν διάμεσον μ_α, διότι ἡ ΔΑ εἶναι ἀκτὶς τοῦ κύκλου (Δ, μ_α). Ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Διερεύνησις: Ἡ περιφέρεια, ἡ ὁποία γράφεται μὲ κέντρον τὸ μέσον Δ τῆς ΒΓ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν μ_α, δύναται νὰ κόψῃ τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ τμήματος εἰς δύο σημεῖα, εἰς ἕνα ἢ εἰς κανένα.

Ἐὰν ἡ διάμεσος ΔΑ$=\mu_\alpha$ εἶναι μικροτέρα τοῦ βέλους ΔΜ, ἀλλὰ πάντως μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεως τῆς πλευρᾶς ΒΓ, δηλ. ἐὰν $\frac{\alpha}{2}<\mu_\alpha<\Delta M$ ἡ περιφέρεια (Δ, μ_α) τέμνει τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ τμήματος εἰς δύο σημεῖα Α καὶ Α′ καὶ τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις, τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′ΒΓ.

Ἐὰν $\mu_\alpha=\Delta M$, ἡ περιφέρεια (Δ, μ_α) ἐφάπτεται τοῦ τόξου τοῦ κυκλικοῦ τμήματος εἰς τὸ σημεῖον Μ καὶ τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν, τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΜΒΓ.

Ἐὰν $\mu_\alpha>\Delta M$, ἡ περιφέρεια (Δ, μ_α) δὲν τέμνει τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ τμήματος καὶ ἑπομένως τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει λύσιν.

328. Χρῆσις τῶν γεωμετρικῶν τόπων εἰς τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων. Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα ἄγνωστος ἦτο ἡ τρίτη κορυφὴ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ· αἱ δύο ἄλλαι κορυφαί του Β καὶ Γ ἦσαν τὰ ἄκρα τῆς εὐθείας ΒΓ, τῆς ἴσης μὲ τὴν δοθεῖσαν πλευρὰν α τοῦ τριγώνου. Ἡ ἄγνωστος κορυφὴ Α κεῖται, ὅπως ἐδείχθη ἐπὶ τοῦ τόξου τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΒΜΓ, τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ χορδὴν τὴν ΒΓ καὶ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν. Δηλ. κεῖται ἐπὶ τοῦ τόπου τῶν σημείων, ἀπὸ τὰ ὁποῖα δοθεῖσα εὐθεῖα ΒΓ=α φαίνεται ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν ω.

Ἐπίσης ἡ κορυφὴ Α κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας (Δ, μ_α), δηλ. ἐπὶ τοῦ τόπου τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἀπόστασιν μ_α ἀπὸ τὸ δοθὲν σημεῖον Δ. Ἡ *τομὴ τῶν δύο αὐτῶν τόπων*, τοῦ τόξου τοῦ κυκλικοῦ τμήματος καὶ τῆς περιφερείας (Δ, μ_α), εἶναι ἡ τρίτη κορυφὴ τοῦ ζητουμένου τριγώνου.

Ἡ λύσις λοιπὸν τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος καὶ πολλῶν ἄλλων προβλημάτων, ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν ἑνὸς σημείου, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἐκπληροῖ ὡρισμένους ὅρους τοῦ προβλήματος.

Γενικῶς, ὅταν ἡ λύσις ἑνὸς προβλήματος ἀνάγεται εἰς τὸν προσ-

διορισμὸν ἑνὸς σημείου, τὸ σημεῖον αὐτὸ ἔχει *δύο* τοὐλάχιστον ἰδιότητας, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς δύο γεωμετρικοὺς τόπους, κατὰ τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος. Κατ' ἀρχὰς ζητοῦμεν τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἱκανοποιοῦν *μόνον* τὴν μίαν ἰδιότητα τῶν σημείων· τὰ σημεῖα αὐτὰ εἶναι συνήθως ἄπειρα καὶ ἀποτελοῦν μίαν γραμμήν, δηλ. ἕνα γεωμετρικὸν τόπον.

Ἔπειτα ζητοῦμεν καὶ τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἱκανοποιοῦν μόνον τὴν δευτέραν ἰδιότητα· τὰ σημεῖα αὐτὰ ἀποτελοῦν ἕνα δεύτερον γεωμετρικὸν τόπον Εἰς τὴν τομὴν ἢ εἰς τὰς τομὰς αὐτῶν τῶν δύο τόπων εὑρίσκεται τὸ ζητούμενον σημεῖον.

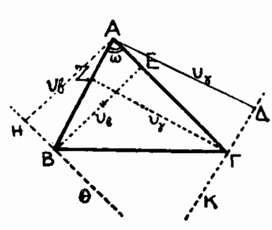
Ἡ μέθοδος αὕτη τοῦ προσδιορισμοῦ ἑνὸς σημείου λέγεται ***μέθοδος διὰ τῆς τομῆς τῶν Γεωμετρικῶν τόπων*** καὶ ὀφείλεται εἰς τὴν Σχολὴν τοῦ Πλάτωνος (430—347 π. Χ.).

Ἡ μέθοδος αὐτὴ εἶναι ἴσως ἡ γενικωτέρα καὶ ἡ πλέον γόνιμος ἐξ ὅλων τῶν μεθόδων τῆς Γεωμετρίας.

Ἡ χάρις καὶ ἡ πρακτικὴ ἀξία τῆς μεθόδου αὐτῆς ἔγκειται πρὸ παντὸς εἰς τὴν ἐκλογὴν τῶν ὅρων τοῦ προβλήματος, οἱ ὁποῖοι πρέπει νὰ παραλειφθοῦν ἀλληλοδιαδόχως· διότι ἐκ τῆς ἐκλογῆς αὐτῆς ἐξαρτᾶται ἡ φύσις καὶ ἡ εὐκολία τῆς ἀναζητήσεως τῶν δύο τόπων, οἱ ὁποῖοι θὰ χρησιμοποιηθοῦν διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ ζητουμένου σημείου.

329. Πρόβλημα. ***Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν Α καὶ τὰ ὕψη $υ_β$ καὶ $υ_γ$.***

Ἀνάλυσις: Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν γωνίαν Α ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν καὶ τὰ ὕψη ΒΕ καὶ ΓΖ, ἴσα μὲ τὰ δοθέντα ὕψη $υ_β$ καὶ $υ_γ$ ἀντιστοίχως.



Σχ. 255.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ κορυφὴ Β ἀπέχει ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΑΓ τῆς γωνίας Α ἀπόστασιν $ΕΒ=υ_β$ καὶ ἑπομένως κεῖται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν ΑΓ καὶ ἡ ὁποία ἀπέχει αὐτῆς ἀπόστασιν ἴσην μὲ τὸ δοθὲν ὕψος $ΒΕ=υ_β$. Ἡ παράλληλος αὐτὴ τέμνει τὴν πλευρὰν ΑΒ τῆς γωνίας Α εἰς τὸ σημεῖον Β, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ δευτέρα κορυφὴ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ὁμοίως ἡ κορυφὴ Γ κεῖται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν ΑΒ καὶ ἡ ὁποία ἀπέχει ἀπὸ τὴν ΑΒ ἀπόστασιν ἴσην μὲ τὸ δοθὲν ὕψος $ΓΖ=υ_γ$. Ἡ παράλληλος αὐτὴ τέμνει τὴν πλευρὰν ΑΓ τῆς γω-

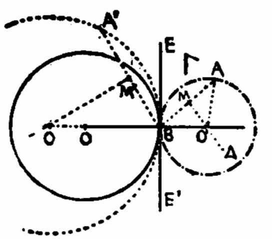
νίας Α εἰς τὸ σημεῖον Γ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ τρίτη κορυφὴ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι κατασκευήν:

Σύνθεσις: Κατασκευάζομεν μίαν γωνίαν ΒΑΓ *(Σχ. 255)* ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν Α. Ἀπὸ τὸ Α ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΑΓ καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου αὐτῆς λαμβάνομεν τμῆμα ΑΗ=$υ_β$. Ἀπὸ τὸ Η φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Β. Ἐπίσης ἀπὸ τὸ Α ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΑΒ καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου αὐτῆς λαμβάνομεν τμῆμα ΑΔ=$υ_γ$. Ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ σημεῖον Γ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΒΓ καὶ τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι προφανῶς τὸ ζητούμενον

330. Πρόβλημα. ***Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α καὶ νὰ ἐφάπτεται δοθείσης περιφερείας Ο εἰς δοθὲν σημεῖον αὐτῆς Β.***

Ἀνάλυσις: Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω Ο′ *(Σχ. 256)*, ἡ ζητουμένη περιφέρεια, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ δοθὲν σημεῖον Α καὶ ἐφάπτεται τῆς δοθείσης περιφερείας Ο εἰς τὸ σημεῖον Β.



Σχ. 256.

Φέρομεν τὴν διάκεντρον ΟΟ′, ἡ ὁποία θὰ περάσῃ ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς ἀφῆς Β. Ὥστε τὸ κέντρον Ο τῆς ζητουμένης περιφερείας κεῖται ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος ΟΒ ἢ ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς της.

Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα Ο′Α καὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ· ἐπειδὴ εἶναι Ο′Β=Ο′Α, ὡς ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου Ο′, τὸ Ο′ θὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου ΜΔ τῆς εὐθείας ΑΒ.

Εἰς τὴν τομὴν τῶν δύο αὐτῶν τόπων εὑρίσκεται τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι κατασκευήν:

Σύνθεσις: Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΒ εἰς τὸ δοθὲν σημεῖον Β καὶ προεκτείνομεν αὐτήν· φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ τὴν μεσοκάθετον ΜΔ τῆς ΑΒ. Ἡ μεσοκάθετος αὐτὴ τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ἀκτῖνος ΟΒ εἰς τὸ σημεῖον Ο′. Μὲ κέντρον τὸ Ο′ καὶ ἀκτῖνα τὴν Ο′Β γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη περιφέρεια.

Ἀπόδειξις: Αἱ περιφέρειαι Ο καὶ Ο′ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς

τὸ Β, διότι ἡ διάκεντρός των ΟΟ′ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων των, ἤτοι εἶναι ΟΟ′=ΟΒ+ΒΟ′.

Ἐπειδὴ τὸ Ο′ κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου ΜΔ τῆς εὐθείας ΑΒ, θὰ εἶναι Ο′Β=Ο′Α· ἤτοι ἡ περιφέρεια Ο′ διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Α.

Διερεύνησις: Διὰ νὰ ἔχῃ τὸ πρόβλημα λύσιν πρέπει ἡ μεσοκάθετος ΜΔ τῆς ΑΒ νὰ τέμνῃ τὴν ἀκτῖνα ΟΒ ἢ τὴν προέκτασίν της.

Ὅταν τὸ δοθὲν σημεῖον κεῖται ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης ΕΒΕ′ τῆς περιφερείας Ο εἰς τὸ σημεῖον Β, δηλ. ὅταν ἡ ΑΒ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς Ο, ἡ ΜΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΟΒ καί ἑπομένως δὲν τέμνει αὐτήν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει λύσιν.

Ὅταν ἡ ΑΒ σχηματίζῃ ἀμβλεῖαν γωνίαν μὲ τὴν ΟΒ, ἡ ΜΒ τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ἀκτῖνος ΟΒ εἰς ἕνα σημεῖον καὶ τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο′ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς.

Ὅταν ἡ ΑΒ σχηματίζῃ ὀξεῖαν γωνίαν μὲ τὴν ΟΒ, ἡ ΜΔ τέμνει τὴν ΟΒ ἢ τὴν προέκτασιν τῆς ΟΒ, κατὰ τὴν φοράν, ἐκ τοῦ Β πρὸς τὸ Ο, εἰς ἕνα σημεῖον $Ο_1$ καὶ τὸ πρόβλημα ἔχει πάλιν μίαν λύσιν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ περιφέρειαι Ο καὶ $Ο_1$ ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς.

Ἐὰν τὸ δοθὲν σημεῖον Α κεῖται ἐντὸς τῆς περιφερείας Ο, τότε ἡ περιφέρεια Ο θὰ περιέχῃ τὴν $Ο_1$· ἐὰν τὸ Α κεῖται ἐκτὸς τῆς περιφερείας Ο, τότε ἡ περιφέρεια $Ο_1$ θὰ περιέχῃ τὴν Ο.

331. Πρόβλημα. ***Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτεται δοθείσης εὐθείας xy, εἰς δοθὲν σημεῖον της Β καὶ μιᾶς δοθείσης περιφερείας Κ.***

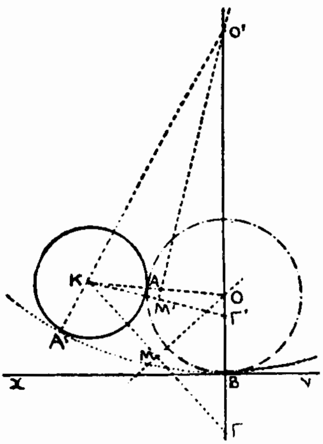
Ἀνάλυσις: Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω Ο τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας, ἡ ὁποία ἐφάπτεται τῆς δοθείσης περιφερείας Κ εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ τῆς δοθείσης εὐθείας xy εἰς τὸ δοθὲν σημεῖον Β.

Φέρομεν τὴν διάκεντρον ΚΟ, ἡ ὁποία θὰ περάσῃ ἀπὸ τὸ σημεῖον Α τῆς ἁφῆς. Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΒ, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην xy.

Τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου ΒΟ ἐπὶ τὴν xy, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ δοθὲν σημεῖον Β.

Προεκτείνομεν τὴν ΟΒ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμῆμα ΒΓ ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα ΚΑ τοῦ δοθέντος κύκλου. Θὰ εἶναι τότε ΟΚ=ΟΓ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΚΓ. Ἐπειδὴ ΚΟ=ΟΓ, τὸ Ο κεῖται

ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου ΜΟ τῆς ΚΓ. Τὸ κέντρον Ο λοιπὸν τῆς ζητουμένης περιφερείας κεῖται εἰς τὴν τομὴν τῶν δύο τόπων: τῆς καθέτου ΒΟ ἐπὶ τὴν xy καὶ τῆς μεσοκαθέτου ΜΟ τῆς ΚΓ. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι κατασκευήν:



Σχ. 257.

Σύνθεσις: Ἀπὸ τὸ δοθὲν σημεῖον Β τῆς εὐθείας xy φέρομεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν xy καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς καὶ κάτωθεν τῆς xy ἕνα τμῆμα ΒΓ ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα τῆς δοθείσης περιφερείας Κ. Φέρομεν τὴν ΚΓ καὶ ἀπὸ τὸ μέσον της Μ φέρομεν κάθετον ἐπ' αὐτήν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ἐκ τοῦ Β κάθετον ἐπὶ τὴν xy εἰς τὸ σημεῖον Ο. Μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα τὴν ΟΒ γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη.

Ἀπόδειξις: Ἡ περιφέρεια Ο ἐφάπτεται τῆς xy εἰς τὸ Β, διότι ἡ xy εἶναι κάθετος ἐκ κατασκευῆς εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος ΟΒ· ἐπειδὴ τὸ Ο κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τῆς ΚΓ, θὰ εἶναι

$$ОК=ОΓ \quad ἢ \quad ОК=ОВ+ВΓ \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ ΟΒ=ΟΑ καὶ ΒΓ=ΚΑ, ἡ ἰσότης (1) γράφεται

$$ОК=ОА+КА.$$

Ἐπειδὴ ἡ ἀπόστασις ΟΚ τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν Ο καὶ Κ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων των, αἱ περιφέρειαι Ο καὶ Κ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς. Ὥστε ἡ περιφέρεια Ο εἶναι ἡ ζητουμένη περιφέρεια.

Διερεύνησις: Ἐὰν ἐπὶ τῆς καθέτου ΒΟ ἐπὶ τὴν xy λάβωμεν τμῆμα ΒΓ' ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου Κ, πρὸς τὸ ἄνω μέρος τῆς xy, καὶ ἀπὸ τὸ μέσον τῆς ΚΓ' φέρωμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΚΓ' ὁρίζομεν ἕνα δεύτερον σημεῖον Ο', τὸ ὁποῖον εἶναι κέντρον μιᾶς δευτέρας περιφερείας, ἡ ὁποία ἐφάπτεται τῆς xy εἰς τὸ Β καὶ τῆς περιφερείας Κ εἰς τὸ σημεῖον Α'. Αἱ περιφέρειαι Κ καὶ Ο' ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς.

Τὸ πρόβλημα ἔχει λοιπόν, γενικῶς, δύο λύσεις.

332. Πρόβλημα. ***Νὰ ἀχθῇ κοινὴ ἐφαπτομένη δύο ἀνίσων περιφερειῶν Ο καὶ Ο'.***

Ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη δύναται νὰ καταλάβῃ δύο θέσεις πρὸς τὰς

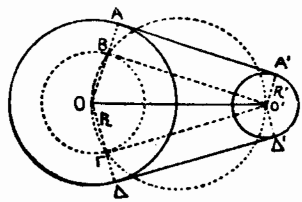
περιφερείας· δηλ. αἱ δύο περιφέρειαι νὰ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ἐφαπτομένης ἢ νὰ κεῖνται ἑκατέρωθεν αὐτῆς.

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη λέγεται ***ἐξωτερική*** καὶ εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν λέγεται ***ἐσωτερική***.

Ι. Περίπτωσις. Ἐξωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι.

Ἀνάλυσις: Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω ΑΑ′ *(Σχ. 258)* ἡ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη τῶν περιφερειῶν Ο καὶ Ο′.

Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΑ καὶ Ο′Α′ εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς. Αἱ ἀκτῖνες ΟΑ καὶ Ο′Α′ εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΑ′. Ἀπὸ τὸ κέντρον Ο′ τῆς μικροτέρας περιφερείας φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν κοινὴν ἐφαπτομένην Α′Α. Ἡ παράλληλος αὐτὴ τέμνει τὴν ἀκτῖνα ΟΑ εἰς τὸ σημεῖον Β.



Σχ. 258.

Ἐπειδὴ ἡ Α′Α εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΑ καὶ ἡ παράλληλός της Ο′Β θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΑ· τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΑΒΟ′Α′ εἶναι ὀρθογώνιον, διότι αἱ τρεῖς γωνίαι του Α, Β, Α′ εἶναι ὀρθαί· ἄρα θὰ εἶναι Ο′Α′=ΒΑ. Ἡ ΟΒ εἶναι λοιπὸν ἴση μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων τῶν δύο δοθεισῶν περιφερειῶν· δηλ. εἶναι ΟΒ=R—R′.

Ἐπειδὴ ἡ γωνία Ο′ΒΟ εἶναι ὀρθὴ ἔπεται, ὅτι ἡ Ο′Β εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα τὴν ΟΒ=R—R′. Ἡ ἐφαπτομένη ὅμως Ο′Β τῆς περιφερείας (Ο, R—R′) δύναται νὰ κατασκευασθῇ. Οὕτω ὁρίζεται τὸ σημεῖον Β καὶ συνεπῶς καὶ τὸ σημεῖον Α τῆς ἁφῆς.

Ἐὰν δὲ φέρωμεν τὴν ἀκτῖνα Ο′Α′ παράλληλον καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς πρὸς τὴν ΟΒΑ ὁρίζομεν καὶ τὸ σημεῖον Α′ τῆς ἁφῆς.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι κατασκευήν :

Σύνθεσις: Μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσην μὲ R—R′ γράφομεν περιφέρειαν κύκλου.

Ἀπὸ τὸ κέντρον Ο′ φέρομεν μίαν ἐφαπτομένην Ο′Β τῆς περιφερείας (Ο, R—R′)· φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΒ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὸ σημεῖον Α.

Ἀπὸ τὸ Ο′ φέρομεν τὴν ἀκτῖνα Ο′Α′ παράλληλον καὶ μὲ τὴν φορὰν πρὸς τὴν ΟΑ. Ἔπειτα φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΑ′, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη.

Ἀπόδειξις: Ἐξ ὑποθέσεως ἡ ΟΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν διαφορὰν

τῶν ἀκτίνων τῶν περιφερειῶν Ο καὶ Ο'· ἤτοι εἶναι:
ΟΒ=ΟΑ—Ο'Α' (1). Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα ἔχομεν:
ΟΒ=ΟΑ—ΒΑ (2). Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι:

ΟΑ—Ο'Α'=ΟΑ—ΒΑ ἢ Ο'Α'=ΒΑ.

Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΑΒΟ'Α' ἔχει τὰς δύο ἀπέναντι πλευρὰς ΒΑ καὶ Ο'Α' ἴσας καὶ παραλλήλους· ἄρα εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία ΟΒΘ' εἶναι ὀρθή, διότι ἡ Ο'Β εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας (Ο, ΟΒ) εἰς τὸ σημεῖον Β ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ παραπληρωματική της γωνία ΑΒΟ' εἶναι ὀρθή.

Ἐπειδὴ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΟ'Α' ἔχει τὴν γωνίαν του Β ὀρθὴν καὶ αἱ ἄλλαι γωνίαι του Α, Α' καὶ Ο' θὰ εἶναι ὀρθαί.

Ὥστε αἱ ΟΑ καὶ Ο'Α' εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΑ'. Ἡ ΑΑ' εἶναι λοιπὸν ἐφαπτομένη τῶν περιφερειῶν Ο καὶ Ο', ὡς κάθετος εἰς τὰ ἄκρα τῶν ἀκτίνων ΟΑ καὶ Ο'Α'.

Διερεύνησις: Διὰ νὰ ἔχῃ τὸ πρόβλημα λύσιν, πρέπει νὰ δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἐφαπτομένην ἀπὸ τὸ κέντρον Ο' πρὸς τὴν βοηθητικὴν περιφέρειαν (Ο, R—R'). Τοῦτο ὅμως συμβαίνει, ὅταν τὸ κέντρον Ο' κεῖται ἐκτὸς ἢ ἐπὶ τῆς περιφερείας (Ο, R—R').

Ἔστω δ ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων Ο, Ο'.

Ἐὰν $\delta > R-R'$, δηλ. ἐὰν αἱ περιφέρειαι κεῖνται ἡ μία ἐκτὸς τῆς ἄλλης ἢ ἐὰν αἱ δύο περιφέρειαι τέμνωνται, τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατὸν καὶ ἐπειδὴ δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο' δύο ἐφαπτομένας, τὸ πρόβλημα ἔχει ***δύο λύσεις***.

Ἐὰν $\delta = R-R'$, δηλ. ἐὰν αἱ περιφέρειαι ἐφάπτωνται ἐσωτερικῶς, τὸ σημεῖον Ο' κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία ἔχει ἀκτῖνα τὴν ΟΒ· ἀπὸ τὸ Ο' δυνάμεθα νὰ φέρωμεν μίαν μόνον ἐφαπτομένην καὶ τό πρόβλημα ἔχει ***μίαν λύσιν***.

Ἐὰν $\delta < R-R'$, δηλ. ἐὰν αἱ περιφέρειαι κεῖνται ἡ μία ἐντὸς τῆς ἄλλης, τὸ σημεῖον Ο' κεῖται ἐντὸς τῆς περιφερείας (Ο, ΟΒ) καὶ τὸ πρόβλημα ***δὲν ἔχει λύσιν***.

II. Περίπτωσις. Ἐσωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι.

Ἀνάλυσις: Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω ΑΑ' *(Σχ. 258)* ἡ κοινὴ ἐσωτερικὴ ἐφαπτομένη τῶν περιφερειῶν Ο καὶ Ο'.

Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΑ καὶ Ο'Α' εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς· αἱ ΟΑ καὶ Ο'Α', ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΑ', εἶναι παράλληλοι.

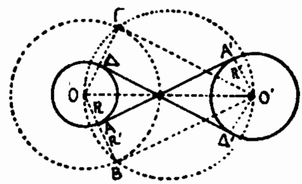
Ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο' φέρομεν τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΑ', ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ἀκτῖνος ΟΑ εἰς τὸ σημεῖον Β. Τὸ σχηματισθὲν τετράπλευρον ΑΒΟ'Α' εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἐπομένως

θὰ εἶναι $AB=A'O'=R'$, ὁπότε $OB=OA+AB=R+R'$.

Ἐὰν μὲ κέντρον τὸ O καὶ ἀκτῖνα τὴν $OB=R+R'$ γράψωμεν περιφέρειαν κύκλου, ἡ O'B θὰ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας (O, OB).

Ἀπὸ τά ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι κατασκευήν:

Σύνθεσις: Μὲ κέντρον τὸ O καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ $R+R'$ γράφομεν μίαν περιφέρειαν (O, OB)· ἀπὸ τὸ O' φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην O'B πρὸς τὴν περιφέρειαν (O, OB). Φέρομεν τὴν OB, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν (O, R) εἰς τὸ σημεῖον A. Φέρομεν τὴν O'A' παράλληλον πρὸς τὴν OA καὶ συνδέομεν τὰ σημεῖα A καὶ A' μὲ εὐθεῖαν· ἡ AA' εἶναι ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη.



Σχ. 259.

Ἀπόδειξις: Τὸ τετράπλευρον ABO'A' εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ ἀπέναντι πλευραί του AB καὶ O'A' εἶναι παράλληλοι ἐκ κατασκευῆς καὶ ἴσαι, διότι ἡ OB εἶναι ἴση μὲ $R+R'$. Ἐπειδὴ τὸ παραλληλόγραμμον αὐτὸ ἔχει τὴν γωνίαν B ὀρθήν, εἶναι ὀρθογώνιον καὶ συνεπῶς αἱ OA καὶ O'A' εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν AA'· ἑπομένως ἡ AA' εἶναι κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν περιφερειῶν O καὶ O'

Διερεύνησις: Ἔστω δ ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων O καὶ O'. Τὸ πρόβλημα θὰ εἶναι δυνατόν, ὅταν θὰ δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἀπὸ τὸ κέντρον O' μίαν ἐφαπτομένην πρὸς τὴν περιφέρειαν $(O, R+R')$.

Ἐὰν $\delta > R+R'$, δηλ. ἐὰν αἱ περιφέρειαι κεῖνται ἡ μία ἐκτὸς τῆς ἄλλης, τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατὸν καὶ ἐπειδὴ ἀπὸ τὸ σημεῖον O' δυνάμεθα νὰ φέρωμεν δύο ἐφαπτομένας, τὸ πρόβλημα ἔχει **δύο λύσεις.**

Ἐὰν $\delta = R+R'$, δηλ. ἐὰν αἱ περιφέρειαι ἐφάπτωνται ἐξωτερικῶς, τὸ σημεῖον O' κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας (O, OB) καὶ τὸ πρόβλημα ἔχει **μίαν λύσιν.**

Ἐὰν $\delta < R+R'$, δηλ. ἐὰν περιφέρειαι τέμνωνται, ἢ ἐφάπτωνται ἐσωτερικῶς, ἢ κεῖται ἡ μία ἐντὸς τῆς ἄλλης, τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει λύσιν.

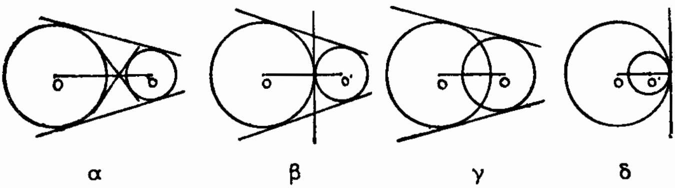
Τὴν διερεύνησιν τῶν δύο περιπτώσεων συνοψίζομεν κατωτέρω:

1ον. Ἐὰν αἱ περιφέρειαι κεῖνται ἡ μία ἐκτὸς τῆς ἄλλης (Σχ. 260α), δυνάμεθα νὰ φέρωμεν δύο ἐξωτερικὰς ἐφαπτομένας καὶ δύο ἐσωτερικὰς ἐφαπτομένας.

2ον. Ἐὰν αἱ περιφέρειαι ἐφάπτωνται ἐξωτερικῶς (Σχ. 260β), δυνάμεθα νὰ φέρωμεν δύο ἐξωτερικὰς ἐφαπτομένας καὶ μίαν ἐσωτερικήν.

3ον. Ἐὰν αἱ περιφέρειαι τέμνωνται (Σχ. 260γ), δυνάμεθα νὰ φέρωμεν δύο ἐξωτερικὰς ἐφαπτομένας καὶ καμμίαν ἐσωτερικήν.

4ον. Ἐὰν αἱ περιφέρειαι ἐφάπτωνται ἐσωτερικῶς (Σχ. 260δ), δυνάμεθα νὰ φέρωμεν μίαν ἐξωτερικὴν ἐφαπτομένην καὶ καμμίαν ἐσωτερικήν.



Σχ. 260.

5ον. Ἐὰν αἱ περιφέρειαι εἶναι ἡ μία ἐντὸς τῆς ἄλλης, δὲν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν οὔτε ἐξωτερικὴν οὔτε ἐσωτερικὴν ἐφαπτομένην.

Παρατήρησις: Αἱ κοιναὶ ἐξωτερικαὶ καὶ ἐσωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι δύο περιφερειῶν τέμνονται ἐπὶ τῆς διακέντρου, διότι ἡ διάκεντρος εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος.

Ἀσκήσεις πρὸς γενικὴν ἐπανάληψιν

Α'. Ὁμάς. **663.** (699). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ὑποτείνουσαν α καὶ τὸ ὕψος $υ_α$.

664. (704). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ὀρθογ. τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ὑποτείνουσαν α καὶ τὴν διάμεσον $μ_β$.

665. (705). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ=α, τὴν κορυφὴν Α τῆς ὀρθῆς γωνίας καὶ ὅτι αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ κεῖνται ἐπὶ δύο καθέτων εὐθειῶν Ox καὶ Oy.

666. (734). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ὑποτείνουσαν α καὶ τὸ ἄθροισμα $β+γ=λ$.

667. (735). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ τὴν ἀκτῖνα R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου. (Πολυτεχνεῖον)

668. (736). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ τὸ ἄθροισμα $β+γ=λ$.

669. (737). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ὕψος $υ_α$ καὶ τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

Β'. Ὁμάς. **670.** (700). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν ΒΓ=α, τὴν ἀπέναντι γωνίαν Α καὶ τὸ ὕψος $υ_α$.

671. (701). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν ΒΓ=α, τὴν ἀπέναντι γωνίαν Α καὶ ὅτι αἱ διάμεσοι ΒΕ καὶ ΓΖ τέμνονται καθέτως.

672. (702). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν:

1ον. Τὴν γωνίαν Α καὶ τὰς διαμέσους $μ_α$ καὶ $μ_γ$.

2ον. Τὴν γωνίαν Γ καὶ τὰς διαμέσους μ_α καὶ μ_β.

673. (703). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὰς γωνίας του καὶ μίαν διάμεσόν του.

674. (706). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν ΑΒ=γ, τὴν ἀπέναντι γωνίαν Γ καὶ τὸ ὕψος υ_α.

675. (731). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν, τὴν γωνίαν Β, τὸ ὕψος υ_α καὶ τὴν περίμετρον 2τ.

676. (732). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν, τὴν γωνίαν Α, τὸ ὕψος υ_α καὶ τὴν περίμετρον 2τ.

677. (733). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, τὴν διάμεσον μ_α καὶ τὴν ἀκτῖνα R.

678. (738). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν Β, τὸ ὕψος υ_α καὶ τὴν διάμεσον μ_γ.

679. (739). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν γ, τὴν γωνίαν Α καὶ τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

680. (740). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν:

1ον. Τὴν πλευρὰν α καὶ τὰ ὕψη υ_β καὶ υ_γ.

2ον. Τὴν πλευρὰν α καὶ τὰ ὕψη υ_α καὶ υ_β.

681. (741). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν:

1ον. Τὴν γωνίαν Α καὶ τὰ ὕψη υ_β καὶ υ_γ.

2ον. Τὴν γωνίαν Α καὶ τὰ ὕψη υ_α καὶ υ_β.

682. (742). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν διάμεσον μ_α καὶ τὰ ὕψη υ_α καὶ υ_β.

683. (743). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν Α, τὸ ὕψος υ_α καὶ τὴν διάμεσον μ_α.

684. (744). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, τὸ ὕψος υ_α καὶ τὴν ἀκτῖνα R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

685. (745). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν Α, τὸ ὕψος υ_α καὶ τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

686. (746). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν δύο πλευρὰς καὶ τὴν ἀκτῖνα R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

687. (747). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν Α, τὴν ἀκτῖνα ρ καὶ τὴν περίμετρον 2τ.

688. (748). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν δύο ἀπὸ τοὺς παρεγγεγραμμένους κύκλους.

689. (749). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὸν ἐγγεγραμμένον κύκλον καὶ ἕνα ἐκ τῶν περεγγεγραμμένων κύκλων.

690. (750). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν Α καὶ τὰς ἀκτῖνας ρ_β καὶ ρ_γ τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων.

691. (751). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν μίαν γωνίαν καὶ τὰ δύο τμήματα, τὰ ὁποῖα ἡ διχοτόμος της ὁρίζει ἐπὶ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς.

692. (752). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, τὴν γωνίαν Α καὶ τὸ ἄθροισμα $\beta+\gamma=\lambda$.

693. (753). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν Α τὴν πλευρὰν α καὶ τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

694. (754). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν Α, τὴν περίμετρον 2τ καὶ τὴν ἀκτῖνα R.

695. (755). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α καὶ τὰς ἀκτῖνας ρ καὶ R.

696. (756). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὰς ἀκτῖνας ρ καὶ ρ_α καὶ τὴν διαφορὰν $\beta-\gamma=\lambda$.

697. (757). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, καὶ τὰς ἀκτῖνας ρ καὶ ρ_α.

698. (759). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν ΑΒ=γ, τὴν ἀπόστασιν δ τοῦ μέσου Μ τῆς ΒΓ ἀπὸ τὸν πόδα τοῦ ὕψους ΑΔ καὶ τὴν διαφορὰν Γ—Β=φ τῶν γωνιῶν του Γ καὶ Β.

699. (760). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, τὸ ὕψος υ_β καὶ ἀκτῖνα R.

700. (761). Δίδονται δύο ὁμόκεντροι περιφέρειαι Ο. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὰς γωνίας του καὶ ὅτι ἡ κορυφὴ Α κεῖται ἐπὶ τῆς μιᾶς περιφερείας, αἱ δὲ δύο ἄλλαι κορυφαὶ ἐπὶ τῆς δευτέρας περιφερείας.

701. (762). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν Α καὶ τὰς ἀκτῖνας ρ καὶ ρ_α.

702. (763). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν Α καὶ τὰς ἀκτῖνας ρ καὶ ρ_β.

703. (764). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, τὴν γωνίαν Α καὶ τὴν ἀκτῖνα ρ.

704. (758). Δίδεται μία εὐθεῖα ΒΓ σταθερὰ κατὰ τὴν θέσιν καὶ τὸ μέγεθος, μία εὐθεῖα xy σταθερὰ κατὰ τὴν θέσιν, μία γωνία ω καὶ ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα λ. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ βάσιν τὴν ΒΓ, γωνίαν Α=ω καὶ τοιοῦτον, ὥστε αἱ πλευραί του ΑΒ καὶ ΑΓ νὰ ἀποκόπτουν ἀπὸ τὴν xy τμῆμα μήκους λ.

***Γ'. Ὁμάς.* 705.** (765). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ἂν γνωρίζωμεν τὰς γωνίας Β καὶ Γ, τὴν πλευρὰν ΑΒ καὶ τὰς διαγωνίους του ΑΓ καὶ ΒΔ.

706. (766). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν διαγώνιον ΑΓ, τὴν πλευρὰν ΑΒ καὶ τὰς γωνίας του.

707. (767). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, ἂν γνωρίζωμεν τὰς διαγωνίους του, τὴν γωνίαν τῶν διαγωνίων του καὶ τὴν ἀκτῖνα R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

708. (768). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, ἂν γνωρίζωμεν τὰς γωνίας του, μίαν διαγώνιον καὶ τὴν γωνίαν τῶν διαγωνίων του.

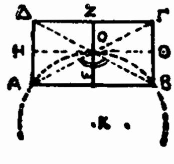
709. (769). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, ἂν γνωρίζωμεν τὴν διαγώνιον ΑΓ, τὴν γωνίαν Δ, τὴν πλευρὰν ΑΒ καὶ τὴν γωνίαν ω τῶν διαγωνίων του.

710. (770). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα παραλληλόγραμμον, ἂν γνωρίζωμεν μίαν

διαγώνιον καὶ τὰς γωνίας, τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ ἄλλη διαγώνιος μὲ τὰς πλευράς.

711. (771). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ἂν γνωρίζωμεν τὰς γωνίας του καὶ τὰς διαγωνίους του.

712. (772). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ, ἂν γνωρίζωμεν μίαν πλευρὰν καὶ τὴν γωνίαν τῶν διαγωνίων του.



Σχ. ἀσκ. 712.

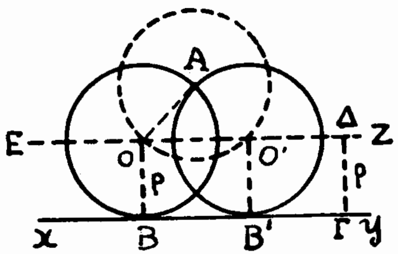
713. (773). Δίδονται δύο κάθετοι εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Ο καὶ μία ἄλλη εὐθεῖα, ἡ ὁποία τέμνει αὐτὰς ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ. Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου μια γωνία νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν γωνίαν Ο, ἡ δὲ κορυφὴ τῆς ἀπέναντι γωνίας νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΕΖ.

Δ΄. Ὁμάς. **714.** (707). Νὰ γραφῇ περιφέρεια κύκλου, μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα, ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτεται δύο τεμνομένων εὐθειῶν.

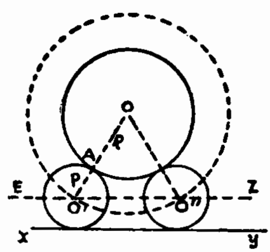
715. (708). Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτεται δύο τεμνομένων εὐθειῶν καὶ τῆς μιᾶς ἐξ αὐτῶν εἰς δοθὲν σημεῖον.

716. (709). Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτεται τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν ἐκ τῶν ὁποίων αἱ δύο εἶναι παράλληλοι.

717. (710). Νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται διὰ δοθέντος σημείου καὶ νὰ ἐφάπτεται δοθείσης εὐθείας.



Σχ. ἀσκ. 717.



Σχ. ἀσκ. 719.

718. (711). Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη δύο δοθεισῶν περιφερειῶν ἐκτὸς καὶ ἔχουσα ἀκτῖνα ἴσην πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν α.

719. (712). Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν ἀκτῖνα καὶ νὰ ἐφάπτεται δοθείσης εὐθείας καὶ δοθείσης περιφερείας.

720. (713). Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτεται δοθείσης περιφερείας εἰς δοθὲν σημεῖον αὐτῆς καὶ μιᾶς δοθείσης εὐθείας.

721. (714). Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτεται δοθείσης περιφερείας εἰς δοθὲν σημεῖον αὐτῆς καὶ μιᾶς ἄλλης περιφερείας.

722. (774). Νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα καὶ διερχομένη διὰ δύο δοθέντων σημείων.

723. (775). Νὰ γραφῇ περιφέρεια κύκλου, ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτεται δύο παραλλήλων εὐθειῶν καὶ νὰ διέρχεται διὰ δοθέντος σημείου.

724. (776). Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται διὰ δύο δοθέν-

των σημείων καὶ τῆς ὁποίας τὸ κέντρον νὰ κεῖται ἐπὶ δοθείσης εὐθείας.

725. (777). Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτεται δοθείσης εὐθείας xy εἰς δοθὲν σημεῖον αὐτῆς Α καὶ νὰ διέρχεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Β.

726. (778). Δίδεται μία εὐθεῖα xy καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β, τὰ ὁποῖα κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς xy καὶ εἰς ἴσην ἀπόστασιν ἀπ' αὐτῆς. Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ τὰ Α καὶ Β καὶ νὰ ἐφάπτεται τῆς xy.

727. (779). Νὰ γραφῇ περιφέρεια, μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα ρ, ἡ ὁποία νὰ ἀποτέμνῃ ἀπὸ δοθεῖσαν περιφέρειαν Α, χορδὴν ΒΓ παράλληλον καὶ ἴσην πρὸς δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα ΕΕ'=λ.

728. (780). Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β καὶ ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ δοθεῖσαν περιφέρειαν οὕτως, ὥστε ἡ κοινὴ χορδή των νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν xy.

729. (781). Δίδεται περιφέρεια Ο, ἡ ὁποία ἐφάπτεται μιᾶς δοθείσης εὐθείας xy εἰς ἕνα σημεῖον Α. Ἐπίσης δίδεται καὶ ἕνα ἄλλο σημεῖον Β τῆς xy. Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτεται τῆς περιφερείας Ο καὶ τῆς εὐθείας xy εἰς τὸ Β.

730. (782). Ἐπὶ μιᾶς καθέτου ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν xy λαμβάνομεν δύο σημεῖα Α καὶ Β κείμενα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς xy. Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ νὰ ἐφάπτεται τῆς xy.

731. (783). Δίδεται μία εὐθεῖα xy καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς xy. Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ τὰ Α καὶ Β καὶ νὰ ἀποκόπτῃ ἀπὸ τὴν xy τὴν μικροτέραν χορδήν.

732. (784). Δίδονται τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ. Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ τοιαύτη, ὥστε αἱ ἐφαπτόμεναι αὐτῆς, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ, νὰ εἶναι ἴσαι.

733. (785). Δίδεται περιφέρεια Α ἀκτῖνος ρ. Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ ὡς κέντρον δοθὲν σημεῖον Ο καὶ τοιαύτη, ὥστε ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη αὐτῶν, νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος λ.

734. (786). Μὲ κέντρον δοθὲν σημεῖον Α νὰ γραφῇ περιφέρεια τέμνουσα δύο ὁμοκέντρους περιφερείας Ο εἰς τρόπον, ὥστε ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῶν περιφερειῶν, νὰ διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον Ο.

735. (787). Νὰ γραφῇ περιφέρεια, διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου Α καὶ ἀποτέμνουσα ἀπὸ δύο δοθείσας περιφερείας Β καὶ Γ χορδὰς παραλλήλους ἀντιστοίχως πρὸς δύο δοθείσας εὐθείας.

736. (788). Νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα R, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α καὶ τῆς ὁποίας ἡ μικροτέρα ἀπόστασις ἀπὸ δοθεῖσαν περιφέρειαν Β νὰ εἶναι ἴση μὲ δοθὲν μῆκος λ.

737. (789). Νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα ρ, διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου Α καὶ τοιαύτη, ὥστε ἡ ἐφαπτομένη αὐτῆς, ἡ ἀγομένη ἐκ δοθέντος σημείου Β, νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος λ.

738. (790). Νὰ γραφῇ περιφέρεια, μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα ρ, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ δύο δοθείσας περιφερείας Α καὶ Β κατὰ διάμετρον.

739. (791). Νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα, ἐφαπτομένη δύο δοθεισῶν περιφερειῶν.

740. (792). Μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, νὰ γραφοῦν τρεῖς περιφέρειαι, αἱ ὁποῖαι νὰ ἐφάπτωνται ἀνὰ δύο.

741. (793). Νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α καὶ νὰ ἐφάπτεται δοθείσης περιφερείας Ο.

742. (794). Νὰ γραφοῦν δύο περιφέρειαι, αἱ ὁποῖαι νὰ διέρχωνται ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β καὶ τοιαῦται, ὥστε αἱ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν εἰς τὸ σημεῖον Α νὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς δύο δοθείσας εὐθείας Χ καὶ Υ.

Ε'. *Ὁμάς*. 743. (715). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς κύκλου νὰ ἀχθῇ χορδὴ ἴση πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

744. (716). Δίδεται περιφέρεια Ο καὶ ἕνα σημεῖα Μ ἐκτὸς αὐτῆς. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Μ μία τέμνουσα ΜΑΒ τῆς περιφερείας καὶ τοιαύτη, ὥστε ἡ χορδὴ ΑΒ νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος λ.

745. (717). Δίδεται περιφέρεια Ο καὶ ἕνα σημεῖον Σ ἐκτὸς αὐτῆς. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Σ μία τέμνουσα ΣΑΒ τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία νὰ ἀποτέμνῃ ἀπὸ τὸν κύκλον ἕνα κυκλικὸν τμῆμα, τὸ ὁποῖον νὰ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ δοθεῖσαν.

746. (718). Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ ἀχθοῦν δύο χορδαὶ παράλληλοι καὶ ἴσαι πρὸς δοθὲν μῆκος λ.

747. (719). Δίδονται δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο' καὶ ζητεῖται νὰ ἀχθῇ μία τέμνουσα αὐτῶν, ὥστε αἱ ἀποτεμνόμεναι χορδαὶ νὰ ἔχουν δοθέντα μήκη λ καὶ λ'.

748. (720). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ζητεῖται νὰ ἀχθῇ ἀπὸ τὴν κορυφήν του Α μία εὐθεῖα τοιαύτη, ὥστε ἂν ἀχθοῦν αἱ ΒΒ' καὶ ΓΓ' κάθετοι ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν αὐτήν, νὰ ὁρίζουν ἕνα τμῆμα Β'Γ', τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος λ.

749. (721). Δίδεται ἕνας κύκλος Ο καὶ μία εὐθεῖα xy. Νὰ κατασκευασθῇ μία τέμνουσα τῆς περιφερείας Ο, κάθετος ἐπὶ τὴν xy καὶ τοιαύτη, ὥστε τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ σημεῖα της μὲ τὴν περιφέρειαν, νὰ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ τὸ δεύτερον σημεῖον τῆς τομῆς καὶ τῆς εὐθείας xy.

750. (722). Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι x'x καὶ y'y καὶ ἕνα σημεῖον Α. Νὰ ἀχθῇ ἀπὸ τὸ Α μία τέμνουσα αὐτῶν ΑΒΓ καὶ τοιαύτη, ὥστε τὸ μεταξὺ τῶν δύο παραλλήλων εὐθειῶν ὁριζόμενον εὐθύγραμμον τμῆμα ΒΓ νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος λ.

751. (723). Νὰ ἀχθῇ ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς δύο τεμνομένων περιφερειῶν, μία τέμνουσα τοιαύτη, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποτεμνομένων χορδῶν νὰ εἶναι ἴσον μὲ δοθὲν μῆκος λ.

752. (724). Δίδονται δύο εὐθεῖαι Αx καὶ Βy καὶ ζητεῖται νὰ τμηθοῦν αἱ εὐθεῖαι αὐταὶ ὑπὸ μιᾶς τρίτης εὐθείας ΜΝ, ἡ ὁποία ἔχει δοθὲν μῆκος λ, εἰς τρόπον ὥστε τὸ ἄθροισμα ΑΜ+ΒΝ τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων ΑΜ καὶ ΒΝ νὰ εἶναι ἴσον μὲ δοθὲν μῆκος k.

753. (725). Δίδονται δύο εὐθεῖαι παράλληλοι x'x καὶ y'y, ἕνα σημεῖον Α ἐπὶ τῆς x'x καὶ ἕνα τυχὸν σημεῖον Β. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Β μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ τὴν x'x εἰς τὸ Γ καὶ τὴν y'y εἰς τὸ Δ εἰς τρόπον, ὥστε νὰ εἶναι ΑΓ=ΑΔ.

754. (726). Νὰ εὑρεθῇ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν μιᾶς γωνίας ΑΒΓ ἕνα σημεῖον Μ ἀπὸ τὸ ὁποῖον νὰ φαίνωνται ὑπὸ δοθείσας γωνίας ω καὶ ν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΒΓ.

755. (727). Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τόξου ΑΒ δοθείσης περεφερείας Ο ἕνα σημεῖον Γ τοιοῦτον, ὥστε τὸ ἄθροισμα ΓΑ+ΓΒ τῶν χορδῶν νὰ εἶναι ἴσον μὲ δοθὲν μῆκος λ.

756. (728). Δίδονται δύο περιφερειαι Ο καὶ Ο' ἀκτίνων ρ καὶ ρ' ἀντιστοίχως. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ΜΜ', τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ τὰ ἄκρα του καὶ ἐπὶ τῶν δύο περιφερειῶν καὶ τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι ἴσον, παράλληλον καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς πρός δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ.

757. (729). Δίδονται δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο' καὶ ἕνα σημεῖον Μ. Νὰ ἀχθῇ ἀπὸ τὸ Μ ἕνα εὐθυγρ. τμῆμα ΑΒ, τοῦ ὁποίου τὰ ἄκρα νὰ κεῖνται ἐπὶ ἑκάστης τῶν δοθεισῶν περιφερειῶν καὶ οὕτως, ὥστε τὸ Μ νὰ εἶναι τὸ μέσον τοῦ ΑΒ.

758. (730). Νὰ εὑρεθῇ ἕνα σημεῖον, ἀπὸ τὸ ὁποῖον αἱ τρεῖς πλευραὶ δοθέντος τριγώνου νὰ φαίνωνται ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν.

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ

ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΚΑΙ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

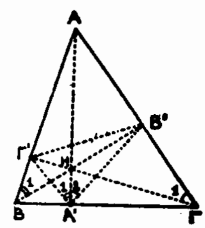
---

1. Ἰδιότητες τοῦ ὀρθοκέντρου

333. Θεώρημα. ***Τὰ ὕψη ἑνὸς τριγώνου εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τοὺς πόδας τῶν ὑψῶν τοῦ πρώτου τριγώνου.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (*Σχ. 261*) καὶ ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′ τὰ τρία ὕψη του, τὰ ὁποῖα τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Η. Φέρομεν τὰς εὐθείας Α′Β, Β′Γ, Γ′Α′.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ ὕψη ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′ εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου Α′Β′Γ′.



Σχ. 261.

Ἀπόδειξις: Τὸ τετράπλευρον ΗΑ′ΒΓ′ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, διότι αἱ δύο ἀπέναντι γωνίαι του Α′ καὶ Γ′ εἶναι ὀρθαί, ἐξ ὑποθέσεως· ἄρα αἱ γωνίαι A'_1 καὶ B_1 εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον, τὸν περιγεγραμμένον περὶ τὸ τετράπλευρον ΗΑ′ΒΓ′ καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΗΓ′· ἤτοι εἶναι

$$\widehat{A}_1' = \widehat{B}_1 \qquad (1)$$

Ὁμοίως καὶ τὸ τετράπλευρον ΗΑ′ΓΒ′ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, διότι αἱ δύο ἀπέναντι γωνίαι του Α′ καὶ Β′ εἶναι ὀρθαί· ἄρα αἱ γωνίαι A_2' καὶ $Γ_1$ εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΗΒ′· δηλ. εἶναι $\widehat{A}_2' = \widehat{Γ}_1$ (2)

Ἀλλὰ αἱ γωνίαι B_1 καὶ $Γ_1$ εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι ὀξεῖαι γωνίαι καὶ ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους μίαν πρὸς μίαν· ἄρα καὶ αἱ ἴσαι πρὸς αὐτὰς γωνίαι A_1' καὶ A_2' θὰ εἶναι ἴσαι. Ὥστε τὸ ὕψος ΑΑ′ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α′ τοῦ τριγώνου Α′Β′Γ′.

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι τὰ ὕψη ΒΒ′ καὶ ΓΓ′ εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Β′ καὶ Γ′ τοῦ τριγώνου Α′Β′Γ′.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Τὰ ὕψη ἑνὸς τριγώνου. . . .***

Σημ. Τὸ τρίγωνον Α′Β′Γ′ λέγεται ***ὀρθοκεντρικὸν τρίγωνον.***

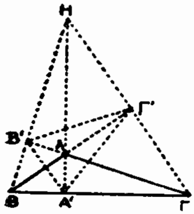
334. Πόρισμα. ***Αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι διχοτόμοι τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν τοῦ ὀρθοκεντρικοῦ τριγώνου Α'Β'Γ'.***

Πράγματι· ἐδείχθη ἀνωτέρω, ὅτι τὸ ὕψος ΑΑ' εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α' τοῦ τριγώνου Α'Β'Γ'. Ἀλλὰ τὸ ὕψος ΑΑ' εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ἐπειδὴ αἱ διχοτόμοι δύο ἐφεξῆς παραπληρωματικῶν γωνιῶν εἶναι κάθετοι, ἕπεται ὅτι ἡ ΒΓ εἶναι διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α' τοῦ τριγώνου Α'Β'Γ'.

Παρατήρησις. Ἐὰν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον, δὲν σχηματίζεται ὀρθοκεντρικὸν τρίγωνον.

Ἐὰν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἀμβλυγώνιον εἰς τὸ Α, *(Σχ. 262)* τότε τὸ ὀρθόκεντρον Η εὑρίσκεται ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

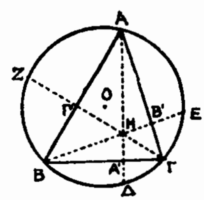


Σχ. 262.

Ἐργαζόμενοι ὅπως εἰς τὴν περίπτωσιν, ποὺ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀξυγώνιον, ἀποδεικνύομεν, ὅτι ἕνα ἀπὸ τὰ ὕψη του εἶναι διχοτόμος μιᾶς ἐσωτερικῆς γωνίας τοῦ τριγώνου Α'Β'Γ', τὰ δὲ δύο ἄλλα ὕψη εἶναι διχοτόμοι τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου Α'Β'Γ' καὶ ὅτι δύο ἀπὸ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι διχοτόμοι δύο ἐσωτερικῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου Α'Β'Γ', ἡ δὲ τρίτη πλευρὰ εἶναι διχοτόμος μιᾶς ἐξωτερικῆς γωνίας τοῦ τριγώνου Α'Β'Γ'.

335. Θεώρημα. ***Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ συμμετρικὰ τοῦ ὀρθοκέντρου ἑνὸς τριγώνου πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου, κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρίγωνον.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ *(Σχ. 263)*, Η τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ὑψῶν του, καὶ Δ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Η πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ.



Σχ. 263.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ Δ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

Ἀπόδειξις: Τὰ τρίγωνα ΒΗΓ καὶ ΒΔΓ* εἶναι ἴσα, διότι εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν ΒΓ· ἄρα θὰ εἶναι

$$\text{γων.}ΒΗΓ = \text{γων.}ΒΔΓ \qquad (1)$$

Εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΓ'ΗΒ' αἱ ἀπέναντι γωνίαι του Γ' καὶ Β' εἶναι ὀρθαί, ἄρα αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι του θὰ εἶναι παραπληρωματικαί, ἤτοι θὰ εἶναι $\text{γων.}Α + \text{γων.}Γ'ΗΒ' = 2$ ὀρθ.

* Εἰς τὸ σχῆμα 263 φέρατε τὰς χορδὰς ΒΔ καὶ ΔΓ.

Εἰς τὴν ἰσότητα αὐτὴν ἀντικαθιστῶμεν τὴν γωνίαν Γ'ΗΒ' μὲ τὴν ἴσην της κατὰ κορυφὴν γωνίαν ΒΗΓ ἢ μὲ τὴν ἴσην της γωνίαν ΒΔΓ, ὅπως ἐδείχθη εἰς τὴν (1) καὶ ἔχομεν

γων.Α+γων.ΒΔΓ=2 ὀρθ.

Εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΒΔΓ παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ δύο ἀπέναντι γωνίαι του Α καὶ Δ εἶναι παραπληρωματικαί· ἄρα τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον. Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι τὸ σημεῖον Δ, συμμετρικὸν τοῦ Η πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ, κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ διὰ τὰ ἄλλα σημεῖα, τὰ συμμετρικὰ τοῦ Η πρὸς τὰς ἄλλας πλευρὰς τοῦ τριγώνου.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι. . . .***

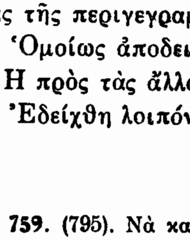
Ἀσκήσεις

759. (795). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τοὺς πόδας τῶν ὑψῶν του.

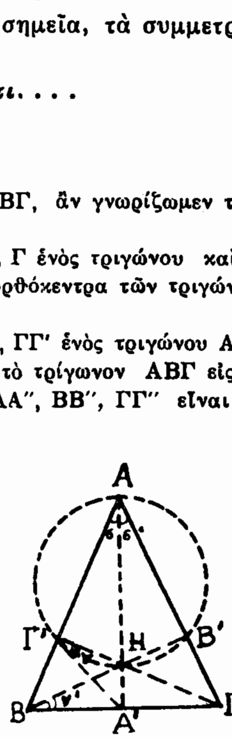
760. (796). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ κορυφαὶ Α, Β, Γ ἑνὸς τριγώνου καὶ τὸ ὀρθόκεντρόν του Η δύνανται νὰ θεωρηθοῦν, ὡς ὀρθόκεντρα τῶν τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχουν κορυφὰς τὰ τρία ἄλλα σημεῖα.

761. (797). Αἱ προεκτάσεις τῶν ὑψῶν ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ τέμνουν τὴν περιφέρειαν τὴν περιγεγραμμένην περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Α'', Β'', Γ''. Νά ἀποδειχθῇ: 1ον. ὅτι αἱ ΑΑ'', ΒΒ'', ΓΓ'' εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου Α''Β''Γ''. 2ον. ὅτι τὰ ἓξ τόξα, τὰ ὁποῖα ὁρίζουν, ἐπὶ τῆς περιφερείας, αἱ τρεῖς κορυφαὶ Α, Β, Γ καὶ τὰ σημεῖα Α'', Β'', Γ'', εἶναι ἴσα ἀνὰ δύο.

762. (798). ***Θεώρημα τοῦ** Garnot.* Οἱ κύκλοι οἱ περιγεγραμμένοι περὶ δοθὲν τρίγωνον καὶ περὶ τὰ τρία τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν κορυφὰς τὸ ὀρθόκεντρον καὶ δύο ἀπὸ τὰς κορυφὰς τοῦ δοθέντος τριγώνου, εἶναι ἴσοι.



Σχ. ἀσκ. 762.



Σχ. ἀσκ. 763.

763. (799). Εἰς ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, (ΑΒ=ΑΓ) φέρομεν τὰ ὕψη ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ', τὰ ὁποῖα τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Η. Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον. ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΓ'ΗΒ' εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον. 2ον. ὅτι ἡ εὐθεῖα Α'Γ' εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας ΑΓ'ΗΒ'.

764. (800). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὰ ὕψη ΒΒ', ΓΓ', τὰ ὁποῖα τέμνονται εἰς τὸ Η καὶ λαμβάνομεν τὰ συμμετρικὰ Ε καὶ Ζ τῆς κορυφῆς Α

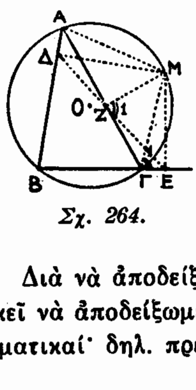
ὡς πρὸς τὰ ὕψη ΒΒ′ καὶ ΓΓ′ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ πέντε σημεῖα Β, Γ, Ε, Η, Ζ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

765. (690). Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον ΟΑΓΒ Περὶ τὴν κορυφὴν του Γ στρέφομεν μίαν ὀρθὴν γωνίαν, τῆς ὁποίας ἡ μία κάθετος πλευρὰ τέμνει τὴν ΟΑ εἰς τὸ σημεῖον Ε καὶ τὴν ΟΒ εἰς τὸ Ζ, ἡ δὲ ἄλλη κάθετος πλευρά της τέμνει τὴν ΟΑ εἰς τὸ Ε′ καὶ τὴν ΟΒ εἰς τὸ Ζ′. 1ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν μέσων τῶν εὐθειῶν ΕΖ′ καὶ Ε′Ζ. 2ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν ΕΖ′ καὶ Ε′Ζ.

2. Εὐθεῖα τοῦ Simson

356. Θεώρημα. ***Ἐὰν ἀπὸ τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας τῆς περιγεγραμμένης περὶ ἕνα τρίγωνον, φέρωμεν καθέτους ἐπὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ τριγώνου αὐτοῦ, οἱ τρεῖς πόδες τῶν καθέτων αὐτῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ *(Σχ. 264)* καὶ Ο ὁ κύκλος ὁ περιγεγραμμένος περὶ αὐτό. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς περιφερείας Ο, φέρομεν τὰς καθέτους ΜΔ, ΜΕ, ΜΖ ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τοῦ τριγώνου.



Σχ. 264.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὰς εὐθείας ΖΔ καὶ ΖΕ καὶ τὰς χορδὰς ΜΑ καὶ ΜΓ.

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι αἱ γωνίαι ΕΖΜ καὶ ΜΖΔ εἶναι παραπληρωματικαί· δηλ. πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι:

$$\widehat{EZM}+\widehat{MZ\Delta}=2 \text{ ὀρθαί}.$$

Τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΜ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Ο καὶ ἑπομένως ἡ γωνία ΒΑΜ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν Γ_1 (§ 299, 2ον)· δηλ. εἶναι $\text{γων.}BAM=\text{γων.}\Gamma_1$ (1)

Τὸ τετράπλευρον ΜΖΓΕ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, διότι αἱ δύο ἀπέναντι γωνίαι του Ζ καὶ Ε εἶναι ὀρθαὶ ἐκ κατασκευῆς· ἄρα αἱ γωνίαι Z_1 καὶ Γ_1 εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸν κύκλον, τὸν περιγεγραμμένον περὶ τὸ τετράπλευρον ΜΖΓΕ καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΜΕ· δηλ. εἶναι

$$\text{γων.}Z_1=\text{γων.}\Gamma_1 \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι

$$\text{γων.}BAM=\text{γων.}Z_1 \quad \text{ἢ} \quad \text{γων.}\Delta AM=\text{γων.}Z_1 \qquad (3)$$

Ἐπίσης τὸ τετράπλευρον ΑΔΖΜ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, διότι αἱ γωνίαι ΑΔΜ καὶ ΑΖΜ εἶναι ὀρθαί, ἐκ κατασκευῆς καὶ ἑπομένως αἱ κορυφαί των Δ καὶ Ζ κεῖνται ἐπὶ περιφερείας, ἡ ὁποία γράφεται μὲ διάμετρον τὴν ΑΜ.

Ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρον ΑΔΖΜ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, αἱ ἀπέναντι γωνίαι του ΔΑΜ καὶ ΔΖΜ εἶναι παραπληρωματικαί· δηλ. εἶναι γων.ΔΑΜ+γων.ΔΖΜ=2 ὀρθ.

Εἰς τὴν ἰσότητα αὐτὴν ἀντικαθιστῶμεν τὴν γωνίαν ΔΑΜ μὲ τὴν ἴσην της γωνίαν $Ζ_1$, ὅπως φαίνεται εἰς τὴν ἰσότητα (3) καὶ ἔχομεν

γων.$Ζ_1$+γων.ΔΖΜ=2 ὀρθ. ἢ γων ΜΖΕ+γων.ΔΖΜ=2 ὀρθ.

Ἐπειδὴ αἱ ἐφεξῆς γωνίαι ΔΖΜ καὶ ΜΖΕ εἶναι παραπληρωματικαί, αἱ μὴ κοιναὶ πλευραί των κεῖνται ἐπ' εὐθείας· ἤτοι ἡ ΔΖΕ εἶναι εὐθεῖα.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν ἀπὸ τυχὸν σημεῖον...***

Σημ. Ἡ εὐθεῖα ΔΖΕ, ἡ ὁποία συνδέει τοὺς πόδας τῶν καθέτων, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς περιφερείας Ο ἐπὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ λέγεται ***εὐθεῖα τοῦ Simson.***

357. Θεώρημα *(ἀντίστροφον).* ***Ἂν οἱ πόδες τῶν καθέτων, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς ἑνὸς τριγώνου, κεῖνται ἐπ' εὐθείας, τότε τὸ σημεῖον αὐτὸ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω Μ *(Σχ. 264)* ἕνα σημεῖον καὶ Δ, Ε, Ζ οἱ πόδες τῶν καθέτων, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ Μ ἐπὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ.

Συμπέρασμα: Ἂν τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, δηλ. ἐὰν ἡ ΔΖΕ εἶναι εὐθεῖα, θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ σημεῖον Μ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὰς εὐθείας ΜΑ καὶ ΜΓ· ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΜΑΒΓ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

Τὸ τετράπλευρον ΜΖΓΕ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, διότι αἱ δύο ἀπέναντι γωνίαι του Ζ καὶ Ε εἶναι ὀρθαί· ἄρα αἱ γωνίαι $Ζ_1$ καὶ $Γ_1$ εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸν κύκλον, τὸν περιγεγραμμένον περὶ τὸ τετράπλευρον ΜΖΓΕ καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΜΕ· δηλ. εἶναι γων.$Γ_1$=γων.$Ζ_1$ (1)

Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΑΔΜ καὶ ΑΖΜ εἶναι ὀρθαί, αἱ κορυφαί των Δ καὶ Ζ κεῖνται ἐπὶ περιφερείας, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὴν ΑΜ. Ὥστε καὶ τὸ τετράπλευρον ΜΑΔΖ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον· ἄρα αἱ γωνίαι ΜΑΔ καὶ $Ζ_1$ εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν παραπληρωματικὴν γωνίαν ΔΖΜ· δηλ. εἶναι γων.ΔΑΜ=γων.$Ζ_1$ (2)

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι

$$\text{γων.}ΔΑΜ=\text{γων.}Γ_1.$$

Παρατηροῦμεν εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΜ, ὅτι ἡ γωνία ΔΑΜ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν $Γ_1$, ἡ ὁποία σχηματίζεται εἰς τὴν ἀπέναντι κορυφήν του Γ· ἄρα (§ 300. 2ον) τὸ τετράπλευρον ΜΑΒΓ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον καὶ ἑπομένως τὸ σημεῖον Μ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: *Ἂν οἱ πόδες. . . .*

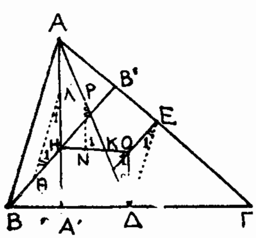
358. **Πόρισμα.** ***Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν ἰδιότητα αὐτήν: ὥστε οἱ πόδες τῶν καθέτων, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ καθένα ἀπὸ τὰ σημεῖα αὐτά, ἐπὶ τὰς πλευρὰς ἑνὸς τριγώνου, νὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, εἶναι ἡ περιφέρεια κύκλου ἡ περιγεγραμμένη περὶ τὸ τρίγωνον.***

Ἡ πρότασις αὐτὴ εἶναι ἄμεσος συνέπεια τῆς § 357.

3. Εὐθεῖα καὶ κύκλος τοῦ Euler

359. **Θεώρημα.** ***Εἰς κάθε τρίγωνον, τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ὑψῶν του (ὀρθόκεντρον), τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων του (κέντρον βάρους) καὶ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν μεσοκαθέτων τῶν πλευρῶν του, κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο πρώτων σημείων εἶναι διπλασία τῆς ἀποστάσεως τῶν δύο δευτέρων.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ *(Σχ. 265)*, Η τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ὑψῶν του ΑΑ', ΒΒ', Ο τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν μεσοκαθέτων τῶν πλευρῶν ΒΓ καὶ ΓΑ. Φέρομεν τὴν διάμεσον ΑΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν εὐθεῖαν ΗΟ εἰς τὸ σημεῖον Κ.



Σχ. 265.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ Κ εἶναι σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ ὅτι ΗΚ=2ΚΟ.

Ἀπόδειξις: Ἔστω Θ τὸ μέσον τῆς ΒΗ καὶ Λ τὸ μέσον τῆς ΑΗ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΗΑΒ ἡ εὐθεῖα ΘΛ συνδέει τὰ μέσα δύο πλευρῶν του καὶ ἑπομένως εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν ΑΒ καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ. Ὁμοίως εἰς τὸ τρίγωνον ΓΑΒ, ἡ εὐθεῖα ΕΔ συνδέει τὰ μέσα δύο πλευρῶν του καὶ ἑπομένως εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν ΑΒ καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς. Ὥστε αἱ ΘΛ καὶ

ΕΔ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, ὡς ἴσαι μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ καὶ παράλληλοι πρὸς αὐτήν· δηλ. εἶναι ΘΛ=ΕΔ.

Τὰ τρίγωνα ΗΘΛ καὶ ΟΔΕ ἔχουν: ΘΛ=ΕΔ, ὡς ἐδείχθη, $\widehat{\Lambda}_1=\widehat{\Delta}_1$, διότι ἔχουν τὰς πλευρὰς παραλλήλους καὶ μὲ ἀντίθετον φοράν, δηλ. τὴν ΛΗ παράλληλον πρὸς τὴν ΔΟ, διότι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΒΓ καὶ ΛΘ παράλληλον πρὸς τὴν ΔΕ, ὡς ἐδείχθη· ἐπίσης τὰ τρίγωνα ἔχουν $\widehat{\Theta}_1=\widehat{E}_1$, δι' ὅμοιον λόγον· δηλ. τὰ τρίγωνα ΗΘΛ καὶ ΟΔΕ ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας ἴσας· ἄρα τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι καὶ

$$ΟΔ=ΗΛ \qquad (1)$$

Ἔστω Ν τὸ μέσον τῆς ΗΚ καὶ Ρ τὸ μέσον τῆς ΑΚ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΚΑΗ, ἡ εὐθεῖα ΝΡ συνδέει τὰ μέσα δύο πλευρῶν του· ἄρα θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευράν του ΑΗ καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς· δηλ. θὰ εἶναι ΝΡ=ΛΗ.

Ἐπειδὴ καὶ ἡ ΟΔ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΛΗ, θὰ εἶναι καὶ ἡ ΡΝ ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΟΔ. Τὰ τρίγωνα ΚΝΡ καὶ ΚΟΔ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην, ΝΡ=ΟΔ καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας ἴσας, δηλ. $\widehat{P}=\widehat{\Delta}_2$, διότι ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους καὶ μὲ ἀντίθετον φορὰν καὶ $\widehat{N}_1=\widehat{O}_1$, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΝΡ καὶ ΟΔ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΝΟ· ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων αὐτῶν συνάγομεν, ὅτι:

$$ΡΚ=ΚΔ \quad (2) \quad \text{καὶ} \quad ΝΚ=ΚΟ \quad (3)$$

Ἐπειδὴ τὸ Ρ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΚ θὰ εἶναι ΑΡ=ΡΚ καὶ ἑπομένως ἡ ἰσότης (2) γράφεται

$$ΑΡ=ΡΚ=ΚΔ.$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν συνάγομεν, ὅτι ἡ ΑΚ εἶναι ἴση μὲ τὰ 2/3 τῆς διαμέσου ΑΔ καὶ ἑπομένως τὸ σημεῖον Κ εἶναι σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ἐπίσης, ἐπειδὴ τὸ Ν εἶναι τὸ μέσον τῆς ΗΚ, θὰ εἶναι ΗΝ=ΝΚ καὶ ἑπομένως ἡ ἰσότης (3) γράφεται ΗΝ=ΝΚ=ΚΟ.

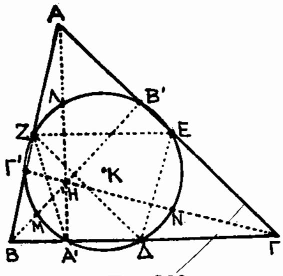
Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν συνάγομεν, ὅτι ΗΚ=2ΚΟ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Εἰς κάθε τρίγωνον, τὸ σημεῖον....***

Σημ. Ἡ εὐθεῖα ΗΚΟ λέγεται ***εὐθεῖα τοῦ Euler.***

360. Θεώρημα. ***Τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου, οἱ πόδες τῶν ὑψῶν του καὶ τὰ μέσα τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν του ἀπὸ τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν ὑψῶν του, κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας. (Περιφέρεια τῶν 9 σημείων ἢ κύκλος τοῦ Euler).***

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ *(Σχ. 266)*, Δ, Ε, Ζ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του, Α', Β', Γ' πόδες τῶν ὑψῶν του, Η τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ὑψῶν του καὶ Λ, Μ, Ν τὰ μέσα τῶν ΑΗ, ΒΗ καὶ ΓΗ.



Σχ. 266.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ 9 σημεῖα Δ, Ε, Ζ, Α', Β', Γ', Λ, Μ, Ν κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

Ἀπόδειξις: Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ περιφέρεια αὕτη διέρχεται διὰ τοῦ ἑνὸς ποδὸς Α' καὶ διὰ τοῦ μέσου Λ τῆς ΑΗ.

Φέρομεν τὰς ΖΑ' καὶ ΔΕ.

Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΑ'Α, ἡ Α'Ζ εἶναι διάμεσος αὐτοῦ καὶ ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας Α'· ἄρα εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης· ἤτοι εἶναι

$$A'Z = \frac{1}{2}AB \qquad (1)$$

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἡ εὐθεῖα ΔΕ συνδέει τὰ μέσα δύο πλευρῶν του· ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευράν του καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς· ἤτοι εἶναι

$$\Delta E = \frac{1}{2}AB \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι ΖΑ'=ΔΕ.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἡ εὐθεῖα ΖΕ συνδέει τὰ μέσα δύο πλευρῶν του· ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευράν του ΒΓ. Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν Α'ΔΕΖ εἶναι τραπέζιον καὶ ἐπειδὴ εἶναι ΖΑ'=ΔΕ, ὡς ἐδείχθη, εἶναι ἰσοσκελὲς τραπέζιον. Ὡς ἰσοσκελὲς τραπέζιον, τὸ τετράπλευρον Α'ΔΕΖ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον. Ὥστε ἡ περιφέρεια, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ, μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, διέρχεται καὶ ἀπὸ τὸν πόδα Α' τοῦ ὕψους ΑΑ'.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ περιφέρεια, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ διέρχεται καὶ ἀπὸ τοὺς πόδας Β' καὶ Γ' τῶν ὑψῶν ΒΒ' καὶ ΓΓ'.

Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι ἡ περιφέρεια αὐτή, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ καὶ Α', Β', Γ', διέρχεται καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον Λ, μέσον τῆς ΑΗ.

Φέρομεν τὰς ΛΖ* καὶ ΖΔ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΗ, ἡ εὐθεῖα ΖΛ συνδέει τὰ μέσα Ζ καὶ Λ δύο πλευρῶν του· ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευράν του ΒΗ.

* Φέρατε εἰς τὸ σχῆμα 266 τὴν εὐθεῖαν ΛΖ.

Ὁμοίως εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἡ εὐθεῖα ΖΔ συνδέει τὰ μέσα δύο πλευρῶν του· ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευράν του ΑΓ. Αἱ γωνίαι ΛΖΔ καὶ ΒΒ΄Α εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους καὶ μὲ ἀντίθετον φοράν· ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία ΒΒ΄Α εἶναι ὀρθή, θὰ εἶναι ὀρθὴ καὶ ἡ ἴση πρὸς αὐτὴν γωνία ΛΖΔ· ἤτοι εἶναι γων.ΛΖΔ=1 ὀρθή.

Ἡ κορυφὴ λοιπὸν Ζ τῆς ὀρθῆς γωνίας ΛΖΔ κεῖται ἐπὶ περιφερείας, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὴν ΛΔ. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ γων.ΛΑ΄Δ=1 ὀρθή, καὶ ἡ κορυφὴ Α΄ κεῖται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὴν ΛΔ. Τὰ σημεῖα λοιπὸν Λ, Ζ, Α΄, Δ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας. Ἡ περιφέρεια λοιπόν, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Ζ, Α΄, Δ διέρχεται καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον Λ καὶ ἑπομένως εἶναι ἡ προηγουμένως εὑρεθεῖσα περιφέρεια.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ περιφέρεια αὕτη διέρχεται καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Τὰ μέσα τῶν....***

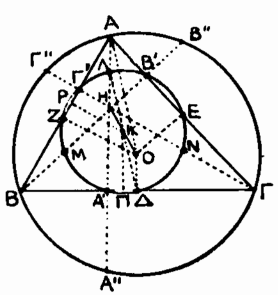
361. Θεώρημα. *Νὰ ἀποδειχθῇ:*

1ον. ***Ὅτι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τοῦ Euler κεῖται εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία συνδέει τὸ ὀρθόκεντρον μὲ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον.***

2ον. ***Ὅτι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου τοῦ Euler εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω Ο *(Σχ. 267)* τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Η τὸ ὀρθόκεντρον.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ κέντρον Κ τοῦ κύκλου τοῦ Euler κεῖται εἰς τὸ μέσον τῆς ΟΗ.



Σχ. 267.

Ἀπόδειξις: Τὸ κέντρον Ο τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι σημεῖον τῆς τομῆς τῶν καθέτων ΔΟ, ΖΟ, ΕΟ εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Φέρομεν τὴν ΗΟ. Τὸ τετράπλευρον ΗΑ΄ΔΟ εἶναι τραπέζιον, διότι αἱ δύο ἀπέναντι πλευραί του ΗΑ΄ καὶ ΟΔ εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΒΓ. Ὁμοίως καὶ τὸ τετράπλευρον ΟΖΓ΄Η εἶναι τραπέζιον, διότι αἱ ΟΖ καὶ ΗΓ΄ εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΒ.

Ἀπὸ τὸ μέσον Π τῆς χορδῆς Α'Δ τοῦ κύκλου τοῦ Euler φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν Α'Δ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΗΟ εἰς τὸ Κ. Ἡ ΚΠ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν Α'Δ, εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις τοῦ τραπεζίου ΗΑ'ΔΟ καὶ ἐπειδὴ ἄγεται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς Α'Δ, θὰ διέλθῃ ἀπὸ τὸ μέσον τῆς ΗΟ· ἤτοι τὸ Κ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΗΟ.

Ὁμοίως ἡ κάθετος ΡΚ ἐπὶ τὴν ΖΓ' εἰς τὸ μέσον αὐτῆς διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς ΗΟ. Τὸ Κ ὡς σημεῖον τῆς τομῆς τῶν καθέτων εἰς τὰ μέσα τῶν χορδῶν Α'Δ καὶ Γ'Ζ τοῦ κύκλου τοῦ Euler, εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου αὐτοῦ.

Ὥστε τὸ κέντρον Κ τοῦ κύκλου τοῦ Euler εἶναι τὸ μέσον τῆς ΗΟ.

2ον. Ἡ γωνία ΛΑ'Δ εἶναι ὀρθή, ἐπειδὴ δὲ εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸν κύκλον Κ ἕπεται, ὅτι ἡ ΛΔ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου Κ. Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΑ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΟΗ, ἡ εὐθεῖα ΚΛ συνδέει τὰ μέσα τῶν δύο πλευρῶν του ΗΟ καὶ ΗΑ· ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευράν του ΑΟ καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς, δηλ. ἡ ἀκτὶς ΚΛ τοῦ κύκλου τοῦ Euler εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος ΑΟ τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ· δηλ. εἶναι $\boxed{R_9 = \frac{R}{2}}$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ὅτι τὸ κέντρον. . . .***

Σημ. Ἡ εὐθεῖα ΟΗ λέγεται ***εὐθεῖα τοῦ Euler.***

Ἀσκήσεις

Α'. Ὁμάς. 766. (801). ***Θεώρημα τοῦ** Salmans*. Εἰς ἕνα κύκλον Ο φέρομεν τρεῖς χορδὰς ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ. Μὲ διαμέτρους τὰς χορδὰς αὐτὰς γράφομεν τρεῖς περιφερείας, αἱ ὁποῖαι τέμνονται, ἀνὰ δύο, εἰς τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ, ἐκτὸς τοῦ κοινοῦ των σημείου Μ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

767. (802). Τὰ τέσσαρα κέντρα τῶν κύκλων, ἐγγεγραμμένων καὶ παρεγγεγραμμένων εἰς ἕνα τρίγωνον, συνδεόμενα μὲ εὐθείας δίδουν ἓξ εὐθύγραμμα τμήματα. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ μέσα τῶν ἓξ αὐτῶν εὐθυγρ. τμημάτων κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον.

768. (803). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ὁ περιγεγραμμένος περὶ τὸ τρίγωνον κύκλος Ο καὶ ὁ κύκλος Κ τοῦ Euler. Ἐὰν Δ, Ε, Ζ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τοῦ τριγώνου, Η τὸ ὀρθόκεντρόν του, καὶ Λ τὸ σημεῖον τοῦ κύκλου τοῦ Euler, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ ὕψους ΑΑ', νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΖΛ καὶ ΟΕ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι· ἐπίσης αἱ ΛΕ καὶ ΖΟ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.

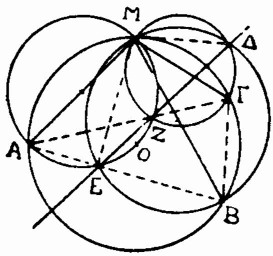
2ον. Ὅτι ΟΖ$=\frac{1}{2}$ΓΗ, ΟΕ$=\frac{1}{2}$ΒΗ, καὶ ΟΔ$=\frac{1}{2}$ΑΗ.

769. (804). ***Θεώρημα τοῦ** Hamilton*. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἕνα δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὰ τρία τρίγωνα ΑΒΗ, ΒΓΗ, ΓΑΗ, τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὴν

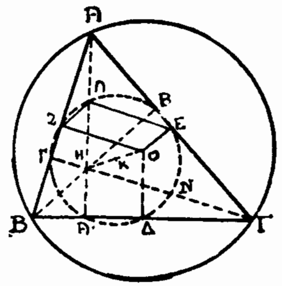
κορυφὴν τὸ ὀρθόκεντρον Η καὶ βάσεις, ἀντιστοίχως, τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἔχουν κοινὸν τὸν κύκλον τοῦ Euler.

770. (805). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Η τὸ ὀρθόκεντρόν του. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι τὰ τέσσαρα τρίγωνα ΑΒΓ, ΗΑΒ, ΗΒΓ, ΗΓΑ ἔχουν κοινὸν τὸν κύκλον τοῦ Euler.



Σχ. ἀσκ. 766.

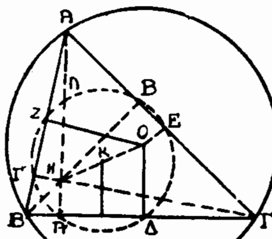


Σχ. ἀσκ. 768.

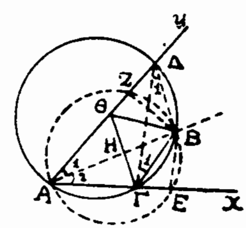
2ον. Ὅτι αἱ τέσσαρες περιφέρειαι, αἱ περιγεγραμμέναι περὶ τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσαι.

3ον. Ὅτι αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὸ ὀρθόκεντρον Η μὲ τὸ κέντρον κάθε περιγεγραμμένου κύκλου διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὸ μέσον τῶν εὐθειῶν αὐτῶν.

771. (806). Εἰς κάθε τετράπλευρον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, αἱ κάθετοι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὰ μέσα ἑκάστης πλευρᾶς, ἐπὶ τὴν ἀπέναντι πλευράν, διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον.



Σχ. ἀσκ. 769.



Σχ. ἀσκ. 772.

772. (807). ***Θεώρημα τοῦ*** *Maclaurin*. Δίδεται μία γωνία xAy καὶ ἕνα σημεῖον Β, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου της. Γράφομεν τυχοῦσαν περιφέρειαν διερχομένην ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β· ἡ περιφέρεια αὐτὴ τέμνει τὴν Ax εἰς τὸ Γ καὶ τὴν Ay εἰς τὸ Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΑΓ+ΑΔ=σταθερόν.

773. (808). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὸ ὕψος ΑΗ, τὴν διχοτόμον ΑΔ τῆς γωνίας Α καὶ τὰς καθέτους ΒΕ καὶ ΓΖ ἐπὶ τὴν ΑΔ. Ἐὰν Μ καὶ Ν εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΒΓ καὶ ΑΒ, νὰ ἀποδειχθῇ:

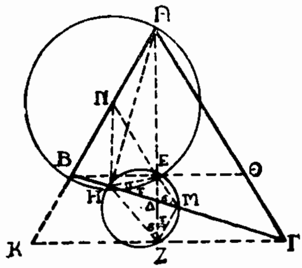
1ον. Ὅτι τὸ τετράπλευρον ΗΖΜΕ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

2ον. Ὅτι γων.ΗΖΜ=γων.Γ+γων.$\frac{Α}{2}$.

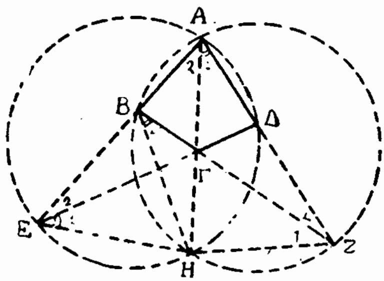
3ον. Ὅτι γων.ΗΝΜ=Β−Γ.

4ον. Ὅτι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΕΗΖΜ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου τοῦ Euler τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

774. (809). ***Σημεῖον τοῦ** Miquel*. Ἐὰν εἰς ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ προεκτείνωμεν τὰς ἀπέναντι πλευράς του ΑΒ καὶ ΓΔ μέχρι τῆς συναντήσεώς των εἰς τὸ σημεῖον Ε καὶ τὰς πλευρὰς ΑΔ καὶ ΒΓ μέχρι τῆς συναντήσεώς των εἰς τὸ Ζ, σχηματίζομεν ἕνα σχῆμα, τὸ ὁποῖον λέγεται ***πλῆρες τετράπλευρον***. Αὐτὸ τὸ πλῆρες τετράπλευρον περιέχει τέσσαρα τρίγωνα ΕΒΓ, ΕΑΔ, ΖΓΔ, ΖΑΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ : 1ον. Ὅτι αἱ περιφέρειαι αἱ περιγεγραμμέναι περὶ τὰ τέσσαρα αὐτὰ τρίγωνα διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον.



Σχ. ἀσκ. 773.



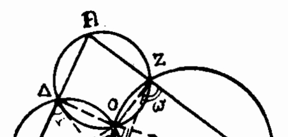
Σχ. ἀσκ. 774.

2ον. Ὅτι τὰ κέντρα τῶν περιφερειῶν αὐτῶν κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

775. (810). Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. Ὅτι αἱ περιφέρειαι αἱ περιγεγραμμέναι περὶ τὰ τρίγωνα ΑΔΖ, ΒΕΔ καὶ ΓΖΕ διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο.

2ον. Ὅτι γων.ΑΟΒ=γων.Γ+γων.ΕΔΖ,
γων.ΒΟΓ=γων.Α+γων.ΔΕΖ,
γων.ΑΟΓ=γων.Β+γων.ΔΖΕ.

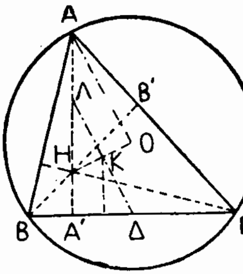


Σχ. ἀσκ. 775.

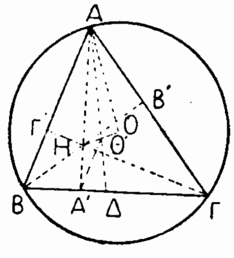
3ον. Ἀπὸ τὰς κορυφὰς Α, Β, Γ φέρομεν τρεῖς τυχούσας παραλλήλους ΑΗ, ΒΘ, ΓΚ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς περιφερείας τῶν κύκλων ΑΔΖ, ΒΕΔ, ΓΖΕ εἰς τὰ σημεῖα Η, Θ, Κ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Η, Θ, Κ καὶ Ο κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

***Β'. Ὁμάς.* 776.** (811). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν κορυφὴν Α, τὸ ὀρθόκεντρον Η καὶ τὸ σημεῖον Δ τῆς τομῆς τῆς διαμέσου ΑΔ καὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ.

777. (812). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ὀρθόκεντρόν του Η, τὸ κέντρον βάρους του Θ, καὶ τὸν πόδα Α′ τοῦ ὕψους ΑΑ′.



Σχ. ἀσκ. 776.



Σχ. ἀσκ. 777.

778. (813). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν κορυφήν του Α, τὸ ὀρθόκεντρόν του Η καὶ τὸ κέντρον βάρους του Θ.

779. (814). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὸ κέντρον Ο′ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου, τὸ κέντρον Ο τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ τὸ κέντρον $Ο_α$ τοῦ παρεγγεγραμμένου κύκλου.

780. (815). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ὀρθόκεντρόν του Η, τὸν πόδα Α′ τοῦ ὕψους ΑΑ′ καὶ τὸ κέντρον Ο τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

781. (816). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὸ κέντρον Ο′ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ τὰ κέντρα $Ο_α$, $Ο_β$ τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων.

782. (817). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὸ κέντρον Ο τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ τὰ κέντρα $Ο_α$, $Ο_β$ τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων.

783. (818). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν κορυφήν του Α, τὸ κέντρον βάρους του Θ καὶ τὸ κέντρον Ο τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

784. (819). Νὰ κασασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν κορυφήν του Β, τὸ κέντρον Ο τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ τὸ κέντρον $Ο_9$ τοῦ κύκλου τοῦ Euler.

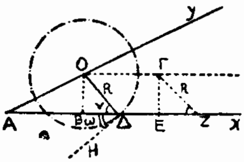
4. Γωνία εὐθείας καὶ περιφερείας. Γωνία δύο τεμνομένων περιφερειῶν.

362. Εἰς τὰς § 249, 262, ἐδώσαμεν τοὺς ὁρισμοὺς τῆς γωνίας εὐθείας καὶ περιφερείας καὶ τῆς γωνίας δύο τεμνομένων περιφερειῶν.

Κατωτέρω θὰ λύσωμεν δύο προβλήματα σχετικὰ μὲ τὴν γωνίαν εὐθείας καὶ περιφερείας καὶ τὴν γωνίαν δύο τεμνομένων περιφερειῶν.

363. Πρόβλημα 1ον. ***Δίδεται μία γωνία xAy. Νὰ γραφῇ περιφέρεια κύκλου μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα R, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ τὸ κέντρον της ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Ay καὶ ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ τὴν ἄλλην πλευρὰν Ax ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν ω.***

Ἀνάλυσις: Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω Ο ἡ ζητουμένη περιφέρεια, ἡ ὁποία ἔχει τὸ κέντρον της Ο ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Ay τῆς γωνίας xAy καὶ ἡ ὁποία τέμνει τὴν Ax ὑπὸ γωνίαν ΑΔΗ ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω.



Σχ. ἀσκ. 268.

Φέρομεν τὴν ΟΒ κάθετον ἐπὶ τὴν Ax καὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΔ. Ἡ ΔΗ, ὡς ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου Ο, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΔ· ἄρα αἱ γωνίαι v καὶ ω εἶναι συμπληρωματικαί. Τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΒΔ γνωρίζομεν τὴν ὑποτείνουσαν ΟΔ ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν ἀκτῖνα R τοῦ κύκλου καὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν v, ἴσην μὲ τὴν συμπληρωματικὴν τῆς δοθείσης γωνίας ω. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΟΒΔ δύναται νὰ κατασκευασθῇ καὶ ἑπομένως δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὸ μῆκος ΟΒ, δηλ. τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου Ο ἀπὸ τὴν Ax.

Ἀλλὰ τότε τὸ κέντρον τοῦ ζητουμένου κύκλου εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῆς πλευρᾶς Ay καὶ μιᾶς εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν Ax, ἡ ὁποία ἀπέχει ἀπὸ αὐτὴν ἀπόστασιν ἴσην μὲ ΟΒ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι κατασκευήν:

Σύνθεσις: Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Ax λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Ζ καὶ μὲ κορυφὴν τὸ Ζ καὶ πλευρὰν τὴν ΖΑ κατασκευάζομεν μίαν γωνίαν ΑΖΓ ἴσην μὲ τὴν συμπληρωματικὴν τῆς δοθείσης γωνίας ω. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΖΓ λαμβάνομεν τμῆμα ΖΓ ἴσον μὲ τὴν δοθεῖσαν ἀκτῖνα R· ἀπὸ τὸ Γ φέρομεν τὴν κάθετον ΓΕ ἐπὶ τὴν Ax καὶ τὴν ΓΟ παράλληλον πρὸς τὴν Ax, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Ay εἰς τὸ σημεῖον Ο. Ἀπὸ τὸ Ο φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΓΖ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Ax εἰς τὸ σημεῖον Δ. Μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΟΔ γράφομεν περιφέρειαν κύκλου, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη.

Ἀπόδειξις: Ἡ περιφέρεια Ο ἔχει τὸ κέντρον της ἐπὶ τῆς Ay καὶ ἀκτῖνα ΟΔ ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν R, διότι ἡ ΟΔ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΓΖ=R, ὡς ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου ΟΔΖΓ. Φέρομεν τὴν ΔΗ κάθετον εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος ΟΔ· ἡ ΔΗ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου Ο εἰς τὸ σημεῖον Δ τῆς τομῆς τῆς Ax καὶ τῆς περιφερείας Ο. Ἑπομένως ἡ γωνία ΑΔΗ εἶναι γωνία μιᾶς περιφερείας καὶ μιᾶς τεμνούσης.

Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι ἡ γωνία ΑΔΗ εἶναι ἴση μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω.

Πράγματι· ἐπειδὴ ἡ γωνία ΟΔΗ εἶναι ὀρθή, θὰ εἶναι

$$\widehat{ΑΔΗ}+\widehat{ν}=90^\circ \qquad (1)$$

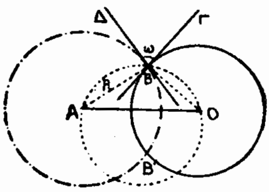
Ἀλλὰ $ν=Ζ=90^\circ-ω$, ὁπότε ἡ (1) γράφεται

$$\widehat{ΑΔΗ}+90^\circ-\widehat{ω}=90^\circ \quad ἢ \quad \widehat{ΑΔΗ}=\widehat{ω}.$$

Ὥστε ἡ περιφέρεια (Ο, ΟΔ) εἶναι ἡ ζητουμένη.

364. Πρόβλημα 2ον. ***Μὲ κέντρον δοθὲν σημεῖον Α, νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ δοθεῖσαν περιφέρειαν Ο, ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν ω.***

Ἀνάλυσις: Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω Α ἡ ζητουμένη περιφέρεια, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τὸ δοθὲν σημεῖον Α καὶ τέμνει τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν Ο εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Β'. Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΑΒ, ΟΒ καὶ τὰς ἐφαπτομένας ΒΔ καὶ ΒΓ τῶν περιφερειῶν Α καὶ Ο εἰς τὸ σημεῖον Β. Ἡ γωνία ΔΒΓ εἶναι, ἐξ ὑποθέσεως, ἴση μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω. Ἐπειδὴ αἱ περὶ τὸ Β γωνίαι ΑΒΔ, ω, ΓΒΟ καὶ ΟΒΑ ἔχουν ἄθροισμα ἴσον μὲ 360° καὶ ἐπειδὴ αἱ γων.ΑΒΔ=γων.ΓΒΟ=90° ἕπεται, ὅτι ἡ γωνία ΑΒΟ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς γνωστῆς γωνίας ω. Φέρομεν τὴν διάκεντρον ΑΟ. Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ΑΟ φαίνεται ἀπὸ τὸ Β ὑπὸ γωνίαν ΑΒΟ, ἴσην μὲ τὴν παραπληρωματικὴν τῆς δοθείσης ω· ἄρα τὸ Β κεῖται ἐπὶ τόξου κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ χορδὴν τὴν ΑΟ καὶ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ 180°—ω.



Σχ. 269.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι κατασκευήν:

Σύνθεσις: Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΟ. Μὲ χορδὴν τὴν ΑΟ γράφομεν τόξον κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον νὰ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ 180°—ω. Τὸ τόξον αὐτὸ τέμνει τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Β. Μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα τὴν ΑΒ γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΑΒ καὶ ΟΒ. Φέρομεν τὴν ΒΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΑΒ εἰς τὸ ἄκρον της Β. Ἐπίσης φέρομεν καὶ τὴν ΒΓ κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΒ εἰς τὸ ἄκρον της Β. Αἱ ΒΔ καὶ ΒΓ εἶναι καὶ ἐφαπτόμεναι τῶν περιφερειῶν Α καὶ Ο εἰς τὸ σημεῖον Β· ἄρα ἡ γωνία ΔΒΓ εἶναι γωνία δύο τεμνομένων περιφερειῶν. Θὰ δείξω-

μεν, ὅτι ἡ γωνία ΔΒΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω.

Αἱ περὶ τὸ Β γωνίαι ἔχουν ἄθροισμα ἴσον μὲ 360°. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΑΒΔ καὶ ΓΒΟ εἶναι ὀρθαί, ἐκ κατασκευῆς, αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι ΑΒΟ καὶ ΔΒΓ θὰ εἶναι παραπληρωματικαί, δηλ. θὰ εἶναι

$$\text{γων.ΑΒΟ} + \text{γων.ΔΒΓ} = 180^\circ \qquad (1)$$

Ἀλλὰ ἡ γωνία ΑΒΟ εἶναι ἴση μὲ 180°—ω, διότι εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΑΒΟΑ, τὸ ὁποῖον δέχεται, ἐκ κατασκευῆς, γωνίαν ἴσην μὲ 180°—ω. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (1) τὴν γωνίαν ΑΒΟ μὲ τὴν ἴσην της 180°—ω καὶ ἔχομεν

$$180^\circ - \omega + \text{γων.ΔΒΓ} = 180^\circ \quad \text{ἢ} \quad \text{γων.ΔΒΓ} = \omega.$$

Ἀσκήσεις

785. (820). Νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα R, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ δοθεῖσαν εὐθεῖαν ὑπὸ γωνίαν ω καὶ ἄλλην εὐθεῖαν ὑπὸ γωνίαν ν.

786. (821). Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ κάθε πλευρὰν δοθέντος τριγώνου ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν ω.

787. (822). Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτεται δοθείσης εὐθείας xy καὶ ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ δοθεῖσαν περιφέρειαν Κ εἰς δοθὲν σημεῖον Α αὐτῆς, ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν ω.

788. (823). Νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα R, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α καὶ ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ δοθεῖσαν περιφέρειαν Ο ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν ω.

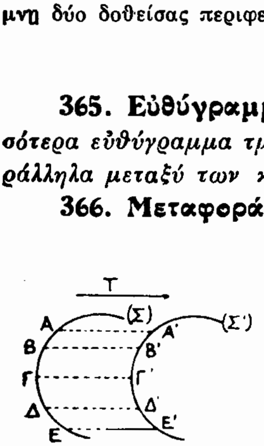
789. (824). Νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα R, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ δοθεῖσαν περιφέρειαν Α καὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν xy ὑπὸ δοθείσας γωνίας ω καὶ ν.

790. (825). Νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα R, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ δύο δοθείσας περιφερείας Α καὶ Β ὑπὸ δοθείσας γωνίας ω καὶ ν.

5. Μεταφορὰ

365. Εὐθύγραμμα τμήματα ὁμορρόπως ἴσα. *Δύο ἢ περισσότερα εὐθύγραμμα τμήματα λέγονται* ***ὁμορρόπως ἴσα,*** *ἐὰν εἶναι παράλληλα μεταξύ των καὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν φορὰν καὶ τὸ αὐτὸ μῆκος.*

366. Μεταφορά. Ἔστω ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα Τ καὶ ἕνα σχῆμα (Σ), τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου *(Σχ. 270)*.

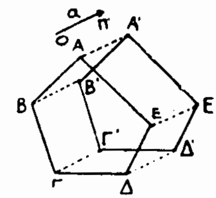


Σχ. 270.

Ἐὰν ἀπὸ τὰ διάφορα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ,..., τοῦ σχήματος (Σ) φέρωμεν εὐθύγραμμα τμήματα ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ', ΔΔ'..., ὁμορρόπως ἴσα πρὸς τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα Τ, ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων Α', Β', Γ',... εἶναι ἕνα σχῆμα (Σ'), τὸ ὁποῖον λέγομεν, ὅτι

προέκυψε ἐκ τοῦ πρώτου διὰ *παραλλήλου μεταθέσεως* ἢ *μεταφορᾶς* ὁριζομένης ὑπὸ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος Τ.

Οὕτω τὸ σχῆμα Α'Β'Γ'Δ'Ε' *(Σχ. 271)* προκύπτει ἐκ τοῦ σχήματος ΑΒΓΔΕ διὰ μεταφορᾶς ὁριζομένης ὑπὸ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΟΠ=α, ἐὰν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ',... εἶναι ὁμορρόπως ἴσα πρὸς τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα ΟΠ=α.



Σχ. 271.

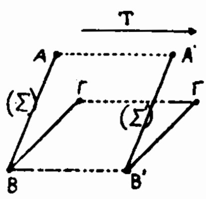
Τὰ σημεῖα Α', Β', Γ', Δ',... τοῦ σχήματος (Σ') λέγονται ***ὁμόλογα*** τῶν σημείων Α, Β, Γ, Δ,... τοῦ σχήματος (Σ).

Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα Τ λέγεται ***ὁδηγὸς*** τῆς μεταφορᾶς.

Γενικῶς: Μεταφορὰ *ἑνὸς ἐπιπέδου σχήματος (Σ) λέγεται ἡ μετατόπισις αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου του οὕτως, ὥστε κάθε σημεῖον του νὰ γράφῃ, κατὰ τὴν μετατόπισίν του, ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ὁμορρόπως ἴσον πρὸς τὸ δοθέν.*

367. Θεώρημα. ***Δύο σχήματα, τὰ ὁποῖα προκύπτουν τὸ ἕνα ἐκ τοῦ ἄλλου διὰ μεταφορᾶς, εἶναι ἴσα.***

Ἔστωσαν τρία τυχόντα σημεῖα Α, Β, Γ ἑνὸς σχήματος (Σ) *(Σχ. 272)*. Ἀπὸ τὰ σημεῖα αὐτὰ φέρομεν εὐθύγραμμα τμήματα ὁμορρόπως ἴσα πρὸς δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα Τ καὶ ἔστωσαν Α', Β', Γ' τὰ ὁμόλογα σημεῖα τῶν Α, Β, Γ.



Σχ. 272.

Φέρομεν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, Α'Β', Β'Γ'. Τὸ τετράπλευρον ΑΒΒ'Α' εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ ἀπέναντι πλευραὶ του ΑΑ' καὶ ΒΒ' εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι ἐκ κατασκευῆς πρὸς τὸ Τ· ἄρα καὶ αἱ ἄλλαι ἀπέναντι πλευραί του ΑΒ καὶ Α'Β' εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς.

Ὁμοίως καὶ τὸ τετράπλευρον ΓΒΒ'Γ' εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ἑπομένως αἱ ἀπέναντι πλευραί του ΒΓ καὶ Β'Γ' εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς.

Αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσαι καὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν.

Ἐὰν λοιπὸν ὀλισθήσωμεν τὸ σχῆμα (Σ) οὕτως, ὥστε τὸ εὐθύ-

γραμμον τμῆμα AB νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ ἴσου του A′B′, τὸ σημεῖον Γ θὰ συμπέσῃ ἐπὶ τοῦ ὁμολόγου του σημείου Γ′.

Ὁμοίως καὶ ὅλα τὰ ἄλλα σημεῖα τοῦ σχήματος (Σ) θὰ συμπέσουν ἐπὶ τῶν ὁμολόγων σημείων τοῦ σχήματος (Σ′) καὶ ἑπομένως τὰ δύο σχήματα (Σ) καὶ (Σ′) εἶναι ἴσα.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Δύο σχήματα....***

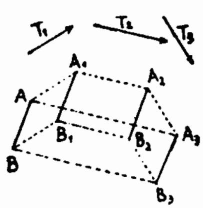
368. Πόρισμα. ***Εἰς μίαν μεταφοράν, δύο ὁμόλογα εὐθύγραμμα τμήματα εἶναι ὁμορρόπως ἴσα.***

Πράγματι· τὰ ὁμόλογα εὐθύγρ. τμήματα AB καὶ A′B′ *(Σχ. 271)* εἶναι ὁμορρόπως ἴσα, διότι ἐκ κατασκευῆς τὰ εὐθύγρ. τμήματα AA′ καὶ BB′ εἶναι ὁμορρόπως ἴσα καὶ τὸ τετράπλευρον ABB′A′ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἀντιστρόφως: ***Ἐὰν κάθε εὐθύγραμμον τμῆμα ἑνὸς σχήματος εἶναι ὁμορρόπως ἴσον μὲ τὸ ὁμόλογον εὐθύγραμμον τμῆμα τοῦ ἄλλου, τὰ δύο σχήματα προκύπτουν τὸ ἕνα ἐκ τοῦ ἄλλου διὰ μεταφορᾶς.***

Πράγματι· ἐὰν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα AB καὶ A′B′ εἶναι ὁμορρόπως ἴσα, θὰ εἶναι ὁμορρόπως ἴσα καὶ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα AA′ καὶ BB′. Ἐὰν λοιπὸν θεωρήσωμεν σταθερὰ τὰ σημεῖα A καὶ A′, τὰ σημεῖα B καὶ B′ κατὰ τὴν κίνησίν των θὰ γράφουν τὰ σχήματα (Σ) καὶ (Σ′). Ἐπειδὴ δὲ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα BB′ εἶναι ὁμορρόπως ἴσα πρὸς τὸ ὡρισμένον εὐθύγραμμον τμῆμα AA′, ἕπεται ὅτι τὸ ἕνα σχῆμα προκύπτει ἐκ τοῦ ἄλλου διὰ μεταφορᾶς.

369. Σύνθεσις πολλῶν μεταφορῶν. Ἔστω AB τυχὸν εὐθύγραμμον τμῆμα ἑνὸς σχήματος Σ, τὸ ὁποῖον ὑπόκειται εἰς τρεῖς μεταφοράς, ὁριζομένας ὑπὸ τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων T_1, T_2, T_3. Ἡ μεταφορά, ἡ ὁριζομένη ὑπὸ τοῦ εὐθυγρ. τμήματος T_1 θὰ μεταθέσῃ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα AB εἰς τὴν θέσιν A_1B_1. Ἡ μεταφορὰ T_2 θὰ μεταθέσῃ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα A_1B_1 εἰς τὴν θέσιν A_2B_2 καὶ ἡ μεταφορὰ T_3 θὰ μεταθέσῃ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα A_2B_2 εἰς τὴν θέσιν A_3B_3. Ἂς ἐξετάσωμεν ἤδη τὰ εὐθύγραμμα τμήματα AB, A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3.



Σχ. 273.

Ἐπειδὴ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα A_1B_1 προέκυψε ἐκ τοῦ AB διὰ μεταφορᾶς, ἕπεται ὅτι τὰ εὐθύγραμμα τμήματα AB καὶ A_1B_1 εἶναι ὁμορρόπως ἴσα. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ τὰ εὐθύγρ. τμήματα A_1B_1

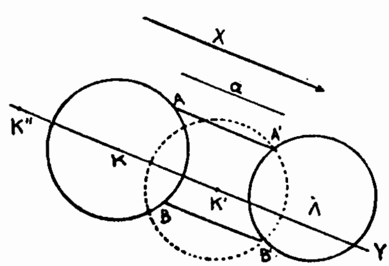
καὶ A_2B_2 εἶναι ὁμορρόπως ἴσα, καθὼς ἐπίσης καὶ τὰ A_2B_2 καὶ A_8B_8 ἄρα καὶ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα AB καὶ A_8B_8 εἶναι ὁμορρόπως ἴσα.

Ἐπειδὴ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα AB καὶ A_8B_8 εἶναι ὁμορρόπως ἴσα ἕπεται, ὅτι καὶ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα AA_8 καὶ BB_8 εἶναι ὁμορρόπως ἴσα, ὡς ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου ABB_8A_8. Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα λοιπὸν A_8B_8 προκύπτει ἐκ τοῦ AB διὰ μεταφορᾶς ὁριζομένης ὑπὸ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AA_8. Ἡ τοιαύτη μεταφορὰ τοῦ εὐθυγρ. τμήματος AB εἰς τὴν θέσιν A_8B_8 καλεῖται ***συνισταμένη*** τῶν μεταφορῶν T_1, T_2, T_8, αὗται δὲ καλοῦνται ***συνιστῶσαι***. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι:

Ὁσαιδήποτε μεταφοραὶ συντίθενται εἰς μίαν μόνον μεταφοράν.

370. Πρόβλημα. ***Δίδονται δύο περιφέρειαι K καὶ Λ καὶ ζητεῖται νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν X καὶ τοιαύτη, ὥστε τὸ μεταξὺ τῶν περιφερειῶν K καὶ Λ περιεχόμενον τμῆμα αὐτῆς νὰ εἶναι ἴσον πρὸς δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα α.***

Λύσις. Μεταθέτομεν τὴν περιφέρειαν K ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου της κατὰ μεταφορὰν ὁριζομένην ὑπὸ εὐθυγρ. τμήματος ὁμορρόπως ἴσου πρὸς τὸ α, τὸ ὁποῖον εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν X. Πρὸς τοῦτο ἐπὶ τῆς εὐθείας Y, τῆς διερχομένης διὰ τοῦ κέντρου K καὶ παραλλήλου πρὸς τὴν X, λαμβάνομεν εὐθύγρ. τμῆμα KK'=α. Ἐπειδὴ κατὰ τὴν μεταφορὰν τὰ σχήματα μένουν ἀναλλοίωτα, ἡ νέα θέσις τῆς K, εἶναι περιφέρεια ἴση πρὸς αὐτὴν καὶ μὲ κέντρον τὸ K'.



Σχ. 274.

Ἡ περιφέρεια K' τέμνει τὴν Λ εἰς τὰ σημεῖα A' καὶ B', τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν τὰ ὁμόλογα ἐπὶ τῆς K.

Ἔστω A τὸ ὁμόλογον τοῦ A' καὶ B τὸ ὁμόλογον τοῦ B'. Τὰ εὐθύγρ. τμήματα AA', BB', ὡς ὁριζόμενα ὑπὸ ὁμολόγων σημείων τῶν σχημάτων K καὶ K' εἶναι ὁμορρόπως ἴσα πρὸς τὸ ὁρίζον τὴν μεταφορὰν εὐθύγρ. τμῆμα KK', ἤτοι εἶναι

$$AA'=BB'=KK'=α.$$

Ὑπάρχουν λοιπὸν δύο εὐθεῖαι ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται ἀντιστοί-

χως τὰ εὐθύγρ. τμήματα ΑΑ′ καὶ ΒΒ′ καὶ τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν λύσιν τοῦ προβλήματος.

Ἡ μεταφορὰ ἠδύνατο νὰ γίνῃ καὶ κατὰ τὸ εὐθύγρ. τμῆμα ΚΚ″, ὁπότε θὰ ὑπῆρχον καὶ δύο ἄλλαι εὐθεῖαι λύουσαι τὸ πρόβλημα, ἐφ' ὅσον ὅμως ὁ κύκλος Κ″ θὰ ἔτεμνε τὸν Λ.

Τὸ πρόβλημα λοιπὸν ἔχει ἐν γένει τέσσαρας λύσεις.

Ἀσκήσεις

791. (902). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν βάσιν του, ἡ ὁποία κεῖται ἐπὶ δοθείσης εὐθείας xy, τὴν ἀπέναντι γωνίαν Α καὶ ὅτι αἱ δύο ἄλλαι πλευραί του, προεκτεινόμεναι, διέρχονται ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Μ καὶ Ν. (Πολυτεχνεῖον 1946)

792. (951). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τραπέζιον ΑΒΓΔ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν μεγάλην βάσιν ΑΒ=α, τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς ΒΓ=β, ΔΑ=δ, καὶ τὴν γωνίαν Α.

793. (952). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τραπέζιον ΑΒΓΔ, ἂν γνωρίζωμεν τὰς διαγωνίους ΑΓ=$δ_1$, ΒΔ=$δ_2$, τὴν γωνίαν των ω καὶ τὴν διαφορὰν ΑΒ−ΒΓ=λ.

794. (956). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τραπέζιον ΑΒΓΔ, ἂν γνωρίζωμεν τὰς διαγωνίους του $δ_1$ καὶ $δ_2$, τὴν γωνίαν αὐτῶν ω καὶ μίαν τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του α.

795. (958). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ἐὰν γνωρίζωμεν τὰς τρεῖς πλευράς του ΑΒ=β, ΑΔ=α καὶ ΔΓ=γ καὶ τὰς προσκειμένας γωνίας Β=ω καὶ Γ=φ, εἰς τὴν τετάρτην πλευρὰν ΒΓ.

796. (959). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ἂν γνωρίζωμεν δύο ἀπέναντι πλευρὰς αὐτοῦ, ΒΑ=α καὶ ΓΔ=γ καὶ τὰς γωνίας του

Α=ω, Β=φ, Γ=ν, Δ=σ.

797. (960). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράπλευρον, ἐὰν γνωρίζωμεν τὰς τέσσαρας πλευράς του α, β, γ, δ καὶ τὴν γωνίαν ω τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν του α καὶ γ.

798. (932). Νὰ ἀχθῇ τέμνουσα δοθείσης περιφερείας Κ καὶ δοθείσης εὐθείας Χ καὶ τοιαύτη, ὥστε τὸ μεταξὺ τῆς εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας περιεχόμενον τμῆμα αὐτῆς νὰ ἔχῃ μῆκος α καὶ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΚΖ.

799. (934). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ζητεῖται νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα μήκους α, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Δ, τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ε, καὶ τοιαύτη, ὥστε νὰ εἶναι ΑΔ=ΓΕ.

800. (935). Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ, τέμνουσα τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε καὶ τοιαύτη, ὥστε ΑΔ=ΓΕ.

801. (946). Δίδονται δύο περιφέρειαι Κ, Λ, κείμεναι ἐκτὸς ἀλλήλων καὶ ζητεῖται νὰ ἀχθῇ τέμνουσα ΑΒΓΔ τούτων, παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν ΚΧ καὶ τοιαύτη, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν χορδῶν τῶν ἀποτεμνομένων ἐπ' αὐτῆς ὑπὸ τῶν δύο περιφερειῶν νὰ ἰσοῦται πρὸς λ.

802. (942). Δίδονται δύο εὐθεῖαι παράλληλοι E_1 καὶ E_2 καὶ δύο σημεῖα Α, Β, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐκτὸς τῶν παραλλήλων τούτων καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ὁ ἐλάχιστος δρόμος, ὁ συνδέων τὰ Α, Β καὶ τοῦ ὁποίου τὸ μεταξὺ τῶν E_1 καὶ E_2 περιλαμβανόμενον μέρος νὰ εἶναι παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν Ε.

803. (944). Δίδεται διάμετρος ΓΔ περιφερείας Κ καὶ δύο σημεῖα Α, Β κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἡμιπεριφερείας. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ἄλλης ἡμιπεριφερείας σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε τὸ τμῆμα τῆς διαμέτρου ΓΔ τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ τῶν χορδῶν ΜΑ καὶ ΜΒ νὰ ἔχῃ μῆκος α.

804. (963). Εἰς δοθέντα κύκλον Κ νὰ ἐγγραφῇ ἕνα τραπέζιον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ ὕψος υ καὶ ἡ διαφορὰ τῶν βάσεών του νὰ εἶναι ἴση μὲ δοθὲν μῆκος δ.

805. (990). Νὰ γραφοῦν δύο περιφέρειαι Κ καὶ Λ, ἂν γνωρίζωμεν τὸ μῆκος α τῶν κοινῶν ἐξωτερικῶν ἐφαπτομένων καὶ τὸ μῆκος β τῶν ἐσωτερικῶν ἐφαπτομένων καὶ τὴν γωνίαν ω τῶν ἐξωτερικῶν ἐφαπτομένων.

806. (22). Διὰ τῆς κορυφῆς Α τριγώνου ΑΒΓ νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα ΑΧ τοιαύτη, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν προβολῶν, τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἐπὶ τὴν ΑΧ, νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν μῆκος μ.

807. (25). Εἰς δοθεῖσαν περιφέρειαν Κ νὰ ἀχθῇ χορδὴ παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν Χ καὶ τῆς ὁποίας ἡ προβολὴ ἐπὶ δοθείσης διαμέτρου ΑΒ τῆς Κ νὰ ἔχῃ μῆκος α.

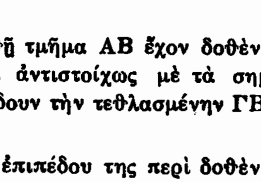
808. (26). Ἐπὶ δοθείσης εὐθείας Χ νὰ ὁρισθῇ τμῆμα ΑΒ ἔχον δοθὲν μῆκος α, οὕτως ὥστε τὰ ἄκρα αὐτοῦ Α, Β ἑνούμενα ἀντιστοίχως μὲ τὰ σημεῖα Γ, Δ τὰ κείμενα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς Χ, νὰ δίδουν τὴν τεθλασμένην ΓΒΑΔ, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ τὸ ἐλάχιστον μῆκος.

809. (21). Περιφέρεια Κ στρέφεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου της περὶ δοθὲν σημεῖον αὐτῆς Α. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν ἐφαπτομένων τῆς περιφερείας Κ καὶ παραλλήλων πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν Ε.

6. Στροφή

371. Ὁρισμοί. Ἔστω Σ ἕνα δοθὲν σχῆμα, ω δοθεῖσα γωνία καὶ Ο δοθὲν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ σχήματος Σ.

Συνδέομεν δι' εὐθειῶν τὸ σημεῖον Ο μὲ τὰ διάφορα σημεῖα Α, Β, . . . τοῦ σχήματος Σ καὶ στρέφομεν τὰς εὐθείας αὐτάς, κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, περὶ τὸ σημεῖον Ο καὶ κατὰ γωνίαν ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω



Σχ. 275.

Αἱ εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΒ, . . . κατὰ τὴν στροφήν των περὶ τὸ Ο, δὲν πρέπει νὰ ἐξέρχωνται τοῦ ἐπιπέδου τοῦ σχήματος. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν

ἄκρων Α', Β',... εἶναι ἕνα σχῆμα Σ' τὸ ὁποῖον λέγομεν, ὅτι προέκυψε ἐκ τοῦ σχήματος Σ διὰ στροφῆς αὐτοῦ περὶ τὸ δοθὲν σημεῖον Ο καὶ κατὰ γωνίαν ω.

Ἡ γωνία ω λέγεται ***γωνία στροφῆς***, τὸ σημεῖον Ο λέγεται ***κέντρον στροφῆς*** καὶ ἡ φορὰ κατὰ τὴν ὁποίαν γίνεται ἡ στροφὴ λέγεται ***φορὰ τῆς στροφῆς***.

Τὰ σημεῖα Α', Β',... λέγονται ***ὁμόλογα*** τῶν σημείων Α, Β, ...

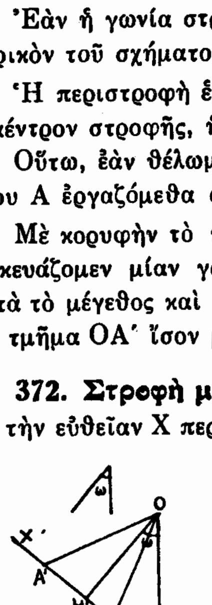
Ἐὰν ἡ γωνία στροφῆς εἶναι ἴση μὲ 180°, τὸ σχῆμα Σ' εἶναι συμμετρικὸν τοῦ σχήματος Σ ὡς πρὸς Ο.

Ἡ περιστροφὴ ἑνὸς σχήματος εἶναι τελείως ὡρισμένη, ἐὰν δοθῇ τὸ κέντρον στροφῆς, ἡ γωνία στροφῆς καὶ ἡ φορὰ στροφῆς.

Οὕτω, ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ὁμόλογον σημεῖον Α' ἑνὸς σημείου Α ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Μὲ κορυφὴν τὸ κέντρον στροφῆς Ο καὶ μὲ πλευρὰν τὴν ΟΑ κατασκευάζομεν μίαν γωνίαν ΑΟΑ' ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω (κατὰ τὸ μέγεθος καὶ τὴν φορὰν) καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΟΑ' λαμβάνομεν ἕνα τμῆμα ΟΑ' ἴσον μὲ ΟΑ. Τὸ σημεῖον Α' εἶναι τὸ ὁμόλογον τοῦ Α.

372. Στροφὴ μιᾶς εὐθείας. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ περιστρέψωμεν τὴν εὐθεῖαν Χ περὶ δοθὲν σημεῖον Ο καὶ κατὰ γωνίαν στροφῆς ω.



Σχ. 276.

Ἀπὸ τὸ Ο φέρομεν τὴν ΟΗ κάθετον ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν Χ καὶ στρέφομεν τὴν ΟΗ περὶ τὸ Ο κατὰ γωνίαν ΗΟΗ'=ω καὶ κατὰ τὴν καθορισθεῖσαν φοράν, ἔστω κατὰ τὴν φορὰν τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου καὶ ἔστω ΟΗ' ἡ νέα θέσις τῆς ΟΗ. Ἔστω Α τυχὸν σημεῖον τῆς Χ. Φέρομεν τὴν ΟΑ καὶ μὲ πλευρὰν τὴν ΟΑ κατασκευάζομεν γωνίαν ΑΟΑ'=ω, ἔχουσαν τὴν αὐτὴν φοράν. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΟΑ' λαμβάνομεν τμῆμα ΟΑ'=ΟΑ.

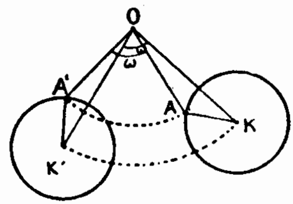
Αἱ γωνίαι ΑΟΗ καὶ Α'ΟΗ' εἶναι ἴσαι, διότι διαφέρουν τῶν ἴσων γωνιῶν ΗΟΗ' καὶ ΑΟΑ' κατὰ τὴν αὐτὴν γωνίαν ΑΟΗ'. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν Χ' ἡ ὁποία συνδέει τὰ σημεῖα Η' καὶ Α'· τὰ τρίγωνα ΟΗΑ καὶ ΟΗ'Α' εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην· ἄρα θὰ εἶναι $\widehat{H}=\widehat{H}'$. Ἀλλὰ ἡ γωνία Η εἶναι ὀρθή· ἄρα καὶ ἡ ἴση της γωνία Η' εἶναι ὀρθή.

Κάθε λοιπὸν σημεῖον Α τῆς εὐθείας Χ ἔχει τὸ ὁμόλογόν του Α'

ἐπὶ τῆς ὡρισμένης εὐθείας Χ', ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΗ' εἰς τὸ σημεῖον Η'.

373. Στροφὴ μιᾶς περιφερείας. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ περιστρέψωμεν τὴν περιφέρειαν Κ περὶ τὸ σημεῖον Ο καὶ κατὰ γωνίαν στροφῆς ω.

Ἔστω Α τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας Κ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΟΚ καὶ ΟΑ καὶ στρέφομεν αὐτὰς περὶ τὸ Ο κατὰ γωνίας ἴσας μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω. Ἔστω ΟΚ' καὶ ΟΑ' αἱ νέαι θέσεις τῶν ΟΚ καὶ ΟΑ μετὰ τὴν στροφήν των. Αἱ γωνίαι ΚΟΑ καὶ Κ'ΟΑ' εἶναι ἴσαι, ὡς ὑπόλοιπα τῶν ἴσων γωνιῶν ΚΟΚ' καὶ ΑΟΑ' ἀπὸ τῶν ὁποίων ἀφηρέθη ἡ γωνία ΑΟΚ'. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΚ καὶ Α'Κ'. Τὰ σχηματισθέντα τρίγωνα ΟΑΚ καὶ ΟΑ'Κ' εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην· ἄρα θὰ εἶναι ΚΑ=Κ'Α'.



Σχ. 277.

Ὁ τόπος λοιπὸν τῶν σημείων Α τῆς περιφερείας Κ εἶναι ἡ περιφέρεια Κ', ἡ ἴση πρὸς τὴν Κ.

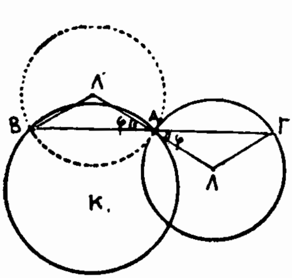
Ὥστε ἡ θέσις τῆς περιφερείας Κ μετὰ τὴν στροφὴν περὶ τὸ Ο κατὰ γωνίαν ω εἶναι ἡ περιφέρεια Κ', ἡ ἴση μὲ τὴν Κ.

374. Πρόβλημα. ***Διὰ τῆς κοινῆς τομῆς Α δύο τεμνομένων περιφερειῶν Κ καὶ Λ νὰ ἀχθῇ τέμνουσα αὐτῶν, ἡ ὁποία νὰ διχοτομεῖται ὑπὸ τοῦ Α.***

Λύσις. Στρέφομεν τὴν περιφέρειαν Λ περὶ τὸ σημεῖον Α κατὰ γωνίαν 180° καὶ ἔστω Λ' ἡ νέα θέσις τῆς Λ μετὰ τὴν στροφήν της.

Ἔστω Β τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον ἡ περιφέρεια Λ' τέμνει τὴν Κ.

Φέρομεν τὴν ΒΑ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Λ εἰς τὸ σημεῖον Γ. Λέγομεν ὅτι ἡ ΒΑΓ εἶναι ἡ ζητουμένη τέμνουσα.



Σχ. 278.

Ἀπόδειξις: Λόγῳ τῆς περιστροφῆς θὰ εἶναι ΛΑ=ΑΛ'. Φέρομεν τὰς Λ'Β καὶ ΛΓ. Τὰ σχηματισθέντα ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΛΓ καὶ ΑΛ'Β εἶναι ἴσα, διότι

ἔχουν ΛΑ=ΑΛ' καὶ τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας φ καὶ φ' ἴσας. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων αὐτῶν συνάγομεν ὅτι ΒΑ=ΑΓ.

Ἀσκήσεις

810. (918). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν ὅτι αἱ κορυφαί του κεῖνται ἐπὶ τριῶν δοθεισῶν παραλλήλων εὐθειῶν

811. (919). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν θέσιν τῆς κορυφῆς Α καὶ ὅτι ἡ κορυφὴ Β κεῖται ἐπὶ δοθείσης εὐθείας xy, ἡ δὲ κορυφὴ Γ κεῖται ἐπὶ δοθείσης περιφερείας Ο.

812. (922). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὰ μέσα Δ, Ε τῶν πλευρῶν του ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ ὅτι ἡ κορυφὴ Β κεῖται ἐπὶ δοθείσης εὐθείας Χ, ἡ δὲ Γ ἐπὶ δοθείσης περιφερείας Κ.

813. (82). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ἀπέναντι τῆς βάσεως γωνίαν ω, τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ νὰ εἶναι δεδομένον σημεῖον Α, καὶ ὅτι αἱ δύο ἄλλαι κορυφαὶ τοῦ τριγώνου κεῖνται ἀντιστοίχως ἐπὶ δύο δοθεισῶν περιφερειῶν Κ, Λ.

814. (88). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράγωνον, ἔχον μίαν μὲν τῶν κορυφῶν του εἰς δοθὲν σημεῖον Α, δύο δὲ τῶν ἄλλων ἀντιστοίχως ἐπὶ δύο δοθεισῶν παραλλήλων εὐθειῶν Χ καὶ Ζ.

815. (928). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α τὸ ὁποῖον κεῖται μεταξὺ τῶν πλευρῶν δοθείσης γωνίας ΧΟΥ, νὰ ἀχθῇ τέμνουσα ΒΑΓ, περατουμένη εἰς τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας καὶ τοιαύτη, ὥστε ΑΒ=ΓΑ.

816. (931). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον κεῖται μεταξὺ δύο δοθεισῶν παραλλήλων εὐθειῶν Χ, Υ, νὰ ἀχθῇ τέμνουσα ΒΑΓ καὶ τοιαύτη, ὥστε ΑΓ—ΑΒ=α, ὅπου α δοθὲν μῆκος.

817. (74). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Μ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς δύο δοθεισῶν παραλλήλων εὐθειῶν Χ καὶ Ψ, νὰ ἀχθῇ τέμνουσα αὐτῶν, ΜΑΒ καὶ τοιαύτη, ὥστε ΜΑ+ΜΒ=α, ὅπου α δοθὲν μῆκος.

818. (91). Διὰ τῆς τομῆς Α δύο δοθεισῶν περιφερειῶν Κ, Λ νὰ ἀχθῇ τέμνουσα ΒΑΓ τοιαύτη, ὥστε ΑΒ—ΑΓ=μ, ὅπου μ δοθὲν μῆκος,

819. (99). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Μ νὰ ἀχθῇ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΜΒ περατούμενον εἰς δύο δοθείσας περιφερείας Κ, Λ καὶ τοιοῦτον, ὥστε ΜΑ=ΜΒ.

820. (75). Διὰ τῆς τομῆς Α δύο τεμνομένων περιφερειῶν Κ καὶ Λ νὰ ἀχθῇ τέμνουσα ΑΒΓ, τῆς ὁποίας τὰ σημεῖα Β καὶ Γ νὰ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ Α καὶ τοιαύτη, ὥστε ΑΒ+ΑΓ=α, ὅπου α δοθὲν μῆκος.

821. (90). Εἰς δοθέντα κύκλον Κ νὰ ἀχθῇ χορδὴ τοιαύτη, ὥστε τὰ ἄκρα αὐτῆς καὶ δοθὲν σημεῖον Α, κείμενον ἐκτὸς τοῦ κύκλου Κ, νὰ εἶναι κορυφαὶ ἰσοπλεύρου τριγώνου.

822. (939). Ἐπὶ δοθέντος τόξου ΑΒ περιφερείας Κ νὰ προσδιορισθῇ ἕνα σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε ἡ διαφορὰ ΜΑ—ΜΒ τῶν χορδῶν ΜΑ καὶ ΜΒ νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν μῆκος λ.

823. (945). Ἐπὶ δοθέντος τόξου ΑΒ κύκλου Κ νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ, τοιοῦτον ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ τῶν ἄκρων Α, Β τοῦ τόξου νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν μῆκος α.

824. (76). Δίδονται δύο εὐθεῖαι Χ καὶ Ψ καὶ σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου των καὶ ζητεῖται νὰ γραφῇ, μὲ κέντρον τὸ Ο, περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἀποτέμνῃ ἀπὸ τὰς Χ καὶ Ψ δύο χορδάς, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα νὰ ἰσοῦται μὲ δοθὲν μῆκος.

825. (966). Εἰς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἐγγραφῇ ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ ἀπέναντι τῆς βάσεως γωνία νὰ ἰσοῦται μὲ δοθεῖσαν γωνίαν ω καὶ τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ νὰ εἶναι δοθὲν σημεῖον Δ τῆς ΒΓ.

(Σχολὴ Εὐελπίδων 1955)

826. (86). Εἰς δοθέντα κυκλικὸν τομέα νὰ ἐγγραφῇ ἕνα ἰσοσκελὲς ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ κορυφὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι δοθὲν σημεῖον Α τοῦ τόξου ΔΕ δοθέντος τομέως ΚΔΕ.

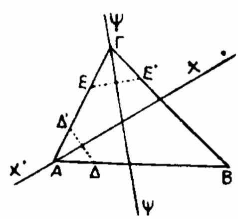
7. Συμμετρία

Εἰς τὰς τὰς § 151—159 ἐδώσαμεν τοὺς ὁρισμοὺς κλπ. τῆς συμμετρίας ὡς πρὸς κέντρον καὶ ὡς πρὸς ἄξονα συμμετρίας.

Κατωτέρω θὰ λύσωμεν μερικὰ προβλήματα διὰ τῆς συμμετρίας.

375. Πρόβλημα 1ον. ***Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν διεύθυνσιν τῶν διχοτόμων δύο γωνιῶν του, καὶ δύο σημεῖα Δ καὶ Ε κείμενα ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ.***

Ἀνάλυσις: Ὑποθέτομεν ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰς διευθύνσεις τῶν διχοτόμων Χ΄Χ καὶ Ψ΄Ψ τῶν γωνιῶν του Α καὶ Γ, καὶ τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε.



Σχ. 278.

Ἐπειδὴ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α εἶναι ἄξων συμμετρίας αὐτῆς ἕπεται ὅτι τὸ συμμετρικὸν σημεῖον Δ΄ τοῦ Δ θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΓ. Παρατηροῦμεν, ὅτι εἶναι γνωστὰ δύο σημεῖα τῆς πλευρᾶς ΑΓ, τὰ Ε καὶ Δ΄ καὶ ἑπομένως εἶναι ὡρισμένη ἡ θέσις τῆς πλευρᾶς ΑΓ. Αἱ κορυφαὶ Α καὶ Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι σημεῖα τῆς τομῆς τῆς προεκτάσεως τῆς Δ΄Ε καὶ τῶν διευθύνσεων τῶν διχοτόμων Χ΄Χ καὶ Ψ΄Ψ. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὸ συμμετρικὸν σημεῖον Ε΄ τοῦ Ε πρὸς ἄξονα συμμετρίας τὴν διχοτόμον Ψ΄Ψ θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΓΒ. Ἑπομένως ἡ τρίτη κορυφὴ Β τοῦ τριγώνου εἶναι ἡ τομὴ τῆς εὐθείας ΓΕ΄ καὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΔ.

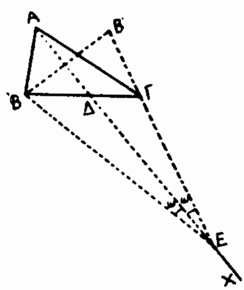
Σύνθεσις: Ὁρίζομεν τὸ σημεῖον Δ′, συμμετρικὸν τοῦ Δ πρὸς ἄξονα συμμετρίας τὴν Χ′Χ καὶ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΕΔ′, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν Χ′Χ εἰς τὸ Α καὶ τὴν Ψ′Ψ εἰς τὸ Γ.

Ὁμοίως ὁρίζομεν τὸ σημεῖον Ε′, συμμετρικὸν τοῦ Ε πρὸς ἄξονα συμμετρίας τὴν Ψ′Ψ καὶ φέρομεν τὰς ΓΕ′ καὶ ΑΔ, αἱ ὁποῖαι προεκτεινόμεναι, τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Β· τὸ σημεῖον Β εἶναι ἡ τρίτη κορυφὴ τοῦ ζητουμένου τριγώνου.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Δ καὶ Δ′ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς ἄξονα συμμετρίας τὴν Χ′Χ, ἕπεται ὅτι ἡ Χ′Χ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α. Ὁμοίως, ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Ε καὶ Ε′ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν Ψ′Ψ, ἕπεται ὅτι ἡ Ψ′Ψ′ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Γ.

376. Πρόβλημα 2ον. ***Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Δ καὶ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΔΧ. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΧ ἕνα σημεῖον ἀπὸ τὸ ὁποῖον αἱ ΒΔ καὶ ΔΓ νὰ φαίνωνται ὑπὸ ἴσας γωνίας.***

Ἀνάλυσις: Ἔστω Ε τὸ ζητούμενον σημεῖον καὶ τοιοῦτον, ὥστε γων.ΒΕΔ=γων.ΔΕΓ. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΒΕΔ=ω καὶ ΔΓΕ=ω′ εἶναι ἴσαι, ἡ ΑΕ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΒΕΓ καὶ ἑπομένως ἡ ΑΧ εἶναι ἄξων συμμετρίας τῆς γωνίας αὐτῆς.



Σχ. 279.

Ἔστω Β′ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Β πρὸς ἄξονα συμμετρίας τὴν ΑΕ. Τὸ Β′ θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΕΓ καὶ οὕτω γνωρίζομεν δύο σημεῖα Β′ καὶ Γ αὐτῆς. Τὸ σημεῖον λοιπὸν Ε ὁρίζεται ὡς τομὴ τῆς ΑΔΧ καὶ τῆς εὐθείας Β′Γ.

Σύνθεσις: Εὑρίσκομεν τὸ συμμετρικὸν σημεῖον Β′ τῆς κορυφῆς Β πρὸς ἄξονα συμμετρίας τὴν ΑΔΧ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν Β′Γ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη, τέμνει τὴν ΑΔΧ εἰς τὸ Ε. Τὸ σημεῖον Ε εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Β καὶ Β′ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς ἄξονα συμμετρίας τὴν ΑΔΧ, ἕπεται ὅτι αὕτη εἶναι ἄξων συμμετρίας τῆς γωνίας ΒΕΒ′ καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι γων.ΒΕΔ=γων.ΔΕΓ.

Ἀσκήσεις

827. (911). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἐὰν γνωρίζωμεν τὰς θέσεις τῶν εὐθειῶν Χ, Υ, Ζ ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του καὶ ἕνα σημεῖον Δ τῆς πλευρᾶς του ΑΒ.

828. (920). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν βάσιν του ΒΓ=α, τὴν διαφορὰν ω τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν του καὶ τὸν πόδα Π τοῦ ὕψους τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὴν ΒΓ.

829. (923). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν ΒΓ, τὴν διαφορὰν Γ—Β=ω τῶν προσκειμένων εἰς αὐτὴν γωνιῶν καὶ τὴν εὐθεῖαν Χ ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται ἡ τρίτη κορυφή του Α.

830. (961). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράγωνον ΑΒΓΔ, ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι αἱ ἀπέναντι κορυφαὶ Α, Γ κεῖνται ἐπὶ δοθείσης εὐθείας Χ, ἡ κορυφὴ Β ἐπὶ δοθείσης εὐθείας Υ καὶ ἡ κορυφὴ Δ ἐπὶ δοθείσης περιφερείας Λ.

831. (957). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ἐὰν γνωρίζωμεν τὰς πλευράς του ΑΒ=α, ΒΓ=β, ΓΔ=γ καὶ ΔΑ=δ καὶ ὅτι ἡ διαγώνιος ΑΓ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν Α.

832. (925). Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος δοθείσης εὐθείας xy. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς xy ἕνα σημεῖον τοιοῦτον, ὥστε

γων.ΑΓx=2 γων.ΒΓy.

833. (930). Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α τριγώνου ΑΒΓ ἕνα σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε γων.ΑΜΒ—γων.ΑΜΓ=ω.

834. (936). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἡ διχοτόμος Αx τῆς ἐξωτερικῆς του γωνίας Α· νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς Αx ἕνα σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε γων.ΑΜΒ+γων.ΑΜΓ=ω καὶ νὰ δειχθῇ, ὅτι διὰ κάθε σημεῖον Μ τῆς Αx εἶναι

ΜΒ+ΜΓ > ΑΒ+ΑΓ.

835. (937). Ἀπὸ τὸ μέσον Μ εὐθυγράμμου τμήματος ἄγεται εὐθεῖα Χ, ἡ ὁποία σχηματίζει μὲ τὴν ΑΒ δοθεῖσαν γωνίαν ω. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς Χ ἕνα σημεῖον Ν τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι γων.ΜΝΒ=2 γων ΑΝΜ.

836. (938). Δίδεται εὐθεῖα x′x καὶ δύο περιφέρειαι Κ, Λ κείμεναι πρὸ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς x′x. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἕνα σημεῖον ἐπὶ τῆς x′x, τοιοῦτον, ὥστε αἱ ἐξ αὐτοῦ ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι τῶν δύο περιφερειῶν νὰ σχηματίζουν μὲ τὴν x′x ἴσας γωνίας.

837. (927). Μεταξὺ δύο περιφερειῶν Κ καὶ Λ νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν Χ καὶ διχοτομουμένη παρ' αὐτῆς.

838. (933). Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι x, y καὶ ἐπὶ τῆς x ἕνα σημεῖον Α· ζητεῖται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Μ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τῶν παραλλήλων, νὰ ἀχθῇ τέμνουσα ΜΒΓ τοιαύτη, ὥστε ΑΒ=ΑΓ.

839. (940). Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι Χ, Υ, Ζ, αἱ ὁποῖαι δὲν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ ζητεῖται νὰ ἀχθῇ εὐθύγραμμον τμῆμα περατούμενον ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν Χ, Ζ καὶ τεμνόμενον δίχα καὶ καθέτως ὑπὸ τῆς Υ, ἡ ὁποία κεῖται μεταξὺ τῶν δύο ἄλλων.

840. (941). Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β κείμενα μεταξὺ δύο εὐθειῶν E_1, E_2. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἐλάχιστος δρόμος, ὁ ἐγγίζων τὰς δύο αὐτὰς εὐθείας καὶ συνδέων τὰ δύο σημεῖα.

841. (964). Εἰς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ, νὰ ἐγγραφῇ ἕνα ἄλλο τρίγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ τὴν ἐλαχίστην περίμετρον καὶ τοῦ ὁποίου μία τῶν κορυφῶν του νὰ κεῖται εἰς δοθὲν σημεῖον Δ τῆς ΒΓ.

842. (967). Περὶ δοθέντα κύκλον Κ νὰ περιγραφῇ ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ πλευραὶ ΑΒ=β, ΑΔ=δ καὶ αἱ γωνίαι Β=ω καὶ Δ=φ.

843. (968). Εἰς δοθέντα κύκλον Κ νὰ ἐγγραφῇ τετράπλευρον, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι δύο ἀπέναντι πλευραὶ ἔχουν ἀντιστοίχως μήκη α, β, καὶ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν ἰσοῦται πρὸς μ.

Ἀσκήσεις πρὸς γενικὴν ἐπανάληψιν

Α' Ὁμάς. **844.** (827). ***Θεώρημα τοῦ** Nagel.* Αἱ ἀκτῖνες, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰς κορυφὰς ἑνὸς τριγώνου μὲ τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου· εἶναι κάθετοι, ἀντιστοίχως, ἐπὶ τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι συνδέουν, ἀνὰ δύο, τοὺς πόδας τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου.

845. (828). Δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο' κεῖνται ἡ μία ἐκτὸς τῆς ἄλλης· φέρομεν τὰς κοινὰς ἐξωτερικὰς ἐφαπτομένας ΑΑ' καὶ ΒΒ', αἱ ὁποῖαι προεκτεινόμεναι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Σ, καὶ τὰς κοινὰς ἐσωτερικὰς ἐφαπτομένας ΓΓ' καὶ ΔΔ', αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Κ. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι τὰ σημεῖα Σ καὶ Κ κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία συνδέει τὰ κέντρα των Ο καὶ Ο'.

2ον. Ὅτι αἱ χορδαὶ ΑΒ, ΓΔ, ΔΓ', Α'Β' εἶναι παράλληλοι.

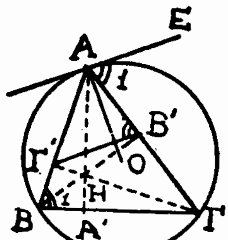
3ον. Ὅτι αἱ τέμνουσαι ΑΒ' καὶ Α'Β καὶ ἴσαι καθὼς καὶ αἱ ΓΔ' καὶ ΔΓ'.

846. (829). Ἕνα πεντάγωνον ἔχει τέσσαρας πλευρὰς ἴσας ΑΒ=ΒΓ=ΓΔ=ΔΕ, αἱ ὁποῖαι περιέχουν τρεῖς γωνίας ἴσας Β=Γ=Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ πεντάγωνον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

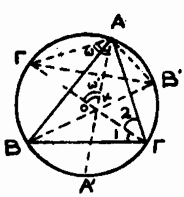
847. (830). Ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον Ο· φέρομεν τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν του Β καὶ Γ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Κ καὶ προεκτεινόμεναι τέμνουν τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὰ σημεῖα Β' καὶ Γ' ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι Γ'Α=Γ'Κ.

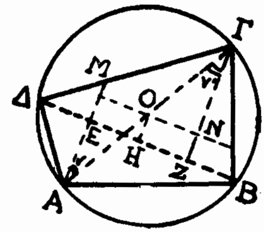
2ον. Ὅτι ἡ εὐθεῖα Β'Γ' εἶναι μεσοκάθετος τῆς ΑΚ.



Σχ. ἀσκ. 844.



Σχ. ἀσκ. 847.



Σχ. ἀσκ. 850.

848. (831). Οἱ πόδες τῶν καθέτων, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Μ ἐπὶ τρεῖς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Σ καὶ σχηματίζουν γωνίας x, y, ω, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα καὶ ἴσον μὲ δύο ὀρθάς, εἶ-

ναι κορυφαὶ τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι πρός τὰς γωνίας x, y, ω.

849. (832). Εἰς ἕνα κύκλον Ο φέρομεν μίαν χορδὴν ΑΒ καὶ μίαν διάμετρον ΓΔ κάθετον ἐπὶ τὴν χορδὴν αὐτήν. Συνδέομεν μὲ εὐθείας τυχὸν σημεῖον Κ τῆς περιφερείας μὲ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ. 'Από τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ φέρομεν καθέτους ΓΕ καὶ ΔΖ ἐπὶ τὴν ΑΚ. Νὰ ἀποδειχθῇ :

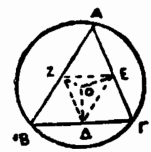
1ον. Ὅτι τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ ἀπέχουν ἰσάκις ἀπὸ τὸ μέσον Η τῆς χορδῆς ΑΚ.

2ον. Ὅτι ΚΕ+ΚΖ=ΚΑ.

3ον. Ὅτι ΚΖ−ΚΕ=ΚΒ.

850. (833). Ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι γωνίαι Β καὶ Δ εἶναι ὀρθαί, εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Φέρομεν τὴν διαγώνιον ΒΔ καὶ τὰς ΑΕ καὶ ΓΖ καθέτους ἐπὶ τὴν ΒΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΔΕ=ΒΖ καὶ ΔΖ=ΒΕ.

851. (834). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Δ, Ε, Ζ, τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι οἱ κύκλοι οἱ περιγεγραμμένοι περὶ τὰ τρίγωνα ΑΖΕ, ΒΔΖ καὶ ΓΕΔ εἶναι ἴσοι καὶ διέρχονται ἀπὸ τὸ κέντρον Ο τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.



Σχ. ἀσκ. 851.

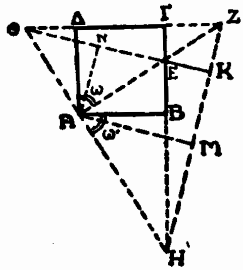
852. (835). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ΑΒ<ΑΓ· φέρομεν τὸ ὕψος ΑΗ καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ τμῆμα ΗΔ=ΗΒ· ἀπὸ τὸ Γ φέρομεν κάθετον ΓΕ ἐπὶ τὴν ΑΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. Ὅτι ἡ ΒΓ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΓΕ.

2ον. Ὅτι τὰ σημεῖα Α, Η, Ε, Γ κεῖνται ἐπὶ περιφερείας.

3ον. Ὅτι ΑΗ=ΗΕ.

853. (836). Δίδεται ἕνα τετράγωνον ΑΒΓΔ· ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Ε καὶ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΕ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΔΓ εἰς ἕνα σημεῖον Ζ. 'Από τὸ Α φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΕ, ἡ ὁποία τέμνει τὰς προεκτάσεις τῶν πλευρῶν ΓΒ καὶ ΓΔ εἰς τὰ σημεῖα Η καὶ Θ ἀντιστοίχως.



Σχ. ἀσκ. 853.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΗΖ καὶ ΑΕΘ εἶναι ἰσοσκελῆ.

2ον. 'Εὰν Κ εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ΗΖ καὶ ΘΕ, Μ τὸ μέσον τῆς ΗΖ καὶ Ν τὸ μέσον τῆς ΘΕ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τετράπλευρον ΑΜΚΝ εἶναι ὀρθογώνιον.

854. (837). Ὅταν ἕνα τρίγωνον εἶναι περιγεγραμμένον περὶ ἕνα κύκλον καὶ ἔχῃ δύο γωνίας, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι σταθερόν, ἡ τρίτη κορυφή του κεῖται ἐπὶ περιφερείας ὁμοκέντρου πρὸς τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν.

855. (838). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α· μὲ διάμετρον τὴν διάμεσον ΑΜ γράφομεν περιφέρειαν κύκλου Ο, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Δ καὶ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ε· φέρομεν τὸ ὕψος ΑΗ. Νὰ ἀποδειχθῇ :

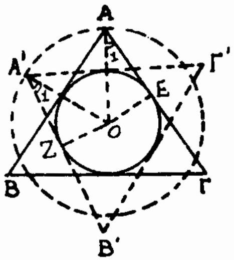
1ον. Ὅτι τὸ Η κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας Ο.

2ον. Ὅτι τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε εἶναι μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ.

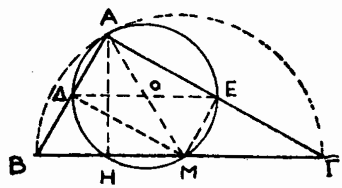
3ον. Τί σχῆμα ἔχει τὸ τετράπλευρον ΑΔΜΕ;

4ον. Ὑποθέτομεν, ὅτι ἡ κορυφὴ Α κινεῖται ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας διαμέτρου ΒΓ· νὰ εὑρεθῇ τί σχῆμα γράφουν εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε;

5ον. Τί δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν διὰ τὸ μέγεθος τοῦ τμήματος ΔΕ κατὰ τὴν κίνησιν αὐτήν;



Σχ. ἀσκ. 854.



Σχ. ἀσκ. 855.

856. (839). Ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον Ο· ἀπὸ τὸ κέντρον Ο φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ε. Ἐπίσης ἀπὸ τὸ Ο φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν κάθετον, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ Β ἐπὶ τὴν ΒΓ, εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι αἱ γωνίαι ΒΕΖ καὶ ΒΟΖ εἶναι ἴσαι.

2ον. Ὅτι ἡ ΖΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ.

857. (840). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὴν διχοτόμον ΑΔ τῆς γωνίας Α· περιγράφομεν περὶ τὰ τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ δύο κύκλους ἐκ τῶν ὁποίων ὁ πρῶτος τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ σημεῖον Ε καὶ ὁ δεύτερος τὴν ΒΑ εἰς τὸ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι τὰ τρίγωνα ΖΔΓ καὶ ΒΔΕ εἶναι ἰσοσκελῆ.

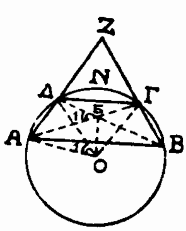
2ον. Ὅτι ΒΖ=ΓΕ.

858. (841). Ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον Ο· φέρομεν τὴν διχοτόμον ΑΔ τῆς γωνίας Α, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Δ καὶ τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Ε· ἐπίσης φέρομεν τὴν διχοτόμον ΑΔ′ τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΒΓ εἰς τὸ Δ′. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου Ο εἰς τὸ σημεῖον Α διχοτομεῖ τὴν ΔΔ′.

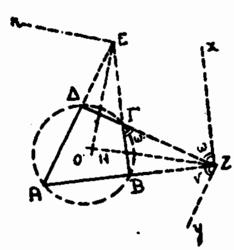
859. (842). Ἕνα τραπέζιον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Ο. Αἱ διαγώνιοί του ΑΓ καὶ ΒΔ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ε καὶ αἱ προεκτάσεις τῶν πλευρῶν ΑΔ καὶ ΒΓ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι τὰ τέσσαρα σημεῖα Α, Δ, Ο, Ε κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

2ον. Ὅτι τὰ τέσσαρα



Σχ. ἀσκ. 859.



Σχ. ἀσκ. 860.

σημεῖα Α, Γ, Ο, Ζ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

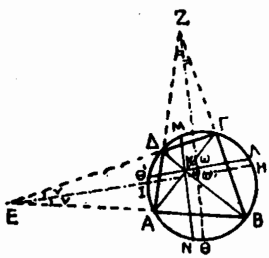
860. (843). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν δύο γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ἀπὸ τὰς προεκτάσεις τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ἑνὸς τετραπλεύρου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον, τέμνονται καθέτως.

861 (844). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τετράπλευρον, ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ὑπὸ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του προεκτεινομένων, εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ διαγώνιοί του.

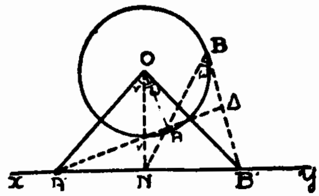
862. (845). Δίδεται μία περιφέρεια Ο καὶ μία εὐθεῖα xy ἐκτὸς αὐτῆς. Ἀπὸ τὸ κέντρον Ο φέρομεν τὴν ΟΝ κάθετον ἐπὶ τὴν xy καὶ ἀπὸ τὸ Ν μίαν τέμνουσαν ΝΑΒ τῆς περιφερείας Ο, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β· φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας Ο εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β, αἱ ὁποῖαι συναντοῦν τὴν xy εἰς τὰ σημεῖα Α′ καὶ Β′ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι τὰ τετράπλευρα ΝΑΟΑ′ καὶ ΝΟΒΒ′ εἶναι ἐγγράψιμα εἰς κύκλον.

2ον. Ὅτι τὸ Ν εἶναι τὸ μέσον τῆς Α′Β′.



Σχ. ἀσκ. 861.



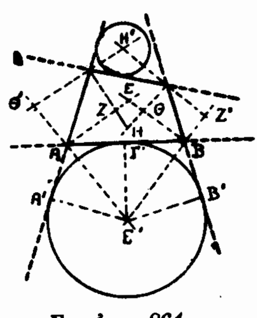
Σχ. ἀσκ. 862.

863. (846). Δίδεται μία γωνία xOy καὶ ἕνα σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου της ΟΖ. Γράφομεν μίαν περιφέρειαν Κ, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Ο καὶ Α καὶ τέμνει τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΓΔ διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Α.

2ον. Ὅτι, ἐὰν Γ′Δ′ εἶναι μία ἄλλη θέσις τῆς ΓΔ, ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ μίαν ἄλλην περιφέρειαν Κ′, θὰ εἶναι ΓΓ′=ΔΔ′.

864. (847). Δίδεται ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ· φέρομεν τὰς διχοτόμους τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν του, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ καὶ τὰς διχοτόμους τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν του, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Ε′, Ζ′, Η′, Θ′. Νὰ ἀποδειχθῇ:

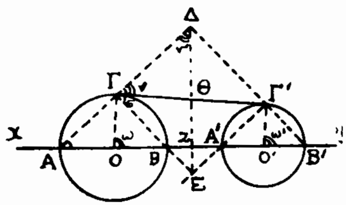


Σχ. ἀσκ. 864.

1ον. Ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον καὶ ὅτι αἱ κορυφαὶ Ε, Ζ, Η, Θ εἶναι τὰ κέντρα τεσσάρων κύκλων, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἐφάπτεται ἐσωτερικῶς τριῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

2ον. Ὅτι τὸ τετράπλευρον Ε'Ζ'Η'Θ' εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον καὶ ὅτι αἱ κορυφαί του Ε', Ζ', Η', Θ' εἶναι τὰ κέντρα τῶν τεσσάρων κύκλων, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἐφάπτεται μιᾶς πλευρᾶς τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ καὶ τῶν προεκτάσεων τῶν δύο προσκειμένων εἰς αὐτὴν πλευρῶν του.

865. (848). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας xy λαμβάνομεν, διαδοχικῶς, τὰ σημεῖα Α, Β, Α', Β'. Μὲ διαμέτρους τὰς ΑΒ καὶ Α'Β' γράφομεν περιφερείας καὶ φέρομεν τὴν κοινὴν ἐξωτερικὴν ἐφαπτομένην των ΓΓ'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΓ, ΒΓ, Α'Γ', Β'Γ' σχηματίζουν ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου ἡ μία διαγώνιος εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον τῶν κύκλων.



Σχ. ἀσκ. 865.

866. (849). Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Α τῆς περιφερείας ἑνὸς κύκλου Ο φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην αὐτοῦ Αx καὶ ἐπὶ τῆς Αx λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Μ· ἀπὸ τὸ Μ φέρομεν τὴν δευτέραν ἐφαπτομένην ΜΒ τοῦ κύκλου Ο. Νά ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον ΜΑΒ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου Ο, οἱαδήποτε καὶ ἐὰν εἶναι ἡ θέσις τοῦ σημείου Μ ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης Αx.

2ον. Ὅτι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου ΜΑΒ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας ἑνὸς κύκλου ἴσου πρὸς τὸν δοθέντα καὶ ὁ ὁποῖος ἔχει κέντρον τὸ σημεῖον Α.

867. (850). Δίδεται ἕνα ἰσοσκελες τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία Α τῆς κορυφῆς εἶναι ὀξεῖα. Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ καὶ ἀπὸ τὸ Α τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν προέκτασιν τῆς βάσεως ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Ε. Ἐπίσης ἀπὸ τὸ Ε φέρομεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΑΓ εἰς τὸ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι τὰ σημεῖα Α, Δ, Ζ, Ε κεῖνται ἐπὶ περιφερείας.

2ον. Ὅτι ἡ ΕΓ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΕΖ.

3ον. Ὅτι ΑΔ=ΔΖ.

4ον. Νὰ ἐξετασθῇ, ἐὰν αἱ προηγούμεναι ἰδιότητες ὑφίστανται, ὅταν ἡ γωνία Α εἶναι ἀμβλεῖα ἢ ὀρθή.

868. (851). Δίδεται ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, (ΑΒ=ΑΓ). Προεκτείνομεν τὴν βάσιν ΒΓ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμῆμα ΓΔ=ΑΒ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΔ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία Δ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας ΑΒΓ.

2ον. Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΗ· προεκτείνομεν τὴν ΑΒ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμῆμα ΒΕ=$^1/_2$ ΒΓ· φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΕΗ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν ΑΔ εἰς τὸ Ζ· νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΗΖΔ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ὅτι τὸ Ζ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΔ καὶ ὅτι ΑΖ=ΖΔ=ΖΗ.

3ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Α, Η, Γ, Ζ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

4ον. Ἐὰν ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ἴση μὲ 58°, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι Δ, Ε καὶ ΑΖΕ.

869. (852). Ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, (ΑΒ=ΑΓ) εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον Ο· φέρομεν τυχοῦσαν χορδὴν ΑΔ καὶ ἀπὸ τὸ Γ τὴν κάθετον ΓΕ ἐπὶ τὴν ΑΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς χορδῆς ΒΔ εἰς τὸ σημεῖον Μ. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι αἱ γωνίαι ΓΔΕ καὶ ΕΔΜ εἶναι ἴσαι.

2ον. Ὅτι τὰ τρίγωνα ΓΕΔ καὶ ΔΕΜ εἶναι ἴσα.

3ον. Ὅτι ΑΓ=ΑΜ καὶ νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου Μ, ὅταν ἡ χορδὴ ΑΔ στρέφεται περὶ τὸ Α.

4ον. Ὅτι ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι διπλασία τῆς γωνίας ΒΜΓ.

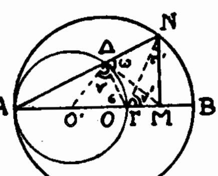
870. (853). Ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον Ο. Εὑρίσκομεν τὸ συμμετρικὸν σημεῖον Μ τοῦ κέντρου Ο πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΓ καὶ ἀπὸ τὸ Μ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ε. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι ἡ γωνία ΜΓΕ εἶναι ὀρθή.

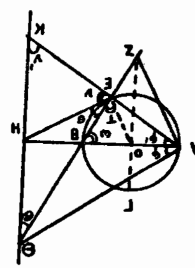
2ον. Ὅτι τὸ τετράπλευρον ΟΕΓΜ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

3ον. Ὅτι ἡ γωνία ΜΟΕ εἶναι ὀρθή.

871. (854). Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Μ, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐντὸς κύκλου Ο φέρομεν δύο καθέτους χορδὰς ΑΜΒ καὶ ΓΜΔ. Φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.



Σχ. ἀσκ. 872.



Σχ. ἀσκ. 873.

872. (855). Δύο κύκλοι Ο καὶ Ο′ ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον Α· φέρομεν τὴν διάμετρον ΑΒ τοῦ κύκλου Ο, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν περιφέρειαν Ο′ εἰς τὸ σημεῖον Γ καὶ ἀπὸ τὸ μέσον Μ τῆς ΓΒ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὸ σημεῖον Ν· φέρομεν τὴν χορδὴν ΝΑ, ἡ ὑποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο′ εἰς τὸ σημεῖον Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι αἱ γωνίαι Ο′ΔΓ καὶ ΒΓΝ εἶναι ἴσαι.

2ον. Ὅτι ἡ ΜΔ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου Ο′.

3ον. Ὅτι ΜΝ=ΝΔ.

873. (856). Εἰς ἕνα κύκλον Ο φέρομεν δύο διαμέτρους ΑΒ καὶ ΓΔ καθέτους μεταξύ των. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Β φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία τέμνει αὐτὴν εἰς τὸ Ε καὶ τὴν ΓΔ ἢ τὴν προέκτασίν της εἰς τὸ Ζ· φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΕΗ εἰς τὸ σημεῖον Ε, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΑΒ εἰς τὸ Η· ἀπὸ τὸ Η φέρομεν κάθετον ΗΘ ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν τέμνουσαν ΒΕ εἰς τὸ σημεῖον Θ καὶ τὴν προέκτασιν τῆς ΑΕ εἰς τὸ Κ. Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. Ὅτι ΑΘ=ΑΚ.

2ον. Ὅτι ἡ ΑΘ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΖ.

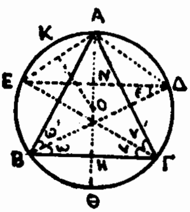
874. (857). Ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον Ο. Φέρομεν τὰς διχοτόμους ΒΔ καὶ ΓΕ τῶν γωνιῶν του Β καὶ Γ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Μ καὶ τέμνουν τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε ἀντιστοίχως· φέρομεν τὴν χορδὴν ΔΕ, ἡ ὁποία τέμνει τὸ ὕψος ΑΗ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Ν. Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. Ὅτι ΕΝ=ΝΔ.

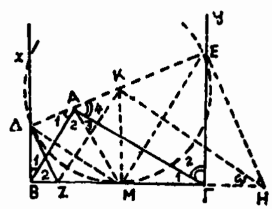
2ον. Ὅτι τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τὸ ὕψους ΑΗ.

3ον. Ὅτι ἡ ΕΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ.

4ον. Ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΕΜΔ εἶναι ρόμβο .



Σχ. ἀσκ. 874.



Σχ. ἀσκ. 875.

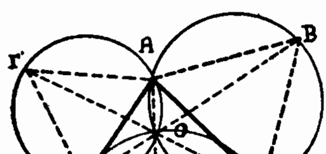
875. (858). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α· ἀπὸ τὰ ἄκρα Β καὶ Γ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ φέρομεν τὰς καθέτους Βx καὶ Γy ἐπὶ τὴν ΒΓ. Ἀπὸ τὸ μέσον Μ τῆς ΒΓ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Γy εἰς τὸ Ε. Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. Ὅτι τὰ σημεῖα Δ, Α, Ε κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

2ον. Ὅτι τὰ τετράπλευρα ΑΔΒΜ καὶ ΑΜΓΕ εἶναι ἐγγράψιμα εἰς κύκλον.

3ον. Ὅτι ἡ περιφέρεια ἡ περιγραμμένη περὶ τὸ τρίγωνον ΔΜΕ ἐφάπτεται τῆς ΒΓ.

4ον. Αἱ ἐφαπτόμεναι τῆς περιφερείας αὐτῆς εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε τέμνουν τὴν ΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Ζ καὶ Η ἀντιστοίχως. Ἐὰν Κ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΔΕ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία ΖΚΗ εἶναι ὀρθή.



Σχ. ἀσκ. 876.

876. (859). Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ἑνὸς τρι-

γώνου ΑΒΓ, κατασκευάζομεν ἐξωτερικῶς τοῦ τριγώνου, τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΒΓ′, ΒΓΑ′, ΓΑΒ′. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′ εἶναι ἴσαι καὶ ὅτι τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο.

2ον. Ὅτι ἀπὸ τὸ Ο βλέπομεν ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. (Πολυτεχνεῖον 1943).

877. (860). Εἰς ἕνα κύκλον Ο δίδεται μία διάμετρος ΑΒ καὶ μία ἐφαπτομένη Γx παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς Γx φέρομεν δευτέραν ἐφαπτομένην ΜΔ τοῦ Ο· ἀπὸ τὸ Μ φέρομεν τὴν ΜΝ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν χορδὴν ΑΔ εἰς τὸ σημεῖον Ε· φέρομεν τὴν διάμετρον ΓΟΖ. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι τὰ σημεῖα Ε, Ν, Β, Δ κεῖνται ἐπὶ περιφερείας.

2ον. Ὅτι τὸ τετράπλευρον ΟΖΝΜ εἶναι παραλληλόγραμμον.

3ον. Ὅτι τὰ σημεῖα Ζ, Ν, Δ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

4ον. Ὅτι τὰ σημεῖα Γ, Ε, Β κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

878. (861). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς ὅλα τὰ τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΓ καὶ σταθερὰν τὴν γωνίαν Α τῆς κορυφῆς, τὸ μέσον Ο τῆς βάσεως ΒΓ ἀπέχει σταθερὰν ἀπόστασιν ἀπὸ τὰς εὐθείας Β′Γ′, ἡ ὁποία συνδέει τοὺς πόδας τῶν ὑψῶν ΒΒ′ καὶ ΓΓ′ τοῦ τριγώνου, τὰ ὁποῖα ἄγονται ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς βάσεως.

879. (862). *Θεώρημα τοῦ Transon.* Ὅταν ἕνα παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον εἶναι σταθερὸν κατὰ τὸ μέγεθος μετατίθεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου του, οὕτως, ὥστε δύο διαδοχικαὶ πλευραί του ΑΒ καὶ ΑΔ νὰ διέρχωνται ἀπὸ δύο σταθερὰ σημεῖα Μ καὶ Ν, ἡ διαγώνιος ΑΓ διέρχεται ἐπίσης ἀπὸ ἕνα ὡρισμένον σημεῖον.

Β′ Ὁμάς. **880.** (863). Δίδεται μία περιφέρεια Ο καὶ διάμετρος ΑΒ. Ἔστω Μ ἕνα σημεῖον τῆς περιφερείας. Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΜ καὶ ἀπὸ τὸ Μ φέρομεν τὴν κάθετον ΜΓ ἐπὶ τὴν ΑΒ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον ΟΜΓ.

881. (864). Ἕνα μεταβλητὸν σημεῖον Μ κεῖται ἐκτὸς ἑνὸς κύκλου Ο. Φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ΜΑ καὶ ΜΒ τοῦ κύκλου. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον ΜΑΒ.

882. (865). Ἕνα μεταβλητὸν σημεῖον Μ κεῖται ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ. Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως ΓΧ τῆς ΑΓ λαμβάνομεν ἕνα τμῆμα ΓΝ=ΒΜ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῆς κορυφῆς Σ τοῦ παραλληλογράμμου ΒΜΝΣ.

883. 866). Τὰ ἄκρα τῆς ὑποτεινούσης ἑνὸς γνώμονος ὀλισθαίνουν ἐπὶ τῶν πλευρῶν μιᾶς ὀρθῆς γωνίας xOy. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας.

884. (867). Δίδεται ἡμιπεριφέρεια Ο διαμέτρου ΑΒ καὶ ἕνα σημεῖον Γ τῆς ΑΒ. Συνδέομεν μὲ εὐθεῖαν τὸ σημεῖον Γ μὲ ἕνα τυχὸν σημεῖον Μ τῆς ἡμιπεριφερείας. Ἡ κάθετος εἰς τὸ Μ ἐπὶ τὴν ΓΜ τέμνει εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ τὰς ἐφαπτομένας τῆς ἡμιπεριφερείας εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι:

1ον. Τὰ τετράπλευρα ΑΓΜΕ καὶ ΒΓΜΖ εἶναι ἐγγράψιμα.

2ον. Ἡ γωνία ΕΓΖ εἶναι ὀρθή.

3ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ μέσου τῆς ΕΖ, ἐὰν τὸ Μ διαγράφῃ τὴν ἡμιπεριφέρειαν καὶ τὸ Γ μένῃ σταθερόν.

885. (868). Εἰς ἡμιπεριφέρειαν Ο διαμέτρου ΑΒ φέρομεν δύο ἀκτῖνας ΟΓ καὶ ΟΔ καθέτους μεταξύ των. Αἱ ΑΔ καὶ ΒΓ τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Σ, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ ἡμικυκλίου. Αἱ ΑΓ καὶ ΒΔ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Μ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἡμικυκλίου.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΑΓ=ΓΣ καὶ ΑΔ=ΔΜ.

2ον. Ἡ ἀκτὶς ΟΓ στρέφεται περὶ τὸ Ο ἀπὸ τὴν θέσιν ΟΑ μέχρι τῆς θέσεως, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου Σ.

3ον. Νὰ εὑρεθῇ ὑπὸ τοὺς αὐτοὺς ὅρους ὁ τόπος τοῦ Μ.

886. (869). Μία γωνία ΒΑΓ, σταθεροῦ μεγέθους, στρέφεται περὶ τὴν κορυφήν της Α, ἡ ὁποία κεῖται ἐπὶ μιᾶς ἡμιπεριφερείας. Αἱ πλευραί της τέμνουν τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ ἀντιστοίχως.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΒΓ διατηρεῖ ἕνα σταθερὸν μῆκος.

2ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ μέσου τῆς ΒΓ.

3ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ ὀρθοκέντρου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

4ον. Χαράσσομεν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΔΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΒΓΔ εἶναι ἕνα ὡρισμένον σημεῖον.

5ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ κέντρου τῆς περιφερείας, τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρίγωνον ΒΓΔ

887. (870). Δίδονται δύο ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι Χ΄ΟΧ καὶ Ψ΄ΟΨ, Α ἕνα ὡρισμένον σημεῖον τῆς ΟΧ΄ καὶ Β ἕνα ὡρισμένον σημεῖον τῆς ΟΧ, Μ ἕνα μεταβλητὸν σημεῖον τῆς ΨΟΨ΄. Ἡ κάθετος, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ Β ἐπὶ τὴν ΑΜ, τέμνει τὴν ΑΜ εἰς τὸ Γ καὶ τὴν ΨΟΨ΄ εἰς τὸ Δ. Αἱ περιφέρειαι αἱ περιγεγραμμέναι περὶ τὰ τρίγωνα ΒΟΔ καὶ ΓΔΜ τέμνονται εἰς τὸ Σ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Μ, Σ καὶ Β κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας γραμμῆς.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Α, Σ καὶ Δ κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας.

3ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ Σ, ὅταν τὸ Μ γράφῃ τὴν ΨΟΨ΄.

888. (871). Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι Χ καὶ Ψ. Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α τῆς Χ φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Ψ εἰς τὸ Β. Ἀπὸ τὸ Β φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Χ εἰς τὸ Γ. Ἀπὸ τὸ Γ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΓΔ οὕτως, ὥστε γων.ΑΓΔ=2 γων.ΓΑΒ. Ἀπὸ τὸ Α φέρομεν κάθετον ΑΜ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ Μ, ὅταν ἡ τέμνουσα ΑΒ στρέφεται περὶ τὸ Α.

889. (872). Δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο΄ τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Β φέρομεν μίαν τυχοῦσαν τέμνουσαν ΓΒΓ΄, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὸ Γ καὶ τὴν Ο΄ εἰς τὸ Γ΄. Ἐπίσης ἀπὸ τὸ Β φέρομεν μίαν ἄλλην τέμνουσαν ΒΔ΄Δ, κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΓ΄, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὸ Δ καὶ τὴν Ο΄ εἰς τὸ Δ΄. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΓΔ καὶ Γ΄Δ΄, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ Μ, ὅταν αἱ τέμνουσαι ΓΒΓ΄ καὶ ΒΔ΄Δ στρέφονται περὶ τὸ Β.

890. (873). Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον

Δ τῆς ὑποτεινούσης φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ε καὶ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ζ. Γράφομεν τὰς περιφερείας, ποὺ διέρχονται ἀπὸ τὰ σημεῖα Δ, Ε, Β καὶ Δ, Γ, Ζ καὶ αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς ἕνα δεύτερον σημεῖον Μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ Μ, ὅταν ἡ τέμνουσα στρέφεται περὶ τὸ Ο.

891. (874). Μία γωνία xAy ἀμετάβλητος, στρέφεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου της περὶ τὴν κορυφήν της Α, ἡ ὁποία εἶναι ὡρισμένη. Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Β, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου της φέρομεν τας καθέτους ΒΓ καὶ ΒΔ ἐπὶ τὰς Ax καὶ Ay Αἱ κάθετοι αὐταὶ τέμνουν τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας εἰς δύο ἄλλα σημεῖα Ε καὶ Ζ.

1ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων Γ καὶ Δ.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ μῆκος ΓΔ εἶναι ἀμετάβλητον καὶ νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ μέσου του.

3ον. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ γεωμετρικοὶ τόποι τῶν σημείων Ε καὶ Ζ.

892. (875) Δίδεται μία γωνία xOy. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΟΧ λαμβάνομεν τὸ σταθερὸν σημεῖον Α, ἐπὶ δὲ τῆς Oy τὸ σταθερὸν σημεῖον Β. Γράφομεν δύο περιφερείας Κ καὶ Κ', αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται μεταξύ των καὶ ἡ μὲν Κ ἐφάπτεται τῆς Ox εἰς τὸ Α, ἡ δὲ Κ' ἐφάπτεται τῆς Oy εἰς τὸ Β. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου ἐπαφῆς τῶν περιφερειῶν αὐτῶν, ὅταν αἱ ἀκτῖνες των μεταβάλλωνται.

893. (876). Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον ΟΑΓΒ, τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις εἶναι ΟΑ=α, ΟΒ=β. Περὶ τὴν κορυφὴν Γ στρέφομεν μίαν ὀρθὴν γωνίαν, τῆς ὁποίας ἡ μία ἐκ τῶν πλευρῶν τέμνει τὴν ΟΑ εἰς τὸ Ε καὶ τὴν ΟΒ εἰς τὸ Ζ, ἡ δὲ ἄλλη πλευρὰ τέμνει τὴν ΟΑ εἰς τὸ Ε' καὶ τὴν ΟΒ εἰς τὸ Ζ'. Νὰ εὑρεθῇ:

1ον. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν μέσων τῶν εὐθειῶν ΕΖ' καὶ Ε'Ζ.

2ον. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν ποδῶν τῶν καθέτων τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου Γ ἐπὶ τὰς εὐθείας αὐτὰς ΕΖ' καὶ Ε'Ζ.

3ον. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς Μ τῶν εὐθειῶν ΕΖ' καὶ Ε'Ζ

894. (877). Κύκλος κυλίεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν μιᾶς περιφερείας διπλασίας ἀκτῖνος. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος ἑνὸς σημείου τῆς κινητῆς περιφερείας.

895. (878). Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Α δοθείσης περιφερείας Ο φέρομεν μίαν μεταβλητὴν χορδὴν ΑΒ. Ἀπὸ τὸ κέντρον Ο φέρομεν εὐθεῖαν παράλληλον τῆς ΑΒ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει εἰς τὸ σημεῖον Μ τὴν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου Ο εἰς τὸ σημεῖον Β. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου Μ.

896. (879). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν δοθεῖσαν ἀκτῖνα καὶ τέμνουν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν ω.

897. (880). Δίδεται περιφέρεια Ο. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Α τῆς περιφερείας φέρομεν δύο χορδὰς ΑΒ καὶ ΑΓ παραλλήλους ἀντιστοίχως πρὸς δύο δοθείσας εὐθείας Χ καὶ Ψ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ κέντρου τῆς περιφερείας τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ὅταν τὸ σημεῖον Α κινῆται ἐπὶ τῆς περιφερείας Ο.

898. (881). Δίδεται μία περιφέρεια Ο καὶ μία χορδὴ αὐτῆς ΑΒ, ἡ ὁποία εἶναι σταθερὰ κατὰ τὴν θέσιν. Ἕνα μεταβλητὸν σημεῖον Μ κινεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας Ο. Ἀπὸ τὸ μέσον Γ τῆς χορδῆς ΑΒ φέρομεν εὐθεῖαν τέμνουσαν τὰς ΜΑ καὶ ΜΒ ἢ τὰς προεκτάσεις των εἰς σημεῖα Δ καὶ Ε καὶ τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι ΜΔ=ΜΕ.

1ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ μέσου Ν τῆς εὐθείας ΔΕ.

2ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν Δ καὶ Ε, ὅταν τὸ Μ κινῆται ἐπὶ τῆς περιφερείας Ο.

899. (882). Δίδεται ἕνα κυκλικὸν τμῆμα χορδῆς ΑΒ. Μία μεταβλητὴ περιφέρεια ἐφάπτεται τῆς χορδῆς ΑΒ καὶ τὸ κέντρον της γράφει τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ τμήματος. Ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β φέρομεν ἐφαπτομένας τῆς μεταβλητῆς περιφερείας, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ Μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ Μ.

900. (883). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α φέρομεν τὰς εὐθείας Αx καὶ Αy, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν σταθερὰν γωνίαν xΑy=ω καὶ αἱ ὁποῖαι τέμνουν δοθεῖσαν εὐθεῖαν Ε'Ε εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν. Ἀπὸ τὸ Μ φέρομεν τὴν ΜΓ κάθετον ἐπὶ τὴν Αx, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Αy εἰς τὸ Γ καὶ ἀπὸ τὸ Ν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν Αy, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Αx εἰς τὸ Β. Αἱ ΜΓ καὶ ΝΒ τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Θ. Ἡ εὐθεῖα ΑΘ τέμνει τὴν εὐθεῖαν ΒΓ εἰς ἕνα σημεῖον Ρ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ Ρ, ὅταν ἡ σταθερὰ γωνία xΑy στρέφεται περὶ τὴν κορυφήν της Α καὶ αἱ πλευραί της τέμνουν τὴν Ε'Ε.

901. (884). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ ἡ βάσις ΒΓ εἶναι ὡρισμένη κατὰ τὴν θέσιν καὶ τὸ μέγεθος, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του εἶναι σταθερά. Ἀπὸ τὰς κορυφὰς Β καὶ Γ φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Α. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν ποδῶν τῶν καθέτων αὐτῶν.

902. (885). Ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ δίδεται ἡ βάσις ΒΓ=α καὶ τὸ ἄθροισμα ΑΒ+ΑΓ=λ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Β φέρομεν τὴν κάθετον ΒΜ ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν ποδῶν τῶν καθέτων αὐτῶν, ὅταν ἡ κορυφὴ τῆς γωνίας Α λαμβάνῃ τοιαύτας θέσεις, ὥστε τὸ ἄθροισμα ΑΒ+ΑΓ νὰ εἶναι σταθερόν.

903. (886). Δίδεται μία περιφέρεια Ο καὶ ἕνα ὡρισμένον σημεῖον Α ἐντὸς αὐτῆς. Διὰ τοῦ Α φέρομεν μίαν χορδὴν ΒΑΓ. Διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β καθὼς καὶ διὰ τῶν σημείων Ε καὶ Γ γράφομεν δύο περιφερείας, αἱ ὁποῖαι νὰ ἐφάπτωνται τῆς Ο καὶ αἱ ὁποῖαι τέμνονται μεταξύ των εἰς ἕνα σημεῖον Μ. Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τοῦ σημείου Μ.

904. (887). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου ἐπαφῆς δύο περιφερειῶν Κ καὶ Λ, αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται μεταξύ των ἐξωτερικῶς καὶ αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται καὶ δοθείσης περιφερείας Ο εἰς δύο δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β αὐτῆς.

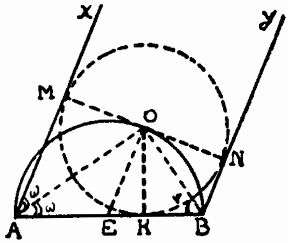
905. (888). Δίδεται μία εὐθεῖα ΑΒ καὶ λαμβάνομεν ὅλους τοὺς κύκλους, οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται τῆς εὐθείας αὐτῆς καὶ τοιούτους, ὥστε αἱ ἐφαπτόμεναι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β πρὸς κάθε ἕνα ἀπὸ τοὺς κύκλους αὐτοὺς νὰ εἶναι παράλληλοι. Ἔστωσαν Μ καὶ Ν τὰ σημεῖα ἐπαφῆς μὲ τὰς ἐφαπτομένας αὐτὰς καὶ Κ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς μὲ τὴν ΑΒ.

1ον. Νὰ δεχθῇ ὅτι ὁ τόπος τῶν κέντρων εἶναι ἕνας κύκλος.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΜΝ εἶναι ἐφαπτόμεται τοῦ κύκλου αὐτοῦ εἰς τὸ μέσον.

3ον. Διὰ ποίαν θέσιν τῶν ἐφαπτομένων τὸ τρίγωνον ΜΝΚ εἶναι ἰσοσκελές;

4ον. Διὰ ποίαν θέσιν τῶν ἐφαπτομένων ἡ ἀκτὶς τοῦ μεταβλητοῦ κύκλου εἶναι ἴση μὲ k ;



Σχ. ἀσκ. 905.

906. (889). Δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο′ τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Ἀπὸ τὸ Α φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν ΓΑΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὸ Γ καὶ τὴν Ο′ εἰς τὸ Δ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΓΟ καὶ ΔΟ′, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ Μ, ὅταν ἡ τέμνουσα ΓΑΔ στρέφεται περὶ τὸ Α.

907. (890). Δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο′ τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Α φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν ΓΑΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὸ σημεῖον Γ καὶ τὴν Ο′ εἰς τὸ Δ. Μὲ κορυφὰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ καὶ πλευρὰν τὴν ΓΔ κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν ΑΓΜ=ω καὶ τὴν γωνίαν ΑΔΜ=ν. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῆς τομῆς Μ τῶν πλευρῶν ΓΜ καὶ ΔΜ τῶν γωνιῶν αὐτῶν, ὅταν ἡ τέμνουσα ΓΑΔ στρέφεται περὶ τὸ Α.

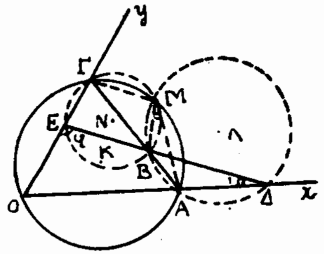
908. (891). Δίδονται δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο′, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἡ μία ἐκτὸς τῆς ἄλλης. Φέρομεν δύο μεταβλητὰς ἀκτῖνας ΟΑ καὶ Ο′Β, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν μεταξύ των μίαν σταθερὰν γωνίαν ω. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ μέσου Μ τῆς εὐθείας ΑΒ, ἡ ὁποία συνδέει τὰ ἄκρα τῶν ἀκτίνων.

909. (892). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς πλευρᾶς ΓΒ λαμβάνομεν ἕνα ὡρισμένον σημεῖον Σ, ἀπὸ τὸ ὁποῖον φέρομεν μίαν μεταβλητὴν τέμνουσαν ΣΒ′Γ′ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν πλευρὰν ΑΒ εἰς τὸ Β′ καὶ τὴν πλευρὰν ΑΓ εἰς τὸ Γ′. Γράφομεν περιφέρειαν κύκλου, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Σ, Β, Β′ καὶ μίαν ἄλλην περιφέρειαν κύκλου, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Σ, Γ, Γ′. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ δευτέρου σημείου Μ τῆς τομῆς τῶν δύο αὐτῶν περιφερειῶν.

910. (893). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Δ, Ε, Ζ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν xy καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα Β καὶ Γ καθέτους ΒΗ καὶ ΓΘ ἐπὶ τὴν xy. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΗΖ καὶ ΘΕ, αἱ ὁποῖαι προεκτεινόμεναι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου Μ, ὅταν ἡ xy στρέφεται περὶ τὸ Α.

911. (894). Δίδεται μία γωνία xΟy καὶ ἕνα σημεῖον Β, τὸ ὁποῖον κεῖται

ἐντὸς τῆς γωνίας αὐτῆς. Ἀπὸ τὸ Β φέρομεν μίαν σταθερὰν τέμνουσαν ΑΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὰς πλευρὰς Οx καὶ Οy τῆς γωνίας εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Γ ἀντιστοίχως καὶ μίαν μεταβλητὴν τέμνουσαν ΔΒΕ, ἡ ὁποία τέμνει τὰς Οx καὶ Οy εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ δευτέρου σημείου τομῆς τῶν περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι περιγεγραμμέναι περὶ τὰ τρίγωνα ΒΑΔ καὶ ΒΓΕ.



Σχ. ἀσκ. 911.

Γ' Ὁμάς. **912.** (895). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν Γ καὶ τὰς διαμέσους μ_α καὶ μ_β.

913. (896). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, τὴν γωνίαν Α καὶ τὴν διαφορὰν Β—Γ=ω.

914. (897). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὰς πλευρὰς α καὶ β καὶ τὴν διαφορὰν Α—Β=ω.

915. (898). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, τὸ ἄθροισμα Β+Γ=ω τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ καὶ τὴν διαφορὰν γ—β=λ.

916. (899). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, τὴν διαφορὰν β—γ=λ καὶ τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

917. (900). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι αἱ πλευραί του πρέπει νὰ διέρχωνται ἀπὸ τρία ὡρισμένα σημεῖα Λ, Μ, Ν, ὅτι αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ κεῖνται ἐπὶ μιᾶς ὡρισμένης περιφερείας, ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ Λ καὶ Μ καὶ ὅτι ἡ γωνία Α εἶναι δοθεῖσα.

918. (901). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, τὴν διαφορὰν Β—Γ=ω καὶ β—γ=λ.

919. (903). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν βάσιν ΒΓ=α, τὴν διαφορὰν Β—Γ=ω καὶ ὅτι ἡ κορυφὴ Α κεῖται ἐπὶ τοῦ τόπου τῶν σημείων ἐπαφῆς δύο μεταβλητῶν περιφερειῶν ἐφαπτομένων τῆς βάσεως ΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ ἀντιστοίχως.

920. (904). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν θέσιν καὶ τὸ μέγεθος τῆς πλευρᾶς α, μίαν εὐθεῖαν xy ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται ἡ κορυφὴ Α καὶ τὴν διαφορὰν β—γ=λ.

921. (905) Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὰ μέσα δύο πλευρῶν του καὶ ὅτι αἱ δύο ἄλλαι κορυφαί του κεῖνται ἡ μὲν μία ἐπὶ δο-

θείσης εὐθείας ἡ δὲ ἄλλη ἐπὶ δοθείσης περιφερείας.

922. (906). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, τὸ ὕψος $υ_α$ καὶ τὴν διαφορὰν Γ—Β=ω.

923. (907). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν βάσιν ΒΓ=α, τὴν διαφορὰν Β—Γ=ω καὶ ὅτι ἡ κορυφὴ Α κεῖται ἐπὶ δοθείσης εὐθείας xy. (Compagnon).

924. (908). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, τὴν ἀπόστασιν ΑΗ=μ τῆς κορυφῆς Α ἀπὸ τὸ ὀρθόκεντρον Η καὶ τὴν ἀπόστασιν ΑΟ=λ τῆς κορυφῆς Α ἀπὸ τὸ κέντρον Ο τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον κύκλου.

925. (909). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, τὴν διαφορὰν Β—Γ=ω καὶ β+γ=λ.

926. (910). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ ὕψος του ΒΔ=$υ_β$ καὶ τὰς ἀκτῖνας τῶν περιγεγραμμένων κύκλων περὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΒΓΔ.

927. (912). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν διεύθυνσιν δύο διχοτόμων του, ἕνα σημεῖον Δ τῆς ΑΒ καὶ ἕνα σημεῖον Ε τῆς ΑΓ.

928. (914). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τριγώνον, ἐὰν γνωρίζωμεν δύο πλευράς του καὶ τὴν γωνίαν ω τῶν διαμέσων, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς δοθείσας πλευράς.

929. (915). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν θέσιν τῆς κορυφῆς Α, τὸ σημεῖον Δ τῆς τομῆς τῆς πλευρᾶς ΒΓ καὶ τῆς διαμέσου ΑΔ καὶ τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τὸ τρίγωνον.

930. (916). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν:

1ον	τὴν	πλευρὰν	ΒΓ	καὶ	τὸ	κέντρον	Ο	τοῦ ἐγγεγραμμένου	κύκλου.
2ον	»	»	ΒΓ	»	»	»	$O_α$	» παρεγγεγραμμένου	»
3ον	»	»	ΒΓ	»	»	»	$O_β$	» »	»
4ον	»	»	ΒΓ	»	»	»	$O_γ$	» »	»

931. (917). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν, τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῶν πλευρῶν του καὶ τῶν διαμέσων του.

932. (926). Δίδεται περιφέρεια Ο καὶ δύο εὐθεῖαι Οx καὶ Oy, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὸ κέντρον Ο καὶ σχηματίζουν γωνίαν ω=60°. Νὰ ἀχθῇ μία ἐφαπτομένη ΑΒ τῆς περιφερείας Ο εἰς τρόπον, ὥστε τὸ μέρος τὸ ἐφαπτομένης τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν δύο εὐθειῶν Οx καὶ Oy νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος λ.

933. (929). Ἐννοῦμεν τὴν κορυφὴν Α τριγώνου ΑΒΓ μὲ ἕνα σημεῖον Δ τῆς βάσεώς του· νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ΑΔ ἕνα σημεῖον ἀπὸ τοῦ ὁποίου αἱ ΒΔ καὶ ΔΓ νὰ φαίνωνται ὑπὸ ἴσας γωνίας.

934. (943). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Σ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς δοθείσης περιφερείας Θ, νὰ ἀχθῇ μία τέμνουσα ΣΑΒ τοιαύτη, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν σημείων τῆς τομῆς Α καὶ Β ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν ΟΣ, νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος λ.

935. (948). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνας ῥόμβος, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν

του α καὶ τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

936. (949). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνας ρόμβος, ἂν γνωρίζωμεν μίαν γωνίαν του καὶ τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

937. (950). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τραπέζιον ΑΒΓΔ, ἂν γνωρίζωμεν τὰς διαγωνίους του ΑΓ, ΒΔ, τὴν γωνίαν των ω καὶ τὴν μὴ παράλληλον πλευρὰν ΑΔ.

938. (953). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ἂν γνωρίζωμεν τὰς δύο ἀπέναντι πλευρὰς ΑΒ=α, ΓΔ=γ καὶ τὰς γωνίας του Α, Β, Γ, Δ.

939. (954). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ἂν γνωρίζωμεν τὰς πλευράς του ΑΒ, ΑΔ, ΔΓ καὶ τὰς γωνίας Β καὶ Γ.

940. (962). Νὰ ἐγγραφῇ εἰς κύκλον ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ κάθετοι πλευραί, ἢ αἱ προεκτάσεις των, νὰ διέρχωνται ἀπὸ δοθέντα σημεῖα Μ καὶ Ν.

941. (965). Περὶ δοθὲν τετράπλευρον νὰ περιγραφῇ ἕνα τετράγωνον.

Δ' Ὁμάς. **942.** (969). Νὰ γραφῇ περιφέρεια, μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα, ἡ ὁποία νὰ ἀπέχῃ ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τρία δοθέντα σημεῖα Α, Β, Γ, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας (τρεῖς περιπτώσεις).

943. (970). Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἀπέχῃ ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ Δ (τρεῖς περιπτώσεις).

944. (971). Δίδονται δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο', ἀκτίνων R καὶ R' ἀντιστοίχως, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἡ μία ἐκτὸς τῆς ἄλλης. Ζητεῖται νὰ γραφῇ μία τρίτη περιφέρεια Ο'', ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτεται τῶν δύο ἄλλων καὶ τοιαύτη, ὥστε ἡ γωνία ΟΟ''Ο' νὰ εἶναι ἴση μὲ 2ω. Ἡ ἀπόστασις ΟΟ' τῶν κέντρων εἶναι ἴση μὲ δ.

945. (972). Μὲ κέντρον δοθὲν σημεῖον Α, νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ δοθεῖσαν περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα μέρη.

946. (973). Νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα R, ἔχουσα τὸ κέντρον της ἐπὶ τῆς πλευρᾶς δοθείσης γωνίας xAy καὶ ἀποτέμνουσα ἀπὸ τῆς ἄλλης πλευρᾶς τῆς γωνίας, χορδὴν δοθέντος μήκους λ.

947. (974). Δίδεται περιφέρεια Α ἀκτῖνος R. Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἔχουσα, ὡς κέντρον δοθὲν σημεῖον Ο καὶ τοιαύτη, ὥστε αἱ δύο κοιναὶ ἐφαπτόμεναι νὰ σχηματίζουν γωνίαν ἴσην μὲ 2ω.

948. (975). Μὲ κέντρον δοθὲν σημεῖον Α, νὰ γραφῇ περιφέρεια, τοιαύτη, ὥστε αἱ ἐφαπτόμεναι αἱ ἀγόμεναι πρὸς αὐτὴν ἐκ δύο ἄλλων δοθέντων σημείων Β καὶ Γ, νὰ σχηματίζουν δοθεῖσαν γωνίαν 2ω.

949. (978). Νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα R, ἡ ὁποία νὰ ἀποκόπτῃ ἀπὸ δύο παραλλήλους εὐθείας, χορδὰς ἴσας μὲ δοθέντα μήκη k καὶ λ.

950. (979). Νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα R, ἡ ὁποία νὰ ἀποκόπτῃ ἀπὸ δύο τεμνομένας εὐθείας χορδὰς ἴσας μὲ δοθέντα μήκη k καὶ λ.

951. (980). Νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα R, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ δοθεῖσαν περιφέρειαν κατὰ χορδὴν ΑΒ=λ.

952. (982). Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἀποκόπτῃ ἀπὸ τρεῖς δοθείσας εὐθείας Χ, Υ, Ζ τὸ αὐτὸ δοθὲν μῆκος.

953. (984). Νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα R, ἡ ὁποία νὰ ἀποκόπτῃ ἀπὸ δύο δοθείας εὐθείας, χορδὰς ἴσας μὲ δοθέντα μήκη μ καὶ ν.

954. (985). Νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα R, ἡ ὁποία νὰ ἀποκόπτῃ ἀπὸ δύο δοθείσας περιφερείας Α καὶ Β χορδάς, ἴσας μὲ δοθέντα μήκη λ καὶ μ.

955. (986). Δίδονται δύο εὐθεῖαι Χ καὶ Υ καὶ ἕνα σημεῖον Ο. Μὲ κέντρον τὸ Ο νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἀποκόπτῃ ἀπὸ τὰς Χ καὶ Υ χορδάς, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα νὰ εἶναι ἴσον μὲ 2λ.

956. (887). Μὲ κέντρον δοθὲν σημεῖον Ο νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν εἰς τρόπον, ὥστε ἡ χορδὴ ΜΝ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν ΒΓ.

957. (988). Μὲ κέντρον δοθὲν σημεῖον Ο νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ τὰς πλευρὰς δοθείσης γωνίας ΑΒΓ εἰς τρόπον, ὥστε ἡ προκύπτουσα χορδὴ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν xy.

958. (989). Δίδονται τρία σημεῖα Α, Β, Γ, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ μία εὐθεῖα ΑΔ, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ Α. Νὰ γραφῇ περιφέρεια κύκλου, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ τοιαύτη, ὥστε ἡ ἐφαπτομένη αὐτῆς, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Ε, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ περιφέρεια αὐτὴ τέμνει τὴν ΑΔ, νὰ διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΟΜΟΙΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'

ΛΟΓΟΙ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ

377. Ὁρισμοί. Ἀπὸ τὴν Ἀριθμητικὴν γνωρίζομεν, ὅτι:

Λόγος ἑνὸς ἀριθμοῦ πρὸς ἕνα ἄλλον *λέγεται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ διὰ τοῦ δευτέρου.*

Π.χ. ὁ λόγος τῶν ἀριθμῶν α καὶ β εἶναι ὁ $\frac{\alpha}{\beta}$ ἢ α : β.

Ἀναλογία *λέγεται ἡ ἰσότης δύο λόγων.*

Π.χ. ἡ ἰσότης $\frac{3}{5}=\frac{12}{20}$ εἶναι μία ἀναλογία.

Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, δ εἶναι τοιοῦτοι, ὥστε νὰ εἶναι

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \qquad (1)$$

λέγομεν, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ σχηματίζουν ἀναλογίαν.

Ἡ ἀναλογία (1) γράφεται καὶ α : β=γ : δ καὶ ἐκφωνεῖται: *α πρὸς β καθὼς γ πρὸς δ.*

Οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, δ λέγονται ***ὅροι τῆς ἀναλογίας***· ὁ α εἶναι ὁ πρῶτος ὅρος, ὁ β ὁ δεύτερος, ὁ γ ὁ τρίτος καὶ ὁ δ ὁ τέταρτος ὅρος τῆς ἀναλογίας.

Οἱ α καὶ δ λέγονται ***ἄκροι ὅροι*** τῆς ἀναλογίας, οἱ δὲ β καὶ γ λέγονται ***μέσοι ὅροι*** τῆς ἀναλογίας.

Εἰς τὴν ἀναλογίαν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}$ (2)

ὁ β λέγεται ***μέσος ἀνάλογος*** *ἢ* ***γεωμετρικὸς μέσος*** *τῶν α καὶ γ.*

Ἡ ἀναλογία (2) λέγεται ***συνεχὴς ἀναλογία.***

Τρίτος ἀνάλογος *δύο δοθέντων ἀριθμῶν α καὶ β εἶναι ὁ τέταρτος ὅρος x τῆς ἀναλογίας* $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{x}$.

378. Ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν. Εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν ἀποδεικνύονται αἱ κάτωθι ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν:

I. ***Εἰς κάθε ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν μέσων ὅρων της εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ὅρων της.***

Π.χ. Ἐὰν εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$, θά εἶναι καὶ $\alpha\delta=\beta\gamma$.

Ἐπίσης, ἐὰν εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}$, θὰ εἶναι $\beta^2=\alpha\gamma$, ὁπότε $\beta=\sqrt{\alpha\gamma}$.

II. *Ἀντιστρόφως.* ***Ἐὰν εἶναι*** $\alpha\delta=\beta\gamma$, ***θὰ εἶναι καὶ*** $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$.

III. ***Ἂν ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν μέσων ὅρων, ἢ τῶν ἄκρων ὅρων μιᾶς ἀναλογίας, προκύπτει πάλιν ἀναλογία.***

Π.χ. Ἐὰν εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$, θὰ εἶναι καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$, $\frac{\delta}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha}$.

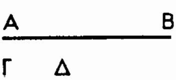
IV. ***Ἐὰν ἔχωμεν τὴν ἀναλογίαν*** $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$, ***θὰ ἔχωμεν καὶ τὰς ἀναλογίας :***

$$\frac{\alpha\pm\beta}{\beta}=\frac{\gamma\pm\delta}{\delta} \qquad \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\gamma-\delta}$$

$$\frac{\alpha}{\alpha\pm\beta}=\frac{\gamma}{\gamma\pm\delta} \qquad \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}=\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\delta} \text{ κλπ.}$$

V. ***Ἐὰν ἔχωμεν μίαν σειρὰν ἴσων λόγων*** $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\varepsilon}{\zeta}=\cdots$, ***θὰ εἶναι καὶ*** $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\varepsilon}{\zeta}=\cdots=\frac{\alpha+\gamma+\varepsilon+\cdots}{\beta+\delta+\zeta+\cdots}$.

379. Λόγος δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν. ***Λόγος*** ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ (*Σχ. 280*) πρὸς ἕνα ἄλλο εὐθύγραμμον τμῆμα ΓΔ, λέγεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος μετρεῖ τὸ ΑΒ, ὅταν τὸ ΓΔ ληφθῇ ὡς μονάς.

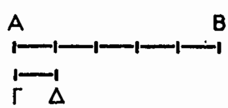


Σχ. 280.

Ὁ λόγος τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ παρίσταται μὲ $\frac{AB}{\Gamma\Delta}$.

Γενικῶς: ***Λόγος ἑνὸς μεγέθους Α πρὸς ἕνα ἄλλο ὁμοειδὲς μέγεθος Β*** *εἶναι ὁ ἀριθμὸς* $\frac{A}{B}$, *ὁ ὁποῖος μετρεῖ τὸ μέγεθος Α, ὅταν τὸ Β ληφθῇ ὡς μονάς.*

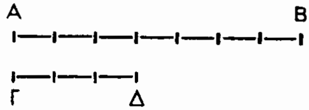
Ἐὰν τι εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ (*Σχ. 281*) περιέχῃ τὴν μονάδα ΓΔ 5 φορὰς ἀκριβῶς, λέγομεν, ὅτι ὁ λόγος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ εἶναι 5 καὶ γράφομεν $\frac{AB}{\Gamma\Delta}=5$.



Σχ. 281.

Ἐὰν ἡ μονὰς ΓΔ δὲν περιέχεται ἀκριβῶς κατὰ ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν φορῶν εἰς τὸ ΑΒ, τότε διαιροῦμεν τὴν μονάδα ΓΔ εἰς ἴσα μέρη καὶ παρατηροῦμεν πόσα ἀπὸ τὰ ἴσα αὐτὰ μέρη περιέχει τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ.

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ μονὰς ΓΔ *(Σχ. 282)* διῃρέθη εἰς 3 ἴσα μέρη καὶ ὅτι τὸ ΑΒ περιέχει 7 ἀπὸ τὰ ἴσα αὐτὰ μέρη. Τὸ κλάσμα $\frac{7}{3}$ εἶναι τὸ μέτρον τοῦ ΑΒ, δηλ. εἶναι ὁ λόγος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ, ὁ ὁποῖος γράφεται $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{7}{3}$.



Σχ. 282.

380. Θεώρημα. ***Ὁ λόγος δύο ὁμοειδῶν ποσῶν εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι παριστοῦν τὰ ποσὰ αὐτά, ὅταν μετρηθοῦν μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα.***

Ἔστωσαν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ *(Σχ. 282)*. Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ μέτρον τοῦ ΑΒ εἶναι 7 ἑκ. καὶ τὸ μέτρον τοῦ ΓΔ εἶναι 3 ἑκ. Ἐπειδὴ τὸ ΓΔ περιέχει 3 ἑκατοστόμετρα, τὸ 1 ἑκ. θὰ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ΓΔ. Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ, τὸ ὁποῖον περιέχει 7 ἑκ. εἶναι ἴσον μὲ 7 τρίτα τοῦ ΓΔ καὶ ἑπομένως ὁ λόγος τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ εἶναι $\frac{7}{3}$.

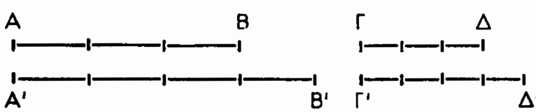
Γενικῶς, ἐὰν α καὶ β εἶναι ἀντιστοίχως τὰ μέτρα δύο εὐθυγράμμων τμημάτων ΑΒ καὶ ΓΔ, τὰ ὁποῖα ἐμετρήθησαν μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα μ, θὰ εἶναι $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{\alpha}{\beta}$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ὁ λόγος δύο. . . .***

Σημ. Κατωτέρω, ὅταν θὰ γράφωμεν $\frac{AB}{\Gamma\Delta}$, θὰ ὑποθέτωμεν, ὅτι τὰ ΑΒ καὶ ΓΔ παριστάνουν τὰ μέτρα τῶν τμημάτων αὐτῶν. Ὥστε ὁ λόγος $\frac{AB}{\Gamma\Delta}$ παριστάνει τὸν λόγον τοῦ $\frac{\text{μέτρ.}AB}{\text{μέτρ.}\Gamma\Delta}$.

Οὕτω, ὅταν λέγωμεν «*ὁ λόγος δύο εὐθυγράμμων τμημάτων*», «*ὁ λόγος δύο πλευρῶν*» κλπ., θὰ ἐννοοῦμεν *τὸν λόγον τῶν ἀριθμῶν*, οἱ ὁποῖοι μετροῦν τὰ μήκη τῶν τμημάτων ἢ τῶν πλευρῶν.

381. Ἀνάλογα μεγέθη. Ἔστωσαν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ Α′Β′ *(Σχ. 283)*, τὰ ὁποῖα ἐμετρήθησαν μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα καὶ ἔστω, ὅτι εἶναι ΑΒ=3 καὶ Α′Β′=4. Ὁ λόγος τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων (§ 380) θὰ εἶναι $\frac{AB}{A'B'} = \frac{3}{4}$.



Σχ. 283.

Ἔστωσαν ἐπίσης δύο ἄλλα εὐθύγραμμα τμήματα ΓΔ καὶ Γ′Δ′,

τὰ ὁποῖα ἐμετρήθησαν μὲ ἄλλην μονάδα καὶ ἔστω, ὅτι εἶναι ΓΔ=3 καὶ Γ'Δ'=4. Ὁ λόγος των θὰ εἶναι $\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}=\frac{3}{4}$ (2).

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) ἔχομεν $\frac{AB}{A'B'}=\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}$ καὶ λέγομεν, ὅτι τὰ εὐθύγραμμα τμήματα AB καὶ A'B' εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΓΔ καὶ Γ'Δ'.

Ὥστε: *Δύο εὐθύγραμμα τμήματα εἶναι* ***ἀνάλογα πρὸς δύο ἄλλα εὐθύγραμμα τμήματα,*** *ὅταν ὁ λόγος τῶν δύο πρώτων εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν δύο ἄλλων.*

Γενικῶς, λέγομεν, ὅτι τὰ μεγέθη AB, ΓΔ, EZ, . . . εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ὁμοειδῆ καὶ ἰσοπληθῆ μεγέθη A'B', Γ'Δ', E'Z'. . ., ὅταν εἶναι

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}=\frac{EZ}{E'Z'}=\dots$$

Ἀσκήσεις

959. (991). Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ τέταρτος ἀνάλογος τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων α=6 ἑκ., β=12 ἑκ., γ=5 ἑκ.

960. (992). Τὰ σημεῖα A, B, Γ, Δ, E κεῖνται, κατὰ τὴν σειρὰν αὐτήν, ἐπὶ μιᾶς εὐθείας. Ἐὰν εἶναι AB=8 ἑκ., ΒΓ=10 ἑκ., ΓΔ=6 ἑκ. καὶ ΔE ὁ τέταρτος ἀνάλογος τῶν τριῶν αὐτῶν εὐθυγράμμων τμημάτων, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος AE.

961. (993). Νὰ τεθοῦν ὑπὸ μορφὴν ἀναλογιῶν τὰ κάτωθι ἴσα γινόμενα:
1ον. $AB\times B\Gamma=\Gamma\Delta\times\Delta E$. 2ον. $\overline{AB}^2=B\Gamma\times\Gamma\Delta$. 3ον. $AB\times B\Gamma=4\cdot\overline{\Gamma\Delta}^2$.

2. Σημεῖα τὰ ὁποῖα διαιροῦν ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα κατὰ δοθέντα λόγον.

Γνωρίζομεν νὰ διαιροῦμεν ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα εἰς ν ἴσα μέρη (§ 219). Τὸ κατωτέρω πρόβλημα μᾶς ἐπιτρέπει νὰ διαιρέσωμεν ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα κατὰ δοθέντα λόγον.

382. Πρόβλημα. ***Ἐπὶ μιᾶς ἀπεριορίστου εὐθείας xy δίδονται δύο ὡρισμένα σημεῖα A καὶ B καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας αὐτῆς ἕνα σημεῖον M τοιοῦτον, ὥστε ὁ λόγος $\frac{MA}{MB}$ τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ τὰ A καὶ B νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν τιμὴν $\frac{\mu}{\nu}$ διάφορον τῆς μονάδος.***

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθόσον τὸ δοθὲν σημεῖον δύναται *νὰ κεῖται μεταξὺ τῶν A καὶ B* ἢ *νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς* AB.

Ἔστω $\frac{3}{5}$ ὁ δοθεὶς λόγος.

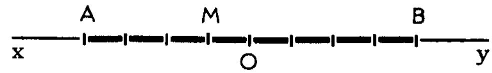
1ον Ἐὰν ὑπάρχῃ ἕνα τοιοῦτον σημεῖον M *(Σχ. 284)* μεταξὺ τῶν A καὶ B πρέπει νὰ εἶναι $\frac{MA}{MB}=\frac{3}{5}$ (1) καὶ $MA+MB=AB$ (2).

Ἀπὸ τὴν (1) λαμβάνομεν $\frac{MA}{3}=\frac{MB}{5}=\frac{MA+MB}{3+5}=\frac{AB}{8}$.

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν

$$MA=3\cdot\frac{AB}{8} \text{ καὶ } MB=5\cdot\frac{AB}{8}.$$

Ἀπὸ τὰς δύο τελευταίας σχέσεις συνάγομεν, ὅτι ὑπάρχει μεταξὺ τῶν A καὶ B ἕνα σημεῖον M, τὸ ὁποῖον πληροῖ τοὺς τεθέντας ὅρους (1) καὶ (2). Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα AB εἰς 3+5 ἢ 8 ἴσα μέρη καὶ τὸ ζητούμενον σημεῖον εἶναι τὸ 3ον σημεῖον διαιρέσεως ἀπὸ τὸ A.



Σχ. 284.

Αὐτὸ τὸ σημεῖον M εἶναι τὸ *μόνον*, τὸ ὁποῖον ἱκανοποιεῖ τὸν τεθέντα ὅρον (1), διότι ἡ ἀπόστασίς του ἀπὸ τὸ A εἶναι ὡρισμένη καὶ ἴση μὲ $MA=\frac{3}{8}AB$.

2ον. Ἐὰν ὑπάρχῃ ἐπὶ τῆς xy *(Σχ. 285)* ἕνα τοιοῦτον σημεῖον N, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ AB, πρέπει νὰ εἶναι



Σχ. 285.

$$\frac{NA}{NB}=\frac{3}{5} \quad (3).$$

Ἐπίσης ἐπειδὴ $NA<NB$, τὸ σημεῖον N θὰ κεῖται ἀριστερὰ τοῦ σημείου A καὶ θὰ ἔχωμεν $NB-NA=AB$ (4).

Ἀπὸ τὴν (3) ἔχομεν $\frac{NB}{NA}=\frac{5}{3}$ ἢ $\frac{NB}{5}=\frac{NA}{3}=\frac{NB-NA}{5-3}=\frac{AB}{2}$.

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν

$$NB=5\cdot\frac{AB}{2} \quad \text{καὶ} \quad NA=3\cdot\frac{AB}{2}.$$

Ἀπὸ τὰς δύο τελευταίας σχέσεις συνάγομεν, ὅτι ὑπάρχει ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς AB καὶ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ A ἕνα σημεῖον N, τὸ ὁποῖον πληροῖ τοὺς τεθέντας ὅρους.

Πρὸς εὕρεσιν τούτου ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα AB εἰς 5—3 ἢ 2 ἴσα μέρη καὶ τὸ ζητούμενον σημεῖον N θὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς xy, ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τῆς Ax ἕνα τμῆμα AN ἴσον μὲ 3 μέρη ἴσα πρὸς αὐτά.

Αὐτὸ τὸ σημεῖον N εἶναι τὸ *μόνον*, τὸ ὁποῖον ἱκανοποιεῖ τὸν τεθέντα ὅρον (3), διότι ἡ ἀπόστασίς του NA ἀπὸ τοῦ σημείου A εἶναι ὡρισμένη καὶ ἴση μὲ $NA = \frac{3}{2} \cdot AB$.

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα, ἐὰν ὁ δοθεὶς λόγος εἶναι μεγαλύτερος τῆς μονάδος.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὰ κάτωθι:

Συμπέρασμα: ***Ἐὰν δίδωνται δύο σημεῖα A καὶ B ἐπὶ μιᾶς ἀπεριορίστου εὐθείας xy, ὑπάρχουν ἐπὶ τῆς εὐθείας αὐτῆς δύο σημεῖα M καὶ N καὶ δύο μόνον, τὰ ὁποῖα διαιροῦν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα AB κατὰ δοθέντα λόγον $\frac{\mu}{\nu}$, διάφορον τῆς μονάδος.***

Τὸ ἕνα ἐξ αὐτῶν, τὸ M, κεῖται μεταξὺ τῶν A καὶ B καὶ διαιρεῖ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα εἰς δύο τμήματα MA καὶ MB, *τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι ἴσον μὲ AB.*

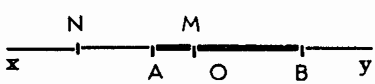
Τὸ ἄλλο, τὸ N, διαιρεῖ ἐξωτερικῶς τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα AB εἰς δύο τμήματα NB καὶ NA, *τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ εἶναι ἴση μὲ AB.*

Καὶ τὰ δύο σημεῖα M καὶ N κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος, ὡς πρὸς τὸ μέσον O τοῦ τμήματος AB· πρὸς τὰ *ἀριστερὰ* μὲν τοῦ μέσου, ὅταν ὁ δοθεὶς λόγος εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος, πρὸς τὰ *δεξιὰ* δὲ τοῦ μέσου, ὅταν ὁ λόγος εἶναι μεγαλύτερος τῆς μονάδος.

383. Σπουδαία παρατήρησις. *1ον.* Ἐὰν δύο σημεῖα M καὶ M′ *κεῖνται μεταξὺ τῶν A καὶ B* καὶ διαιροῦν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα AB κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον, *τὰ σημεῖα αὐτὰ συμπίπτουν.*

2ον. Ἐὰν δύο σημεῖα N καὶ N′ *κεῖνται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ AB* καὶ διαιροῦν τὸ AB κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον, *τὰ σημεῖα αὐτὰ συμπίπτουν.*

384. Ὁρισμοί. Ἔστω ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα AB *(Σχ. 286)* τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ μιᾶς ἀπεριορίστου εὐθείας xy καὶ ἐπὶ τῆς xy δύο σημεῖα M καὶ N καὶ τοιαῦτα, ὥστε $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = \frac{\mu}{\nu}$.



Σχ. 286.

Λέγομεν ἀδιαφόρως, ὅτι: *1ον. Τὰ M καὶ N διαιροῦν **τὸ AB κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον.***

*2ον. Τὰ M καὶ N διαιροῦν **ἁρμονικῶς τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα AB.***

*3ον. Τὰ M καὶ N εἶναι **συζυγῆ ἁρμονικὰ** πρὸς τὰ A καὶ B.*

4ον. *Τὰ σημεῖα A, B, M, N σχηματίζουν μίαν* ***ἁρμονικὴν διαίρεσιν.***

Ἀσκήσεις

962. (994). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν τέσσαρα σημεῖα Α, Α', Β', Β κατὰ τὴν σειρὰν καθ' ἣν ἐκφωνοῦνται καὶ τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι ΑΑ'=6 ἑκ., Α'Β'=12 ἑκ., Β'Β=2 ἑκ. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τοῦ τμήματος Α'Β' ἕνα σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{MA}{MB}=\frac{MA'}{MB'}$.

963. (995). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ κατὰ τὴν τάξιν καθ' ἣν ἐκφωνοῦνται καὶ τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι ΑΒ=6, ΒΓ=2, ΓΔ=4, Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ τμήματος ΑΓ λαμβάνομεν ἕνα σημεῖον Μ τοιοῦτον. ὥστε νὰ εἶναι $\frac{MA}{M\Gamma}=\frac{5}{3}$. Ἐπίσης λαμβάνομεν ἕνα σημεῖον Μ' μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ καὶ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{M'B}{M'\Gamma}=\frac{5}{3}$. Ἐὰν Ο καὶ Ο' εἶναι τὰ μέσα τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ, νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ λόγοι $\frac{MO}{MO'}$ καὶ $\frac{M'O}{M'O'}$.

964. (996). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας xy λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Α· ἀπὸ τὸ σημεῖον Α λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς xy καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ Α τμήματα ΑΒ=8 ἑκ., ΑΓ=6 ἑκ., ΑΔ=12 ἑκ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ εἶναι συζυγῆ ἁρμονικὰ πρὸς τὰ Α καὶ Β.

965. (997). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ=8 ἑκ. καὶ δύο σημεῖα Μ καὶ Μ' καὶ τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι

$$\frac{MA}{MB}=\frac{M'A}{M'B}=\frac{3}{2}.$$

1ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ τμήματα ΜΑ, ΜΒ, Μ'Α, Μ'Β.

2ον. Ἐὰν Ο εἶναι τὸ μέσον τοῦ ΑΒ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι

$$OM\times OM'=\overline{OA}^2.$$

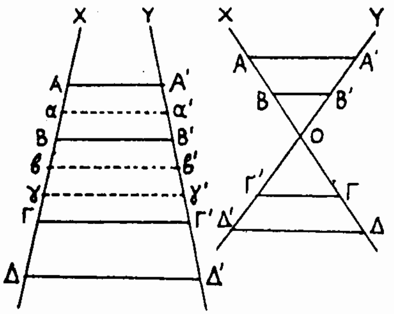
966. (998). Μία εὐθεῖα ΑΒ εἶναι διῃρημένη εἰς 24 ἴσα μέρη. Ἐὰν τὸ Γ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΒ, νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος $\frac{MA}{M\Gamma}$, ὅταν τὸ Γ καταλαμβάνῃ διαδοχικῶς τὰς διαιρέσεις 9 καὶ 10 καὶ νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαιρέσεις, τὰς ὁποίας καταλαμβάνει τὸ συζυγὲς ἁρμονικὸν Μ' τοῦ Μ πρὸς τὰ σημεῖα Α καὶ Γ.

967. (999). Νὰ εὑρεθοῦν τὰ δύο σημεῖα Γ καὶ Δ, τὰ ὁποῖα διαιροῦν ἁρμονικῶς μίαν εὐθεῖαν ΑΒ=24 ἑκ. κατὰ τὸν λόγον 3 πρὸς 5 καὶ νὰ ἀποδειχθῇ ἀριθμητικῶς, ὅτι καὶ τὰ σημεῖα Α καὶ Β διαιροῦν ἁρμονικῶς τὴν εὐθεῖαν ΓΔ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΘΑΛΗ. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ

385. **Θεώρημα.** ***Ἐὰν δύο τυχοῦσαι εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ παραλλήλων εὐθειῶν, ὁ λόγος δύο τυχόντων τμημάτων τῆς πρώτης εὐθείας εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν ἀντιστοίχων τμημάτων τῆς δευτέρας εὐθείας.***



Σχ. 287.

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι Χ καὶ Υ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται ὑπὸ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ', ΔΔ' . . . .

Ὑπόθ.	ΑΑ'//ΒΒ'//ΓΓ'
Συμπ.	$\frac{ΑΒ}{ΒΓ}=\frac{Α'Β'}{Β'Γ'}$

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\frac{ΑΒ}{ΒΓ}=\frac{Α'Β'}{Β'Γ'}$.

Ἀπόδειξις: 1ον. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΒΓ ἔχουν ἕνα *κοινὸν μέτρον*, τὸ ὁποῖον περιέχεται 2 φορὰς εἰς τὸ ΑΒ καὶ 3 φορὰς εἰς τὸ ΒΓ· τότε θὰ εἶναι $\frac{ΑΒ}{ΒΓ}=\frac{2}{3}$ (1)

Διαιροῦμεν τὸ ΑΒ εἰς δύο ἴσα μέρη τὰ Αα καὶ αΒ καὶ τὸ ΒΓ εἰς τρία ἴσα μέρη τὰ Ββ=βγ=γΓ. Ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως α, β, γ, φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΑ', αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν Υ εἰς τὰ σημεῖα α', β', γ'.

Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι Αα=αΒ=Ββ=βγ=γΓ.

Ἐπειδὴ αἱ παράλληλοι ΑΑ', αα', ... ὁρίζουν ἴσα τμήματα ἐπὶ τῆς εὐθείας Χ, θὰ ὁρίζουν ἴσα τμήματα καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας Υ, τὴν ὁποίαν τέμνουν (§ 217)· ἤτοι θὰ εἶναι

Α'α'=α'Β'=Β'β'=β'γ'=γ'Γ'.

Ἀλλὰ ἡ Α'Β' περιέχει 2 καὶ ἡ Β'Γ' 3 ἀπὸ τὰ ἴσα αὐτὰ τμήματα καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι $\frac{Α'Β'}{Β'Γ'}=\frac{2}{3}$ (2)

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι

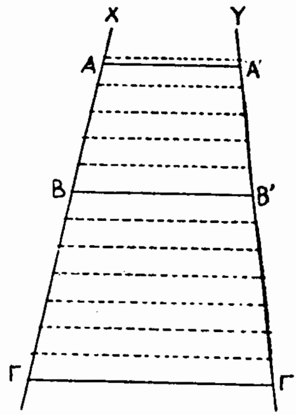
$$\frac{AB}{B\Gamma}=\frac{A'B'}{B'\Gamma'} \qquad (3)$$

2ον. Ἐὰν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΒΓ *δὲν ἔχουν κοινὸν μέτρον*, θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ τιμαὶ τῶν λόγων $\frac{AB}{B\Gamma}$ καὶ $\frac{A'B'}{B'\Gamma'}$ εἶναι αἱ αὐταὶ κατὰ προσέγγισιν.

Πράγματι· ἂς διαιρέσωμεν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΒΓ εἰς 7 ἴσα μέρη καὶ ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ ΑΒ περιέχει 4 ἀπὸ τὰ ἴσα αὐτὰ μέρη, καὶ κάτι ἀκόμη, ἀλλὰ δὲν περιέχει 5 ἀπὸ αὐτὰ τὰ μέρη.

Οἱ ἀριθμοὶ $\frac{4}{7}$ καὶ $\frac{5}{7}$ εἶναι αἱ πλησιάζουσαι τιμαὶ τοῦ λόγου $\frac{AB}{B\Gamma}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{7}$· δηλ. θὰ εἶναι

$$\frac{4}{7}<\frac{AB}{B\Gamma}<\frac{5}{7} \qquad (1)$$



Σχ. 288.

Ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΑ', αἱ ὁποῖαι ὁρίζουν 7 ἴσα τμήματα ἐπὶ τῆς Β'Γ' καὶ 5 τμήματα ἐπὶ τῆς Α'Β'. Τὰ 4 πρῶτα τμήματα τῆς Α'Β' εἶναι ἴσα μὲ τὰ τμήματα τῆς Β'Γ' καὶ τὸ τελευταῖον εἶναι μικρότερον ἀπὸ αὐτά. Ἄρα τὸ $\frac{1}{7}$ τῆς Β'Γ' περιέχεται 4 φορὰς εἰς τὸ τμῆμα Α'Β', ἀλλὰ δὲν περιέχεται 5 φοράς· δηλ. θὰ εἶναι πάλιν $\frac{4}{7}<\frac{A'B'}{B'\Gamma'}<\frac{5}{7}$ (2)

Καὶ εἰς τὰς δύο σχέσεις (1) καὶ (2) οἱ ἄκροι λόγοι διαφέρουν κατὰ

$$\frac{5}{7}-\frac{4}{7}=\frac{1}{7}.$$

Ἀλλὰ ἡ διαφορὰ αὐτὴ $\frac{1}{7}$ δύναται νὰ γίνῃ ὁσονδήποτε μικρὰ θέλομεν, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΒΓ εἰς ἕνα μεγάλον ἀριθμὸν ἴσων μερῶν.

Οἱ λόγοι λοιπὸν $\frac{AB}{B\Gamma}$ καὶ $\frac{A'B'}{B'\Gamma'}$, οἱ ὁποῖοι περιέχονται μεταξὺ τῶν δύο τιμῶν $\frac{4}{7}$ καὶ $\frac{5}{7}$, αἱ ὁποῖαι διαφέρουν τόσον ὀλίγον, ὅσον θέλομεν, θὰ διαφέρουν μεταξύ των κατὰ μίαν ποσότητα, ἡ ὁποία τείνει πρὸς τὸ μηδὲν καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ἴσοι. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$\frac{AB}{B\Gamma}=\frac{A'B'}{B'\Gamma'}.$$

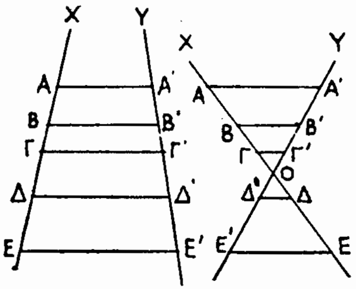
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν δύο τυχοῦσαι εὐθεῖαι....***

386. Παρατήρησις. Ἀπὸ τὴν ἀναλογίαν $\frac{AB}{B\Gamma}=\frac{A'B'}{B'\Gamma'}$, τὴν ὁποίαν εὑρήκαμεν εἰς τὴν § 385 λαμβάνομεν, κατὰ γνωστὴν ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν, τὴν ἀναλογίαν

$$\frac{AB}{AB+B\Gamma}=\frac{A'B'}{A'B'+B'\Gamma'} \quad \text{ἢ} \quad \frac{AB}{A\Gamma}=\frac{A'B'}{A'\Gamma'}.$$

387. Πόρισμα. ***Ἐὰν δύο τυχοῦσαι εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ παραλλήλων εὐθειῶν, ὅλα τὰ τμήματα τὰ ὁριζόμενα ἐπὶ τῆς πρώτης εὐθείας ὑπὸ τῶν παραλλήλων, εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ἀντίστοιχα τμήματα, τὰ ὁριζόμενα ἐπὶ τῆς δευτέρας εὐθείας.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι X καὶ Y, αἱ ὁποῖαι τέμνονται ὑπὸ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν AA′, BB′, ΓΓ′,....



Σχ. 289.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\frac{B\Delta}{B'\Delta'}=\ldots$$

Ἀπόδειξις: Κατὰ τὸ θεώρημα § 385 θὰ εἶναι

$$\frac{AB}{B\Gamma}=\frac{A'B'}{B'\Gamma'}.$$

Ἂς ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν μέσων ὅρων τῆς ἀναλογίας αὐτῆς, θὰ ἔχωμεν $\frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$ (1)

Ὁμοίως ἀπὸ τὴν ἀναλογίαν $\frac{AB}{B\Delta}=\frac{A'B'}{B'\Delta'}$ λαμβάνομεν

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Delta}{B'\Delta'} \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\frac{B\Delta}{B'\Delta'}.$$

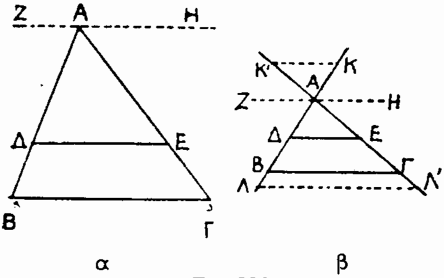
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν δύο τυχοῦσαι εὐθεῖαι....***

Σημ. Ὅταν λέγωμεν ἀντίστοιχα τμήματα, ἐννοοῦμεν τὰ τμήματα τῶν τεμνομένων εὐθειῶν, τὰ ὁποῖα περιέχονται μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων.

388. Θεώρημα τοῦ Θαλῆ(*). ***Κάθε παράλληλος εὐθεῖα πρὸς μίαν ἀπὸ τὰς πλευρὰς ἑνὸς τριγώνου διαιρεῖ τὰς δύο ἄλλας πλευράς του εἰς μέρη ἀνάλογα.***

(*) Ὁ Θαλῆς ὁ Μιλήσιος (637—548 π.Χ.)· ἦτο ἕνας ἀπὸ τοὺς ἑπτὰ σοφοὺς τῆς ἀρχαιότητος. Εἰς τὸν Θαλῆν ἀποδίδονται αἱ πρῶται ἐργασίαι ἐπὶ τῆς ὁμοιότητος.

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ *(Σχ. 290 α)* καὶ ΔΕ μία εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ.



Σχ. 290.

Ὑπόθ.	ΔΕ//ΒΓ
Συμπ.	$\frac{ΑΔ}{ΔΒ} = \frac{ΑΕ}{ΕΓ}$

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\frac{ΑΔ}{ΔΒ} = \frac{ΑΕ}{ΕΓ}$.

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΗ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ. Ἡ ΑΗ θὰ εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὴν ΔΕ.

Ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΓ τέμνονται ὑπὸ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν ΑΗ, ΔΕ, ΒΓ, θὰ εἶναι (§ 385).

$$\frac{ΑΔ}{ΔΒ} = \frac{ΑΕ}{ΕΓ}.$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Κάθε παράλληλος εὐθεῖα. . . .***

389. Παρατηρήσεις: I. Κατὰ τὴν § 386, θὰ εἶναι

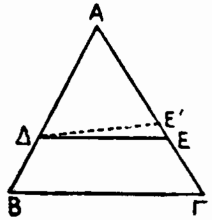
1ον. $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ}, \quad \frac{ΔΒ}{ΑΒ} = \frac{ΕΓ}{ΑΓ}, \quad \frac{ΑΔ}{ΔΒ} = \frac{ΑΕ}{ΕΓ}.$

2ον. $\frac{ΑΔ}{ΑΕ} = \frac{ΔΒ}{ΕΓ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ}.$

II Τὸ θεώρημα τῆς § 388 εἶναι ἀληθὲς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ἡ παράλληλος συναντᾷ τὰς προεκτάσεις τῶν δύο πλευρῶν τοῦ τριγώνου, εἴτε πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς, εἴτε πρὸς τὸ μέρος τῆς βάσεώς του *(Σχ. 290 β)*· δηλ. θὰ εἶναι πάντοτε:

$$\frac{ΑΚ}{ΑΒ} = \frac{ΑΚ'}{ΑΓ}, \quad \frac{ΑΛ}{ΑΒ} = \frac{ΑΛ'}{ΑΓ}.$$

390. Θεώρημα. (*Ἀντίστροφον*). ***Ἐὰν μία εὐθεῖα τέμνῃ δύο πλευρὰς τριγώνου εἰς μέρη ἀνάλογα, ἡ εὐθεῖα αὐτὴ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν τοῦ τριγώνου.***



Σχ. 291.

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ *(Σχ. 291)* καὶ ΔΕ μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία τέμνει τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε ἀντιστοίχως καὶ τοιαύτη, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{ΑΔ}{ΔΒ} = \frac{ΑΕ}{ΕΓ}$ (1)

Ὑπόθ.	$\frac{ΑΔ}{ΔΒ} = \frac{ΑΕ}{ΕΓ}$
Συμπ.	ΔΕ//ΒΓ

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ ΔΕ δὲν ἦτο παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, θὰ ἦτο μία ἄλλη εὐθεῖα, ἔστω ἡ ΔΕ′

Ἐπειδὴ ἡ ΔΕ′ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, θὰ ἔχωμεν (§ 385)

$$\frac{ΑΔ}{ΔΒ}=\frac{ΑΕ'}{Ε'Γ} \qquad (2)$$

Ἀλλὰ ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν καὶ τὴν σχέσιν (1).

Ἀπὸ τὰς (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι

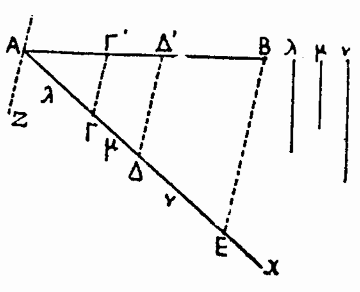
$$\frac{ΑΕ}{ΕΓ}=\frac{ΑΕ'}{Ε'Γ} \quad ἢ \quad \frac{ΕΑ}{ΕΓ}=\frac{Ε'Α}{Ε'Γ} \qquad (3)$$

Ἐπειδὴ τὰ δύο σημεῖα Ε′ καὶ Ε κεῖνται μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ καὶ διαιροῦν τὴν ΑΓ εἰς μέρη, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον, ἕπεται (§ 383) ὅτι τὰ σημεῖα Ε′ καὶ Ε συμπίπτουν· δηλ. ἡ παράλληλος ΔΕ′ συμπίπτει μὲ τὴν ΔΕ καὶ ἑπομένως ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν μία εὐθεῖα τέμνῃ. . . .***

391. Ἐφαρμογαί. Πρόβλημα Ι. ***Νὰ διαιρεθῇ δοθεῖσα εὐθεῖα ΑΒ εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς δοθέντα εὐθύγραμμα τμήματα λ, μ, ν.***

Ἀπὸ τὸ σημεῖον Α τῆς εὐθείας ΑΒ φέρομεν τυχοῦσαν ἡμιευθεῖαν Αx ἐπὶ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν κατὰ σειρὰν τὰ μήκη ΑΓ=λ, ΓΔ=μ, ΔΕ=ν. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΕΒ καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα Γ, Δ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν ΕΒ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Γ′ καὶ Δ′. Τὰ τμήματα ΑΓ′, Γ′Δ′, Δ′Β εἶναι τὰ ζητούμενα.



Σχ. 292.

Πράγματι· αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ Αx τέμνονται ὑπὸ τῶν παραλλήλων ΓΓ′, ΔΔ′, ΕΒ καὶ ἑπομένως ὅλα τὰ τμήματα τῆς μιᾶς εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ἀντίστοιχα τμήματα τῆς ἄλλης· δηλ. θὰ εἶναι

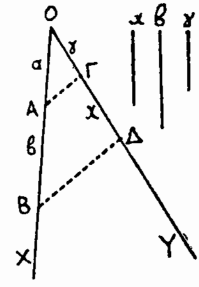
$$\frac{ΑΓ'}{ΑΓ}=\frac{Γ'Δ'}{ΓΔ}=\frac{Δ'Β}{ΔΕ} \quad ἢ \quad \frac{ΑΓ'}{λ}=\frac{Γ'Δ'}{μ}=\frac{Δ'Β}{ν}.$$

Σημ. Ἐὰν θέλωμεν νὰ διαιρέσωμεν μίαν εὐθεῖαν εἰς μέρη ἀνάλογα *ἀριθμῶν* π.χ. τῶν 3, 2, 4, λαμβάνομεν αὐθαιρέτως ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ὡς μονάδα καὶ κατασκευάζομεν τρία εὐθύγραμμα τμή-

ματα ἀντιστοίχως ἴσα μὲ 3 φοράς, 2 φοράς, 4 φορὰς τὴν μονάδα αὐτὴν καὶ ἔπειτα ἐργαζόμεθα, ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω.

392. Πρόβλημα II. ***Νὰ κατασκευασθῇ ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν τριῶν εὐθειῶν α, β, γ.***

Λύσις. Πρέπει νὰ εὕρωμεν ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα x τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{x}$.



Σχ. 293.

Κατασκευάζομεν τυχοῦσαν γωνίαν ΧΟΥ καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΟΧ λαμβάνομεν διαδοχικῶς τμήματα ΟΑ=α καὶ ΑΒ=β καὶ ἐπὶ τῆς ἄλλης πλευρᾶς ΟΥ τμῆμα ΟΓ=γ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΓ καὶ ἀπὸ τὸ Β παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν πλευρὰν ΟΥ εἰς τὸ σημεῖον Δ. Τὸ τμῆμα ΓΔ εἶναι ἡ ζητουμένη τετάρτη ἀνάλογος τῶν α, β, γ.

Πράγματι· ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι παράλληλοι καὶ τέμνουν τὰς εὐθείας ΟΧ καὶ ΟΥ, θὰ εἶναι

$$\frac{ΟΑ}{ΑΒ} = \frac{ΟΓ}{ΓΔ} \quad ἢ \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{x}.$$

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. **968.** (1000). Τέσσαρες παράλληλοι εὐθεῖαι ὁρίζουν ἐπὶ μιᾶς εὐθείας τμήματα 3 ἑκ., 5 ἑκ., 8 ἑκ. Ποῖα μήκη θὰ ὁρίζουν ἐπὶ μιᾶς ἄλλης εὐθείας 60 ἑκ.;

969. (1001). Εἰς ἕνα τραπέζιον ΑΒΓΔ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΕΖ παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ κειμένην μεταξὺ τῶν δύο βάσεων. Ἐὰν εἶναι ΑΔ=10 ἑκ., ΑΕ=8 ἑκ., ΒΓ=15 ἑκ., νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ΒΖ.

970. (1002). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ΑΒ=30 ἑκ., ΒΓ=45 ἑκ. Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Δ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς ΑΒ φέρομεν παράλληλον ΔΕ πρὸς τὴν ΑΓ. Ἐὰν εἶναι ΑΔ=9 ἑκ., νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ τμήματα ΒΕ, ΕΓ.

971. (1003). Δύο εὐθεῖαι x'x καὶ y'y τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Ο. Ἐπὶ τῆς Οx λαμβάνομεν τμῆμα ΟΑ=8 ἑκ., ἐπὶ τῆς Οy ἕνα τμῆμα ΟΒ=2 ἑκ. καὶ ἐπὶ τῆς Οx' ἕνα τμῆμα ΟΑ'=12 ἑκ. Ἀπὸ τὸ Α' φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Οy' εἰς τὸ Β'. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ΟΒ'.

972. (1004). Δύο πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου εἶναι ΑΒ=54 ἑκ. καὶ ΑΓ=63 ἑκ. Ἐπὶ τῆς ΑΒ λαμβάνομεν τμῆμα ΑΔ=40 ἑκ. Ποῖον τμῆμα ΑΕ πρέπει νὰ λάβωμεν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΓΕ οὕτως, ὥστε ἡ εὐθεῖα ΔΕ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ.

Β' Ὁμάς. **973.** (1005). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ ἡ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ τέμνει τὰς ἄλλας πλευράς του εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε, ἡ δὲ ἀπὸ τὸ Ε πα-

ράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι
$$\frac{ΑΔ}{ΒΔ}=\frac{ΒΖ}{ΓΖ}.$$

974. (1006). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὴν διάμεσον ΑΔ καὶ ἔστω Ε τὸ μέσον αὐτῆς. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΒΕ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\frac{ΑΖ}{ΖΓ}=\frac{1}{2}$.

975. (1007). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ· ἀπὸ δύο τυχόντα σημεῖα Δ καὶ Δ′ τῆς πλευρᾶς ΒΓ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ε′. Ἐπίσης ἀπὸ τὰ Δ καὶ Δ′ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΓ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Ζ καὶ Ζ′. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\frac{ΕΕ'}{ΖΖ'}=\frac{ΑΓ}{ΒΓ}$.

976. (1008). Δίδεται μία γωνία xOy. Ἐπὶ τῆς Ox λαμβάνομεν δύο τυχόντα σημεῖα Α καὶ Β (ΟΒ>ΟΑ) καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα αὐτὰ φέρομεν δύο παραλλήλους, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν πλευρὰν Oy εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ· φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΓΒ καὶ ἀπὸ τὸ Δ παράλληλον πρὸς τὴν ΓΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Ox εἰς τὸ σημεῖον Ε. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\overline{ΟΒ}^2=ΟΑ\times ΟΕ$.

977. (1009). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὴν διάμεσον ΑΔ καὶ μίαν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ε, τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ζ καὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Η. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\frac{ΑΗ}{ΑΖ}=\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$.

978. (1010). Ἀπὸ τὸ μέσον Δ τῆς πλευρᾶς ΒΓ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν μίαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Β′ καὶ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Γ′. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\frac{Β'Α}{Β'Β}=\frac{Γ'Α}{Γ'Γ}$.

979. (1011). Εἰς ἕνα τραπέζιον ΑΒΓΔ φέρομεν τὰς διαγωνίους του ΑΓ καὶ ΒΔ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ε. Ἀπὸ τὸ Ε φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΔ καὶ ΒΓ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν βάσιν ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Α′ καὶ Β′. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΑΑ′=ΒΒ′.

Γ′ Ὁμάς. **980.** (1012). Δίδεται ἕνα παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ· ἀπὸ τὸ Γ φέρομεν μίαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία διαιρεῖ τὴν διαγώνιον ΒΔ εἰς δύο μέρη ΒΕ καὶ ΕΔ ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ΒΕ εἶναι τετραπλάσιον τοῦ ἄλλου ΔΕ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ τέμνουσα αὐτὴ διαιρεῖ τὴν ΑΔ εἰς δύο μέρη, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἕνα εἶναι τριπλάσιον τοῦ ἄλλου.

981. (1013). Δίδονται δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′. Ὑποθέτομεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰς κορυφὰς των ἀνὰ δύο τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο, καὶ ὅτι αἱ ΑΒ καὶ Α′Β′, καθὼς καὶ αἱ ΑΓ καὶ Α′Γ′ εἶναι παράλληλοι. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ ΒΓ καὶ Β′Γ′ εἶναι παράλληλοι.

982. (1014). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὴν διάμεσον ΑΔ· ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Α′ τῆς διαμέσου αὐτῆς φέρομεν παραλλήλους Α′Β′ καὶ Α′Γ′ πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν ΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Β′ καὶ Γ′. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ Α′Δ εἶναι διάμεσος τοῦ τριγώνου Α′Β′Γ′.

983. (1015). Ἐὰν ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων ἑνὸς τριγώνου φέρωμεν παράλληλον πρὸς μίαν πλευράν του, ἡ παράλληλος αὐτὴ διαιρεῖ ἑκά-

στην τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του εἰς τμήματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν λόγον 2.

984. (1016). Ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον Ο. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α φέρομεν τὴν διάμετρον ΑΕ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν πλευρὰν ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Δ. Ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν τὰς καθέτους ΔΖ καὶ ΔΗ ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΖΗ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ.

985. (1017). Εἰς ἕνα τυχὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ λαμβάνομεν ἕνα σημεῖον Ε ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΔ. Ἀπὸ τὸ Ε φέρομεν τὴν παράλληλον ΕΖ πρὸς τὴν ΓΔ ἡ ὁποία τέμνει τὴν διαγώνιον ΑΓ εἰς τὸ Ζ καὶ ἔπειτα τὴν παράλληλον ΖΗ πρὸς τὴν ΓΒ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $ΕΑ \times ΒΗ = ΔΕ \times ΑΗ$.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ ΔΒ καὶ ΕΗ εἶναι παράλληλοι.

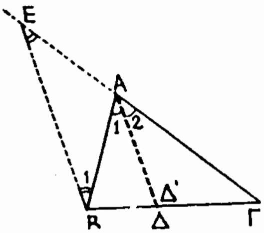
2. Ἰδιότης τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου.

393. Θεώρημα. ***Ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας ἑνὸς τριγώνου τέμνει τὴν ἀπέναντι πλευρὰν εἰς δύο μέρη ἀνάλογα τῶν προσκειμένων εἰς αὐτὰ πλευρῶν τῆς γωνίας.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ *(Σχ. 294)* καὶ ΑΔ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\frac{ΔΒ}{ΔΓ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} \qquad (1)$$



Σχ. 294.

Ἀπόδειξις:

Ὑπόθ.	$Α_1 = Α_2$
Συμπ.	$\frac{ΔΒ}{ΔΓ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ}$

Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Β φέρομεν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν διχοτόμον ΑΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΓΑ εἰς τὸ σημεῖον Ε.

Ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΓΒ καὶ ΓΕ τέμνονται ὑπὸ τῶν παραλλήλων ΑΔ καὶ ΕΒ, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{ΔΒ}{ΔΓ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} \qquad (2)$$

Διὰ νὰ φθάσωμεν ἀπὸ τὴν σχέσιν (2) εἰς τὴν σχέσιν (1) πρέπει νὰ δείξωμεν, ὅτι ΑΕ=ΑΒ, δηλ. πρέπει νὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΕΒ εἶναι ἰσοσκελές.

Πράγματι· ἡ γωνία $Β_1$ εἶναι ἴση μὲ τὴν $Α_1$, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΕΒ καὶ ΑΔ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΒ. Ἀλλὰ καὶ αἱ γωνίαι Ε καὶ $Α_2$ εἶναι ἴσαι, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν

αὐτῶν παραλλήλων, τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΕΓ. Ἀλλὰ αἱ γωνίαι $Α_1$ καὶ $Α_2$ εἶναι ἴσαι, διότι ἡ ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α· ἄρα καὶ αἱ ἴσαι πρὸς αὐτὰς $Β_1$ καὶ Ε θὰ εἶναι ἴσαι. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΑΕΒ εἶναι ἰσοσκελές, διότι αἱ γωνίαι του $Β_1$ καὶ Ε εἶναι ἴσαι· ἄρα θὰ εἶναι ΑΕ=ΑΒ.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (2), τὸ ΑΕ μὲ τὸ ἴσον του ΑΒ καὶ ἔχομεν $\frac{ΔΒ}{ΔΓ}=\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας....***

394. Θεώρημα. *(Ἀντίστροφον).* ***Ἐὰν μία εὐθεῖα ΑΔ,*** *(Σχ. 294)* ***ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, διαιρῇ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν ΒΓ εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε*** $\frac{ΔΒ}{ΔΓ}=\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$, ***ἡ ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α.***

Ὑπόθ.	$\frac{ΔΒ}{ΔΓ}=\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$
Συμπ.	$ΑΔ=διχοτ.\widehat{Α}$

Ὑπόθεσις: Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι

$$\frac{ΔΒ}{ΔΓ}=\frac{ΑΒ}{ΑΓ} \qquad (1)$$

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν ἡ ΑΔ δὲν ἦτο διχοτόμος τῆς γωνίας Α, θὰ ἦτο μία ἄλλη, ἔστω ἡ ΑΔ'· ἐπειδὴ ἡ ΑΔ' εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α, θὰ εἶναι (§ 393) $\frac{Δ'Β}{Δ'Γ}=\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$ (2)

Ἀλλὰ ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν καὶ τὴν ἰσότητα (1). Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι $\frac{ΔΒ}{ΔΓ}=\frac{Δ'Β}{Δ'Γ}$ (3)

Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὴν ἰσότητα (3), τὰ σημεῖα Δ καὶ Δ' διαιροῦν τὴν ΒΓ εἰς δύο μέρη, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον καὶ κεῖνται μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ· ἄρα (§ 383) τὰ Δ καὶ Δ' θὰ συμπίπτουν, ὁπότε ἡ ΑΔ θὰ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν μία εὐθεῖα....***

395. Πρόβλημα. ***Νὰ ὑπολογισθοῦν, συναρτήσει τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, τὰ δύο τμήματα, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ πλευρὰ ΒΓ ὑπὸ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α.***

Ἐφαρμογή: α=5, β=4, γ=6.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ *(Σχ. 294)* καὶ ΑΔ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α. Ἐὰν εἶναι ΒΓ=α, ΓΑ=β, ΑΒ=γ, ζητεῖται νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη ΔΒ καὶ ΔΓ.

Γνωρίζομεν (§ 393), ὅτι $\frac{ΔΒ}{ΔΓ}=\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$ ἢ $\frac{ΔΒ}{ΔΓ}=\frac{γ}{β}$ (1)

Ἂς ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν μέσων ὅρων τῆς ἀναλογίας (1) λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν $\frac{ΒΔ}{γ}=\frac{ΔΓ}{β}$ (2)

Κατὰ γνωστὴν ἰδιότητα τῶν ἴσων λόγων, ἀπὸ τὴν σχέσιν (2) ἔχομεν

$$\frac{ΔΒ}{γ}=\frac{ΔΓ}{β}=\frac{ΔΒ+ΔΓ}{γ+β}=\frac{ΒΓ}{β+γ}=\frac{α}{β+γ} \qquad (3)$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν (3) λαμβάνομεν

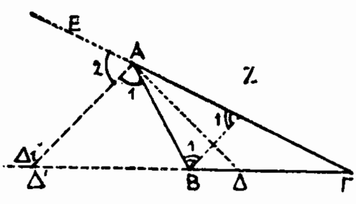
$$\boxed{ΔΒ=\frac{αγ}{β+γ}} \quad \text{καὶ} \quad \boxed{ΔΓ=\frac{αβ}{β+γ}}$$

Ἐφαρμογή. Διὰ α=5, β=4, γ=6, εὑρίσκομεν

$$ΔΒ=\frac{5\cdot6}{4+6}=3, \quad ΔΓ=\frac{5\cdot4}{4+6}=2.$$

396. Θεώρημα. ***Ἡ διχοτόμος ἐξωτερικῆς γωνίας ἑνὸς τριγώνου τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς εἰς ἕνα σημεῖον, τοῦ ὁποίου αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς πλευρᾶς αὐτῆς εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς προσκειμένας πλευρὰς τοῦ τριγώνου αὐτοῦ.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΑΔ′ ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας του Α, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς πλευρᾶς ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Δ′.



Σχ. 295.

Ὑπόθ.	ΑΔ′ διχοτ. $\widehat{ΒΑΕ}$
Συμπ.	$\frac{Δ'Β}{Δ'Γ}=\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\frac{Δ'Β}{Δ'Γ}=\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$ (1)

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Β φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΔ′, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Ἐπειδὴ αἱ ΓΔ′ καὶ ΓΑ τέμνονται ὑπὸ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν ΒΖ καὶ Δ′Α, θὰ εἶναι

$$\frac{Δ'Β}{Δ'Γ}=\frac{ΑΖ}{ΑΓ} \qquad (2)$$

Διὰ νὰ φθάσωμεν ἀπὸ τὴν σχέσιν (2) εἰς τὴν σχέσιν (1) πρέπει νὰ δείξωμεν, ὅτι ΑΖ=ΑΒ, δηλ. πρέπει νὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΖ εἶναι ἰσοσκελές.

Πράγματι· αἱ γωνίαι $Α_1$ καὶ $Β_1$ εἶναι ἴσαι, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΔ′ καὶ ΖΒ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΒ. Ἐπίσης αἱ γωνίαι

A_2 καὶ Z_1 εἶναι ἴσαι, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ΑΔ' καὶ ΖΒ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΓΕ. Ἀλλὰ αἱ γωνίαι A_1 καὶ A_2 εἶναι ἴσαι, διότι ἡ ΑΔ' εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΒΑΕ· ἄρα καὶ αἱ ἴσαι πρὸς αὐτὰς γωνίαι B_1 καὶ Z_1 θὰ εἶναι ἴσαι· ἀλλὰ τότε τὸ τρίγωνον ΑΒΖ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ΑΒ=ΑΖ.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (2) τὸ ΑΖ μὲ τὸ ἴσον του ΑΒ καὶ ἔχομεν $\frac{Δ'B}{Δ'Γ}=\frac{AB}{AΓ}$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἡ διχοτόμος ἐξωτερικῆς. . . .***

397. Παρατήρησις. Ἐὰν Δ καὶ Δ' εἶναι οἱ πόδες τῶν διχοτόμων, ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς, τῆς γωνίας Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, θὰ εἶναι

$$\frac{ΔB}{ΔΓ}=\frac{AB}{AΓ}, \quad \frac{Δ'B}{Δ'Γ}=\frac{AB}{AΓ}.$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις αὐτὰς συνάγομεν, ὅτι $\frac{ΔB}{ΔΓ}=\frac{Δ'B}{Δ'Γ}$, δηλ. οἱ πόδες Δ καὶ Δ' τῶν δύο διχοτόμων εἶναι σημεῖα *συζυγῆ ἁρμονικὰ* πρὸς τὰς κορυφὰς Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

398. Θεώρημα. (*Ἀντίστροφον*). ***Ἐὰν μία εὐθεῖα ΑΔ'*** (*Σχ. 295*) ***ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, συναντᾷ τὴν προέκτασιν τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς ΒΓ εἰς ἕνα σημεῖον Δ', τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{Δ'B}{Δ'Γ}=\frac{AB}{AΓ}$, ἡ ΑΔ' εἶναι διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α.***

Ὑπόθ.	$\frac{Δ'B}{Δ'Γ}=\frac{AB}{AΓ}$
Συμπ.	ΑΔ'=διχοτ.$\widehat{BAE}$

Ὑπόθεσις: Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι

$$\frac{Δ'B}{Δ'Γ}=\frac{AB}{AΓ} \quad (1).$$

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ ΑΔ' εἶναι διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α, δηλ. τῆς γωνίας ΒΑΕ.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν ἡ ΑΔ' δὲν ἦτο διχοτόμος τῆς γωνίας ΒΑΕ, θὰ ἦτο μία ἄλλη, ἔστω ἡ $AΔ_1$. Ἐπειδὴ ἡ $AΔ_1$ εἶναι διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α, θὰ εἶναι (§ 396) $\frac{Δ_1B}{Δ_1Γ}=\frac{AB}{AΓ}$ (2)

Ἀλλὰ ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν καὶ τὴν ἰσότητα (1). Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι $\frac{Δ'B}{Δ'Γ}=\frac{Δ_1B}{Δ_1Γ}$ (3)

Ἀλλὰ διὰ νὰ ὑφίσταται ἡ σχέσις (3) πρέπει τὰ σημεῖα Δ' καὶ $Δ_1$ νὰ συμπίπτουν, διότι ἕνα, καὶ μόνον ἕνα, σημεῖον ὑπάρχει ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΓΒ, τὸ ὁποῖον διαιρεῖ αὐτὴν κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον (§ 383).

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν μία εὐθεῖα. . . .***

399. Πρόβλημα. ***Νὰ ὑπολογισθοῦν, συναρτήσει τῶν πλευ-***

ρῶν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, τὰ τμήματα ΒΔ' καὶ ΓΔ', τὰ ὁποῖα ὁρίζει ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ, ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α.

Ἔστω ΑΔ' *(Σχ. 295)* ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Γνωρίζομεν (§ 397) ὅτι

$$\frac{\Delta'\Gamma}{\Delta'B} = \frac{A\Gamma}{AB} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\Delta'\Gamma}{\Delta'B} = \frac{\beta}{\gamma} \qquad (1)$$

Ἂν ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν μέσων ὅρων τῆς ἀναλογίας (1) λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν $\frac{\Delta'\Gamma}{\beta} = \frac{\Delta'B}{\gamma}$ (2)

Κατὰ γνωστὴν ἰδιότητα τῶν ἴσων λόγων, ἀπὸ τὴν σχέσιν (2) λαμβάνομεν

$$\frac{\Delta'\Gamma}{\beta} = \frac{\Delta'B}{\gamma} = \frac{\Delta'\Gamma - \Delta'B}{\beta-\gamma} = \frac{B\Gamma}{\beta-\gamma} = \frac{\alpha}{\beta-\gamma} \qquad (3)$$

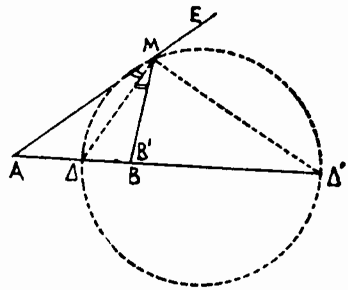
Ἀπὸ τὴν σχέσιν (3) εὑρίσκομεν $\boxed{\Delta'\Gamma = \frac{\alpha\beta}{\beta-\gamma}}$ καὶ $\boxed{\Delta'B = \frac{\alpha\gamma}{\beta-\gamma}}$

400. Θεώρημα. ***Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β εἶναι ἴσος μὲ δοθέντα λόγον k, διάφορον τῆς μονάδος, εἶναι μία περιφέρεια κύκλου.***

Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΑΒ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΜΑ καὶ ΜΒ. Ἐπειδὴ τὸ Μ εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου, θὰ εἶναι

$$\frac{MA}{MB} = k \qquad (1)$$

Φέρομεν τὴν διχοτόμον ΜΔ τῆς ἐσωτερικῆς γωνίας Μ τοῦ τριγώνου ΑΜΒ καὶ τὴν διχοτόμον ΜΔ' τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας ΒΜΕ.



Σχ. 296.

Κατὰ τὸ θεώρημα τῶν διχοτόμων γωνιῶν τριγώνου θὰ εἶναι

$$\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{\Delta' A}{\Delta' B} = \frac{MA}{MB} \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις 1 καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι

$$\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{\Delta' A}{\Delta' B} = \frac{MA}{MB} = k \qquad (3)$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν συνάγομεν, ὅτι καὶ τὰ σημεῖα Δ καὶ Δ', εἶναι σημεῖα τοῦ τόπου καὶ συγχρόνως εἶναι καὶ τὰ συζυγῆ ἁρμονικὰ τῶν Α καὶ Β μὲ λόγον k.

Ἐπειδὴ αἱ ΜΔ καὶ ΜΔ' εἶναι διχοτόμοι τῶν δύο ἐφεξῆς παρα-

πληρωματικῶν γωνιῶν ΑΜΒ καὶ ΒΜΕ, ἕπεται ὅτι αἱ διχοτόμοι αὗται εἶναι κάθετοι μεταξύ των. Ὥστε ἡ γωνία ΔΜΔ′ εἶναι ὀρθή

Ἐπειδὴ ἡ ΔΔ′ φαίνεται ἀπὸ τὸ Μ ὑπὸ γωνίαν ὀρθήν, τὸ Μ κεῖται ἐπὶ περιφερείας κύκλου, ἡ ὁποία γράφεται μὲ διάμετρον τὴν ΔΔ′. Ἡ ΔΔ′ εἶναι σταθερὰ κατὰ τὴν θέσιν καὶ τὸ μέγεθος, διότι συνδέει τὰ συζυγῆ ἁρμονικὰ σημεῖα Δ καὶ Δ′ τῶν δοθέντων Α καὶ Β μὲ λόγον k.

Ὥστε τὸ τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ τόπου κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία γράφεται μὲ διάμετρον τὴν ΔΔ′.

Ἀντιστρόφως. Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι κάθε σημεῖον Μ *(Σχ. 296)* τῆς περιφερείας αὐτῆς εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου· δηλ. θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\frac{MA}{MB}=k.$$

Φέρομεν τὰς εὐθείας ΜΔ καὶ ΜΔ′. Ἡ γωνία ΔΜΔ′ εἶναι ὀρθή, διότι εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμιπεριφέρειαν· ἄρα αἱ ΜΔ καὶ ΜΔ′ εἶναι κάθετοι μεταξύ των.

Ἐὰν αἱ γωνίαι ΑΜΔ καὶ ΔΜΒ εἶναι ἴσαι, τότε ἡ ΜΔ θὰ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΜΒ καὶ ἑπομένως καὶ ἡ κάθετος πρὸς αὐτὴν ΜΔ′ θὰ εἶναι διχοτόμος τῆς παραπληρωματικῆς γωνίας ΒΜΕ. Ἐπειδὴ αἱ ΜΔ καὶ ΜΔ′ εἶναι διχοτόμοι, ἐσωτερικὴ καὶ ἐξωτερική, τῆς γωνίας Μ τοῦ τριγώνου ΑΜΒ, θὰ εἶναι (§ 393 καὶ 396)

$$\frac{\Delta A}{\Delta B}=\frac{\Delta' A}{\Delta' B}=\frac{MA}{MB}=k$$

καὶ ἑπομένως τὸ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς περιφερείας εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.

Ἐὰν αἱ γωνίαι ΑΜΔ καὶ ΔΜΒ δὲν εἶναι ἴσαι, φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΜΒ′ οὕτως, ὥστε γων.ΑΜΔ=γων.ΔΜΒ′. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΑΜΔ καὶ ΔΜΒ′ εἶναι ἴσαι, ἡ ΜΔ θὰ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΜΒ′ καὶ ἡ ΜΔ′, ὡς κάθετος ἐπ᾽ αὐτήν, θὰ εἶναι διχοτόμος τῆς παραπληρωματικῆς γωνίας. Ἀλλὰ τότε τὰ σημεῖα Α καὶ Β′ θὰ εἶναι συζυγῆ ἁρμονικὰ τῶν Δ καὶ Δ′· ἄρα τὸ σημεῖον Β′ συμπίπτει μὲ τὸ Β. Ἐπειδὴ αἱ ΜΔ καὶ ΜΔ′ εἶναι διχοτόμοι τῆς γωνίας ΑΜΒ καὶ τῆς παραπληρωματικῆς της, θὰ εἶναι

$$\frac{MA}{MB}=\frac{\Delta A}{\Delta B}=\frac{\Delta' A}{\Delta' B}=k.$$

Ὥστε τὸ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς περιφερείας αὐτῆς εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι : ***Ὁ γεωμετρικὸς τόπος. . . .***

Ἡ περιφέρεια αὐτή, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὰ συζυγῆ ἁρμονικὰ Δ καὶ Δ′ τῶν Α καὶ Β λέγεται ***Ἀπολλώνιος περιφέρεια.***

Σημ. Ἐὰν ὁ δοθεὶς λόγος k εἶναι ἴσος μὲ τὴν μονάδα 1, τὸ σημεῖον Δ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΒ καὶ τὸ σημεῖον Δ′ ἀφανίζεται εἰς τὸ ἄπειρον. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ γεωμετρικὸς τόπος εἶναι ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ.

401. Ὑπολογισμὸς τῆς ἀκτῖνος τοῦ Ἀπολλωνίου κύκλου. Ὑποθέτομεν ὅτι $MA>MB$ *(Σχ. 296)* καὶ ὅτι $k>1$. Ἀπὸ τὴν σχέσιν

$$\frac{MA}{MB}=\frac{\Delta A}{\Delta B}=\frac{\Delta' A}{\Delta' B}=k, \text{ λαμβάνομεν } \frac{\Delta A}{k}=\frac{\Delta B}{1} \text{ καὶ } \frac{\Delta' A}{k}=\frac{\Delta' B}{1}.$$

Ἀπὸ αὐτὰς λαμβάνομεν

$$\frac{\Delta A}{k}=\frac{\Delta B}{1}=\frac{\Delta A+\Delta B}{k+1}=\frac{AB}{k+1}, \text{ ἄρα } \Delta A=\frac{k\cdot AB}{k+1}$$

$$\frac{\Delta' A}{k}=\frac{\Delta' B}{1}=\frac{\Delta' A-\Delta' B}{k-1}=\frac{AB}{k-1}, \text{ ἄρα } \Delta' A=\frac{k\cdot AB}{k-1}.$$

Ἐὰν θέσωμεν $AB=\alpha$, θὰ εἶναι $\Delta A=\dfrac{\alpha k}{k+1}$ καὶ $\Delta' A=\dfrac{\alpha k}{k-1}$.

Ἄρα θὰ εἶναι $\Delta\Delta'=\Delta' A-\Delta A=\dfrac{\alpha k}{k-1}-\dfrac{\alpha k}{k+1}=\dfrac{2\alpha k}{k^2-1}$.

Ἐπειδὴ $\Delta\Delta'=2R$ ἕπεται, ὅτι $R=\dfrac{\alpha k}{k^2-1}$.

Ἀσκήσεις

Α′ Ὁμάς. **986.** (1018). Ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ αἱ πλευραί του εἶναι ΑΒ=12 ἑκ. ΑΓ=14 ἑκ. καὶ ΒΓ=13 ἑκ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ τμήματα εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ ΒΓ ὑπὸ τῶν διχοτόμων, ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς, τῆς γωνίας Α.

987. (1019). Δίδεται ἕνας κύκλος Ο διαμέτρου ΑΒ καὶ μία χορδὴ ΓΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου φέρομεν τὰς χορδὰς ΜΔ καὶ ΜΓ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ καὶ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ εἶναι συζυγῆ ἁρμονικὰ πρὸς τὰ Α καὶ Β.

988. (1020). Δίδεται ἡμιπεριφέρεια Ο διαμέτρου ΑΒ. Εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας Αx καὶ Βy τῆς ἡμιπεριφερείας. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς ἡμιπεριφερείας φέρομεν τρίτην ἐφαπτομένην αὐτῆς, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Αx εἰς τὸ Γ, τὴν Βy εἰς τὸ Δ καὶ τὴν ΑΒ προεκτεινομένην εἰς τὸ σημεῖον Ε· νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τά σημεῖα Μ καὶ Ε εἶναι συζυγῆ ἁρμονικὰ τῶν Γ καὶ Δ.

989. (1021). Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Σ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς κύκλου Ο φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ΣΑ καὶ ΣΒ καὶ τὴν διάμετρον ΣΓΔ, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ Σ. Ἐὰν Ε εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῆς διαμέτρου αὐτῆς καὶ τῆς χορδῆς ΑΒ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Σ καὶ Ε εἶναι συζυγῆ ἁρμονικὰ πρὸς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ.

Β′ Ὁμάς. **990.** (1022). Τέσσαρες ἡμιευθεῖαι ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ σχηματίζουν διαδοχικὰς γωνίας 45°. Τέμνομεν αὐτὰς μὲ μίαν εὐθεῖαν ΑΒΓΔ οὕτως, ὥστε νὰ σχηματίζεται ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΟΑΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\overline{AB}^2=A\Delta\times B\Gamma$.

991. (1023). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὴν διάμεσον ΑΔ καὶ τὰς διχοτόμους ΔΕ καὶ ΔΖ τῶν γωνιῶν ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ, αἱ ὁποῖοι τέμνουν τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ.

992. (1024). Εἰς ἕνα κύκλον Ο φέρομεν μίαν διάμετρον ΑΒ καὶ μίαν χορδὴν ΓΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ. Ἐπὶ τῆς ΓΔ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Ε καὶ φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΕ καὶ ΒΕ, αἱ ὁποῖαι προεκτεινόμεναι τέμνουν τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου Ο εἰς τὰ σημεῖα Ζ καὶ Η ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΓΗΔΖ ἔχει δύο διαδοχικὰς πλευράς, τῶν ὁποίων ὁ λόγος εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

993. (1025). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου διαιρεῖ κάθε διχοτόμον εἰς δύο μέρη, τῶν ὁποίων ὁ λόγος εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῆς πλευρᾶς ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται ὁ πούς τῆς διχοτόμου πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

994. (1026). Ἐὰν Δ, Ε, Ζ εἶναι οἱ πόδες τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\frac{ΔΒ}{ΔΓ} \times \frac{ΕΓ}{ΕΑ} \times \frac{ΖΑ}{ΖΒ} = 1.$$

995. (1027). Ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου Μ μιᾶς περιφερείας ἀπὸ δύο σημεῖα Α καὶ Β, τὰ ὁποῖα εἶναι συζυγῆ ἁρμονικὰ πρὸς μίαν διάμετόν της ΔΔ′, εἶναι σταθερός, ὅταν τὸ Μ γράφῃ τὴν περιφέρειαν αὐτήν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

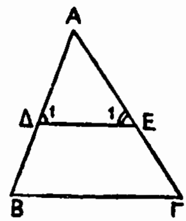
ΟΜΟΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ - ΟΜΟΙΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

1. Γενικότητες

402. Ὁρισμοί. Ἔστω ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ *(Σχ. 297)* καὶ ἡ εὐθεῖα ΔΕ, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ.

Ἐπειδὴ ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, θὰ εἶναι:

$$\widehat{A}=\widehat{A},\quad \widehat{\Delta}_1=\widehat{B},\quad \widehat{E}_1=\widehat{\Gamma}.$$



Σχ. 297.

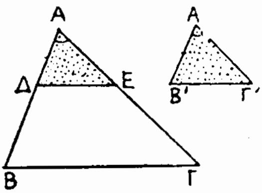
Ἐπειδὴ ἡ ΔΕ συνδέει τὰ μέσα δύο πλευρῶν τοῦ τριγώνου, θὰ εἶναι:

$$\frac{A\Delta}{AB}=\frac{1}{2},\quad \frac{AE}{A\Gamma}=\frac{1}{2},\quad \frac{\Delta E}{B\Gamma}=\frac{1}{2} \quad \text{ἤ}$$

$$\frac{A\Delta}{AB}=\frac{AE}{A\Gamma}=\frac{\Delta E}{B\Gamma}=\frac{1}{2} \qquad (2)$$

Τὰ τρίγωνα ΑΔΕ καὶ ΑΒΓ, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ μεταξὺ τῶν πλευρῶν των ἰσχύει ἡ σχέσις (2), λέγονται ***ὅμοια*** καὶ λέγομεν, ὅτι ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητός των εἶναι $\frac{1}{2}$.

Αἱ πλευραί, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν λέγονται ***ὁμόλογοι πλευραί.***



Σχ. 298.

Γενικῶς: ***Δύο τρίγωνα λέγονται ὅμοια,*** *ὅταν ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τὰς ὁμολόγους πλευράς των ἀναλόγους.*

Λόγος ὁμοιότητος *δύο ὁμοίων τριγώνων λέγεται ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων πλευρῶν των.*

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν αὐτὸν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' *(Σχ. 298)* θὰ εἶναι ὅμοια, ἐὰν εἶναι:

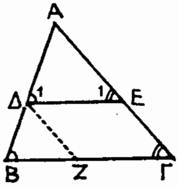
$$\widehat{A}=\widehat{A'},\quad \widehat{B}=\widehat{B'},\quad \widehat{\Gamma}=\widehat{\Gamma'}$$

καὶ $$\frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\frac{\Gamma A}{\Gamma' A'}=k$$

ὅπου k παριστάνει τὸν ***λόγον τῆς ὁμοιότητός των.***

403. Θεώρημα τοῦ Θαλῆ. ***Κάθε παράλληλος πρὸς μίαν πλευρὰν ἑνὸς τριγώνου ὁρίζει ἕνα δεύτερον τρίγωνον, ὅμοιον πρὸς τὸ πρῶτον***

Ὑπόθεσις: Ἔστω ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ *(Σχ. 299)* καὶ ΔΕ μία παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ.



Σχ. 299.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΕ εἶναι ὅμοια.

Ὑπόθ.	ΔΕ//ΒΓ
Συμπ.	τρίγωνα ΑΔΕ καὶ ΑΒΓ ὅμοια

Ἀπόδειξις: Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι τὰ δύο αὐτὰ τρίγωνα ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τὰς ὁμολόγους πλευράς των ἀναλόγους.

1ον. ***Αἱ γωνίαι των εἶναι ἴσαι μία πρὸς μίαν.*** Πράγματι· ἡ γωνία Α εἶναι κοινή. Αἱ γωνίαι Β καὶ Δ_1 εἶναι ἴσαι, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ΒΓ καὶ ΔΕ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΒ. Δι' ὅμοιον λόγον εἶναι $\widehat{\Gamma}=\widehat{E}_1$.

2ον. ***Αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ των εἶναι ἀνάλογοι.*** Πράγματι· ἐπειδὴ ἡ ΔΕ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{A\Delta}{AB}=\frac{AE}{A\Gamma} \qquad (1)$$

Μένει τώρα νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι οἱ δύο αὐτοὶ λόγοι (1) εἶναι ἴσοι μὲ τὸν λόγον $\frac{\Delta E}{B\Gamma}$. Πρὸς τοῦτο ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν τὴν ΔΖ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ζ. Ἐπειδὴ ἡ ΔΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{A\Delta}{AB}=\frac{\Gamma Z}{\Gamma B} \qquad (2)$$

Ἀλλὰ ΓΖ = ΕΔ, ὡς ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου ΔΖΓΕ. Ἂν λοιπὸν ἀντικαταστάσωμεν εἰς τὴν σχέσιν (2) τὸ ΓΖ μὲ τὸ ἴσον του ΕΔ, θὰ ἔχωμεν $\frac{A\Delta}{AB}=\frac{E\Delta}{\Gamma B}$ ἢ $\frac{A\Delta}{AB}=\frac{\Delta E}{B\Gamma}$ (3)

Ἀπὸ τὰς σχέσεις (1) καὶ (3) συνάγομεν, ὅτι

$$\frac{A\Delta}{AB}=\frac{\Delta E}{B\Gamma}=\frac{AE}{A\Gamma}.$$

Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΑΒΓ καὶ ΑΔΕ ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τὰς ὁμολόγους πλευράς των ἀναλόγους· ἄρα εἶναι ὅμοια.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Κάθε παράλληλος. . . .***

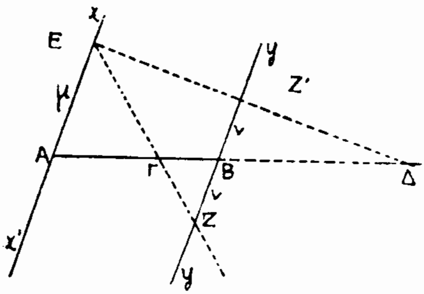
Παρατηρήσεις: 1η. Τὸ προηγούμενον θεώρημα δεικνύει τὴν *ὕπαρξιν ὁμοίων τριγώνων.*

2α. Μεταθέτοντες τὴν εὐθεῖαν ΔΕ παραλλήλως πρὸς ἑαυτήν, λαμβάνομεν μίαν ἀπειρίαν τριγώνων ὁμοίων πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

3η. Κάθε τρίγωνον ἴσον πρὸς τὸ ΑΔΕ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

404. Ἐφαρμογή. Πρόβλημα. ***Νὰ κατασκευασθοῦν τὰ συζυγῆ ἁρμονικὰ σημεῖα τὰ ὁποῖα διαιροῦν μίαν εὐθεῖαν ΑΒ κατὰ δοθέντα λόγον $\frac{\mu}{\nu}$.***

Ἀπὸ τὰ ἄκρα Α καὶ Β *(Σχ. 300)* τῆς δοθείσης εὐθείας φέρομεν δύο τυχούσας παραλλήλους Ax καὶ By. Ἐπὶ τῆς πρώτης λαμβάνομεν τμῆμα ΑΕ=μ καὶ ἐπὶ τῆς δευτέρας δύο τμήματα ΒΖ = ΒΖ′=ν μὲ ἀντίθετον φοράν. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΕΖ καὶ ΕΖ′, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ. Τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ εἶναι τὰ ζητούμενα σημεῖα.



Σχ. 300.

Πράγματι· τὰ τρίγωνα ΑΓΕ καὶ ΓΖΒ εἶναι ὅμοια, διότι ἡ ΒΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΕ· ἄρα θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\Gamma A}{\Gamma B}=\frac{AE}{BZ}=\frac{\mu}{\nu} \qquad (1)$$

Ὁμοίως ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΔΑΕ καὶ ΔΒΖ′ ἔχομεν

$$\frac{\Delta A}{\Delta B}=\frac{AE}{BZ'}=\frac{\mu}{\nu} \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι

$$\frac{\Gamma A}{\Gamma B}=\frac{\Delta A}{\Delta B}=\frac{\mu}{\nu}.$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν συνάγομεν, ὅτι τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ εἶναι τὰ ζητούμενα συζυγῆ ἁρμονικὰ τῶν Α καὶ Β μὲ λόγον $\frac{\mu}{\nu}$.

Ἀσκήσεις

***Α′ Ὁμάς.* 996.** (1028). Αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι : ΑΒ=45 ἑκ., ΒΓ=50 ἑκ., ΑΓ=64 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ ἑνὸς ἄλλου τριγώνου Α′Β′Γ′, ὁμοίου πρὸς τὸ πρῶτον, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ πλευρὰ Α′Β′, ἡ ὁμόλογος τῆς ΑΒ, εἶναι 18 ἑκ.

997. *(1029)* Αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ΑΒ=4 ἑκ., ΒΓ=5 ἑκ.,

ΓΑ=7 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου, ὁμοίου πρὸς τὸ ΑΒΓ καὶ τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι 36 ἑκ.

998. (1030). Ἂν γνωρίζωμεν τὰς τέσσαρας πλευρὰς ἑνὸς τραπεζίου, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ἀπὸ τὴν προέκτασιν τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του.

Β' Ὁμάς. **999.** (1031). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ προεκτείνομεν τὰς πλευράς του ΑΒ καὶ ΑΓ κατὰ μήκη ΒΔ καὶ ΓΕ ἴσα. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΔΕ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΒΓ εἰς τὸ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\frac{ΑΒ}{ΑΓ}=\frac{ΕΖ}{ΔΖ}$.

1000. (1032). Δίδεται μία γωνία xOy ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα, δύο σημεῖα Α καὶ Α' ἐπὶ τῆς Ox καὶ δύο σημεῖα Β καὶ Β' ἐπὶ τῆς Oy. Ἐὰν εἶναι $\frac{Α'Β'}{ΑΒ}=\frac{ΟΑ'}{ΟΑ}$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα Α'Β' εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ.

Γ' Ὁμάς. **1001.** (1033). Δίδεται μία γωνία xOy καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Ox, (ΟΒ>ΟΑ). Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς Oy ἕνα σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε ἡ ΜΑ νὰ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΟΜΒ.

1002 (1034). Δύο δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς δοθείσης εὐθείας xy. Ἕνα τμῆμα ΜΝ=λ ὀλισθαίνει ἐπὶ τῆς εὐθείας xy· Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τοῦ τμήματος αὐτοῦ, ἵνα εἶναι $\frac{ΑΜ}{ΒΝ}=\frac{μ}{ν}$, ὅπου μ καὶ ν εἶναι δοθέντα μήκη.

1003. (1035). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας xy λαμβάνομεν τρία σημεῖα Α, Β, Γ (τὸ Β κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ). Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων, ἀπὸ τὰ ὁποῖα βλέπομεν τὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΒΓ ὑπὸ ἴσας γωνίας.

1004. (1036). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν ΒΓ=α, τὸ ὕψος ΑΔ=$υ_α$ καὶ τὸν λόγον $\frac{ΑΒ}{ΑΓ}=\frac{μ}{ν}$ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του.

2. Περιπτώσεις ὁμοιότητος τριγώνων

405. Ὁρισμός. Διὰ νὰ εἶναι δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' ὅμοια, πρέπει, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων, νὰ πληροῦνται οἱ κάτωθι ***πέντε ὅροι***:

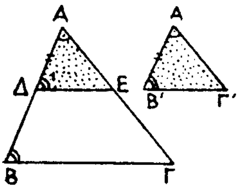
$$\widehat{Α}=\widehat{Α'},\quad \widehat{Β}=\widehat{Β'},\quad \widehat{Γ}=\widehat{Γ'}$$

$$\frac{ΑΒ}{Α'Β'}=\frac{ΒΓ}{Β'Γ'}=\frac{ΓΑ}{Γ'Α'}.$$

Τὰ κατωτέρω θεωρήματα, τὰ ὁποῖα λέγονται ***περιπτώσεις ὁμοιότητος τῶν τριγώνων***, ἔχουν σκοπὸν νὰ μᾶς δείξουν, ὅτι εἰς μερικὰς περιπτώσεις καὶ ***δύο*** μόνον ἐκ τῶν πέντε τούτων ὅρων, ἂν πληροῦνται, εἶναι ἀρκετοὶ διὰ νὰ εἶναι δύο τρίγωνα ὅμοια, δηλ. διὰ νὰ πληροῦνται καὶ οἱ ὑπόλοιποι τρεῖς ὅροι.

406. Περίπτωσις I. Θεώρημα. ***Δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ὅταν ἔχουν δύο γωνίας ἴσας μίαν πρὸς μίαν.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ', τὰ ὁποῖα ἔχουν ἐξ ὑποθέσεως: $\widehat{A}=\widehat{A}'$, $\widehat{B}=\widehat{B}'$.



Σχ. 301.

Ὑπόθ.	$\widehat{A}=\widehat{A}'$ $\widehat{B}=\widehat{B}'$
Συμπ.	τρ.ΑΒΓ ὅμοιον πρὸς τριγ.Α'Β'Γ'

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ὅμοια.

Ἀπόδειξις: Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ λαμβάνομεν ἕνα τμῆμα ΑΔ=Α'Β' καὶ ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ε.

Ἐπειδὴ ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, τὸ τρίγωνον ΑΔΕ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ (§ 403).

Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΑΔΕ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας ἴσας μίαν πρὸς μίαν· δηλ. ἔχουν: ΑΔ=Α'Β', ἐκ κατασκευῆς, $\widehat{A}=\widehat{A}'$ ἐξ ὑποθέσεως καὶ $\widehat{\Delta_1}=\widehat{B}'$, ὡς ἴσας πρὸς τὴν Β· πράγματι αἱ γωνίαι Δ_1 καὶ Β εἶναι ἴσαι, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς τῶν παραλλήλων ΔΕ καὶ ΒΓ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΒ, αἱ δὲ γωνίαι Β' καὶ Β ἴσαι ἐξ ὑποθέσεως.

Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΑΔΕ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ, ὅπως ἐδείχθη ἀνωτέρω, ἄρα καὶ τὸ ἴσον του τρίγωνον Α'Β'Γ' εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια. . . .***

407. Πορίσματα. I. ***Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ὅταν ἔχουν μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην.***

Τὰ ὀρθογώνια αὐτὰ τρίγωνα ἔχουν καὶ τὰς ὀρθὰς γωνίας των ἴσας· ἄρα εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν δύο γωνίας ἴσας μίαν πρὸς μίαν.

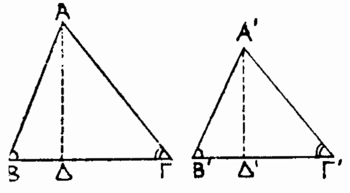
II. ***Δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην εἶναι ὅμοια.***

Πράγματι· ἐὰν ἡ ἴση γωνία εἶναι μία ἀπὸ τὰς παρὰ τὴν βάσιν γωνίας, τὰ δύο τρίγωνα ἔχουν δύο γωνίας ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ ἑπομένως εἶναι ὅμοια.

Ἐὰν ἡ ἴση γωνία εἶναι ἡ γωνία τῆς κορυφῆς, τὸ ἄθροισμα τῶν

παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν του εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὰ δύο τρίγωνα· ἑπομένως αἱ γωνίαι των εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι, ὡς ἡμίση ἴσων ἀθροισμάτων, ὁπότε πάλιν τὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια.

III. ***Ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων ὑψῶν δύο ὁμοίων τριγώνων εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων.***



Σχ. 302.

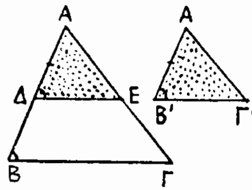
Ἔστωσαν τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ καὶ ΑΔ, Α΄Δ΄ δύο ὁμόλογα ὕψη των. Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\frac{ΑΔ}{Α'Δ'} = \frac{ΑΒ}{Α'Β'}.$$

Πράγματι· τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ καὶ Α΄Δ΄Β΄ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν ἐξ ὑποθέσεως τὰς ὀξείας γωνίας Β καὶ Β΄ ἴσας καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι $\frac{ΑΔ}{Α'Δ} = \frac{ΑΒ}{Α'Β'}$.

408. Περίπτωσις ΙΙ. Θεώρημα. ***Δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ὅταν ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ δύο ἀναλόγων πλευρῶν.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ *(Σχ. 303)*,



Σχ. 303.

Ὑπόθ.	$\widehat{Α} = \widehat{Α'}$ $\frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{ΑΓ}{Α'Γ'}$
Συμπ.	τρ.ΑΒΓ ὅμοιον πρὸς τρ.Α΄Β΄Γ΄

τὰ ὁποῖαι ἔχουν ἐξ ὑποθέσεως:

$$\widehat{Α} = \widehat{Α'} \quad καὶ \quad \frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{ΑΓ}{Α'Γ'} \qquad (1)$$

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ὅμοια.

Ἀπόδειξις: Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ λαμβάνομεν ἕνα τμῆμα ΑΔ=Α΄Β΄ καὶ ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ε.

Ἐπειδὴ ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, τὸ τρίγωνον ΑΔΕ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ.

Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΔΕ καὶ Α΄Β΄Γ΄ εἶναι ἴσα.

Τὰ τρίγωνα αὐτὰ ἔχουν: $\widehat{Α} = \widehat{Α'}$, ἐξ ὑποθέσεως, ΑΔ=Α΄Β΄, ἐκ κατασκευῆς. Ἐπειδὴ ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, θὰ εἶναι

$$\frac{AB}{A\Delta}=\frac{A\Gamma}{AE} \quad \text{ἢ} \quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{A\Gamma}{AE} \qquad (2)$$

Ἀλλὰ ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν καὶ τὴν ἰσότητα (1)· ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι $\frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}=\frac{A\Gamma}{AE}$.

Ἐπειδὴ οἱ λόγοι αὐτοὶ εἶναι ἴσοι καὶ ἔχουν τοὺς ἀριθμητάς των ἴσους θὰ ἔχουν καὶ τοὺς παρονομαστάς των ἴσους, δηλ. θὰ εἶναι

$$AE=A'\Gamma'.$$

Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΑΔΕ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας, ΑΔ=Α'Β', ΑΕ=Α'Γ', καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας γωνίας Α καὶ Α' ἴσας.

Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΑΔΕ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ, ὅπως ἐδείχθη ἀνωτέρω· ἄρα καὶ τὸ ἴσον του Α'Β'Γ' θὰ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια. . . .***

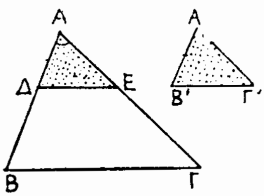
409. Πόρισμα. ***Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ὅταν αἱ κάθετοι πλευραί των εἶναι ἀνάλογοι.***

Πράγματι· τὰ τρίγωνα αὐτὰ ἔχουν καὶ τὰς γωνίας, αἱ ὁποῖαι περιέχονται ὑπὸ τῶν καθέτων πλευρῶν ἴσας, ὡς ὀρθάς· ἄρα εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην, περιεχομένην ὑπὸ πλευρῶν ἀναλόγων.

410. Περίπτωσις III. Θεώρημα. ***Δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ὅταν ἔχουν τὰς πλευράς των ἀντιστοίχως ἀναλόγους.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' *(Σχ. 304)*, τὰ ὁποῖα ἔχουν

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\frac{\Gamma A}{\Gamma'A'} \qquad 1$$



Σχ. 304.

Ὑπόθ.	$\frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\frac{\Gamma A}{\Gamma'A'}$
Συμπ.	τρ.ΑΒΓ ὅμοιον πρὸς τρ.Α'Β'Γ'

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ὅμοια.

Ἀπόδειξις: Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ λαμβάνομεν τμῆμα ΑΔ=Α'Β' καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον Δ φέρομεν τὴν ΔΕ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ σημεῖον Ε.

Ἐπειδὴ ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, τὸ τρίγωνον ΑΔΕ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ (§ 405).

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΕ εἶναι ομοια, θὰ εἶναι

$$\frac{AB}{A\Delta}=\frac{B\Gamma}{\Delta E}=\frac{\Gamma A}{EA} \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΑΔ=Α'Β', ἡ σχέσις αὐτὴ γράφεται

$$\frac{ΑΒ}{Α'Β'}=\frac{ΒΓ}{ΔΕ}=\frac{ΓΑ}{ΕΑ} \qquad (3)$$

Ἀλλὰ ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν καὶ τὴν σχέσιν (1).

Ἐπειδὴ οἱ πρῶτοι λόγοι τῶν σχέσεων (1) καὶ (3) εἶναι ἴσοι, θὰ εἶναι ἴσοι καὶ οἱ ἄλλοι των λόγοι· δηλ. θὰ εἶναι

$$\frac{ΒΓ}{Β'Γ'}=\frac{ΓΑ}{Γ'Α'}=\frac{ΒΓ}{ΔΕ}=\frac{ΓΑ}{ΕΑ}$$

ἢ $$\frac{ΒΓ}{Β'Γ'}=\frac{ΒΓ}{ΔΕ} \quad (4) \quad καὶ \quad \frac{ΓΑ}{Γ'Α'}=\frac{ΓΑ}{ΕΑ} \qquad (5)$$

Ἐπειδὴ οἱ ἴσοι λόγοι (4) ἔχουν τοὺς ἀριθμητάς των ἴσους, θὰ ἔχουν ἴσους καὶ τοὺς παρονομαστάς των· δηλ. θὰ εἶναι Β'Γ'=ΔΕ.

Ὁμοίως ἀπὸ τοὺς ἴσους λόγους (5) εὑρίσκομεν, ὅτι Γ'Α'=ΕΑ.

Τὰ τρίγωνα ΑΔΕ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν καὶ τὰς τρεῖς πλευράς των ἴσας μίαν πρὸς μίαν· δηλ. ἔχουν ΑΔ=Α'Β' ἐκ κατασκευῆς, ΔΕ=Β'Γ', ΑΕ=Α'Γ', ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω.

Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΑΔΕ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἄρα καὶ τὸ ἴσον του Α'Β'Γ' εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Δύο τρίγωνα εἶναι. . . .***

411. Θεώρημα. ***Δύο τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους μίαν πρὸς μίαν ἢ καθέτους, μίαν πρὸς μίαν, εἶναι ὅμοια.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ', τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ἀντιστοίχως παραλλήλως ἢ ἀντιστοίχως καθέτους πρὸς τὰς Α'Β', Β'Γ', Γ'Α'.

Ὑπόθ.	*1ον.*	ΑΒ//Α'Β' ΒΓ//Β'Γ' ΓΑ//Γ'Α'
	2ον.	ΑΒ⊥Α'Β' ΒΓ⊥Β'Γ' ΓΑ⊥Γ'Α'
Συμπ.		τρ.ΑΒΓ ὅμοιον πρὸς τρ.Α'Β'Γ'

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ὅμοια.

Ἀπόδειξις: Γνωρίζομεν, ὅτι δύο γωνίαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους μίαν πρὸς μίαν, ἢ καθέτους μίαν πρὸς μίαν, εἶναι ἴσαι ἢ παραπληπληρωματικαί. Ὥστε αἱ γωνίαι τῶν δύο τριγώνων νὰ εἶναι:

1ον. Εἴτε Α+Α'=2 ὀρθ., Β+Β'=2 ὀρθ., Γ+Γ'=2 ὀρθ.

2ον. Εἴτε Α=Α', Β+Β'=2 ὀρθ., Γ+Γ'=2 ὀρθ.

3ον. Εἴτε Α=Α', Β=Β' καὶ συνεπῶς Γ=Γ'.

Ἡ πρώτη ὑπόθεσις θὰ ἔδιδε, ὡς ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν δύο τριγώνων 6 ὀρθὰς καὶ ἑπομένως ἡ ὑπόθεσις αὐτὴ ἀποκλείεται, διότι

τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν δύο τριγώνων εἶναι ἴσον μὲ 4 ὀρθάς.

Ἡ δευτέρα ὑπόθεσις θὰ ἔδιδε, ὡς ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν δύο τριγώνων μεγαλύτερον τῶν 4 ὀρθῶν καὶ ἑπομένως καὶ ἡ ὑπόθεσις αὐτὴ ἀποκλείεται.

Ἡ τρίτη ὑπόθεσις εἶναι μόνον παραδεκτή· ἀλλὰ τότε τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' θὰ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Δύο τρίγωνα, τὰ ὁποῖα. . . .***

Σημ. Εἰς τὰ τρίγωνα αὐτά, ὁμόλογοι πλευραὶ εἶναι αἱ παράλληλοι ἢ αἱ κάθετοι πλευραί των.

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. **1005.** (1037). Ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος ἑνὸς τριγώνου εἶναι 7,4 μ. καὶ 6,2 μ. Ἐὰν ἡ ὁμόλογος βάσις ὁμοίου τριγώνου εἶναι 4,6 μ. πόσον εἶναι τὸ ὕψος τούτου.

1006. (1038). Δίδονται τὰ μήκη Β καὶ β τῶν βάσεων τραπεζίου καὶ τὸ ὕψος του υ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ σχηματιζομένου τριγώνου ἀπὸ τὴν προέκτασιν τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν τοῦ τραπεζίου. Ἐφαρμογή:

$$B=25 \text{ μ.}, \quad \beta=18 \text{ μ.}, \quad \upsilon=12{,}2 \text{ μ.}$$

Β' Ὁμάς. **1007.** (1039). Αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ ἔχουν μήκη 8 μ., 12 μ. καὶ 16 μ. Αἱ πλευραὶ ἑνὸς ἄλλου τριγώνου Α'Β'Γ' ἔχουν μήκη 4 μ., 6 μ. καὶ 8 μ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι ὅμοια.

1008. (1040). Ἐὰν εἰς ὀξυγώνιον τρίγωνον ἀχθοῦν δύο ὕψη του, τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὴν κορυφὴν τὴν τομὴν τῶν ὑψῶν αὐτῶν, εἶναι ὅμοια.

1009. (1041). Ἐὰν ἀχθοῦν αἱ διαγώνιοι τραπεζίου, τὰ τρίγωνα τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὴν κορυφὴν τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων καὶ βάσεις τὰς βάσεις τοῦ τραπεζίου εἶναι ὅμοια.

1010. (1042). Ἐὰν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒ'Γ' εἶναι ὅμοια, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι καὶ τὰ τρίγωνα ΒΑΒ' καὶ ΓΑΓ' εἶναι ὅμοια.

Γ' Ὁμάς. **1011.** (1043). Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α ἑνὸς παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρομεν μίαν τέμνουσαν αὐτοῦ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν διαγώνιον ΒΔ εἰς τὸ Ε, τὴν πλευρὰν ΓΔ εἰς τὸ Ζ καὶ τὴν προέκτασιν τῆς ΒΓ εἰς τὸ Η· νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι

$$\overline{\text{ΕΑ}}^2=\text{ΕΗ}\times\text{ΕΖ}$$

1012. (1044). Δίδεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὕψος ΑΔ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ καὶ ἡ κάθετος ΔΕ ἐπὶ τὴν ΑΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι

$$\overline{\text{ΑΔ}}^2=\text{ΑΓ}\times\text{ΔΕ}.$$

1013. (1045). Ἐὰν εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι διπλασία τῆς ΒΓ καὶ ἐπὶ τῆς ΑΒ ληφθῇ ἕνα σημεῖον Ε τοιοῦτον, ὥστε $\text{ΒΕ}=\frac{1}{2}\text{ΒΓ}$,

νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ γωνίαι ΒΓΕ καὶ ΓΑΒ εἶναι ἴσαι.

1014. (1046). Ἐὰν ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον καὶ ἀπὸ τὴν κορυφήν του Α ἀχθοῦν ἡ διάμετρος ΑΔ καὶ τὸ ὕψος ΑΕ τοῦ τριγώνου, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΑΒ : ΑΔ=ΑΕ : ΑΓ.

1015. (1047). Ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α τριγώνου ΑΒΓ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον τέμνει τὴν ἀπέναντι πλευρὰν εἰς τὸ σημεῖον Δ καὶ τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Ε. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ΑΒ : ΑΕ=ΑΔ : ΑΓ.

1016. (1048). Ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Ο. Φέρομεν τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Α, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν ΒΓ εἰς τὸ Δ καὶ τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὸ Ε. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\overline{ΕΒ}^2=ΕΑ\times ΕΔ$.

1017. (1049). Ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, (ΑΒ=ΑΓ) εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον Ο. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α φέρομεν μίαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν βάσιν ΒΓ εἰς τὸ Δ καὶ τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὸ Ε. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι

$$\overline{ΑΒ}^2=ΑΔ\times ΑΕ.$$

1018. (1050). Ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Ο. Φέρομεν μίαν χορδὴν Β′Γ′ παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ· φέρομεν τὴν χορδὴν ΑΓ′, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$ΑΒ\times ΑΓ=ΑΒ'\times ΑΔ.$$

1019. (1051). Δύο κύκλοι Ο καὶ Ο′ ἐφάπτονται ἐκτὸς εἰς τὸ σημεῖον Α. Ἀπὸ τὸ Α φέρομεν δύο εὐθείας ΒΑΒ′ καὶ ΓΑΓ′, αἱ ὁποῖαι περατοῦνται εἰς τὰς περιφερείας Ο καὶ Ο′.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ χορδαὶ ΒΓ καὶ Β′Γ′, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ ἄκρα των εἶναι παράλληλοι.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\frac{ΑΒ}{ΑΒ'}=\frac{ΑΓ}{ΑΓ'}$.

Δ′ Ὁμάς. **1020.** (1052). Ἐὰν δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ὁ λόγος δύο ὁμολόγων διχοτόμων εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῆς ὁμοιότητός των.

1021. (1053). Ἐὰν δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ὁ λόγος δύο ὁμολόγων διαμέσων των εἶναι ἴσος μὲ τὸ λόγον τῆς ὁμοιότητός των.

1022. (1054). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἕνα τυχὸν σημεῖον Μ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι οἱ κύκλοι Ο καὶ Ο′, οἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α, Β, Μ καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα Α, Γ, Μ ἔχουν τὰς ἀκτῖνας των ἀναλόγους πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ.

1023. (1055). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς ἕνα παραλληλόγραμμον δύο διαδοχικαὶ πλευραί του εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τὰ ἀντίστοιχα ὕψη του.

1024. (1056). Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ εἰς τὸ ὁποῖον ἡ βάσις ΑΒ εἶναι διπλασία τοῦ ὕψους ΒΓ. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν διαγώνιον ΒΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν πλευρὰν ΓΔ εἰς τὸ Ε. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΔΕ εἶναι τὸ τέταρτον τῆς ΔΓ.

1025. (1057). Εἰς ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον εἶναι ἐγγεγραμμένον ἕνα τετράγωνον, τοῦ ὁποίου μία πλευρὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης· νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο τμημάτων τῆς ὑποτεινούσης τὰ ὁποῖα μένουν.

1026. (1058). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ αἱ

ἀποστάσεις τοῦ ποδὸς Δ τοῦ ὕψους ΑΔ, ἀπὸ τὰς καθέτους πλευρὰς τοῦ τριγώνου εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς πλευρὰς αὐτάς.

1027. (1059). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ ἀποστάσεις τοῦ μέσου μιᾶς πλευρᾶς τριγώνου ἀπὸ τὰς δύο ἄλλας πλευράς του εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τὰς δύο αὐτὰς πλευράς.

1028. (1060). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι α, β, γ. Γράφομεν περιφέρειαν κύκλου Ο, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ Β καὶ ἐφάπτεται τῆς ΑΓ εἰς τὸ Α. Ἡ περιφέρεια αὐτὴ τέμνει τὴν πλευρὰν ΒΓ εἰς ἕνα σημεῖον Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΔ εἶναι ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν α,β,γ

1029. (1061). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν κατὰ σειρὰν τέσσαρα σημεῖα Γ, Α, Β, Δ οὕτως, ὥστε ΑΒ=α, ΓΒ=ΑΔ=β καὶ ὑποθέτομεν, ὅτι $α<β$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν Μ εἶναι ἕνα ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῶν δύο περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν κέντρα τὰ Γ καὶ Δ καὶ ἀκτῖνα τὴν αὐτὴν β, ἡ ΑΜ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν α καὶ β.

Ε' Ὁμάς. **1030.** (1062). Ἐὰν ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Δ μιᾶς τῶν πλευρῶν γωνίας ΑΒΓ ἀχθῇ ἡ ΔΕ κάθετος ἐπὶ τὴν ἄλλην πλευράν, ὁ λόγος ΔΕ : ΔΒ εἶναι ὁ αὐτὸς δι' οἱανδήποτε θέσιν τοῦ Δ.

1031. (1063). Δίδεται ἕνας κύκλος Ο καὶ μία εὐθεῖα xy ἐκτὸς αὐτοῦ. Ἀπὸ τὸ ἕνα ἄκρον Α μιᾶς διαμέτρου ΑΒ καθέτου ἐπὶ τὴν xy, φέρομεν μίαν τέμνουσαν, αὐθαιρέτου διευθύνσεως, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὸ σημεῖον Μ καὶ τὴν xy εἰς τὸ Μ'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ γινόμενον ΑΜ×ΑΜ' εἶναι σταθερόν. (Σχολὴ Ἰκάρων 1948)

1032. (1064). Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α ἑνὸς παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρομεν μίαν τέμνουσαν μεταβλητῆς διευθύνσεως, ἡ ὁποία συναντᾷ τὰς πλευρὰς ΒΓ καὶ ΓΔ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ γινόμενον ΒΕ×ΔΖ εἶναι σταθερόν

1033. (1065). Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται αἱ χορδαί των, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ἀπὸ μίαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς ἁφῆς των ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχουν καὶ αἱ διάμετροί των.

1034. (1066). Δίδεται μία γωνία xOy καὶ ἕνα σημεῖον Σ ἐντὸς αὐτῆς. Ἀπὸ τὰ σημεῖα Ο καὶ Σ φέρομεν μίαν περιφέρειαν μεταβλητῆς ἀκτῖνος, ἡ ὁποία τέμνει τὰς Ox καὶ Oy εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ λόγος $\frac{ΣΑ}{ΣΒ}$ μένει σταθερός.

3. Παράλληλοι εὐθεῖαι τεμνόμεναι ὑπὸ δέσμης εὐθειῶν

412. Δέσμη εὐθειῶν. Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ... *(Σχ. 305)*, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο. Τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν αὐτῶν, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο λέγεται ***δέσμη εὐθειῶν.***

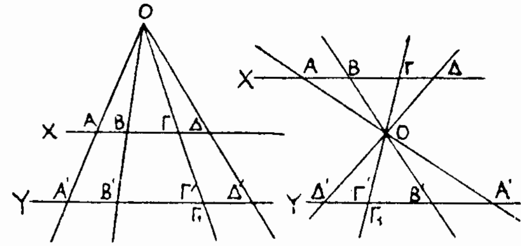
Αἱ εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, . . . λέγονται ***ἀκτῖνες*** τῆς δέσμης.

Τὸ κοινὸν σημεῖον Ο τῆς δέσμης λέγεται ***κέντρον*** τῆς δέσμης.

413. Θεώρημα. ***Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα ὑπὸ μιᾶς δέσμης εὐθειῶν.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι X, Y, αἱ ὁποῖαι

Ὑπόθ.	X//Y
Συμπ.	$\frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}$



Σχ. 305.

τέμνονται ὑπὸ μιᾶς δέσμης εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ σημεῖον O, εἰς τὰ σημεῖα A,B,Γ,Δ ἢ X καὶ εἰς τὰ A′, B′, Γ′, Δ′ ἢ Y.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}$.

Ἀπόδειξις: Τὰ τὰ τρίγωνα OAB καὶ OA′B′ εἶναι ὅμοια, διότι ἡ AB εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν A′B′.

Ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων αὐτῶν, ἔχομεν

$$\frac{OA}{OA'}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{OB}{OB'} \qquad (1)$$

Ὁμοίως ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα OBΓ καὶ OB′Γ′ ἔχομεν

$$\frac{OB}{OB'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\frac{O\Gamma}{O\Gamma'} \qquad (2)$$

Ἐπίσης ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα OΓΔ καὶ OΓ′Δ′ ἔχομεν

$$\frac{O\Gamma}{O\Gamma'}=\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}=\frac{O\Delta}{O\Delta'} \qquad (3)$$

Ἐπειδὴ αἱ σχέσεις (1), (2), (3) ἔχουν ἀνὰ δύο ἕνα κοινὸν λόγον, ὅλοι οἱ λόγοι των θὰ εἶναι ἴσοι καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}.$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι. . .***

414. Θεώρημα. (*Ἀντίστροφον*). ***Ἐὰν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι τέμνωνται εἰς μέρη ἀνάλογα ὑπὸ πολλῶν τεμνουσῶν εὐθειῶν, αἱ τέμνουσαι αὐταὶ ἀποτελοῦν δέσμην εὐθειῶν.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι X καὶ Y *(Σχ. 305)*, αἱ ὁποῖαι τέμνονται ὑπὸ τῶν εὐθειῶν AA′, BB′, ΓΓ′, ΔΔ′ εἰς μέρη ἀνάλογα, ἤτοι ἔστω ὅτι εἶναι: $\frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}$.

Ὑπόθ.	X//Y $\frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}$
Συμπ.	A′A, B′B, ΓΓ′, ΔΔ′ ἀποτελοῦν δέσμην

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι αὐταὶ ἀποτελοῦν δέσμην εὐθειῶν, δηλ. προεκτεινόμεναι διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον.

'Απόδειξις: Ἔστω O τὸ σημεῖον τομῆς τῶν εὐθειῶν AA′ καὶ BB′. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν OΓ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν παράλληλον Y εἰς τὸ σημεῖον $Γ_1$. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ σημεῖα Γ′ καὶ $Γ_1$ συμπίπτουν καὶ ἑπομένως ἡ Γ′Γ διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον O.

Ἐπειδὴ αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι X καὶ Y τέμνονται ὑπὸ τῆς δέσμης τῶν εὐθειῶν OAA′, OBB′, $OΓΓ_1$, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BΓ}{B'Γ_1} \qquad (1)$$

Ἀλλὰ ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν καὶ

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BΓ}{B'Γ'} \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι

$$\frac{BΓ}{B'Γ'}=\frac{BΓ}{B'Γ_1}.$$

Ἐπειδὴ οἱ δύο αὐτοὶ λόγοι εἶναι ἴσοι καὶ ἔχουν τοὺς ἀριθμητάς των ἴσους θὰ ἔχουν καὶ τοὺς παρονομαστάς των ἴσους· δηλ. θὰ εἶναι $B'Γ'=B'Γ_1$ καὶ ἑπομένως τὰ σημεῖα Γ′ καὶ $Γ_1$ συμπίπτουν, διότι κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας Y πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ σημείου B′ καὶ εἶναι $B'Γ'=B'Γ_1$. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἡ τέμνουσα Δ′Δ διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον O.

Ἀσκήσεις

1035. (1067). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς ἕνα τραπέζιον, τὰ μέσα τῶν βάσεων, τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων καὶ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του εἶναι τέσσαρα σημεῖα, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

1036. (1068). Εἰς ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ φέρομεν μίαν παράλληλον πρὸς τὴν διαγώνιον ΒΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν πλευρὰν ΑΒ εἰς τὸ Ε καὶ τὴν ΑΔ εἰς τὸ Ζ. Ἐπίσης φέρομεν μίαν δευτέραν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Η καὶ τὴν ΓΔ εἰς τὸ Θ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΖΘ, ΕΗ καὶ ΑΓ τέμνονται εἰς τὸ αὐτό σημεῖον.

1037. (1069). Δίδεται ἕνα παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ· ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Ε τῆς διαγωνίου ΑΓ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς πλευράς του, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ εἰς τά Ζ, Η, Θ, Ι. Νὰ ἀποδειχθῇ:

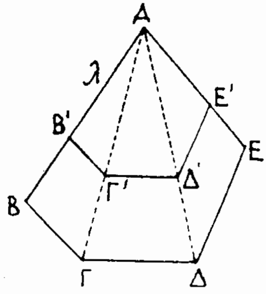
1ον. Ὅτι αἱ διαγώνιοι ΖΙ καὶ ΗΘ τῶν παραλληλογράμμων ΑΖΕΙ καὶ ΕΗΓΘ εἶναι παράλληλοι.

2ον. Ὅτι αἱ διαγώνιαι ΖΗ καὶ ΙΘ τῶν παραλληλογράμμων ΖΒΗΕ καὶ ΙΕΘΔ καὶ ἡ διαγώνιος ΑΓ τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

4. Ὅμοια πολύγωνα

415. Ὁρισμοί. Ἔστω ἕνα τυχὸν πολύγωνον ΑΒΓΔΕ καὶ ἕνα σημεῖον Β′ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς του ΑΒ. Φέρομεν τὰς διαγωνίους ΑΓ καὶ

ΑΔ, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α, καὶ τὰς Β΄Γ΄, Γ΄Δ΄, Δ΄Ε΄ παραλλήλους ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ. Λαμβάνομεν οὕτω τὸ πολύγωνον ΑΒ΄Γ΄Δ΄Ε΄. Τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ ΑΒ΄Γ΄Δ΄Ε΄ ἔχουν:



Σχ. 306.

1ον. Τὰς γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν: $\widehat{A}$ κοινήν, $\widehat{B}=\widehat{B}'$, $\widehat{\Gamma}=\widehat{\Gamma}'$ ....

2ον. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒ΄Γ΄, ΑΓ΄Δ΄, ΑΔ΄Ε΄ εἶναι ἀντιστοίχως ὅμοια πρὸς τὰ ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ θὰ εἶναι:

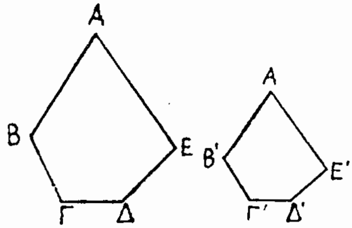
$$\frac{AB'}{AB}=\frac{B'\Gamma'}{B\Gamma}=\frac{A\Gamma'}{A\Gamma}=\frac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma\Delta}=\frac{A\Delta'}{A\Delta}=\frac{\Delta'E}{\Delta E}=\frac{AE'}{AE}.$$

Λέγομεν, ὅτι τὰ πολύγωνα αὐτὰ εἶναι ***ὅμοια.***

Αἱ κορυφαὶ τῶν ἴσων γωνιῶν λέγονται ***ὁμόλογοι κορυφαί.*** Π.χ. αἱ κορυφαὶ Β καὶ Β΄, καθὼς αἱ Γ καὶ Γ΄,.... εἶναι ὁμόλογοι κορυφαί.

Αἱ πλευραὶ Β΄Γ΄ καὶ ΒΓ, ποὺ συνδέουν δύο ὁμολόγους κορυφάς, λέγονται ***ὁμόλογοι πλευραί*** (π.χ. αἱ Γ΄Δ΄ καὶ ΓΔ, αἱ Α΄Β΄ καὶ ΑΒ...).

Γενικῶς: ***Δύο πολύγωνα λέγονται ὅμοια,*** *ὅταν ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τὰς ὁμολόγους πλευράς των ἀναλόγους.*



Σχ. 307.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν αὐτὸν τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄ *(Σχ. 307)* θὰ εἶναι ὅμοια, ἐὰν ἔχουν:

1ον. $\widehat{A}=\widehat{A}'$, $\widehat{B}=\widehat{B}'$, $\widehat{\Gamma}=\widehat{\Gamma}'$, $\widehat{\Delta}=\widehat{\Delta}'$, $\widehat{E}=\widehat{E}'$ καὶ

2ον. $\frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}=\frac{\Delta E}{\Delta'E'}=\frac{EA}{E'A'}.$

Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τὸν λόγον τῶν ὁμολόγων πλευρῶν δύο ὁμοίων πολυγώνων, λέγεται ***λόγος τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν.***

416. Θεώρημα. ***Δύο πολύγωνα ὅμοια δύνανται νὰ χωρισθοῦν εἰς ἰσάριθμα τρίγωνα, ὅμοια ἕνα πρὸς ἕνα καὶ ὁμοίως κείμενα.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν τὰ ὅμοια πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄ *(Σχ. 308)*. Φέρομεν τὰς διαγωνίους ΑΓ, ΑΔ, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α καὶ τὰς διαγωνίους Α΄Γ΄, Α΄Δ΄, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α΄, ὁμόλογον τῆς Α.

Καθένα ἀπὸ τὰ πολύγωνα αὐτὰ ἐχωρίσθη εἰς τρία τρίγωνα, τὰ ὁποῖα εἶναι τοποθετημένα κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ εἶναι ὅμοια ἀντιστοίχως πρὸς τὰ τρίγωνα Α'Β'Γ', Α'Γ'Δ', Α'Δ'Ε'.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ Α'Β'Γ'Δ'Ε' εἶναι ὅμοια, θὰ εἶναι

$$\widehat{A}=\widehat{A}', \quad \widehat{B}=\widehat{B}', \quad \widehat{\Gamma}=\widehat{\Gamma}', \quad \widehat{\Delta}=\widehat{\Delta}', \quad \widehat{E}=\widehat{E}'$$

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}=\frac{\Delta E}{\Delta'E'}=\frac{EA}{E'A'} \qquad (1)$$

Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην, Β=Β', περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων $\frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$.

Ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων αὐτῶν συνάγογεν, ὅτι

$$\widehat{A}_1=\widehat{A}_1', \quad \widehat{\Gamma}_1=\widehat{\Gamma}_1' \quad \text{καὶ} \quad \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} \qquad (2)$$

Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΓΔ καὶ Α'Γ'Δ' εἶναι ὅμοια.

Ἐὰν ἀπὸ τὰς ἴσας γωνίας Γ καὶ Γ' ἀφαιρέσωμεν τὰς ἴσας γωνίας Γ_1 καὶ Γ_1', αἱ ἀπομένουσαι γωνίαι Γ_2 καὶ Γ_2' εἶναι ἴσαι. Ἀπὸ τὰς σχέσεις (2) καὶ (1) συνάγομεν, ὅτι $\frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}=\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}$.

Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΑΓΔ καὶ Α'Γ'Δ' εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην, $\Gamma_2=\Gamma_2'$ περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων,

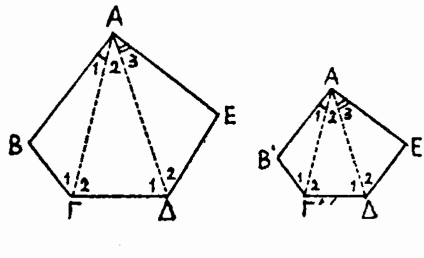
$$\frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}=\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}.$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ τὰ τρίγωνα ΑΔΕ καὶ Α'Δ'Ε' εἶναι ὅμοια.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Δύο πολύγωνα ὅμοια....***

417. Θεώρημα. (*Ἀντίστροφον*). ***Ἐὰν δύο πολύγωνα ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἰσάριθμα τρίγωνα, ὅμοια ἕνα πρὸς ἕνα καὶ τοποθετημένα κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, τὰ πολύγωνα αὐτὰ εἶναι ὅμοια.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ *(Σχ. 308)*, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ καὶ ΑΔΕ καὶ τὸ πολύγωνον Α'Β'Γ'Δ'Ε' τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ τρίγωνα Α'Β'Γ', Α'Γ'Δ' καὶ



Σχ. 308.

Α'Δ'Ε', τὰ ὁποῖα εἶναι ὅμοια ἀντιστοίχως πρὸς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ καὶ τοποθετημένα κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν πρὸς αὐτά.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ Α'Β'Γ'Δ'Ε' εἶναι ὅμοια.

Ἀπόδειξις: Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ πολύγωνα αὐτὰ ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τὰς ὁμολόγους πλευράς των ἀναλόγους.

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι ὅμοια, θὰ ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους· ἤτοι θὰ εἶναι

$$\widehat{A}_1=\widehat{A}_1', \quad \widehat{B}=\widehat{B}', \quad \widehat{\Gamma}_1=\widehat{\Gamma}_1' \qquad (1)$$

καὶ

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\frac{A\Gamma}{A'\Gamma'} \qquad (1')$$

Ὁμοίως ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΓΔ καὶ Α'Γ'Δ' ἔχομεν

$$\widehat{\Gamma}_2=\widehat{\Gamma}_2', \quad \widehat{\Delta}_1=\widehat{\Delta}_1', \quad \widehat{A}_2=\widehat{A}_2' \qquad (2)$$

καὶ

$$\frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}=\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}=\frac{A\Delta}{A'\Delta'} \qquad (2')$$

Ὁμοίως ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΔΕ καὶ Α'Δ'Ε' ἔχομεν

$$\widehat{\Delta}_2=\widehat{\Delta}_2', \quad \widehat{E}=\widehat{E}', \quad \widehat{A}_3=\widehat{A}_3' \qquad (3)$$

καὶ

$$\frac{A\Delta}{A'\Delta'}=\frac{\Delta E}{\Delta'E'}=\frac{EA}{A'E'} \qquad (3')$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1), (2), (3) συνάγομεν, ὅτι αἱ γωνίαι τῶν δύο πολυγώνων ΑΒΓΔΕ καὶ Α'Β'Γ'Δ'Ε' εἶναι ἴσαι μία πρὸς μίαν, εἴτε ἀπ' εὐθείας, ὅπως Β=Β', Ε=Ε', εἴτε ὡς ἄθροισμα ἴσων γωνιῶν, ὅπως αἱ γωνίαι Γ καὶ Γ', αἱ ὁποῖαι εἶναι ἄθροισμα τῶν ἴσων γωνιῶν

$$\widehat{\Gamma}_1=\widehat{\Gamma}_1' \quad \text{καὶ} \quad \widehat{\Gamma}_2=\widehat{\Gamma}_2'.$$

Ἐπίσης ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1'), (2'), (3') συνάγομεν, ὅτι

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}=\frac{\Delta E}{\Delta'E'}=\frac{EA}{E'A'}.$$

Τὰ πολύγωνα λοιπὸν ΑΒΓΔΕ καὶ Α'Β'Γ'Δ'Ε' ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους· ἄρα εἶναι ὅμοια.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν δύο πολύγωνα. . . .***

418. Παρατήρησις. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν ὁμοίων πολυγώνων, δύο πολύγωνα εἶναι ὅμοια, ὅταν ἔχουν τὰς γωνίας των μίαν πρὸς μίαν

ἴσας καὶ τὰς ὁμολόγους πλευράς των ἀναλόγους.

Εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν ὁμοίων τριγώνων (I περίπτωσις) εἴδομεν: *1ον*. Ὅτι ὅταν δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν εἶναι ὅμοια, δηλ. ἔχουν καὶ τὰς ὁμολόγους πλευράς των ἀναλόγους,

καὶ *2ον* ὅταν δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς ὁμολόγους πλευράς των ἀναλόγους (III περίπτωσις) τὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια, δηλ. ἔχουν καὶ τὰς γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν.

Δηλ. εἰς τὰ τρίγωνα ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν δύο τριγώνων συνεπάγεται καὶ τὴν ἀναλογίαν τῶν πλευρῶν· καὶ ἀντιστρόφως ἡ ἀναλογία τῶν πλευρῶν δύο τριγώνων συνεπάγεται καὶ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν·

Δὲν συμβαίνει ὅμως τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὰ πολύγωνα. Διὰ νὰ εἶναι δύο πολύγωνα ὅμοια, πρέπει νὰ ἀποδεικνύωμεν, ὅτι ἔχουν τὰς γωνίας των μίαν πρὸς μίαν ἴσας καὶ τὰς ὁμολόγους πλευράς των ἀναλόγους. Διότι ὑπάρχουν πολύγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ δὲν εἶναι ὅμοια, ὅπως τὸ τετράγωνον καὶ τὸ ὀρθογώνιον, ἢ δύο τυχόντα ὀρθογώνια· ἐπίσης ὑπάρχουν πολύγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς ὁμολόγους πλευράς των ἀναλόγους καὶ ἐν τούτοις δὲν εἶναι ὅμοια, ὅπως τὸ τετράγωνον καὶ ὁ ρόμβος, ἢ δύο τυχόντες ρόμβοι.

419. Θεώρημα. ***Αἱ περίμετροι δύο ὁμοίων πολυγώνων ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον δύο ὁμολόγων πλευρῶν των· (δηλ. ἴσον μὲ τὸν λόγον τῆς ὁμοιότητός των).***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν ΑΒΓΔΕ καὶ Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε *(Σχ 308)* δύο ὅμοια, πολύγωνα.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\frac{\text{περίμετρ. ΑΒΓΔΕ}}{\text{περίμετρ.Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄}}=\frac{\text{ΑΒ}}{\text{Α΄Β΄}}$.

Ἀπόδειξις: Πράγματι· ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα εἶναι ὅμοια, αἱ ὁμόλογοι πλευραί των θὰ εἶναι ἀνάλογοι, δηλ. θὰ εἶναι

$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{Α΄Β΄}}=\frac{\text{ΒΓ}}{\text{Β΄Γ΄}}=\frac{\text{ΓΔ}}{\text{Γ΄Δ΄}}=\frac{\text{ΔΕ}}{\text{Δ΄Ε΄}}=\frac{\text{ΕΑ}}{\text{Ε΄Α΄}}=k \text{ (ὁ λόγος ὁμοιότητος).}$$

Κατὰ τὴν ἰδιότητα τῶν ἴσων κλασμάτων, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν των πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν παρονομαστῶν των, ἔχει λόγον ἴσον μὲ ἕνα ἀπὸ τὰ δοθέντα κλάσματα, ἤτοι εἶναι

$$\frac{\text{ΑΒ}+\text{ΒΓ}+\text{ΓΔ}+\text{ΔΕ}+\text{ΕΑ}}{\text{Α΄Β΄}+\text{Β΄Γ΄}+\text{Γ΄Δ΄}+\text{Δ΄Ε΄}+\text{Ε΄Α΄}}=\frac{\text{ΑΒ}}{\text{Α΄Β΄}}=\cdots=k$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{\text{περίμετρ. ΑΒΓΔΕ}}{\text{περίμετρ. Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄}}=\frac{\text{ΑΒ}}{\text{Α΄Β΄}}=k.$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Αἱ περίμετροι δύο ὁμοίων....***

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. **1038.** (1070). Δύο παραλληλόγραμμα, τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων, εἶναι ὅμοια.

1039. (1071). Δύο ὀρθογώνια, τῶν ὁποίων αἱ διαγώνιοι τέμνονται ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν, εἶναι ὅμοια.

1040. (1072). Δύο παραλληλόγραμμα, τῶν ὁποίων αἱ διαγώνιοι τέμνονται ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν καὶ εἶναι ἀνάλογοι, εἶναι ὅμοια.

1041. (1073). Δύο τετράπλευρα εἶναι ὅμοια, ἐὰν αἱ πλευραὶ καὶ μία διαγώνιος τοῦ ἑνὸς εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα τοῦ ἄλλου.

1042. (1074). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι δύο τραπέζια, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς βάσεις των ἀναλόγους καὶ τὰς προσκειμένας γωνίας, εἰς δύο ὁμολόγους βάσεις, ἴσας μίαν πρὸς μίαν, εἶναι ὅμοια.

Β' Ὁμάς. **1043.** (1075). Δύο τετράπλευρα ΑΒΓΔ καὶ Α'Β'Γ'Δ' περιγεγραμμένα περὶ δύο κύκλους Ο καὶ Ο' ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τετράπλευρα αὐτὰ εἶναι ὅμοια.

1044. (1076). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὅλα τὰ ὀρθογώνια τὰ περιγεγραμμένα περὶ δοθὲν τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς διαγωνίους του καθέτους, εἶναι ὅμοια.

1045. (1077). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι οἱ ῥόμβοι, οἱ ἐγγεγραμμένοι εἰς δοθὲν ὀρθογώνιον, εἶναι ὅμοιοι.

1046. (1078). Δίδεται ἕνα πολύγωνον ΑΒΓ.... περιγεγραμμένον περὶ ἕνα κύκλον καὶ ἕνα ἄλλο πολύγωνον Α'Β'Γ'...., τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ἐκ τοῦ πρώτου πολυγώνου διὰ παραλλήλων Α'Β', Β'Γ'.... πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ,.... καὶ αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν ἀπόστασιν δ ἀπὸ τὰς πλευρὰς αὐτάς. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ πολύγωνα ΑΒΓ.... καὶ Α'Β'Γ'.... εἶναι ὅμοια.

1047. (1079). Δίδεται ἕνα παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ· ἀπὸ τὰς κορυφάς του Α καὶ Γ φέρομεν καθέτους ΑΑ' καὶ ΓΓ' ἐπὶ τὴν διαγώνιον ΒΔ. Ἐπίσης ἀπὸ τὰς κορυφὰς Β καὶ Δ φέρομεν καθέτους ΒΒ' καὶ ΔΔ' ἐπὶ τὴν διαγώνιον ΑΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον Α'Β'Γ'Δ' εἶναι ἕνα παραλληλόγραμμον ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓΔ.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν ἐπὶ τοῦ Γ' Κεφαλαίου

Α' Ὁμάς. **1048.** (1080). Δίδεται ἕνα τραπέζιον ΑΒΓΔ. Ἐπὶ τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του ΑΔ καὶ ΒΓ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{ΕΑ}{ΕΔ} = \frac{ΖΒ}{ΖΓ} = \frac{μ}{ν}$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ εὐθεῖα ΕΖ, ἂν γνωρίζωμεν τὰς βάσεις ΑΒ=α καὶ ΓΔ=β τοῦ τραπεζίου.

04 (1081). Ὅταν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἐξωτερικῶς, ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου ἐπαφῆς των ἀπὸ μίαν κοινὴν ἐφαπτομένην εἶναι τετάρτη ἀνάλογος τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν ἀκτίνων των καὶ ἑκάστης τῶν ἀκτίνων αὐτῶν.

Β' Ὁμάς. **1050.** (1082). Ἐὰν ἐπὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ΒΓ, Β'Γ' δύο ὁμοίων τριγώνων ΑΒΓ, Α'Β'Γ' ληφθοῦν δύο τμήματα ΒΗ καὶ Β'Η', τὰ ὁποῖα ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον δύο ὁμολόγων πλευρῶν, αἱ ΑΗ καὶ Α'Η' διαιροῦν τὰ δοθέντα τρίγωνα εἰς ἄλλα ὅμοια, ἕνα πρὸς ἕνα.

1051. (1083). Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι ὅμοια, ὅταν ὁ λόγος $\frac{ΒΓ}{Β'Γ'}$ τῶν ὑποτεινουσῶν των εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον $\frac{ΑΒ}{Α'Β'}$ τῶν καθέτων πλευρῶν των.

1052. (1084). Δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ἐὰν μία πλευρὰ καὶ τὰ ὕψη των, τὰ ὁποῖα ἄγονται ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς πλευρᾶς αὐτῆς, εἶναι ἀνάλογα.

1053. (1085). Δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ἂν ἕνα ὕψος των καὶ αἱ περιέχουσαι αὐτὸ πλευραί των εἶναι ἀνάλογοι.

1054. (1086). Δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ἂν ἔχουν δύο πλευράς των καὶ τὰς ἀκτῖνας τῶν περιγεγραμμένων κύκλων ἀναλόγους.

1055. (1087). Δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ἐὰν ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην καὶ μίαν πλευρὰν καὶ τὰς ἀκτῖνας τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων ἀναλόγους.

1056. (1088). Δύο τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην καὶ τὰ ὕψη, τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας αὐτῆς ἀνάλογα, εἶναι ὅμοια.

1057. (1089). Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ἐὰν ὁ λόγος τῶν ὑποτεινουσῶν των εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν ἀντιστοίχων ὑψῶν των.

1058. (1090). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α, φέρομεν τὸ ὕψος του ΑΔ καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν ΑΒ, ΑΓ καὶ ΔΑ τμήματα

$$ΑΒ' = \frac{ΑΒ}{3}, \quad ΑΓ' = \frac{ΑΓ}{3} \quad \text{καὶ} \quad ΔΔ' = \frac{ΑΔ}{3}.$$

Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον Δ'Β'Γ' εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ

1059. (1091). Ἂν ΑΒ, ΑΓ εἶναι χορδαὶ καὶ ΑΔ διάμετρος τοῦ αὐτοῦ κύκλου, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Α τῆς περιφερείας του, ἀχθῇ δὲ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου εἰς τὸ Δ, ἡ ὁποία τέμνει τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ Ε καὶ Ζ, νὰ δειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΖΕ εἶναι ὅμοια.

1060. (1092). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὰ τρία ὕψη του ΑΑ', ΒΒ' καὶ ΓΓ'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρία τρίγωνα ΑΒ'Γ', ΒΓ'Α', ΓΑ'Β' εἶναι ὅμοια πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

Γ' Ὁμάς. **1061.** (1093). Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν μίαν παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Δ καὶ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ε. Ἔστω Μ τὸ μέσον τῆς ΔΕ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΒΜ, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Γ'· ἐπίσης φέρομεν καὶ τὴν εὐθεῖαν ΓΜ, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Β'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ Β'Γ' εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ.

1062. (1094). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν τέσσαρα διαδοχικὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ καὶ τοιαῦτα, ὥστε $\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{ΑΓ}{ΑΔ}$. Ἀπὸ τὸ Α φέρομεν μίαν δευτέραν εὐθεῖαν ἐπὶ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν τμῆμα ΑΕ= ΑΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΕΓ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΒΕΔ.

1063. (1095). Δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' ἔχουν γων.Α=γων.Α' καὶ γων.Β+γων.Β'=2 ὀρθ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\frac{ΒΓ}{Β'Γ'} = \frac{ΑΓ}{Α'Γ'}$.

1064. (1096). Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Γ ἑνὸς παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρομεν μίαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία νὰ κεῖται ἐκτὸς τοῦ παραλληλογράμμου καὶ ἡ ὁποία τέμνει τὰς προεκτάσεις τῶν ΑΒ καὶ ΑΔ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\frac{ΑΒ}{ΑΕ} + \frac{ΑΔ}{ΑΖ} = 1.$$

1065. (1097). Τὰ ὕψη ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ'. Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. Ὅτι $\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{AB'}{A\Gamma'}$.

2ον. Ὅτι $AB'\times B\Gamma'\times \Gamma A'=A\Gamma'\times BA'\times \Gamma B'$.

1066. (1098). Δίδεται ἕνα τραπέζιον ΑΒΓΔ· ἀπὸ τὸ σημεῖον Ε τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του φέρομεν παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις του ΑΒ καὶ ΓΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὰς μὴ παραλλήλους πλευράς του ΑΔ καὶ ΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ Ε εἶναι τὸ μέσον τῆς ΜΝ.

1067. (1099). Δίδεται ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ Μ καὶ Ν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ΑΔ καὶ ΒΓ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΜΝ, ἡ ὁποία τέμνει τὰς προεκτάσεις τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΓΔ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\frac{EA}{EB}=\frac{Z\Delta}{Z\Gamma}.$$

1068. (1100). Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ· ἐπὶ τῶν καθέτων πλευρῶν του ΑΒ καὶ ΑΓ κατασκευάζομεν, ἐξωτερικῶς τοῦ τριγώνου, τὰ τετράγωνα ΑΒΔΕ καὶ ΑΓΖΗ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΓΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Θ καὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΖ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Κ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $A\Theta=AK$ καὶ $\overline{A\Theta}^2=B\Theta\times \Gamma K$.

1069. (1101). Εἰς ἕνα τραπέζιον ΑΒΓΔ τὸ ἄθροισμα $AB+\Gamma\Delta$ τῶν δύο βάσεών του εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα $A\Delta+B\Gamma$ τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του. Ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς Ο τῶν διαγωνίων του φέρομεν μίαν παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΔ εἰς τὸ Μ καὶ τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ν. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $AM+BN=AB$ καὶ $\Delta M+\Gamma N=\Delta\Gamma$.

1070. (1102). Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Α φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς μίαν περιφέρειαν Ο καὶ μίαν τυχοῦσαν τέμνουσαν ΑΔΕ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$B\Delta\times \Gamma E=BE\times \Gamma\Delta.$$

1071. (1103). Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Α φέρομεν μίαν ἐφαπτομένην ΑΒ εἰς ἕνα κύκλον Ο καὶ μίαν τέμνουσαν ΑΓΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\frac{A\Gamma}{A\Delta}=\frac{\overline{B\Gamma}^2}{\overline{B\Delta}^2}.$$

1072. (1104). Ἐπὶ μιᾶς περιφερείας Ο λαμβάνομεν τρία σημεῖα Α, Β, Γ. Φέρομεν τὴν διάμετρον ΑΔ καὶ τὰς καθέτους ΒΒ' καὶ ΓΓ' ἐπὶ τὴν ΑΔ. Ἀπὸ τὸ Α φέρομεν τὴν κάθετον ΑΑ' ἐπὶ τὴν χορδὴν ΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\overline{AA'}^2=AB'\times A\Gamma'.$$

Δ' Ὁμάς. **1073.** (1105). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τοῦ ποδὸς ἑνὸς ὕψους ἑνὸς τριγώνου ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστοίχου πλευρᾶς τοῦ τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ τοὺς πόδας τῶν δύο ἄλλων ὑψῶν του.

1074. (1106). Δίδεται ἕνα παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ ἀποστάσεις τυχόντος σημείου τῆς διαγωνίου ΑΓ ἀπὸ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΔ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τὰς πλευρὰς αὐτάς.

1075. (1107). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα τῶν

διαγωνίων ἑνὸς τετραπλεύρου ὁρίζει ἐπὶ τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν του τμήματα ἀνάλογα.

1076. (1108). Δίδεται μία γωνία xOy καὶ ἕνα σημεῖον Σ ἐκτὸς τῆς γωνίας. Γράφομεν δύο κύκλους, οἱ ὁποῖοι διέρχονται ἀπὸ τὰ σημεῖα O καὶ Σ· ὁ πρῶτος τέμνει τὴν Ox εἰς τὸ A καὶ τὴν Oy εἰς τὸ B, ὁ δεύτερος τέμνει τὴν Ox εἰς τὸ A' καὶ τὴν Oy εἰς τὸ B'. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι τὰ τρίγωνα ΣAA' καὶ ΣBB' εἶναι ὅμοια.

2ον. Ὅτι οἱ κύκλοι, οἱ ὁποῖοι διέρχονται ἀπὸ τὰ O καὶ Σ ὁρίζουν ἐπὶ τῶν Ox καὶ Oy τμήματα ἀνάλογα.

1077. (1109). Δίδεται μία περιφέρεια κύκλου O καὶ μία χορδὴ AB. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ἀπόστασις τυχόντος σημείου M τῆς περιφερείας ἀπὸ τὴν χορδὴν AB εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν ἀποστάσεων τοῦ σημείου αὐτοῦ ἀπὸ τὰς ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B.

Ε' Ὁμάς. **1078.** (1110). Δίδεται τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν A φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν διαγώνιον ΒΔ εἰς τὸ σημεῖον M. Ἐπίσης ἀπὸ τὴν κορυφὴν B φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν διαγώνιον ΑΓ εἰς τὸ σημεῖον N. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ MN εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΔΓ.

1079. (1111). Ἐπὶ τῶν πλευρῶν AB καὶ ΓΔ ἑνὸς τετραπλεύρου ΑΒΓΔ λαμβάνομεν τὰ σημεῖα E καὶ Z ἀντιστοίχως οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{EA}{EB}=\frac{Z\Delta}{Z\Gamma}=\frac{A\Delta}{B\Gamma}$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ EZ σχηματίζει ἴσας γωνίας μὲ τὰς πλευρὰς ΒΓ καὶ ΑΔ.

1080. (1112). Δίδεται ἡμιπεριφέρεια O διαμέτρου AB. Εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας Ax καὶ By τῆς ἡμιπεριφερείας· ἀπὸ τυχὸν σημεῖον M τῆς ἡμιπεριφερείας φέρομεν τρίτην ἐφαπτομένην αὐτῆς, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Ax εἰς τὸ Γ καὶ τὴν By εἰς τὸ Δ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΔ καὶ ΒΓ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον N. Φέρομεν τὴν MN, ἡ ὁποία τέμνει τὴν AB εἰς τὸ σημεῖον Z. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ MZ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν AB κα ὅτι τὸ N εἶναι τὸ μέσον τῆς MZ.

ΣΤ' Ὁμάς. **1081.** (1113). Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι $AB=\alpha\sqrt{2}$ καὶ $A\Delta=\alpha$. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Γ φέρομεν κάθετον ΓΓ' ἐπὶ τὴν διαγώνιον ΒΔ, ἡ ὁποία, προεκτεινομένη συναντᾷ τὴν AB εἰς τὸ σημεῖον E·

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ E εἶναι τὸ μέσον τῆς AB.

2ον. Ἀπὸ τὸ A φέρομεν κάθετον AA' ἐπὶ τὴν ΒΔ· νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ ΓΓ' καὶ AA' διαιροῦν τὴν διαγώνιον ΒΔ εἰς τρία ἴσα μέρη.

1082. (1114). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ ἑνὸς τραπεζίου προεκτεινόμεναι, διαιροῦν ἑκάστην τῶν βάσεων εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν προσκειμένων μὴ παραλλήλων πλευρῶν.

1083. (1115). Δίδεται ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἐξωτερικῶς αὐτοῦ ἡ ἡμιπεριφέρεια, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὴν ΒΓ. Ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας λαμβάνομεν τὰ σημεῖα Δ καὶ E, τὰ ὁποῖα διαιροῦν αὐτὴν εἰς τρία ἴσα τόξα. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ AE διαιροῦν τὴν ΒΓ εἰς τρία ἴσα μέρη.

1084. (1116). Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὰς BB' καὶ ΓΓ' καθέτους

ἐπὶ τὴν διχοτόμον ΑΔ τῆς γωνίας Α. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Α καὶ Δ εἶναι συζυγῆ ἁρμονικὰ πρὸς τὰ Β' καὶ Γ'.

Ζ' Ὁμάς. **1085.** (1117). Δίδονται δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ', τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ Α'Β', ΒΓ καὶ Β'Γ', ΓΑ καὶ Γ'Α' εἶναι παράλληλοι. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ', αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰς ὁμολόγους κορυφάς των, τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

1086. (1118). Δίδονται δύο τετράπλευρα ΑΒΓΔ καὶ Α'Β'Γ'Δ'· ὑποθέτομεν ὅτι αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ εἶναι παράλληλοι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς πλευρὰς Α'Β', Β'Γ', Γ'Δ' καὶ Δ'Α' καὶ ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΑ', ΒΒ' καὶ ΓΓ' τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο· νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΔΔ' διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο.

1087. (1119). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὴν διάμεσον ΑΔ. Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Μ τῆς ΒΔ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ε καὶ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα ΜΕ+ΜΖ μένει σταθερόν, ὅταν τὸ Μ κινῆται ἐπὶ τῆς ΒΔ.

1088. (1120). Δίδονται τρεῖς παράλληλοι εὐθεῖαι Χ, Υ, Ζ. Ἐπὶ τῆς Ζ λαμβάνομεν δύο ὡρισμένα σημεῖα Β καὶ Γ καὶ ἐπὶ τῆς Χ τυχὸν σημεῖον Α. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν Υ εἰς τὰ σημεῖα Β' καὶ Γ' ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ὅταν τὸ Α κινῆται ἐπὶ τῆς Χ, τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα Β'Γ' διατηρεῖ τὸ αὐτὸ μῆκος.

1089. (1121). Δίδεται μία ἡμιπεριφέρεια Ο διαμέτρου ΑΒ καὶ ἕνα ὡρισμένον σημεῖον Σ ἐπὶ τῆς ΑΒ. Ἀπὸ ἕνα μεταβλητὸν σημεῖον Μ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΜΣ καὶ τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΜΣ, ἡ ὁποία τέμνει εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ τὰς ἐφαπτομένας τῆς ἡμιπεριφερείας εἰς τὰ Α καὶ Β. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ γινόμενον ΑΓ×ΒΔ μένει σταθερόν.

1090. (1122). Δίδεται ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, (ΑΒ=ΑΓ). Μὲ κέντρον τὸ μέσον Ο τῆς βάσεως ΒΓ τοῦ τριγώνου κατασκευάζομεν μίαν ἡμιπεριφέρειαν, ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ. Φέρομεν μίαν τυχοῦσαν ἐφαπτομένην τῆς ἡμιπεριφερείας Ο, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Μ καὶ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ν. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι τὰ τρίγωνα ΒΟΜ καὶ ΓΟΝ εἶναι ὅμοια.

2ον. Ὅτι τὸ γινόμενον ΒΜ×ΓΝ εἶναι σταθερόν.

1091. (1123). Δίδονται τρεῖς παράλληλοι εὐθεῖαι Χ, Υ, Ζ καὶ μία τέμνουσα, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν Χ εἰς τὸ Α, τὴν Υ εἰς τὸ Β καὶ τὴν Ζ εἰς τὸ Γ. Ἐπὶ τῆς Ζ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Μ καὶ φέρομεν τὴν ΑΜ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Υ εἰς τὸ Β'· ἐπίσης φέρομεν τὴν ΜΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Χ εἰς τὸ Α'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ὅταν τὸ Μ κινῆται ἐπὶ τῆς Ζ, ἡ εὐθεῖα Α'Β' διέρχεται ἀπὸ ἕνα ὡρισμένον σημεῖον.

1092. (1124). Δίδεται μία γωνία xOy. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Ox κινεῖται ἕνα σημεῖον Α, ἐπὶ δὲ τῆς Oy ἕνα σημεῖον Β εἰς τρόπον, ὥστε νὰ εἶναι

$$\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}=\frac{1}{\lambda}$$

ὅπου λ εἶναι δοθὲν μῆκος. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΒ τέμνει τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας xOy εἰς ἕνα ὡρισμένον σημεῖον.

1093. (1125). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας xy λαμβάνομεν τέσσαρα διαδοχικὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ· ἀπὸ τὰ Α καὶ Β φέρομεν δύο παραλλήλους καὶ ἀπὸ τὰ Γ καὶ Δ δύο ἄλλας παραλλήλους, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς δύο πρώτας. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ διαγώνιοι τοῦ σχηματιζομένου παραλληλογράμμου ὑπὸ τῶν τεσσάρων εὐθειῶν, τέμνουν τὴν xy εἰς δύο ὡρισμένα σημεῖα.

1094. (1126). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγράφομεν τὸν κύκλον Ο, ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται τῆς πλευρᾶς ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Δ. Φέρομεν τὴν διάμετρον ΔΟΕ καὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΕ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ Ζ εἶναι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς ΒΓ καὶ τοῦ παρεγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὴν γωνιαν Α.

1095. (1127). Δύο κύκλοι Ο καὶ Ο' ἐφάπτονται εἰς τὸ σημεῖον Α. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Α φέρομεν τὴν χορδὴν ΑΒ εἰς τὸν Ο καὶ τὴν χορδὴν ΑΒ' εἰς τὸν κύκλον Ο' κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΒΒ' διέρχεται ἀπὸ ἕνα ὡρισμένον σημεῖον, ὅταν ἡ γωνία ΒΑΒ' στρέφεται περὶ τὸ Α.

Η' Ὁμάς. **1096.** (1128). Δίδεται ἕνα τρίγωγον ΑΒΓ. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν του ΑΒ καὶ ΑΓ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι

$$\frac{ΑΔ}{ΔΒ}=\frac{ΕΓ}{ΕΑ}.$$

Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ μέσα Β' καὶ Γ' τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ τὸ μέσον Μ τῆς ΔΕ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

1097. (1129). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὰ ὕψη ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' καὶ λαμβάνομεν τὰ Α'', Β'', Γ'', τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπ' αὐτῶν καὶ εἰς τὸ τρίτον ἑκάστου ἐξ αὐτῶν ἀπὸ τοῦ ποδός των. Νὰ ἀποδειχθῇ ;

1ον. Ὅτι τὰ τρία αὐτὰ σημεῖα, τὸ ὀρθόκεντρον Η καὶ τὸ σημεῖον Θ τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου.

2ον. Ὅτι τὸ τρίγωνον Α''Β''Γ'' εἶναι ὅμοιον μὲ τὸ ΑΒΓ.

1098. (1130). Ἕνα ἰσοσκελὲς τραπέζιον ΑΒΓΔ εἶναι περιγεγραμμένον περὶ ἕνα κύκλον Ο. Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. Ὅτι τὰ σημεῖα ἐπαφῆς Ε καὶ Ζ τῶν βάσεων ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ τῆς περιφερείας Ο εἶναι μέσα τῶν βάσεων αὐτῶν.

2ον. Ὅτι ἡ τομὴ Η τῶν διαγωνίων ΑΓ καὶ ΒΔ καὶ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς Μ καὶ Ν τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του ΑΔ καὶ ΒΓ κεῖνται ἐπ' εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις.

Θ' Ὁμάς. **1099.** (1131). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα χωρίζουν κατὰ δοθέντα λόγον $\frac{\mu}{\nu}$ τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι συνδέουν δοθὲν σημεῖον Ο μὲ τὰ διάφορα σημεῖα μιᾶς δοθείσης εὐθείας Χ.

1100 (1132). Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο δοθείσας παραλλήλους Χ καὶ Υ εἶναι ἴσος μὲ $\frac{\mu}{\nu}$.

(Σχολὴ Ἰκάρων 1948)

1101. (1133). Δίδονται δύο εὐθεῖαι παράλληλοι Χ καὶ Υ καὶ ἕνα σημεῖον Ο ἐκτὸς αὐτῶν. Ἀπὸ τὸ Ο φέρομεν μίαν τέμνουσαν αὐτὰς εἰς τὰ Α καὶ Β. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ ἁρμονικοῦ συζυγοῦς Μ τοῦ Ο πρὸς τὴν ΑΒ.

1102. (1134). Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν μέσων τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι πρὸς μίαν πλευρὰν τριγώνου καὶ τέμνουν τὰς δύο ἄλλας.

1103. (1135). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ καὶ μία τυχοῦσα παράλληλος Β'Γ' πρὸς τὴν βάσιν του ΒΓ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΒΓ' καὶ ΓΒ', αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου Μ τῆς τομῆς τῶν ΒΓ' καὶ ΓΒ', ὅταν ἡ Β'Γ' κινῆται παραλλήλως πρὸς τὴν ΒΓ.

1104. (1136). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο τεμνομένας εὐθείας ἔχουν λόγον ἴσον μὲ $\frac{\mu}{\nu}$.

1105. (1137). Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι Χ καὶ Υ καὶ ἕνα σημεῖον Ο ἐκτὸς αὐτῶν. Ἀπὸ τὸ Ο φέρομεν μίαν ὡρισμένην τέμνουσαν, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν Χ εἰς τὸ Α καὶ τὴν Υ εἰς τὸ Β καὶ μίαν μεταβλητήν, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν Χ εἰς τὸ Α' καὶ τὴν Υ εἰς τὸ Β'. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν ΑΒ' καὶ ΒΑ'.

1106. (1138). Δίδεται μία ὀρθὴ γωνία xOy. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Ox λαμβάνομεν τμῆμα ΟΑ=α καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Oy ἕνα τμῆμα ΟΒ=2α. Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τῆς ΑΒ καὶ ΜΓ ΜΔ αἱ ἀποστάσεις του ἀπὸ τὰς Ox καὶ Oy. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων Μ, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐντὸς τῆς γωνίας xOy καὶ τοιούτων, ὥστε ΜΓ+2ΜΔ=2α.

1107. (1139). Δύο εὐθεῖαι xOx' καὶ yOy' τέμνονται καθέτως εἰς τὸ Ο. Ἐπὶ τῆς Ox λαμβάνομεν ἕνα τμῆμα ΟΑ=α, ἐπὶ δὲ τῆς Oy' ἕνα τμῆμα ΟΒ=2α. Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον καὶ ΜΓ καὶ ΜΔ αἱ ἀποστάσεις του ἀπὸ τὰς xOx' καὶ yOy'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ τόπος τῶν σημείων Μ, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐντὸς τῆς γωνίας xOy καὶ τοιούτων ὥστε 2ΜΔ—ΜΓ=2α, εἶναι τὸ τμῆμα τῆς εὐθείας ΑΒ, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας xOy.

1108. (1140). Δίδονται δύο εὐθεῖαι x'Ox καὶ y'Oy τεμνόμεναι εἰς τὸ Ο. Ἐπὶ τῆς Ox λαμβάνομεν δύο σημεῖα Α καὶ Α' καὶ ἐπὶ τῆς Oy δύο σημεῖα Β καὶ Β'. Τὰ σημεῖα Α καὶ Β θεωροῦνται σταθερά, ἐνῷ τὰ Α' καὶ Β' κινοῦνται ἐπὶ τῶν εὐθειῶν αὐτῶν οὕτως, ὥστε νὰ μένουν πάντοτε πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ οὕτως, ὥστε ὁ λόγος $\frac{ΑΑ'}{ΒΒ'}$ νὰ μένῃ ἴσος μὲ δοθέντα λόγον $\frac{\mu}{\nu}$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ μέσου Μ τῆς Α'Β',

1109. (1141). Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα χωρίζουν κατὰ δοθέντα λόγον τὰ παράλληλα τμήματα πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν, τὰ ὁποῖα ὁρίζονται μεταξὺ δύο τεμνομένων εὐθειῶν.

1110. (1142). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων ὅλων τῶν ὀρθογωνίων, τὰ ὁποῖα εἶναι ἐγγεγραμμένα εἰς δοθὲν τρίγωνον.

1111. (1143). Δύο εὐθεῖαι x'Ox καὶ y'Oy τέμνονται εἰς τὸ Ο. Ἐπὶ τῆς Ox λαμβάνομεν δύο σημεῖα Α καὶ Α', ἐπὶ δὲ τῆς Oy' τὰ σημεῖα Β καὶ Β'. Τὰ σημεῖα Α καὶ Β εἶναι ὡρισμένα, ἐνῷ τὰ Α' καὶ Β' κινοῦνται ἐπὶ τῶν εὐθειῶν αὐτῶν, ἀλλὰ μένουν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ οὕτως, ὥστε ὁ λόγος $\frac{ΑΑ'}{ΒΒ'}$ νὰ εἶναι ἴσος μὲ $\frac{\mu}{\nu}$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῆς τετάρτης κορυφῆς Μ τοῦ παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου δύο ἐκ τῶν πλευρῶν του εἶναι αἱ ΑΑ' καὶ Α'Β'. Ἔπειτα νὰ χρησιμοποιηθῇ ὁ τόπος αὐτὸς διὰ νὰ

κατασκευασθῇ ἐκείνη ἀπὸ τὰς εὐθείας Α'Β', ἡ ὁποία εἶναι παράλληλος πρὸς μίαν δοθεῖσαν εὐθεῖαν καὶ ἐκείνη ἀπὸ τὰς εὐθείας αὐτὰς διὰ τὰς ὁποίας ἡ Α Β' εἶναι ἐλαχίστη.

1112. (1144). Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων ἑνὸς τραπεζίου, τοῦ ὁποίου μία ἀπὸ τὰς μὴ παραλλήλους πλευράς του εἶναι ὡρισμένη κατὰ τὴν θέσιν καὶ τὸ μέγεθος καὶ τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις ἔχουν δοθέντα μήκη.

1113. (1145). Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα χωρίζουν κατὰ δοθέντα λόγον τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι συνδέουν δοθὲν σημεῖον Β μὲ τὰ διάφορα σημεῖα μιᾶς δοθείσης περιφερείας.

1114. (1146). Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων ἀπὸ τὰ ὁποῖα δύο δοθέντες κύκλοι φαίνονται ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν.

1115. (1147). Ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ εἶναι ὡρισμέναι, ἐνῶ ἡ κορυφὴ Α διαγράφει δοθεῖσαν περιφέρειαν μὲ κέντρον τὸ Β. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ ποδὸς τῆς διχοτομούσης τὴν γωνίαν Β.

1116. (1148). Ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ διατηρεῖται ὅμοιον πρὸς ἑαυτό, ἐνῷ στρέφεται περὶ τὴν κορυφήν του Α (σταθεράν).

1ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῆς κορυφῆς του Γ, ὅταν ἡ κορυφὴ Β γράφῃ δοθεῖσαν εὐθεῖαν x'x.

2ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῆς κορυφῆς του Γ, ὅταν ἡ κορυφή του Β γράφῃ δοθεῖσαν περιφέρειαν Ο.

1117. (1149). Ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ ἡ κορυφὴ Α διατηρεῖται σταθερά, ἐνῷ ἡ κορυφὴ Γ γράφει δοθεῖσαν περιφέρειαν Κ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ κέντρου Μ τῆς περιφερείας τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

1118. (1150). Ἕνα τρίγωνον ΒΓΜ, τὸ ὁποῖον διατηρεῖται ὅμοιον πρὸς ἑαυτό, κινεῖται οὕτως, ὥστε αἱ κορυφαί του Β καὶ Γ γράφουν ἀντιστοίχως δύο εὐθείας παραλλήλους Ε καὶ Ε' Ἐὰν ἡ πλευρὰ ΒΓ διέρχεται ἀπὸ σταθερὸν σημεῖον Α, νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῆς τρίτης κορυφῆς Μ.

1119. (1151). Δίδεται περιφέρεια κέντρου Ο καὶ ἕνα σταθερὸν σημεῖον Α. Φέρομεν μίαν μεταβλητὴν χορδὴν ΑΒ στρεφομένην περὶ τὸ Α καὶ μὲ διάμετρον τὴν ΑΒ γράφομεν περιφέρειαν κύκλου. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν τομῶν τῆς περιφερείας αὐτῆς καὶ τῆς διαμέτρου τῆς Ο, τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΒ.

Γ' Ὁμάς. **1120.** (1152). Δίδεται μία γωνία xOy. Νὰ εὑρεθῇ ἕνα σημεῖον ἐπὶ τῆς Ox καὶ ἕνα σημεῖον Β ἐπὶ τῆς Oy οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι

$$\frac{OA}{OB}=\frac{\mu}{\nu} \quad \text{καὶ} \quad AB=\lambda.$$

1121. (1153). Δίδονται δύο εὐθεῖαι ΟΧ καὶ ΟΥ καὶ ἕνα σημεῖον Σ ἐντὸς τῆς γωνίας ΧΟΥ. Νὰ ἀχθῇ μία τέμνουσα αὐτοῦ, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν Χ εἰς τὸ Α καὶ τὴν Υ εἰς τὸ Β, παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν τρίτην εὐθεῖαν Ζ καὶ τοιαύτη, ὥστε ΣΑ=ΣΒ.

1122. (1154). Δίδονται δύο εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ Α'Β'. Ποῖον μῆκος ἴσον πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο αὐτὰ τμήματα, ὥστε ὁ λόγος τῶν ὑπολοίπων τμημάτων νὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον $\frac{\mu}{\nu}$ δύο δοθέντων τμημάτων.

1123. (1155). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Ρ νὰ ἀχθῇ μία εὐθεῖα, τῆς ὁποίας ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β νὰ εἶναι ἴσος μὲ δοθέντα λόγον $\frac{\mu}{\nu}$.

1124. (1156). Δίδονται δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι Οx καὶ Οy καὶ ἕνα σημεῖον Ρ. Νὰ ἀχθῇ ἀπὸ τὸ Ρ μία εὐθεῖα τέμνουσα τὰς Οx καὶ Οy εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀντιστοίχως καὶ τοιαύτη, ὥστε $\frac{PA}{PB}=\frac{\mu}{\nu}$.

1125. (1157). Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι Οx, Οy, Οz καὶ ἕνα σημεῖον Ρ. Νὰ ἀχθῇ ἀπὸ τὸ Ρ μία τέμνουσα τὰς Οx, Οy, Οz εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ ἀντιστοίχως καὶ τοιαύτη, ὥστε $\frac{AB}{B\Gamma}=\frac{\mu}{\nu}$.

1126. (1158). Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ, νὰ εὑρεθῇ ἕνα σημεῖον Δ τοιοῦτον, ὥστε, ἐὰν ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, νὰ εἶναι $\frac{B\Delta}{\Delta E}=\frac{\mu}{\nu}$, ὅπου μ καὶ ν εἶναι δοθέντα μήκη.

1127. (1159). Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι Ε καὶ Ε' καὶ ἕνα σημεῖον Ρ ἐκτὸς αὐτῶν. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ κοινὴ κάθετος ΑΒ τῶν εὐθειῶν αὐτῶν καὶ τοιαύτη, ὥστε $\frac{PA}{PB}=\frac{\mu}{\nu}$, ὅπου μ καὶ ν εἶναι δοθέντα μήκη.

1128. (1160). Εἰς δοθέντα κύκλον Ο φέρομεν δύο ἀκτῖνας ΟΑ καὶ ΟΒ. Ζητεῖται νὰ ἀχθῇ μία χορδὴ τοῦ κύκλου Ο, ἡ ὁποία νὰ διαιρῆται εἰς τρία ἴσα μέρη ὑπὸ τῶν ἀκτίνων αὐτῶν.

1129. (1161). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ζητεῖται νὰ ἀχθῇ μία εὐθεῖα τοιαύτη, ὥστε αἱ ἀποστάσεις της ἀπὸ τὰς κορυφὰς Α, Β, Γ νὰ εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 1, 3, 5.

1130. (1162). 1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ καὶ αἱ διαγώνιοι ἑνὸς τραπεζίου ὁρίζουν ἐπὶ μιᾶς εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις του τρία διαδοχικὰ τμήματα, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ πρῶτον καὶ τὸ τρίτον εἶναι ἴσα.

2ον. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ παράλληλος αὐτή, ἵνα τὰ τρία αὐτὰ τμήματα εἶναι ἴσα.

1131. (1163). Δίδεται μία γωνία xΟy καὶ μία περιφέρεια Κ. Νὰ ἀχθῇ μία εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν Οx καὶ τοιαύτη, ὥστε τὸ τμῆμα αὐτῆς τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ τῆς Οx καὶ τῆς περιφερείας Κ νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ τμήματος, τοῦ περιλαμβανομένου μεταξὺ τῆς Οx καὶ Οy.

1132. (1164). Δίδονται δύο κύκλοι Ο καὶ Ο' καὶ ἕνα σημεῖον Σ ἐκτὸς αὐτῶν. Νὰ ἀχθοῦν δύο ἀκτῖνες ΟΑ καὶ Ο'Α' παράλληλοι καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς καὶ τοιαῦται, ὥστε ΣΑ=ΣΑ'.

1133. (1165). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Σ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς δοθέντος κύκλου, νὰ ἀχθῇ χορδὴ ΑΣΒ τοιαύτη, ὥστε $\frac{\Sigma A}{A\Gamma}=\frac{\mu}{\nu}$.

ΙΑ' Ὁμάς. **1134.** (1166). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν: τὴν πλευρὰν ΒΓ=α, τὴν ἀπέναντι γωνίαν Α καὶ τὸν λόγον $\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{\mu}{\nu}$ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του.

1135. (1167). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν Α καὶ τὸ ἄθροισμα τῆς βάσεως καὶ τοῦ ἀντιστοίχου ὕψους.

1136. (1168). Νὰ κατασκευυσθῇ ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν: τὸν περιγεγραμμένον κύκλον καὶ τὸ ἄθροισμα τῆς βάσεως καὶ τοῦ ἀντιστοίχου ὕψους.

1137. (1169). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν: τὰς πλευρὰς β, γ καὶ τὴν διχοτόμον δ_α.

1138. (1170). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν: τὴν γωνίαν Δ, τὸ ὕψος $ΑΔ=\upsilon_\alpha$ καὶ τὸν λόγον $\frac{ΔΒ}{ΔΓ}=\frac{\mu}{\nu}$.

(Σχολὴ Εὐελπίδων 1950)

1139. (1171). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν: μίαν πλευράν, τὴν διχοτόμον τῆς ἀπέναντι γωνίας καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του.

1140. (1172). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν: τὴν πλευρὰν $ΒΓ=\alpha$, τὴν διχοτόμον $ΑΔ=\delta_\alpha$ καὶ τὸν λόγον $\frac{ΑΒ}{ΑΓ}=\frac{\mu}{\nu}$ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

1141. (1173). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἐὰν γνωρίζωμεν: τὸν λόγον $\frac{\beta}{\gamma}=k$ δύο πλευρῶν του, τὴν διάμεσον μ_α καὶ τὴν διχοτόμον δ_α.

1142. (1174). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν: τὸ ὕψος $ΑΔ=\upsilon_\alpha$, τὴν διάμεσον $ΑΜ=\mu_\alpha$ καὶ τὸν λόγον $\frac{ΑΒ}{ΑΓ}=\frac{\mu}{\nu}$ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄.

ΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ

1. Ὁρισμοί

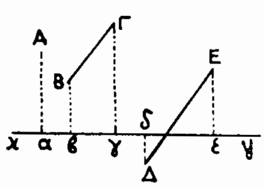
420. Εἰς τὸ κεφάλαιον αὐτὸ θὰ ἐξετάσωμεν τὰς μετρικὰς σχέσεις, αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν γραμμικῶν στοιχείων ἑνὸς τριγώνου, δηλ. τῶν πλευρῶν του, τῶν διαμέσων του, τῶν ὑψῶν του κλπ.

Ὅταν κατωτέρω θὰ ἀναφέρωμεν μίαν μετρικὴν σχέσιν μεταξὺ δύο ἢ περισσοτέρων γραμμικῶν μεγεθῶν, θὰ ἐννοοῦμεν τὴν σχέσιν, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι μετροῦν τὰ μεγέθη αὐτά, ὅταν μετρηθοῦν μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα.

Π.χ. θὰ λέγωμεν: *τὸ τετράγωνον μιᾶς πλευρᾶς ἑνὸς τριγώνου*, ἀντὶ νὰ εἴπωμεν: *τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος μετρεῖ τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς*. Θὰ λέγωμεν τό: *γινόμενον δύο εὐθυγράμμων τμημάτων*, ἀντὶ νὰ εἴπωμεν: *τὸ γινόμενον τῶν δύο ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι μετροῦν τὰ δύο αὐτὰ εὐθύγραμμα τμήματα*.

Διὰ νὰ εὕρωμεν ὅμως τὰς μετρικὰς αὐτὰς σχέσεις εἶναι ἀνάγκη νὰ γνωρίζωμεν μίαν νέαν γεωμετρικὴν ἔννοιαν, *τὴν προβολήν*.

421. Προβολή. Ἔστω μία εὐθεῖα xy καὶ ἕνα σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτῆς *(Σχ. 309)*. Ἀπὸ τὸ Α φέρομεν τὴν κάθετον Αα ἐπὶ τὴν xy. Τὸ σημεῖον α λέγεται ***προβολὴ*** τοῦ σημείου Α ἐπὶ τὴν xy.



Σχ. 309.

Γενικῶς: ***Προβολὴ ἑνὸς σημείου ἐπὶ μίαν εὐθεῖαν xy***, *λέγεται ὁ πούς τῆς καθέτου, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ τὴν xy.*

Ἔστω ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ΒΓ καὶ β καὶ γ αἱ προβολαὶ τῶν ἄκρων του Β καὶ Γ ἐπὶ τὴν xy: τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα βγ λέγεται ***προβολὴ*** τοῦ ΒΓ ἐπὶ τὴν xy.

Γενικῶς: ***Προβολὴ ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ μίαν εὐθεῖαν xy***, *εἶναι τὸ τμῆμα τῆς xy, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν προβολῶν τῶν ἄκρων τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ τὴν xy.*

2. Μετρικαὶ σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου

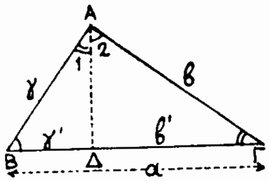
422. Θεώρημα. ***Ἐὰν ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου φέρωμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν:***

1ον. ***Ἡ κάθετος αὐτὴ χωρίζει τὸ δοθὲν τρίγωνον εἰς δύο ἄλλα τρίγωνα, τὰ ὁποῖα εἶναι ὅμοια μεταξύ των καὶ ὅμοια πρὸς τὸ δοθὲν τρίγωνον.***

2ον. ***Ἡ κάθετος αὐτὴ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν δύο τμημάτων, τὰ ὁποῖα ὁρίζει ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης.***

3ον. ***Ἑκάστη τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ ὁλοκλήρου τῆς ὑποτεινούσης καὶ τῆς προβολῆς της ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ *(Σχ. 310).*



Σχ. 310.

Ὑπόθ.	$\widehat{A}=90^\circ$ ΑΔ ⊥ ΒΓ
Συμπ.	*1ον.* Τὰ τρ. ΑΔΒ, ΑΔΓ, ΑΒΓ ὅμοια μεταξύ των. *2ον.* $\overline{ΑΔ}^2=ΔΒ\times ΔΓ$ *3ον.* $\begin{cases}\overline{ΑΓ}^2=ΒΓ\times ΔΓ\\ \overline{ΑΒ}^2=ΒΓ\times ΒΔ\end{cases}$

Ἀπὸ τὴν κορυφήν του Α φέρομεν τὴν κάθετον ΑΔ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ.

Συμπέρασμα 1ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ εἶναι ὅμοια μεταξύ των καὶ ὅμοια πρὸς τὸ δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ.

Ἀπόδειξις: Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΒΓ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν Β κοινήν· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ γων$Α_1$=γωνΓ.

Ὁμοίως τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΓ καὶ ΑΒΓ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν Γ κοινήν· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ γων.$Α_2$=γων.Β.

Ἐπειδὴ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ εἶναι ὅμοια πρὸς τὸ ΑΒΓ εἶναι ὅμοια καὶ μεταξύ των.

Συμπέρασμα 2ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\overline{ΑΔ}^2=ΔΒ\times ΔΓ$.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ εἶναι ὅμοια, αἱ ὁμόλογοι πλευραί των εἶναι ἀνάλογοι· δηλ. θὰ εἶναι

$$\frac{ΑΔ}{ΔΓ}=\frac{ΔΒ}{ΑΔ} \quad ἢ \quad \boxed{\overline{ΑΔ}^2=ΔΒ\times ΔΓ}.$$

Ὥστε ἡ κάθετος ΑΔ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο τμημάτων ΔΒ καὶ ΔΓ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ.

Συμπέρασμα 3ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\overline{AB}^2 = B\Gamma \times B\Delta \quad \text{καὶ} \quad \overline{A\Gamma}^2 = B\Gamma \times \Delta\Gamma.$$

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΒΓ εἶναι ὅμοια, αἱ ὁμόλογοι πλευραί των θὰ εἶναι ἀνάλογοι· δηλ. θὰ εἶναι

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{B\Delta}{AB} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\overline{AB}^2 = B\Gamma \times B\Delta}$$

Ὁμοίως ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΔΓ καὶ ΑΒΓ ἔχομεν

$$\frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{\Delta\Gamma}{A\Gamma} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\overline{A\Gamma}^2 = B\Gamma \times \Delta\Gamma}$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν ἀπὸ τὴν κορυφὴν....***

423. Πόρισμα I. ***Εἰς ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὁ λόγος τῶν τετραγώνων τῶν καθέτων πλευρῶν του εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν προβολῶν των ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.***

Πράγματι· ἐδείξαμεν (§ 422. 3ον) ὅτι

$$\overline{AB}^2 = B\Gamma \times B\Delta \quad \text{καὶ} \quad \overline{A\Gamma}^2 = B\Gamma \times \Delta\Gamma.$$

Διαιροῦμεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A\Gamma}^2} = \frac{B\Gamma \times B\Delta}{B\Gamma \times \Delta\Gamma} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A\Gamma}^2} = \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\gamma^2}{\beta^2} = \frac{\gamma'}{\beta'}.$$

424. Πόρισμα II. ***Εἰς ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ γινόμενον τῶν δύο καθέτων πλευρῶν του εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς ὑποτεινούσης ὑπὸ τὸ ἀντίστοιχον ὕψος του.***

Πράγματι ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ ἔχομεν

$$\frac{B\Gamma}{AB} = \frac{A\Gamma}{A\Delta} \quad \text{ἢ} \quad B\Gamma \times A\Delta = A\Gamma \times AB \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\alpha\upsilon = \beta\gamma}$$

425. Θεώρημα τοῦ Πυθαγόρα. ***Τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο καθέτων πλευρῶν του.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (γωνία Α ὀρθὴ) *(Σχ. 310)*.

Ὑπόθ.	$\widehat{A} = 90^\circ$
Συμπ.	$\overline{B\Gamma}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{A\Gamma}^2$

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\overline{B\Gamma}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{A\Gamma}^2.$$

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α φέρομεν τὴν κάθετον ΑΔ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ.

Γνωρίζομεν (§ 422. 3ον), ὅτι

$$\overline{AB}^2 = B\Gamma \times B\Delta, \quad \overline{A\Gamma}^2 = B\Gamma \times \Delta\Gamma.$$

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\overline{AB}^2+\overline{A\Gamma}^2=B\Gamma\times B\Delta+B\Gamma\times\Delta\Gamma$$

ἢ $\overline{AB}^2+\overline{A\Gamma}^2=B\Gamma\times(B\Delta+\Delta\Gamma)$ ἢ $\overline{AB}^2+\overline{A\Gamma}^2=B\Gamma\times B\Gamma=B\Gamma^2$.

Ὥστε εἶναι $\overline{B\Gamma}^2=\overline{AB}^2+\overline{A\Gamma}^2$ ἢ $\boxed{\alpha^2=\beta^2+\gamma^2}$ (1)

426. Πόρισμα. Ἂν ἀφαιρέσωμεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος (1) τὸ γ^2 λαμβάνομεν

$$\alpha^2-\gamma^2=\beta^2 \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\beta^2=\alpha^2-\gamma^2}.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι $\boxed{\gamma^2=\alpha^2-\beta^2}$.

Ὥστε: ***Τὸ τετράγωνον μιᾶς καθέτου πλευρᾶς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ἠλαττωμένον κατὰ τὸ τετράγωνον τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς.***

427. Ἀνακεφαλαίωσις. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ β' καὶ γ' τὰς προβολὰς τῶν καθέτων πλευρῶν β καὶ γ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ *(Σχ. 310)* ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν α καὶ μὲ υ τὸ ὕψος του ΑΔ, θὰ εἶναι:

$$\boxed{\alpha=\beta'+\gamma'},\quad \boxed{\beta^2=\alpha\beta'},\quad \boxed{\gamma^2=\alpha\gamma'},\quad \boxed{\upsilon^2=\beta'\gamma'},$$

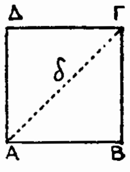
$$\boxed{\alpha^2=\beta^2+\gamma^2},\quad \boxed{\beta\gamma=\alpha\upsilon}.$$

428. Ἐφαρμογαί. Πρόβλημα. ***Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαγώνιος ἑνὸς τετραγώνου, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν πλευράν του.***

Λύσις. Ἔστω τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ *(Σχ. 311)*· ἐὰν παραστήσωμεν μὲ α τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου καὶ μὲ δ τὴν διαγώνιόν του ΑΓ, θὰ ἔχωμεν ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Πυθαγόρα

$$\delta^2=\alpha^2+\alpha^2 \quad \text{ἢ} \quad \delta^2=2\alpha^2$$

ἄρα θὰ εἶναι $\boxed{\delta=\alpha\sqrt{2}}$



Σχ. 311.

Παρατήρησις. Ἡ ἰσότης $\delta=\alpha\sqrt{2}$ γράφεται

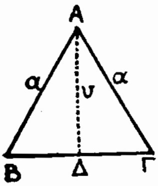
$$\frac{\delta}{\alpha}=\sqrt{2}.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ λόγος τῆς διαγωνίου δ ἑνὸς τετραγώνου πρὸς τὴν πλευράν του α ἐκφράζεται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ $\sqrt{2}$· Ἐπειδὴ δὲν ὑπάρχει ἀριθμὸς ἀκέραιος ἢ κλασματικός, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον νὰ ἰσοῦναι μὲ 2, συνάγομεν, ὅτι:

Ἡ διαγώνιος καὶ ἡ πλευρὰ ἑνὸς τετραγώνου δὲν ἔχουν κανένα κοινὸν μέτρον, δηλ. εἶναι ἀσύμμετρα μεγέθη μεταξύ των.

429. Πρόβλημα. ***Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευράν του.***

Ἔστω τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ (*Σχ. 312*) πλευρᾶς α· φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ=υ.



Σχ. 312.

Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΒ, ἔχομεν

$$\upsilon^2=\alpha^2-\overline{\text{ΒΔ}}^2 \qquad (2)$$

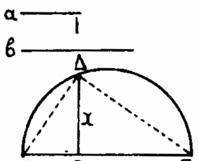
Ἐπειδὴ $\text{ΒΔ}=\frac{\alpha}{2}$, ὁπότε $\overline{\text{ΒΔ}}^2=\frac{\alpha^2}{4}$, ἡ ἰσότης (1) γράφεται

$$\upsilon^2=\alpha^2-\frac{\alpha^2}{4}=\frac{4\alpha^2-\alpha^2}{4}=\frac{3\alpha^2}{4}.$$

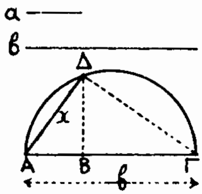
Ἀπὸ αὐτὴν λαμβάνομεν $\upsilon=\sqrt{\frac{3\alpha^2}{4}}$ ἢ $\boxed{\upsilon=\frac{\alpha}{2}\sqrt{3}}$

430. Πρόβλημα. ***Νὰ κατασκευασθῇ ἡ μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν εὐθειῶν α καὶ β.***

1η Μέθοδος. Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν δύο διαδοχικὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΒΓ (*Σχ. 313*) ἴσα ἀντιστοίχως μὲ τὰς δοθείσας εὐθείας α καὶ β. Μὲ διάμετρον τὴν ΑΓ γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν· ἀπὸ τὸ σημεῖον Β φέρομεν τὴν κάθετον ΒΔ ἐπὶ τὴν ΑΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Δ. Λέγομεν, ὅτι ἡ ΒΔ εἶναι ἡ ζητουμένη μέση ἀνάλογος τῶν εὐθειῶν α καὶ β.



Σχ. 313.



Σχ 314.

Πράγματι· ἐὰν φέρωμεν τὰς χορδὰς ΑΔ καὶ ΓΔ, τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΔΓ εἶναι ὀρθογώνιον, ὡς ἐγγεγραμμένον εἰς ἡμικύκλιον καὶ ἑπομένως τὸ ὕψος ΔΒ εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῶν δύο τμημάτων ΑΒ καὶ ΒΓ τῆς ὑποτεινούσης ΑΓ (§ 422. 2ον)· δηλ. εἶναι $\overline{\text{ΒΔ}}^2=\text{ΑΒ}\times\text{ΒΓ}$ ἢ $\overline{\text{ΒΔ}}^2=\alpha\times\beta$.

2α Μέθοδος. Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν τὰ τμήματα ΑΒ=α καὶ ΑΓ=β (*Σχ. 314*). Μὲ διάμετρον τὴν ΑΓ γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν· ἀπὸ τὸ σημεῖον Β φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Δ. Φέρομεν τὴν χορδὴν ΑΔ, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.

Πράγματι· ἐὰν φέρωμεν τὴν χορδὴν ΔΓ, σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΓ, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ κάθετος πλευρὰ ΑΔ εἶναι μέση

ἀνάλογος μεταξὺ τῆς ὑποτεινούσης ΑΓ καὶ τῆς προβολῆς της ΑΒ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν· δηλ. εἶναι

$$\overline{ΑΔ}^2 = ΑΓ \times ΑΒ \quad ἢ \quad \overline{ΑΔ}^2 = β \times α.$$

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. 1143. (1175). Ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (Α ὀρθὴ) δίδονται:

1ον.	β= 8 ἑκ.,	γ = 6 ἑκ.	Νὰ ὑπολογισθοῦν	α,	β',	γ'	καὶ	υ
2ον.	α=10 ἑκ.,	γ = 7 ἑκ.	»	»	β,	β',	γ'	καὶ	υ
3ον.	α=50 ἑκ.,	β'=32 ἑκ.	»	»	β,	γ,	γ'	καὶ	υ
4ον.	α=10 ἑκ.,	υ = 4 ἑκ.	»	»	β,	γ,	β'	καὶ	γ'
5ον.	α=13 ἑκ.,	β =12 ἑκ.	»	»	γ,	β',	γ'	καὶ	υ
6ον.	β= 6 μ.,	β'= 4 μ.	»	»	α,	γ,	γ'	καὶ	υ
7ον.	β=80 ἑκ.,	υ =48 ἑκ.	»	»	α,	γ,	β'	καὶ	γ'
8ον.	β'=96 ἑκ.,	γ'=54 ἑκ.	»	»	α,	β,	γ	καὶ	υ
9ον.	β'=64 ἑκ.,	υ =48 ἑκ.	»	»	α,	β,	γ	καὶ	γ'
10ον.	β =60 ἑκ.,	γ'=22 ἑκ.	»	»	α,	γ,	β'	καὶ	υ

1144. (1176). Δίδονται δύο μήκη α καὶ β, (α>β) καὶ κατασκευάζομεν ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς καθέτους πλευρὰς τὰ μήκη $\frac{α-β}{2}$ καὶ $\sqrt{αβ}$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὑποτείνουσά του.

1145. (1177). Ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α ἑνὸς τετραγώνου, νὰ ὑπολογισθῇ: 1ον ἡ διαγώνιός του δ.

2ον ἡ διαγώνιος δ' τοῦ τετραγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν τὴν διαγώνιον δ τοῦ πρώτου.

1146. (1178). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ α ἑνὸς τετραγώνου, ἂν γνωρίζωμεν τὴν διαγώνιόν του δ.

1147. (1179). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ ἑνὸς τετραγώνου, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ διαγώνιος καὶ ἡ πλευρά του ἔχουν ἄθροισμα 19,312 μέτρ.

1148. (1180). Ἡ περίμετρος ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι 187,50 μετρ. καὶ ἡ βάσις του 52 μέτρ· Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος του.

1149. (1181). Δίδεται ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α. Νὰ ὑπολογισθῇ: 1ον τὸ ὕψος του υ.

2ον τὸ ὕψος υ' τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ὕψος υ τοῦ πρώτου.

1150. (1182). Αἱ διαγώνιοι ἑνὸς ρόμβου εἶναι 40 μέτρα καὶ 90 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρά του καὶ ἡ περίμετρός του.

1151. (1183). Ἡ πλευρὰ ἑνὸς ρόμβου εἶναι 85 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαγώνιοί του, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ μία εἶναι τὰ τρία πέμπτα τῆς ἄλλης.

1152. (1184). Ἑνὸς τραπεζίου ΑΒΓΔ, ὀρθογωνίου εἰς Α καὶ Δ, δίδονται αἱ πλευραὶ ΑΒ=15 ἑκ., ΓΔ=10 ἑκ., ΑΔ=12 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ΒΓ.

1153. (1185). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος καὶ αἱ διαγώνιοι ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τραπεζίου ΑΒΓΔ, ἂν γνωρίζωμεν, τὰς βάσεις του ΑΒ=50 ἑκ., ΓΔ=14 ἑκ. καὶ τὰς ἄλλας πλευράς του ΒΓ=ΔΑ=30 ἑκ.

1154. (1186). Εἰς ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἡ βάσις του καὶ τὸ ὕψος του ἔχουν τὸ αὐτὸ μῆκος 8 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον.

Β' Ὁμάς. **1155.** (1187). Εἰς ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, (ΑΒ=ΑΓ) φέρομεν τὸ ὕψος ΒΒ'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\overline{\text{ΑΒ}}^2+\overline{\text{ΒΓ}}^2+\overline{\text{ΑΓ}}^2=\overline{\text{ΓΒ}'}^2+2\overline{\text{ΑΒ}'}^2+3\overline{\text{ΒΒ}'}^2.$$

1156. (1188). Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (Α=90°): Ἀπὸ τὸ μέσον Δ τῆς ΑΒ φέρομεν τὴν κάθετον ΔΕ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\overline{\text{ΕΓ}}^2-\overline{\text{ΕΒ}}^2=\overline{\text{ΑΓ}}^2.$$

1157. (1189). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α· φέρομεν τὸ ὕψος του ΑΔ καὶ τὰς καθέτους ΔΕ καὶ ΔΖ ἐπὶ τὰς πλευράς του ΑΒ καὶ ΑΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\frac{\overline{\text{ΑΓ}}^3}{\overline{\text{ΑΒ}}^3}=\frac{\text{ΓΖ}}{\text{ΒΕ}}.$$

1158. (1190). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι μεταξὺ τῶν δύο καθέτων πλευρῶν β καὶ γ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ καὶ τοῦ ὕψους του υ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν α ὑπάρχει ἡ σχέσις

$$\frac{1}{υ^2}=\frac{1}{β^2}+\frac{1}{γ^2}.$$

1159. (1191). Ἐὰν δύο διάμεσοι τριγώνου τέμνωνται καθέτως, νὰ αποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς τρίτης διαμέσου.

1160. (1192) Ἐὰν ἀπό ἕνα σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς ὀρθογωνίου ΒΓΔ φέρωμεν εὐθείας πρὸς τὰς κορυφάς του, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι

$$\overline{\text{ΟΑ}}^2+\overline{\text{ΟΓ}}^2=\overline{\text{ΟΒ}}^2+\overline{\text{ΟΔ}}^2.$$

1161. (1193). Εἰς ἕνα τεταρτοκύκλιον ΟΑΒ φέρομεν τὴν διχοτόμον ΟΔ τῆς γωνιας ΑΟΒ. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Γ τοῦ τόξου ΑΒ φέρομεν τὴν ΓΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΑ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΟΔ εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\overline{\text{ΟΑ}}^2=\overline{\text{ΓΕ}}^2+\overline{\text{ΖΕ}}^2.$$

1162. (1194). Δίδεται ἡμιπεριφέρεια Ο διαμέτρου ΑΒ. Μὲ διάμετρον τὴν ΑΟ γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν ἐντὸς τῆς πρώτης. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Γ τῆς ΑΟ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν μικροτέραν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Δ καὶ τὴν ἄλλην εἰς τὸ Ε. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\overline{\text{ΑΕ}}^2=2\overline{\text{ΑΔ}}^2$.

1163. (1195). Αἱ πλευραὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (Α=90°) εἶναι ΒΓ=α, ΓΑ=β καὶ ΑΒ=γ. Ἐὰν Δ εἶναι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ τρίγωνον καὶ τῆς ὑποτεινούσης του, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\text{ΔΒ}\times\text{ΔΓ}=\frac{βγ}{2}.$$

1164. (1196). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος ἑνὸς σημείου της Ο λαμβάνομεν τμήματα ΟΑ=α, ΟΒ=3α καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον Α φέρομεν μίαν κάθετον ΑΓ=2α ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν αὐτήν. Μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα τὴν ΟΓ γράφομεν περιφέρειαν κύκλου, ἡ ὁποία τέμνει τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ'. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ΑΜ, ΒΜ, ΑΜ', ΒΜ' καὶ νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ ἰσότητητες $\overline{\text{ΑΜ}}^2=\text{ΑΒ}\times\text{ΜΒ}$ καὶ $\overline{\text{ΑΜ}'}^2=\text{ΑΒ}\times\text{Μ'Β}$.

1165. (1197). Εἰς ἕνα κύκλον Ο ἀκτῖνος R φέρομεν δύο χορδὰς καθέτους ΑΒ, ΓΔ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Σ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι:

$$\overline{\text{ΣΑ}}^2+\overline{\text{ΣΒ}}^2+\overline{\text{ΣΓ}}^2+\overline{\text{ΣΔ}}^2=4R^2.$$

Γ' Ὁμάς. **1166.** (1198). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ ἡ γωνία Β εἶναι ἀμβλεῖα, τὸ δὲ ὕψος ΑΔ εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῶν ΔΒ καὶ ΔΓ· νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\widehat{B}-\widehat{\Gamma}=1 \text{ ὀρθή}.$$

1167. (1199). *Θεώρημα τοῦ Carnot.* Αἱ κάθετοι, αἱ ὁποῖοι ἄγονται ἀπὸ ἕνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς ἑνὸς τριγώνου, ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου αὐτοῦ, ὁρίζουν 6 τμήματα τοιαῦτα, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τριῶν μὴ διαδοχικῶν τμημάτων εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν ἄλλων τμημάτων.

1168. (1200). Δίδεται ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰς ΑΔ$=\alpha$, ΑΒ$=\alpha\sqrt{2}$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ κάθετοι ἐπὶ τὴν διαγώνιον ΒΔ, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὰς κορυφὰς Α καὶ Γ διαιροῦν τὴν διαγώνιον αὐτὴν εἰς τρία ἴσα μέρη.

1169. (1201). Ἐὰν αἱ διαγώνιοι ἑνὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου εἶναι κάθετοι, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν του εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του.

1170. (1202). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ γινόμενον τῶν δύο βάσεων ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τραπεζίου, περιγεγραμμένου περὶ κύκλον, εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου.

Δ' Ὁμάς. **1171.** (1203). Ἐὰν εἰς ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ἡ μία κάθετος πλευρά του εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης, τὸ ὕψος διαιρεῖ τὴν ὑποτείνουσαν εἰς δύο τμήματα ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἕνα εἶναι τετραπλάσιον τοῦ ἄλλου.

1172. (1204). Ἐὰν αἱ διαγώνιοι ἑνὸς ὀρθογωνίου τραπεζίου εἶναι κάθετοι, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ὕψος του εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῶν βάσεών του.

1173. (1205). Ὅταν πολλαὶ χορδαὶ ΑΜ, ΑΜ′, ΑΜ″, . . . ἄγωνται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Α μιᾶς περιφερείας, τὰ τετράγωνα τῶν χορδῶν αὐτῶν εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰς προβολάς των ἐπὶ τὴν διάμετρον, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Α.

1174. (1206). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι κάθε τρίγωνον ΑΒΓ, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ γωνία Β εἶναι ὀξεῖα καὶ ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς πλευρᾶς ΒΓ καὶ τῆς προβολῆς της ἐπὶ τὴν ΒΓ, εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α.

1175. (1207). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι κάθε τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον αἱ γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι ὀξεῖαι καὶ ὅπου τὸ ὕψος ΑΔ εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῶν δύο τμημάτων, τὰ ὁποῖα ὁρίζει ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ, εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α.

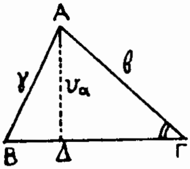
1176. (1208). Δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη των εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν διαμέτρων των.

3. Μετρικαὶ σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων τυχόντος τριγώνου

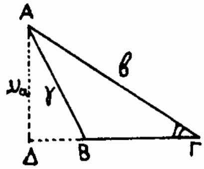
431. Θεώρημα I. ***Τὸ τετράγωνον πλευρᾶς τριγώνου, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι ὀξείας γωνίας, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του ἠλαττωμένον κατὰ τὸ διπλάσιον γινόμενον τῆς μιᾶς ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτῶν ἐπὶ τὴν***

προβολὴν τῆς ἄλλης πλευρᾶς ἐπ' αὐτήν.

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ *(Σχ. 315)* καὶ ΑΒ μία πλευρά του, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς ὀξείας γωνίας Γ. Φέρομεν τὴν κάθετον ΑΔ ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ.



Σχ. 315.



Σχ. 316.

Ὑπόθ.	$\widehat{\Gamma}$=ὀξεῖα
Συμπ.	$\overline{AB}^2=\overline{B\Gamma}^2+\overline{A\Gamma}^2-2B\Gamma\times\Delta\Gamma$

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\overline{AB}^2=\overline{B\Gamma}^2+\overline{A\Gamma}^2-2B\Gamma\times\Delta\Gamma.$$

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΒ ἔχομεν, κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Πυθαγόρα,

$$\overline{AB}^2=\overline{B\Delta}^2+\overline{A\Delta}^2 \qquad (1)$$

Ἀλλὰ εἰς τὸ σχῆμα 315 εἶναι $B\Delta=B\Gamma-\Delta\Gamma$ (2)

καὶ εἰς τὸ σχῆμα 316 εἶναι $B\Delta=\Delta\Gamma-B\Gamma$ (3)

Ὑψοῦμεν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὰ δύο μέλη τῶν ἰσοτήτων (2) καὶ (3) καὶ λαμβάνομεν, κατὰ τὴν ἀξιοσημείωτον ταυτότητα $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$,

$$\overline{B\Delta}^2=\overline{B\Gamma}^2-2B\Gamma\times\Delta\Gamma+\overline{\Delta\Gamma}^2.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὸ $\overline{B\Delta}^2$ μὲ τὸ ἴσον του καὶ ἔχομεν

$$\overline{AB}^2=\overline{B\Gamma}^2-2B\Gamma\times\Delta\Gamma+\overline{\Delta\Gamma}^2+\overline{A\Delta}^2 \qquad (4)$$

Ἀλλὰ ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΓ ἔχομεν

$$\overline{A\Delta}^2+\overline{\Delta\Gamma}^2=\overline{A\Gamma}^2.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (4) τὸ ἄθροισμα $\overline{\Delta\Gamma}^2+\overline{A\Delta}^2$ μὲ τὸ ἴσον του $\overline{A\Gamma}^2$ καὶ ἔχομεν

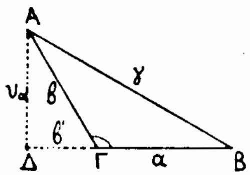
$$\overline{AB}^2=\overline{B\Gamma}^2-2B\Gamma\times\Delta\Gamma+\overline{A\Gamma}^2.$$

ἢ $\boxed{\overline{AB}^2=\overline{B\Gamma}^2+\overline{A\Gamma}^2-2B\Gamma\times\Delta\Gamma}$ ἢ $\boxed{\gamma^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta'}$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Τὸ τετράγωνον πλευρᾶς....***

432. Θεώρημα II. ***Τὸ τετράγωνον πλευρᾶς τριγώνου, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι ἀμβλείας γωνίας, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του, ηὐξημένον κατὰ τὸ διπλάσιον γινόμενον τῆς μιᾶς ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτῶν ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς ἄλλης ἐπ' αὐτήν.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ *(Σχ. 317)* καὶ ΑΒ μία πλευρά του, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς ἀμβλείας γωνίας Γ· φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΒΓ εἰς τὸ Δ.



Σχ. 317.

Ὑπόθ.	$\widehat{\Gamma} > 90^\circ$
Συμπ.	$\overline{AB}^2 = \overline{B\Gamma}^2 + \overline{A\Gamma}^2 + 2B\Gamma \times \Gamma\Delta$

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν ὅτι

$$\overline{AB}^2 = \overline{B\Gamma}^2 + \overline{A\Gamma}^2 + 2B\Gamma \times \Gamma\Delta.$$

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΒ ἔχομεν, κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Πυθαγόρα, $\overline{AB}^2 = \overline{B\Delta}^2 + \overline{A\Delta}^2$ (1).

Ἀλλὰ ΒΔ=ΒΓ+ΓΔ. Ὑψοῦμεν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὰ δύο μέλη τῆς τελευταίας ἰσότητος καὶ λαμβάνομεν, κατὰ τὴν ἀξιοσημείωτον ταυτότητα $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$,

$$\overline{B\Delta}^2 = \overline{B\Gamma}^2 + 2B\Gamma \times \Gamma\Delta + \overline{\Gamma\Delta}^2.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὸ $\overline{B\Delta}^2$ μὲ τὸ ἴσον του καὶ ἔχομεν $\overline{AB}^2 = \overline{B\Gamma}^2 + 2B\Gamma \times \Gamma\Delta + \overline{\Gamma\Delta}^2 + \overline{A\Delta}^2$ (2).

Ἀλλὰ ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΓ ἔχομεν

$$\overline{\Gamma\Delta}^2 + \overline{A\Delta}^2 = \overline{A\Gamma}^2.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (2) τὸ ἄθροισμα $\overline{\Gamma\Delta}^2 + \overline{A\Delta}^2$ μὲ τὸ ἴσον του $\overline{A\Gamma}^2$ καὶ ἔχομεν $\overline{AB}^2 = \overline{B\Gamma}^2 + 2B\Gamma \times \Gamma\Delta + \overline{A\Gamma}^2$.

ἢ $\boxed{\overline{AB}^2 = \overline{B\Gamma}^2 + \overline{A\Gamma}^2 + 2B\Gamma \times \Gamma\Delta}$ ἢ $\boxed{\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta'}$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Τὸ τετράγωνον πλευρᾶς. . . .***

433. Παρατήρησις. Ἔστωσαν α, β, γ αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ· ἀπὸ τὰ θεωρήματα τῶν § 425, 431, 432 συνάγομεν, ὅτι

1ον. Ἐὰν ἡ γωνία Α εἶναι ὀρθή, θὰ εἶναι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ (Θεώρημα τοῦ Πυθαγόρα).

2ον. Ἐὰν ἡ γωνία Α εἶναι ὀξεῖα, θὰ εἶναι $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$ (Θεώρημα Ι).

3ον. Ἐὰν ἡ γωνία Α εἶναι ἀμβλεῖα, θὰ εἶναι $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ (Θεώρημα ΙΙ).

Ἀντιστρόφως:

1ον. Ἐὰν $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, ἡ γωνία Α εἶναι ὀρθή.

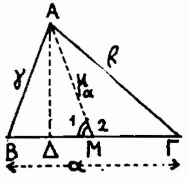
2ον. Ἐὰν $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, ἡ γωνία Α εἶναι ὀξεῖα.

3ον. Ἐὰν $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$, ἡ γωνία Α εἶναι ἀμβλεῖα.

Ἀσκήσεις: 1177, 1178, 1179, 1180, 1181.

434. Θεώρημα τῶν διαμέσων τριγώνου. ***Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ διπλάσιον τετράγωνον τῆς διαμέσου, ἡ ὁποία περιέχεται μεταξὺ τῶν δύο αὐτῶν πλευρῶν, ηὐξημένον κατὰ τὸ διπλάσιον τετράγωνον τοῦ ἡμίσεως τῆς τρίτης πλευρᾶς.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ *(Σχ. 318)* καὶ ΑΜ μία διάμεσός του.



Σχ. 318.

Ὑπόθ.	ΑΜ=διάμεσος
Συμπ.	$\overline{AB}^2+\overline{A\Gamma}^2=2\overline{AM}^2+2\overline{BM}^2$

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\overline{AB}^2+\overline{A\Gamma}^2=2\overline{AM}^2+2\overline{BM}^2.$$

Ἀπόδειξις: Ἡ διάμεσος ΑΜ δὲν εἶναι γενικῶς κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΒΓ. Ἐπομένως αἱ γωνίαι M_1 καὶ M_2, τὰς ὁποίας σχηματίζει μὲ τὴν ΒΓ εἶναι ἄνισοι· ἐπειδὴ δὲ αἱ γωνίαι M_1 καὶ M_2 εἶναι παραπληρωματικαί, ἡ μία θὰ εἶναι ὀξεῖα καὶ ἡ ἄλλη ἀμβλεῖα· ἔστω ὅτι ἡ M_1 εἶναι ὀξεῖα, ὁπότε ἡ M_2 θὰ εἶναι ἀμβλεῖα.

Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ· ἡ ΔΜ εἶναι ἡ προβολὴ τῆς διαμέσου ΑΜ ἐπὶ τὴν ΑΓ.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΜ ἡ πλευρὰ ΑΒ κεῖται ἀπέναντι τῆς ὀξείας γωνίας M_1 καὶ ἐπομένως, κατὰ τὸ θεώρημα τῆς § 431, θὰ εἶναι

$$\overline{AB}^2=\overline{AM}^2+\overline{BM}^2-2BM\cdot\Delta M \qquad (1).$$

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΜΓ ἡ πλευρὰ ΑΓ κεῖται ἀπέναντι τῆς ἀμβλείας γωνίας M_2 καὶ ἐπομένως, κατὰ τὸ θεώρημα τῆς § 432, θὰ εἶναι

$$\overline{A\Gamma}^2=\overline{AM}^2+\overline{M\Gamma}^2+2M\Gamma\cdot\Delta M.$$

Ἐπειδὴ ΜΓ=ΒΜ, ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται

$$\overline{A\Gamma}^2=\overline{AM}^2+\overline{BM}^2+2BM\cdot\Delta M \qquad (2).$$

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\boxed{\overline{AB}^2+\overline{A\Gamma}^2=2\overline{AM}^2+2\overline{BM}^2} \qquad (3)$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων....***

Σημ. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ α, β, γ τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ μὲ $\mu_\alpha, \mu_\beta, \mu_\gamma$ τὰς διαμέσους του, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὰς κορυφὰς Α, Β, Γ ἀντιστοίχως, ἡ ἰσότης (3) γράφεται

$$\gamma^2+\beta^2=2\mu_\alpha^2+2\cdot\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \qquad \boxed{\gamma^2+\beta^2=2\mu_\beta^2+\frac{\alpha^2}{2}}$$

Ἐργαζόμενοι ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

$$\boxed{\alpha^2+\beta^2=2\mu_\gamma^2+\frac{\gamma^2}{2}} \quad \text{καὶ} \quad \boxed{\alpha^2+\gamma^2=2\mu_\beta^2+\frac{\beta^2}{2}}.$$

435. 2ον Θεώρημα τῶν διαμέσων τριγώνου. Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὴν ἰσότητα (1) ἀπὸ τὴν ἰσότητα (2) τῆς § 434 λαμβάνομεν

$$\overline{ΑΓ}^2-\overline{ΑΒ}^2=4ΒΜ\times ΔΜ \qquad (3)$$

Ἐπειδὴ $4ΒΜ=2\cdot 2ΒΜ=2ΒΓ$, ἡ ἰσότης (3) γράφεται

$$\boxed{\overline{ΑΓ}^2-\overline{ΑΒ}^2=2ΒΓ\times ΔΜ}.$$

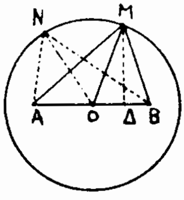
Ὥστε: ***Ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴση μὲ τὸ διπλάσιον γινόμενον τῆς τρίτης πλευρᾶς ἐπὶ τὴν προβολὴν ἐπ' αὐτήν, τῆς διαμέσου, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν τρίτην πλευράν.***

Ἀσκήσεις: 1182, 1183, 1184, 1185, 1186.

436. Ἐφαρμογή. Θεώρημα. ***Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεών των ἀπὸ δύο ὡρισμένα σημεῖα Α καὶ Β εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ k^2, εἶναι μία περιφέρεια κύκλου, ἡ ὁποία ἔχει τὸ κέντρον της εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας ΑΒ.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν Α καὶ Β *(Σχ. 319)* τὰ δοθέντα σημεῖα καὶ Μ ἕνα σημεῖον τοῦ τόπου.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ Μ κεῖται ἐπὶ περιφερείας κύκλου.



Σχ. 319.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὰς εὐθείας ΜΑ καὶ ΜΒ. Ἐπειδὴ τὸ Μ εἶναι, ἐξ ὑποθέσεως, σημεῖον τοῦ τόπου πρέπει νὰ εἶναι

$$\overline{ΜΑ}^2+\overline{ΜΒ}^2=k^2 \qquad (1)$$

Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ ἔστω Ο τὸ μέσον της. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΜΟ, ἡ ὁποία εἶναι διάμεσος τοῦ τριγώνου ΜΑΒ.

Κατὰ τὸ θεώρημα τῶν διαμέσων τριγώνου θὰ εἶναι

$$\overline{ΜΑ}^2+\overline{ΜΒ}^2=2\overline{ΜΟ}^2+2\overline{ΑΟ}^2 \qquad (2)$$

Ἀλλὰ ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν καὶ τὴν ἰσότητα (1). Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι

$$k^2=2\overline{ΜΟ}^2+2\overline{ΑΟ}^2 \quad \text{ἢ} \quad 2\overline{ΜΟ}^2=k^2-2\overline{ΑΟ}^2 \quad \text{ἢ} \quad \overline{ΜΟ}^2=\frac{k^2}{2}-\overline{ΑΟ}^2.$$

Ἐπειδὴ $AO=\frac{AB}{2}$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται

$$\overline{MO}^2=\frac{k^2}{2}-\frac{\overline{AB}^2}{4}=\text{σταθερόν},\quad \text{ἄρα}\quad MO=\sqrt{\frac{k^2}{2}-\frac{\overline{AB}^2}{4}}$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ τόπου ἀπέχει ἀπὸ τὸ μέσον Ο τῆς εὐθείας ΑΒ ἀπόστασιν σταθερὰν καὶ ἴσην μὲ $\sqrt{\frac{k^2}{2}-\frac{\overline{AB}^2}{4}}$· ἄρα τὸ Μ κεῖται ἐπὶ περιφερείας κύκλου, ἡ ὁποία ἔχει κεντρον τὸ μέσον Ο τῆς ΑΒ καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ $\sqrt{\frac{k^2}{2}-\frac{\overline{AB}^2}{4}}$

Ἀντιστρόφως. Θὰ δείξωμεν, ὅτι κάθε σημεῖον τῆς περιφερείας αὐτῆς εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.

Ὑπόθεσις: Ἔστω Ν τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας αὐτῆς· φέρομεν τὰς εὐθείας ΝΑ καὶ ΝΒ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\overline{NA}^2+\overline{NB}^2=k^2$.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΝΟ· ἡ ΝΟ εἶναι διάμεσος τοῦ τριγώνου ΝΑΒ καὶ ἑπομένως κατὰ τὸ θεώρημα τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου θὰ εἶναι

$$\overline{NA}^2+\overline{NB}^2=2\overline{NO}^2+2\overline{AO}^2 \quad \text{ἢ} \quad \overline{NA}^2+\overline{NB}^2=2\overline{NO}^2+\frac{\overline{AB}^2}{2} \quad (3)$$

Ἡ ΝΟ εἶναι ἀκτὶς τοῦ κύκλου Ο καὶ ἑπομένως εἶναι ἴση μὲ $\sqrt{\frac{k^2}{2}-\frac{\overline{AB}^2}{4}}$. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (3) τὸ $\overline{NO}^2$ μὲ τὸ ἴσον του $\frac{k^2}{2}-\frac{\overline{AB}^2}{4}$ καὶ ἔχομεν

$$\overline{NA}^2+\overline{NB}^2=2\left(\frac{k^2}{2}-\frac{\overline{AB}^2}{4}\right)+\frac{\overline{AB}^2}{2} \quad \text{ἢ} \quad \overline{NA}^2+\overline{NB}^2=k^2.$$

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτὴν συνάγομεν, ὅτι τὸ τυχὸν σημεῖον Ν τῆς περιφερείας Ο εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.

Διερεύνησις. Ὅταν $k^2=\frac{\overline{AB}^2}{2}$, ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας Ο μηδενίζεται καὶ ἑπομένως ὁ τόπος εἶναι ἕνα σημεῖον Ο.

Ὅταν $k^2<\frac{\overline{AB}^2}{2}$, ὁ τόπος δὲν εἶναι πραγματικὸς (ἀκτὶς φανταστική).

Ἄσκησις. 1187.

Ἀσκήσεις

***Α' Ὁμάς.* 1177.** (1209). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ ΑΓ ἑνὸς τριγώνου, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν $B=60^\circ$, καὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ=6 ἑκ., ΒΓ=8 ἑκ.

1178. (1210). Αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ΑΒ=3 ἑκ., ΒΓ=5 ἑκ., ΓΑ=7 ἑκ. 1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία Β εἶναι ἀμβλεῖα.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ προβολὴ ΒΔ τῆς πλευρᾶς ΒΑ ἐπὶ τὴν ΓΒ.

3ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία Β.

1179. (1211). Ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ δίδονται αἱ τρεῖς πλευραὶ α, β, γ καὶ ἡ γωνία Β=120°. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\beta^2=\alpha^2+\gamma^2+\alpha\gamma$.

1180. (1212). Εἰς ἕνα κύκλον Ο ἀκτῖνος R φέρομεν μίαν χορδὴν ΑΒ καὶ συνδέομεν τυχὸν σημεῖον Γ αὐτῆς μὲ τὸ κέντρον Ο. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$R^2=\overline{\text{ΟΓ}}^2+\text{ΑΓ}\times\text{ΓΒ}.$$

1181. (1213). Ἐὰν ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι αἱ βάσεις ἑνὸς τραπεζίου ΑΒΓΔ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\overline{\text{ΑΓ}}^2+\overline{\text{ΒΔ}}^2=\overline{\text{ΑΔ}}^2+\overline{\text{ΒΓ}}^2+2\text{ΑΒ}\times\text{ΓΔ}$.

Β' Ὁμάς. **1182.** (1214). Αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι α=6 ἑκ., β=7 ἑκ., γ=11 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διάμεσοι μ_α, μ_β, μ_γ.

1183. (1215). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τριῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὰ $^4/_3$ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν τριῶν διαμέσων του.

1184. (1216). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου Μ ἀπὸ τὰς δύο ἀπέναντι κορυφὰς Α καὶ Γ ὀρθ. παραλληλογράμμου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀπὸ τὰς ἄλλας δύο κορυφάς.

1185. (1217). Ἐὰν Θ εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\overline{\text{ΑΒ}}^2+\overline{\text{ΒΓ}}^2+\overline{\text{ΓΑ}}^2=3(\overline{\text{ΘΑ}}^2+\overline{\text{ΘΒ}}^2+\overline{\text{ΘΓ}}^2)$.

1186. (1218). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ πλευρῶν α, β, γ. Μὲ πλευρὰν τὴν ΒΓ κατασκευάζομεν ἑκατέρωθεν αὐτῆς τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα ΒΓΔ καὶ ΒΓΔ'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\overline{\text{ΑΔ}}^2+\overline{\text{ΑΔ}'}^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$.

1187. (1219). Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β, τῶν ὁποίων ἡ ἀπόστασις εἶναι ΑΒ=8α. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων Μ, ὥστε νὰ εἶναι

$$\overline{\text{ΜΑ}}^2+\overline{\text{ΜΒ}}^2=82\alpha^2.$$

4. Μετρικαὶ σχέσεις εἰς τὸν κύκλον

437. Θεώρημα. ***Ἐὰν ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Σ φέρωμεν μίαν τυχοῦσαν τέμνουσαν ΣΑΒ περιφερείας Ο, τὸ γινόμενον ΣΑ×ΣΒ τῶν ἀποστάσεων τοῦ σημείου Σ ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῆς τεμνούσης καὶ τῆς περιφερείας, εἶναι σταθερὸν καὶ ἀνεξάρτητον τῆς διευθύνσεως τῆς τεμνούσης.***

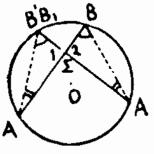
Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθόσον τὸ δοθὲν σημεῖον Σ κεῖται ἐντὸς τοῦ δοθέντος κύκλου ἢ ἐκτὸς αὐτοῦ.

Περίπτωσις Ι. Τὸ σημεῖον Σ κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου *(Σχ.320).*

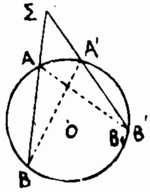
Ὑπόθεσις : Ἔστωσαν δύο τυχοῦσαι τέμνουσαι ΑΣΒ καὶ Α'ΣΒ' τοῦ κύκλου Ο, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὸ δοθὲν σημεῖον Σ.

Συμπέρασμα: Πρέπει νὰ δείξωμεν, ὅτι ΣΑ×ΣΒ=ΣΑ'×ΣΒ'.

Ἀπόδειξις: Ἂν φέρωμεν τὰς χορδὰς ΑΒ' καὶ Α'Β, τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα ΣΑΒ' καὶ ΣΑ'Β εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν δύο γωνίας ἴσας μίαν πρὸς μίαν ἤτοι ἔχουν τὰς γωνίας $Σ_1$ καὶ $Σ_2$ ἴσας, ὡς κατὰ κορυφὴν καὶ τὰς γωνίας Α καὶ Α' ἴσας, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς κύκλον καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου Β'Β.



Σχ. 320.



Σχ. 321.

Ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων αὐτῶν ἔχομεν

$$\frac{ΣΑ}{ΣΑ'}=\frac{ΣΒ'}{ΣΒ} \quad ἢ \quad \boxed{\mathbf{ΣΑ×ΣΒ=ΣΑ'×ΣΒ'}}.$$

Περίπτωσις ΙΙ. Τὸ σημεῖον Σ κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου.

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν δύο τυχοῦσαι τέμνουσαι ΣΑΒ καὶ ΣΑ'Β' τοῦ κύκλου Ο, *(Σχ. 321)*, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὸ δοθὲν σημεῖον Σ.

Συμπέρασμα: Πρέπει νὰ δείξωμεν, ὅτι ΣΑ×ΣΒ=ΣΑ'×ΣΒ'

Ἀπόδειξις: Ἐὰν φέρωμεν τὰς χορδὰς ΑΒ' καὶ Α'Β σχηματίζονται τὰ τρίγωνα ΣΑΒ' καὶ ΣΑ'Β, τὰ ὁποῖα εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν δύο γωνίας ἴσας μίαν πρὸς μίαν· ἤτοι ἔχουν τὴν γωνίαν Σ κοινὴν καὶ τὰς γωνίας Β καὶ Β' ἴσας, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς κύκλον καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΑΑ'.

Ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων αὐτῶν ἔχομεν

$$\frac{ΣΑ}{ΣΑ'}=\frac{ΣΒ'}{ΣΒ} \quad ἢ \quad \boxed{\mathbf{ΣΑ×ΣΒ=ΣΑ'×ΣΒ'}}.$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν ἀπὸ δοθὲν σημεῖον....***

Παρατήρησις. Ἡ περίπτωσις Ι τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος ἐκφράζεται καὶ ὡς ἑξῆς:

Ἐὰν δύο χορδαὶ κύκλου τέμνωνται, τὸ γινόμενον τῶν δύο τμημάτων τῆς μιᾶς χορδῆς εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο τμημάτων τῆς ἄλλης χορδῆς.

438. Θεώρημα. *(Ἀντίστροφον).* ***Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ Α'Β' τέμνωνται εἰς ἕνα σημεῖον Σ, οὕτως ὥστε νὰ εἶναι ΣΑ × ΣΒ=ΣΑ' × ΣΒ' (1), τὰ τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Α', Β' κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.***

Ἀπόδειξις: Ἐὰν γράψωμεν περιφέρειαν κύκλου, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ τὰ τρία σημεῖα Α, Α', Β *(Σχ. 320)*, λέγομεν, ὅτι ἡ περιφέρεια αὐτὴ θὰ διέλθῃ καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον Β'.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ περιφέρεια αὐτὴ δὲν διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Β′, τότε θὰ τέμνῃ τὴν ΣΑ′ εἰς ἕνα σημεῖον $Β_1$, διάφορον τοῦ Β′· ἀλλὰ τότε, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, θὰ ἔχωμεν

$$ΣΑ \times ΣΒ = ΣΑ' \times ΣΒ_1.$$

Ἀλλὰ ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν καὶ τὴν ἰσότητα (1).

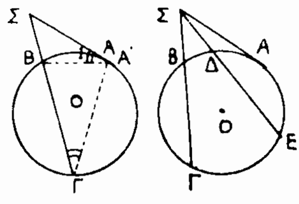
Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2), αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰ πρῶτα μέλη των ἴσα, συνάγομεν, ὅτι $ΣΑ' \times ΣΒ_1 = ΣΑ' \times ΣΒ'$ ἢ $ΣΒ_1 = ΣΒ'$.

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἰσότητα συνάγομεν, ὅτι τὰ σημεῖα $Β_1$ καὶ Β′ συμπίπτουν. Ὥστε τὰ τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Α′, Β′ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

Ἀσκήσεις: 1188, 1189, 1190.

439. Θεώρημα. ***Ἐὰν ἀπὸ ἕνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς κύκλου φέρωμεν μίαν ἐφαπτομένην καὶ μίαν τέμνουσαν τοῦ κύκλου, ἡ ἐφαπτομένη εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς ὅλης τεμνούσης καὶ τοῦ ἐκτὸς τοῦ κύκλου μέρους αὐτῆς.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω Σ *(Σχ. 322)* τὸ δοθὲν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου Ο· ἀπὸ τὸ Σ φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΣΑ καὶ τὴν τέμνουσαν ΣΒΓ τοῦ κύκλου Ο.



Σχ. 322. *Σχ. 323.*

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\overline{ΣΑ}^2 = ΣΓ \times ΣΒ.$$

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὰς χορδὰς ΑΒ καὶ ΑΓ. Τὰ τρίγωνα ΣΑΒ καὶ ΒΑΓ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν δύο γωνίας ἴσας μίαν πρὸς μίαν· ἤτοι ἔχουν τὴν γωνίαν Σ κοινὴν καὶ τὰς γωνίας $Α_1$ καὶ Γ ἴσας, διότι ἡ μὲν $Α_1$ εἶναι γωνία σχηματιζομένη ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης, ἡ δὲ Γ εἶναι ἐγγεγραμμένη καὶ βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΑ, τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας $Α_1$.

Ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων αὐτῶν ἔχομεν

$$\frac{ΣΑ}{ΣΓ} = \frac{ΣΒ}{ΣΑ} \quad ἢ \quad \boxed{\overline{ΣΑ}^2 = ΣΓ \times ΣΒ}.$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν ἀπὸ ἕνα σημεῖον. . . .***

440. Παρατήρησις. Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα εἶναι μία μερικὴ περίπτωσις τοῦ θεωρήματος τῆς § 437, διότι ἡ ἐφαπτομένη ΣΑ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ὁρικὴ θέσις μιᾶς τεμνούσης ΣΔΕ *(Σχ. 323)* ὅταν αὕτη στρέφεται περὶ τὸ Σ μέχρις, ὅτου τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε συμπέσουν

εἰς τὸ Α. Ἀλλὰ τότε θὰ εἶναι ΣΔ=ΣΕ=ΣΑ καὶ ἡ σχέσις

$$ΣΔ \times ΣΕ = ΣΒ \times ΣΓ$$

γράφεται $ΣΑ \times ΣΑ = ΣΒ \times ΣΓ$ ἢ $\overline{ΣΑ}^2 = ΣΒ \times ΣΓ$.

441. Θεώρημα. (*Ἀντίστροφον*). ***Δύο εὐθεῖαι τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Σ· ἐπὶ τῆς μιᾶς ἐξ αὐτῶν δίδονται δύο σημεῖα Β καὶ Γ κείμενα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ Σ καὶ ἐπὶ τῆς ἄλλης ἕνα σημεῖον Α. Ἐὰν εἶναι $\overline{ΣΑ}^2 = ΣΒ \times ΣΓ$ (1), ἡ περιφέρεια, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ ἐφάπτεται τῆς ΣΑ εἰς τὸ σημεῖον Α.***

Ἀπόδειξις: Γράφομεν τὴν περιφέρειαν Ο (*Σχ. 322*), ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ τρία σημεῖα Α, Β, Γ. Ἐὰν ἡ ΣΑ δὲν εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας Ο εἰς τὸ σημεῖον Α, θὰ εἶναι τέμνουσα αὐτῆς καὶ ἑπομένως προεκτεινομένη θὰ ἔτεμνε τὴν περιφέρειαν εἰς ἕνα δεύτερον σημεῖον Α′.

Ἐπειδὴ αἱ ΣΒΓ καὶ ΣΑΑ′ εἶναι τέμνουσαι τῆς περιφερείας Ο, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Σ, θὰ εἶναι

$$ΣΒ \times ΣΓ = ΣΑ \times ΣΑ' \qquad (2)$$

Ἀλλὰ ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν καὶ τὴν ἰσότητα (1).

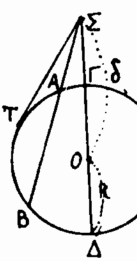
Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι

$$ΣΑ \times ΣΑ' = \overline{ΣΑ}^2 \quad ἢ \quad ΣΑ' = ΣΑ.$$

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτὴν συνάγομεν, ὅτι τὰ σημεῖα Α καὶ Α′ συμπίπτουν· ἄρα ἡ εὐθεῖα ΣΑ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας Ο εἰς τὸ σημεῖον Α.

Ἀσκήσεις: 1191, 1192, 1193, 1194, 1195.

442. Δύναμις σημείου ὡς πρὸς κύκλον. Ἔστω ὁ κύκλος Ο καὶ ἕνα σημεῖον Σ ἐκτὸς αὐτοῦ (*Σχ. 324*). Εἰς προηγούμενον θεώρημα εἴδομεν ὅτι, ἐὰν φέρωμεν μίαν τυχοῦσαν τέμνουσαν ΣΑΒ τοῦ κύκλου, τὸ γινόμενον ΣΑ×ΣΒ τῆς ὅλης τεμνούσης καὶ τοῦ ἐκτὸς τοῦ κύκλου μέρους αὐτῆς, εἶναι σταθερὸν καὶ ἀνεξάρτητον τῆς διευθύνσεως τῆς τεμνούσης. Αὐτὸ τὸ σταθερὸν γινόμενον ΣΑ×ΣΒ, τὸ ὁποῖον χαρακτηρίζει τὴν θέσιν τοῦ σημείου Σ πρὸς τὸν κύκλον Ο, λέγεται ***δύναμις σημείου πρὸς κύκλον.***



Σχ. 324.

Αὐτὴ ἡ *δύναμις* δύναται νὰ ἐκφρασθῇ συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R τοῦ κύκλου καὶ τῆς ἀποστάσεως δ τοῦ σημείου Σ ἀπὸ τὸ κέντρον Ο τοῦ κύκλου.

Πρὸς τοῦτο φέρομεν μίαν τέμνουσαν ΣΓΔ, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον Ο τοῦ κύκλου.

1ον. Ἐὰν τὸ σημεῖον Σ κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου Ο (Σχ. 324) θὰ ἔχωμεν

$$\Sigma A \times \Sigma B = \Sigma\Gamma \times \Sigma\Delta \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ $\Sigma\Gamma = \Sigma O - O\Gamma = \delta - R$ καὶ $\Sigma\Delta = \Sigma O + O\Delta = \delta + R$ ἡ ἰσότης (1) γράφεται

$$\Sigma A \times \Sigma B = (\delta - R)(\delta + R) \quad \text{ἢ} \quad \Sigma A \times \Sigma B = \delta^2 - R^2.$$

Ἐὰν παραστήσωμεν τὴν δύναμιν ΣΑ×ΣΒ μὲ Δ, ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται

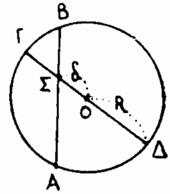
$$\boxed{\Delta = \delta^2 - R^2} \qquad (2)$$

2ον. Ἐὰν τὸ σημεῖον Σ κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου Ο (Σχ. 325) θὰ ἔχωμεν

$$\Sigma A \times \Sigma B = \Sigma\Gamma \times \Sigma\Delta$$

$$\text{ἢ} \quad \Sigma A \times \Sigma B = (R - \delta)(R + \delta)$$

$$\text{ἢ} \quad \Sigma A \times \Sigma B = R^2 - \delta^2 \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\Delta = R^2 - \delta^2} \qquad (3)$$



Σχ. 325.

Αἱ δύο παραστάσεις (2) καὶ (3) τῆς δυνάμεως Δ διαφέρουν μόνον κατὰ τὸ σημεῖον, διότι ἡ διαφορὰ $R^2 - \delta^2$ δύναται νὰ γραφῇ $-(\delta^2 - R^2)$.

443. Παρατήρησις Ι. *Ἐὰν ἡ δύναμις $\Delta = \delta^2 - R^2$ εἶναι θετική, δηλ. ἐὰν $\delta^2 - R^2 > 0$ ἢ $\delta > R$, τότε τὸ σημεῖον κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου.*

Ἐὰν εἶναι $\Delta = 0$, δηλ. $\delta^2 - R^2 = 0$ ἢ $\delta = R$, τὸ σημεῖον κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας.

Ἐὰν ἡ δύναμις $\Delta = \delta^2 - R^2$ εἶναι ἀρνητική, δηλ. ἐὰν εἶναι $\delta^2 - R^2 < 0$ ἢ $\delta < R$, τὸ σημεῖον κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου.

Ἐὰν $\delta = 0$, τότε θὰ εἶναι $\Delta = -R^2$· αὐτὴ εἶναι ἡ μικροτέρα τιμὴ τὴν ὁποίαν δύναται νὰ λάβῃ ἡ δύναμις Δ ἑνὸς σημείου πρὸς κύκλον.

444. Παρατήρησις ΙΙ. Ἂν φέρωμεν τὴν ἐφαπτομένην ΣΤ τῆς περιφερείας *(Σχ. 324)* θὰ εἶναι $\overline{\Sigma T}^2 = \Sigma A \times \Sigma B$. Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον ΣΑ×ΣΒ παριστάνει τὴν δύναμιν τοῦ σημείου Σ πρὸς τὸν κύκλον Ο συνάγομεν, ὅτι :

Ἡ δύναμις ἑνὸς σημείου πρὸς κύκλον εἶναι ἴση μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ἐφαπτομένης, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον πρὸς τὸν κύκλον.

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. **1188.** (1220). Δίδεται κύκλος ἀκτινος 8,20 μέτρ. Ἀπὸ ἕνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀπέχει 15 μέτρα ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, φέρομεν μίαν τέμνουσαν, τῆς ὁποίας τὸ ἐκτὸς τοῦ κύκλου μέρος εἶναι 10,25 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῆς χορδῆς, τὴν ὁποίαν ὁρίζει ἡ τέμνουσα ἐπὶ τοῦ κύκλου.

1189. (1221). Δύο χορδαὶ κύκλου ἀκτῖνος 12 μετρ. τέμνονται ἐντὸς τοῦ κύκλου. Ἐὰν τὸ γινόμενον τῶν δύο τμημάτων τῆς μιᾶς εἶναι 135 μ., νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν χορδῶν αὐτῶν.

1190. (1222). Δύο χορδαὶ κύκλου τέμνονται ἐντὸς αὐτοῦ. Τὸ μῆκος τῆς μιᾶς χορδῆς εἶναι 26 μέτρα καὶ τὰ δύο τμήματα τῆς ἄλλης ἔχουν μήκη 10 μέτρα καὶ 12 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη τῶν δύο τμημάτων τῆς ἄλλης χορδῆς.

Β' Ὁμάς. **1191.** (1223). Δίδεται κύκλος ἀκτῖνος 15 μέτρων καὶ ἕνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον 32 μέτρ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῆς ἐφαπτομένης τοῦ κύκλου, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον αὐτό.

1192. (1224). Δίδεται κύκλος ἀκτῖνος 20 μέτρων· ἀπὸ ἕνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου, φέρομεν μίαν ἐφαπτομένην, τῆς ὁποίας τὸ μῆκος εἶναι 45,60 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου αὐτοῦ ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

1193. (1225). Ἀπὸ ἕνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀπέχει 1,75 μέτρα ἀπὸ τὸ κέντρον ἑνὸς κύκλου φέρομεν μίαν ἐφαπτομένην, τῆς ὁποίας τὸ μῆκος εἶναι 1,38 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου.

1194. (1226). Δίδεται μία διάμετρος κύκλου Ο ἴση μὲ 238 ἑκ. καὶ ἡ ἀπόστασις ΣΟ ἑνὸς σημείου Σ ἀπὸ τὸ κέντρον Ο τοῦ κύκλου ἴση μὲ 187 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀποστάσεις ΣΓ καὶ ΣΔ τοῦ σημείου Σ ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῆς περιφερείας Ο καὶ μιᾶς τεμνούσης, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ Σ, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ ΣΔ εἶναι διπλασία τῆς ΣΓ.

1195. (1227). Δίδεται κύκλος ἀκτῖνος 6 μέτρα. Νὰ ὁρισθῇ ἐπὶ μιᾶς ἐφαπτομένης τοῦ κύκλου αὐτοῦ ἕνα σημεῖον Σ, τοιοῦτον ὥστε, ἐὰν ἀχθῇ ἀπὸ τὸ Σ μία τέμνουσα τοῦ κύκλου, διερχομένη ἀπὸ τὸ κέντρον του, τὸ ἐκτὸς τοῦ κύκλου μέρος αὐτῆς νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἐφαπτομένης.

Γ' Ὁμάς. **1196.** (1228). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ κοινὴ χορδὴ δύο τεμνομένων κύκλων προεκτεινομένη διχοτομεῖ τὰς κοινὰς ἐφαπτομένας τῶν περιφερειῶν.

1197. (1229). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τυχὸν σημεῖον τῆς προεκτάσεως τῆς κοινῆς χορδῆς δύο τεμνομένων κύκλων πρὸς τὰς περιφερείας τῶν κύκλων αὐτῶν, εἶναι ἴσαι.

1198. (1230). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὰ ὕψη του ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ', τὰ ὁποῖα τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Η. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\text{ΗΑ}\times\text{ΗΑ}'=\text{ΗΒ}\times\text{ΗΒ}'=\text{ΗΓ}\times\text{ΗΓ}'.$$

1199. (1231). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὴν διάμεσον ΑΜ· ἀπὸ τὸ Μ φέρομεν μίαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Δ καὶ τοιαύτην, ὥστε ἡ γωνία ΑΜΔ νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν Β τοῦ τριγώνου· ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν ΑΜ εἰς τὸ Ε. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\overline{\text{ΕΔ}}^2=\text{ΕΑ}\times\text{ΕΜ}.$$

1200. (1232). Ἐὰν Μ εἶναι ἕνα τυχὸν σημεῖον τῆς βάσεως ΒΓ ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\overline{AB}^2-\overline{AM}^2=MB\times M\Gamma.$$

1201. (1233). Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς διαμέτρου ΑΒ ἑνὸς κύκλου Ο λαμβάνομεν ἕνα σημεῖον Γ. Ἀπὸ τὸ Γ φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΓΔ τοῦ κύκλου καὶ τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς χορδῆς ΑΔ εἰς τὸ σημεῖον Ε. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\overline{\Gamma\Delta}^2=\overline{\Gamma A}^2-A\Delta\times AE.$$

5. Ὑπολογισμὸς τῶν ἀξιοσημειώτων εὐθειῶν ἑνὸς τριγώνου

445. Ὑπολογισμὸς τῶν διαμέσων ἑνὸς τριγώνου. Εἰς τὴν (§ 434 Σημ.) εἴδομεν, ὅτι μεταξὺ τῶν διαμέσων $\mu_\alpha, \mu_\beta, \mu_\gamma$ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ καὶ τῶν πλευρῶν του α, β, γ ὑπάρχουν αἱ σχέσεις

$$\beta^2+\gamma^2=2\mu_\alpha^2+\frac{\alpha^2}{2} \quad (1), \qquad \gamma^2+\alpha^2=2\mu_\beta^2+\frac{\beta^2}{2} \quad (2),$$

$$\alpha^2+\beta^2=2\mu_\gamma^2+\frac{\gamma^2}{2} \quad (3).$$

Ἀπὸ τὴν (1) ἔχομεν

$$2\mu_\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-\frac{\alpha^2}{2} \quad \text{ἢ} \quad 2\mu_\alpha^2=\frac{2(\beta^2+\gamma^2)-\alpha^2}{2}$$

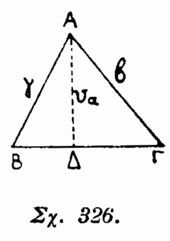
$$\boxed{\mu_\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{2(\beta^2+\gamma^2)-\alpha^2}}.$$

Ὁμοίως ἀπὸ τὰς (2) καὶ (3), ἢ διὰ κυκλικῆς ἐναλλαγῆς, εὑρίσκομεν

$$\boxed{\mu_\beta=\frac{1}{2}\sqrt{2(\gamma^2+\alpha^2)-\beta^2}}, \quad \boxed{\mu_\gamma=\frac{1}{2}\sqrt{2(\alpha^2+\beta^2)-\gamma^2}}.$$

446. Πρόβλημα. ***Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὕψη ἑνὸς τριγώνου, ἂν γνωρίζωμεν τὰς τρεῖς πλευράς του α, β, γ.***

Ἔστω ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ *(Σχ. 326)* καὶ ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ὕψος του $A\Delta=\upsilon_\alpha$, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν πλευρὰν α. Μία ἀπὸ τὰς γωνίας Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ὀξεῖα.



Σχ. 326.

Ἔστω, ὅτι ἡ γωνία Γ εἶναι ὀξεῖα. Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΓ ἔχομεν

$$\overline{A\Delta}^2=\overline{A\Gamma}^2-\overline{\Delta\Gamma}^2 \quad \text{ἢ} \quad \upsilon_\alpha^2=\beta^2-\overline{\Delta\Gamma}^2 \quad (1)$$

Ὑπολογίζομεν τὸ ΔΓ συναρτήσει τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Τὸ ΔΓ εἶναι προβολὴ τῆς πλευρᾶς β ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἡ πλευρὰ γ κεῖται ἀπέναντι τῆς ὀξείας γωνίας Γ καὶ ἑπομένως, κατὰ τὸ θεώρημα τῆς § 431, θὰ ἔχωμεν

$$\gamma^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha.\Delta\Gamma.$$

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτὴν λαμβάνομεν $\Delta\Gamma=\dfrac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha}$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὸ $\overline{\Delta\Gamma}^2$ μὲ τὸ ἴσον του καὶ ἔχομεν $\upsilon_\alpha^2=\beta^2-\dfrac{(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2}{4\alpha^2}$ ἢ $\upsilon_\alpha^2=\dfrac{4\alpha^2\beta^2-(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2}{4\alpha^2}$ (2)

Τρέπομεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἰσότητος (2) εἰς γινόμενον παραγόντων.

Ἐδῶ ἔχομεν διαφορὰν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν ἐπὶ τὴν διαφοράν των. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$\begin{aligned}4\alpha^2\beta^2-(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2&=[2\alpha\beta+(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)]\,[2\alpha\beta-(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)]\\&=[\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-\gamma^2]\,[2\alpha\beta-\alpha^2-\beta^2+\gamma^2]\\&=[(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta)-\gamma^2]\,[\gamma^2-(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta)]\\&=[(\alpha+\beta)^2-\gamma^2]\,[\gamma^2-(\alpha-\beta)^2]\\&=[(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)]\,[(\gamma+\alpha-\beta)(\gamma-\alpha+\beta)].\end{aligned}$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (2) τὸ $4\alpha^2\beta^2-(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2$ μὲ τὸ ἴσον του καὶ ἔχομεν

$$\upsilon^2=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)\,(\alpha+\beta-\gamma)\,(\gamma+\alpha-\beta)\,(\gamma-\alpha+\beta)}{4\alpha^2} \qquad (3)$$

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$

τότε θὰ εἶναι

$$\begin{aligned}\alpha+\beta-\gamma&=2\tau-2\gamma=2(\tau-\gamma)\\\gamma+\alpha-\beta&=2\tau-2\beta=2(\tau-\beta)\\\gamma+\beta-\alpha&=2\tau-2\alpha=2(\tau-\alpha).\end{aligned}$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (3) τὰ $(\alpha+\beta+\gamma)$, $(\alpha+\beta-\gamma)$.. μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν

$$\upsilon_\alpha^2=\frac{4\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\alpha^2} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\upsilon_\alpha=\frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}.$$

Ἂν παραστήσωμεν δὲ υ_β καὶ υ_γ τὰ ἄλλα δύο ὕψη τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τὰ ὁποῖα ἄγονται ἀπὸ τὰς κορυφὰς Β καὶ Γ, εὑρίσκομεν ὁμοίως, ὅτι

$$\boxed{\upsilon_\beta=\frac{2}{\beta}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}\,,\quad \boxed{\upsilon_\gamma=\frac{2}{\gamma}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}$$

Σημ. Ἐὰν θέσωμεν $E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$, οἱ προηγούμενοι τύποι γίνονται

$$\upsilon_\alpha=\frac{2E}{\alpha},\qquad \upsilon_\beta=\frac{2E}{\beta},\qquad \upsilon_\gamma=\frac{2E}{\gamma}.$$

Θὰ ἴδωμεν ἀργότερον, ὅτι τὸ E παριστάνει τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου.

Ἀπὸ τοὺς τύπους αὐτοὺς εὑρίσκομεν, ὅτι

$$\boxed{\alpha\upsilon_\alpha=\beta\upsilon_\beta=\gamma\upsilon_\gamma=2E}.$$

Ἄσκησις: 1202.

447. Ὑπολογισμὸς τῆς ἀκτῖνος R. Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ἀκτῖνα R τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου περὶ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ συναρτήσει τῶν πλευρῶν του α, β, γ στηριζόμεθα εἰς τὸ κάτωθι θεώρημα.

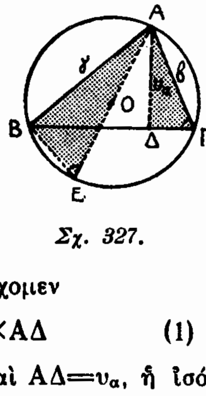
448. Θεώρημα. ***Τὸ γινόμενον δύο πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου, τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον, ἐπὶ τὸ ὕψος του, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν τρίτην πλευράν.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ *(Σχ. 327)*, $ΑΔ=\upsilon_\alpha$ τὸ ὕψος του καὶ Ο ὁ περιγεγραμμένος κύκλος περὶ τὸ τρίγωνον αὐτό. Φέρομεν τὴν διάμετρον ΑΟΕ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι

ΑΒ×ΑΓ=ΑΕ×ΑΔ.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὴν χορδὴν ΒΕ. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΑΔΓ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν τὰς ὀξείας γωνίας Ε καὶ Γ ἴσας, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΑΒ.



Σχ. 327.

Ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων αὐτῶν ἔχομεν

$$\frac{ΑΒ}{ΑΔ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}\quad ἢ\quad ΑΒ\times ΑΓ=ΑΕ\times ΑΔ \qquad (1)$$

Ἐὰν θέσωμεν ΑΒ=γ, ΑΓ=β, ΑΕ=2R καὶ $ΑΔ=\upsilon_\alpha$, ἡ ἰσότης (1) γράφεται $\boxed{\beta\gamma=2R\cdot\upsilon_\alpha}$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Τὸ γινόμενον δύο πλευρῶν. . . .***

449. Ἐφαρμογή. Πρόβλημα. ***Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τρίγωνον, ἐὰν γνωρίζωμεν τὰς τρεῖς πλευράς του α, β, γ.***

Ἐδείξαμεν εἰς τὴν (§ 448), ὅτι $\beta\gamma=2R\cdot\upsilon_\alpha$.

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτὴν λαμβάνομεν $R=\dfrac{\beta\gamma}{2\upsilon_\alpha}$ (1)

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὸ $υ_α$ μὲ τὸ ἴσον του $\frac{2E}{α}$ ποὺ εὑρήκαμεν εἰς τὴν § 446 Σημ. καὶ ἔχομεν

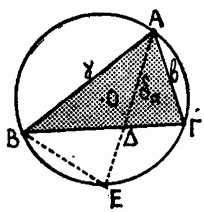
$$\boxed{R = \frac{αβγ}{4E}}$$

Ἀσκήσεις: 1203, 1204.

450. Ὑπολογισμὸς τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων. Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς ἐσωτερικὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου, στηριζόμεθα εἰς τὸ κάτωθι θεώρημα.

451. Θεώρημα. ***Τὸ γινόμενον δύο πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο τμημάτων τῆς τρίτης πλευρᾶς του, τὰ ὁποῖα ὁρίζει ἡ διχοτόμος τῆς ἀπέναντι γωνίας, ηὐξημένον κατὰ τὸ τετράγωνον τῆς διχοτόμου αὐτῆς.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ τρίγων ΑΒΓ *(Σχ. 328)* καὶ ΑΔ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α.



Σχ. 328.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$ΑΒ \times ΑΓ = ΒΔ \times ΔΓ + \overline{ΑΔ}^2.$$

Ἀπόδειξις: Περιγράφομεν περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ τὸν κύκλον Ο. Προεκτείνομεν τὴν διχοτόμον ΑΔ μέχρις ὅτου συναντήσει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Ε. Φέρομεν τὴν χορδὴν ΒΕ.

Τὰ τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΑΔΓ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν δύο γωνίας ἴσας μίαν πρὸς μίαν, ἤτοι ἔχουν τὰς γωνίας ΒΑΔ καὶ ΔΑΓ ἴσας, διότι ἡ ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α καὶ τὰς γωνίας Ε καὶ Γ ἴσας, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΑΒ.

Ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων αὐτῶν ἔχομεν

$$\frac{ΑΒ}{ΑΔ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} \quad ἢ \quad ΑΒ \times ΑΓ = ΑΔ \times ΑΕ \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ ΑΕ=ΑΔ+ΔΕ, ἡ ἰσότης (1) γράφεται

$$ΑΒ \times ΑΓ = ΑΔ \times (ΑΔ + ΔΕ) \quad ἢ \quad ΑΒ \times ΑΓ = \overline{ΑΔ}^2 + ΑΔ \times ΔΕ \qquad (2)$$

Ἀλλὰ ΑΔ×ΔΕ=ΒΔ×ΔΓ, διότι αἱ ΑΕ καὶ ΒΓ εἶναι δύο χορδαὶ τοῦ κύκλου Ο, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Δ (§ 437).

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (2) τὸ γινόμενον ΑΔ×ΔΕ μὲ τὸ ἴσον του ΒΔ×ΔΓ καὶ ἔχομεν

$$\boxed{\mathbf{ΑΒ \times ΑΓ = \overline{ΑΔ}^2 + ΒΔ \times ΔΓ}} \qquad (3)$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Τὸ γινόμενον δύο πλευρῶν....***

452. Παρατήρησις. Ἡ ἰσότης (3) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\boxed{\overline{ΑΔ}^2 = ΑΒ \times ΑΓ - ΒΔ \times ΔΓ}$$

καὶ ἑπομένως τὸ προηγούμενον θεώρημα δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

Τὸ τετράγωνον τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο πλευρῶν, ποὺ περιέχουν τὴν γωνίαν αὐτήν, ἠλαττωμένον κατὰ τὸ γινόμενον τῶν δύο τμημάτων, τὰ ὁποῖα ὁρίζει ἡ διχοτόμος ἐπὶ τῆς τρίτης πλευρᾶς τοῦ τριγώνου.

453. Ἐφαρμογή. Πρόβλημα. ***Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, ἐὰν γνωρίζωμεν τὰς τρεῖς πλευράς του α, β, γ.***

Γνωρίζομεν (§ 452), ὅτι

$$\overline{ΑΔ}^2 = ΑΒ \times ΑΓ - ΒΔ \times ΔΓ \quad ἢ \quad δ_α^2 = γ \times β - ΒΔ \times ΔΓ \qquad (1)$$

Ἀλλὰ γνωρίζομεν (§ 395), ὅτι $ΒΔ = \frac{αγ}{β+γ}$ καὶ $ΔΓ = \frac{αβ}{β+γ}$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὰ ΒΔ καὶ ΔΓ μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν

$$δ_α^2 = βγ - \frac{αγ}{β+γ} \times \frac{αβ}{β+γ} \quad ἢ \quad δ_α^2 = βγ - \frac{α^2βγ}{(β+γ)^2}$$

$$ἢ \quad δ_α^2 = \frac{βγ}{(β+γ)^2}[(β+γ)^2 - α^2]$$

$$ἢ \quad δ_α^2 = \frac{βγ}{(β+γ)^2}[(β+γ+α)(β+γ-α)] \qquad (2)$$

Ἐὰν θέσωμεν $α+β+γ=2τ$, θὰ εἶναι $β+γ-α=2(τ-α)$ καὶ ἡ ἰσότης 2 γράφεται:

$$δ_α^2 = \frac{βγ}{(β+γ)^2} \times 2τ \times 2(τ-α) \quad ἢ \quad \boxed{δ_α = \frac{2}{β+γ}\sqrt{βγτ(τ-α)}}.$$

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ $δ_β$, $δ_γ$ τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ εὑρίσκομεν ὁμοίως (ἢ διὰ κυκλικῆς ἐναλλαγῆς), ὅτι:

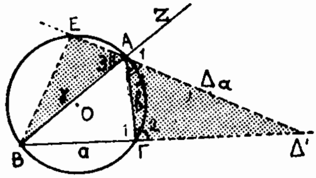
$$\boxed{δ_β = \frac{2}{γ+α}\sqrt{γατ(τ-β)}}, \quad \boxed{δ_γ = \frac{2}{α+β}\sqrt{αβτ(τ-γ)}}.$$

454. Ὑπολογισμὸς τῶν ἐξωτερικῶν διχοτόμων. Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς ἐξωτερικὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου, στηριζόμεθα εἰς τὸ κάτωθι θεώρημα:

455. Θεώρημα. ***Τὸ γινόμενον δύο πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο τμημάτων τῆς τρίτης πλευ-***

ρᾶς του, τὰ ὁποῖα ὁρίζει ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ δύο πλευραί, ἠλαττωμένον κατὰ τὸ τετράγωνον τῆς διχοτόμου αὐτῆς.

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΑΔ′ *(Σχ. 329)* ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς πλευρᾶς ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Δ′.



Σχ. 329.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$ΑΒ \times ΑΓ = Δ'Β \times Δ'Γ - \overline{ΑΔ'}^2.$$

Ἀπόδειξις: Περιγράφομεν περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ τὸν κύκλον Ο. Προεκτείνομεν τὴν διχοτόμον ΑΔ′ μέχρις ὅτου συναντήσει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὸ σημεῖον Ε· φέρομεν τὴν χορδὴν ΒΕ.

Τὰ τρίγωνα ΑΕΒ καὶ ΑΓΔ′ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν δύο γωνίας ἴσας μίαν πρὸς μίαν· πράγματι, αἱ γωνίαι $Α_3$ καὶ $Α_2$ εἶναι ἴσαι, ὡς ἴσαι πρὸς τὴν $Α_1$· ἡ μὲν $Α_3$ ὡς κατὰ κορυφὴν τῆς $Α_1$, ἡ δὲ $Α_2$, ἐξ ὑποθέσεως, ἴση πρὸς τὴν $Α_1$· ἐπίσης αἱ γωνίαι Ε καὶ $Γ_2$ εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν παραπληρωματικὴν γωνίαν $Γ_1$.

Ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων αὐτῶν ἔχομεν

$$\frac{ΑΒ}{ΑΔ'} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} \quad ἢ \quad ΑΒ \times ΑΓ = ΑΔ' \times ΑΕ \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ ΑΕ=Δ′Ε—ΑΔ′, ἡ ἰσότης (1) γράφεται

$$ΑΒ \times ΑΓ = ΑΔ' \times (Δ'Ε - ΑΔ') \quad ἢ \quad ΑΒ \times ΑΓ = ΑΔ' \times Δ'Ε - \overline{ΑΔ'}^2 \qquad (2)$$

Ἀλλὰ Δ′Α×Δ′Ε=Δ′Γ×Δ′Β, διότι αἱ Δ′ΑΕ καὶ Δ′ΓΒ εἶναι τέμνουσαι τῆς περιφερείας, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Δ′, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου Ο.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (2) τὸ γινόμενον ΑΔ′×Δ′Ε μὲ τὸ ἴσον του Δ′Γ×Δ′Β καὶ ἔχομεν

$$\boxed{\mathbf{ΑΒ \times ΑΓ = Δ'Γ \times Δ'Β - \overline{ΑΔ'}^2}}$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Τὸ γινόμενον δύο πλευρῶν. . . .***

456. Ἐφαρμογή. Πρόβλημα. ***Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διχοτόμοι τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου, ἂν γνωρίζωμεν τὰς τρεῖς πλευράς του α, β, γ.***

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ *(Σχ. 329)*, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ πλευραὶ ΒΓ=α, ΓΑ=β, ΑΒ=γ. Ἔστω ΑΔ′=$Δ_α$ ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας του Α, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς πλευρᾶς ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Δ′.

Κατὰ τὸ θεώρημα (§ 455) ἔχομεν:

$$AB \times A\Gamma = \Delta'\Gamma \times \Delta'B - \overline{A\Delta'}^2 \quad \text{ἢ} \quad \gamma \times \beta = \Delta'\Gamma \times \Delta'B - \Delta_\alpha^2$$

$$\text{ἢ} \quad \Delta_\alpha^2 = \Delta'\Gamma \times \Delta'B - \beta\gamma \qquad (1)$$

Ἀλλὰ γνωρίζομεν (§ 399) ὅτι $\Delta'\Gamma = \frac{\alpha\beta}{|\gamma-\beta|}$ καὶ $\Delta'B = \frac{\alpha\gamma}{|\gamma-\beta|}$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὰ Δ'Γ καὶ Δ'Β μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν:

$$\Delta_\alpha^2 = \frac{\alpha\beta}{|\gamma-\beta|} \times \frac{\alpha\gamma}{|\gamma-\beta|} - \beta\gamma \quad \text{ἢ} \quad \Delta_\alpha^2 = \frac{\alpha^2\beta\gamma}{(\gamma-\beta)^2} - \beta\gamma$$

$$\text{ἢ} \quad \Delta_\alpha^2 = \frac{\beta\gamma}{(\gamma-\beta)^2}[\alpha^2 - (\gamma-\beta)^2]$$

$$\text{ἢ} \quad \Delta_\alpha^2 = \frac{\beta\gamma}{(\gamma-\beta)^2}[(\alpha+\gamma-\beta)(\alpha-\gamma+\beta)] \qquad (2)$$

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$, ὁπότε $\alpha+\gamma-\beta=2(\tau-\beta)$ καὶ $\alpha-\gamma+\beta=2(\tau-\gamma)$, ἡ ἰσότης (2) γράφεται:

$$\Delta_\alpha^2 = \frac{\beta\gamma}{(\gamma-\beta)^2} \times 2(\tau-\beta) \times 2(\tau-\gamma)$$

$$\text{ἢ} \quad \boxed{\Delta_\alpha = \frac{2}{|\gamma-\beta|}\sqrt{\beta\gamma(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}\,.$$

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Δ_β, Δ_γ τὰς διχοτόμους τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, εὑρίσκομεν ὁμοίως (ἢ διὰ κυκλικῆς ἐναλλαγῆς), ὅτι:

$$\boxed{\Delta_\beta = \frac{2}{|\alpha-\gamma|}\sqrt{\gamma\alpha(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)}}\,, \quad \boxed{\Delta_\gamma = \frac{2}{|\beta-\alpha|}\sqrt{\alpha\beta(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}}\,.$$

Ἀσκήσεις: 1205.

Ἀσκήσεις

1202. (1234). Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὕψη ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι $\alpha=25$ ἑκ. $\beta=39$ ἑκ. $\gamma=56$ ἑκ.

1203. (1235). Εἰς ἕνα κύκλον Ο ἀκτῖνος R φέρομεν μίαν χορδὴν ΑΒ=γ καὶ μίαν ἄλλην χορδὴν ΒΓ κάθετον ἐπὶ τὴν διάμετρον, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ Α. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ΒΓ συναρτήσει τῶν R καὶ γ. Ἐφαρμογή: R=25 ἑκ., γ=30 ἑκ.

1204. (1236). Ἐπὶ τῆς περιφερείας ἑνὸς κύκλου Ο, περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, λαμβάνομεν ἕνα σημεῖον Μ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ καὶ τὰς ἀποστάσεις ΜΔ, ΜΕ, ΜΖ τοῦ σημείου Μ ἀπὸ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι $MA \times ME = MB \times MZ = M\Gamma \times M\Delta$.

1205. (1237). Αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου εἶναι 6 μ., 9 μ., 12 μ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διχοτόμοι, (ἐσωτερικαὶ καὶ ἐξωτερικαί), τῶν γωνιῶν του.

'Ασκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν ἐπὶ τοῦ Δ' Κεφαλαίου

Α' 'Ομάς. **1206.** (1238). Αἱ πλευραὶ ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ΑΒ=ΑΓ=10 ἑκ. καὶ ΒΓ=12 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὕψη του.

1207. (1239). Δίδεται ἕνας κύκλος Ο διαμέτρου ΑΒ=8 ἑκ. Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΓ κάθετον ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΒ καί λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς ἕνα τμῆμα ΟΔ=3 ἑκ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς ἕνα σημεῖον Μ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ χορδαὶ ΑΜ καὶ ΜΒ.

1208. (1240). 'Ενὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ δίδονται αἱ πλευραὶ ΑΒ=ΑΓ=10 ἑκ. καὶ ΒΓ=16 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθοῦν:

1ον. Τὸ ὕψος του ΑΔ.

2ον. 'Η ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

1209. (1241). Δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο' ἀκτίνων R=7 ἑκ. καὶ R'=1 ἑκ. κεῖνται ἡ μία ἐκτὸς τῆς ἄλλης. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ κοιναὶ ἐξωτερικαὶ καὶ ἐσωτερικαὶ ἐφαπτόμεναί των, ἄν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ ἀπόστασις δ τῶν κέντρων των εἶναι 10 ἑκ.

1210. (1242). Εἰς μίαν περιφέρειαν Ο ἀκτῖνος R φέρομεν δύο χορδὰς ΑΒ καὶ ΓΔ παραλλήλους, αἱ ὁποῖαι κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ κέντρου Ο καὶ αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν ἀπὸ τὸ Ο ἀποστάσεις $\frac{3R}{5}$ καὶ $\frac{4R}{5}$ ἀντιστοίχως. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη τῶν χορδῶν αὐτῶν καὶ αἱ γωνίαι τοῦ τραπεζίου ΑΒΔΓ.

1211. (1243). Δίδεται ἡμικύκλιον διαμέτρου ΑΟΒ=2R. Εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ ἡμικυκλίου κατασκευάζομεν δύο ἡμικύκλια μὲ διαμέτρους τὰς ἀκτῖνας ΟΑ καὶ ΟΒ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία ἐφάπτεται τῶν τριῶν ἡμικυκλίων αὐτῶν.

1212. (1244). Δίδεται περιφέρεια Ο διαμέτρου ΑΒ=6 ἑκ. καὶ ἕνα σημεῖον Σ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΑ καὶ τοιοῦτον, ὥστε ΟΣ=5 ἑκ. 'Απὸ τὸ Σ φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΣΓ καὶ ἀπὸ τὸ μέσον Δ τῆς ΣΓ φέρομεν τὴν κάθετον ΔΕ ἐπὶ τὴν ΣΟ καὶ τέλος τὴν ἐφαπτομένην ΕΖ πρὸς τὴν περιφέρειαν Ο. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ΣΓ καὶ ΣΕ καὶ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΕΖ=ΕΣ.

Β' 'Ομάς. **1213.** (1245). Δίδεται ἕνα ἡμικύκλιον Ο διαμέτρου ΑΒ καὶ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ ἡμικύκλιον· μία εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Δ, τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ε, τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὸ Ζ καὶ τὴν ΒΓ εἰς τὸ Η. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\overline{Z\Delta}^2 = \Delta E \times \Delta H$.

1214. (1246). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὴν διάμεσον ΑΔ καὶ τὴν διχοτόμον ΑΕ τῆς γωνίας Α. Περιγράφομεν περὶ τὸ τρίγωνον ΑΔΕ περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Β' καὶ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Γ'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΒΒ'=ΓΓ'.

1215. (1247). Δίδεται περιφέρεια κύκλου Ο διαμέτρου ΑΒ=2R. Μία χορδὴ ΓΔ τέμνει τὴν διάμετρον ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Ε ὑπὸ γωνίαν 45°. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\overline{E\Gamma}^2 + \overline{E\Delta}^2 = 2R^2$.

1216. (1248). Εἰς ἕνα κύκλον Ο φέρομεν τὴν διάμετρον ΑΒ καὶ μίαν χορδὴν ΓΔ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ. 'Εὰν Μ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς διαμέτρου, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\overline{M\Gamma}^2 + \overline{M\Delta}^2 = \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2$.

1217. (1249). Ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ δίδονται αἱ κάθετοι πλευραί του ΑΒ=γ, ΑΓ=β καὶ ἡ διχοτόμος ΑΔ=δ τῆς ὀρθῆς γωνίας Α. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\frac{\sqrt{2}}{\delta}=\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$.

1218. (1250). Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ· ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Δ τῆς ὑποτεινούσης του ΒΓ φέρομεν τὴν ΔΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ τὴν ΔΖ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $ΔΒ\times ΔΓ=ΕΑ\times ΕΒ+ΖΑ\times ΖΓ$.

1219. (1251). Δίδεται ἕνα τεταρτοκύκλιον ΑΟΒ· ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ τόξου ΑΒ φέρομεν μίαν παράλληλον πρὸς τὴν χορδὴν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΟΑ εἰς τὸ Γ καὶ τὴν ΟΒ εἰς τὸ Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\overline{ΜΓ}^2+\overline{ΜΔ}^2=\overline{ΑΒ}^2$.

1220. (1252). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ δίδονται τὰ κέντρα Ο καὶ $Ο_α$ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ τοῦ παρεγγεγραμμένου εἰς τὴν γωνίαν Α. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $ΟΑ\times ΑΟ_α=ΑΒ\times ΑΓ$.

Γ' Ὁμάς. **1221.** (1253). Δύο κύκλοι Ο καὶ Ο' ἀκτίνων 3α καὶ 2α ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον Α. Ἀπὸ τὸ κέντρον Ο' τοῦ μικροτέρου κύκλου φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν διάκεντρον ΟΟ', ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν τοῦ μεγάλου κύκλου εἰς τὸ σημεῖον Γ. Ἀπὸ τὸ Γ φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ΓΔ καὶ ΓΕ εἰς τὸν κύκλον Ο'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία ΔΓΕ εἶναι ὀρθή.

1222. (1254). Δίδεται μία περιφέρεια διαμέτρου ΟΑ καὶ ἕνας κύκλος, ὁ ὁποῖος ἔχει κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα τὴν ΟΑ. Ἐὰν ΓΔ εἶναι μία χορδὴ τοῦ μεγάλου κύκλου, ἐφαπτομένη εἰς τὸ Β τοῦ μικροῦ κύκλου, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν ΒΓ καὶ ΒΔ.

1223. (1255). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι κάθε τρίγωνον εἰς τὸ ὁποῖον τὸ γινόμενον μιᾶς πλευρᾶς ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον ὕψος του εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του, εἶναι ὀρθογώνιον.

1224. (1256). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι κάθε τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον αἱ γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι ὀξεῖαι καὶ ὁ λόγος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἀπέναντι τῶν γωνιῶν αὐτῶν, εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν προβολῶν τῶν πλευρῶν αὐτῶν ἐπὶ τὴν ΒΓ, εἶναι ὀρθογώνιον ἢ ἰσοσκελές.

1225. (1257). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ ἡ μία ἀπὸ τὰς γωνίας Β καὶ Γ εἶναι ἀμβλεῖα καὶ ὁ λόγος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἀπέναντι τῶν γωνιῶν αὐτῶν εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν προβολῶν τῶν πλευρῶν αὐτῶν ἐπὶ τὴν ΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ εἶναι ἴση μὲ μίαν ὀρθήν.

1226. (1258). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τριῶν διαμέσων του εἶναι ἴσον μὲ τὸ τριπλάσιον τοῦ ἡμίσεως τοῦ τετραγώνου τῆς ὑποτεινούσης.

1227. (1259). Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ β, γ, υ ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν $\frac{1}{\upsilon^2}=\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}$ ὑπάρχουν δύο τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡς πλευρὰς τὰ β καὶ γ καὶ ὡς ὕψος ἀντίστοιχον πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν τὸ υ. Εἰς τὸ ἕνα τρίγωνον τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἀπέναντι τῶν πλευρῶν β καὶ γ εἶναι ἴσον μὲ 1 ὀρθὴν καὶ εἰς τὸ ἄλλο ἡ διαφορὰ τῶν γωνιῶν αὐτῶν εἶναι ἴση μὲ 1 ὀρθήν.

1228. (1260). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ γνωρίζομεν τὰς πλευρὰς $ΑΒ=\frac{1}{3}$, $ΑΓ=\frac{1}{4}$ καὶ τὸ ὕψος $ΑΔ=\frac{1}{5}$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τρίτη πλευρὰ ΒΓ. Νὰ ἐξετασθοῦν αἱ δύο περιπτώσεις, καθόσον ἡ γωνία Γ εἶναι ὀξεῖα ἢ ἀμβλεῖα. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ τρίγωνα εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α καὶ εἰς τὸ ἄλλο εἶναι $\widehat{Γ}-\widehat{Β}=1$ ὀρθή.

1229. (1261). 1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ λόγος τῶν ἀκτίνων δύο κύκλων, ἐγγεγραμμένων εἰς δύο ὅμοια τρίγωνα, εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον δύο ὁμολόγων πλευρῶν των.

2ον. Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α, φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ· νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν παραστήσωμεν μὲ $ρ, ρ', ρ''$ τὰς ἀκτῖνας τῶν κύκλων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΔ, ΑΓΔ θὰ εἶναι $ρ^2=ρ'^2+ρ''^2$.

1230. (1262). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἕνα τυχὸν σημεῖον Σ τῆς προεκτάσεως τῆς διαγωνίου ΑΓ ἑνὸς ρόμβου ΑΒΓΔ διαιρεῖ τὴν διαγώνιον αὐτὴν εἰς δύο τμήματα, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον εἶναι ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τῆς κορυφῆς Δ ἀπὸ τὰ σημεῖα Σ καὶ Α.

1231. (1263). Ἐὰν δύο χορδαὶ κύκλου τέμνωνται οὕτως, ὥστε ὁ λόγος τῶν δύο τμημάτων τῆς μιᾶς νὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν δύο τμημάτων τῆς ἄλλης, αἱ δύο αὐταὶ χορδαὶ εἶναι ἴσαι.

1232. (1264). Ἐὰν εἰς ἕνα τετράπλευρον, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν του εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του, αἱ διαγώνιοι τοῦ τετραπλεύρου αὐτοῦ τέμνονται καθέτως.

1233. (1265). Ἐὰν αἱ πλευραὶ α, β, γ, ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ συνδέωνται διὰ τῆς σχέσεως $β^2+γ^2=2α^2$.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ διάμεσοί του $μ_α$, $μ_β$, $μ_γ$ συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως $2μ_α^2=μ_β^2+μ_γ^2$.

2ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διάμεσοι τοῦ τριγώνου αὐτοῦ, συναρτήσει τῶν πλευρῶν του καὶ

3ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς πλευρὰς τὰς διαμέσους αὐτὰς εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ δοθὲν τρίγωνον.

Δ' Ὁμάς. **1234.** (1266). Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ καὶ ἕνα σημεῖον Μ τῆς περιφερείας τῆς περιγγεγραμμένης περὶ τὸ ὀρθογώνιον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τοῦ Μ ἀπὸ τὰς τέσσαρας πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου μένει σταθερόν, ὅταν τὸ σημεῖον Μ διαγράφῃ τὴν περιφέρειαν.

1235. (1267). Δύο περιφέρειαι Ο' καὶ Ο' ἀκτίνων R καὶ R' ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον Α. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Α φέρομεν δύο τεμνούσας ὀρθογωνίους ΜΑΜ' καὶ ΝΑΝ'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα $\overline{ΜΜ'}^2+\overline{ΝΝ'}^2$ μένει σταθερόν, ὅταν αἱ τέμνουσαι στρέφωνται περὶ τὸ Α καὶ μένουν ὀρθογώνιοι.

1236. (1268). Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Σ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς κύκλου Ο, φέρομεν δύο χορδὰς ὀρθογωνίους ΑΣΒ καὶ ΓΣΔ. Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα $\overline{ΑΒ}^2+\overline{ΓΔ}^2$ μένει σταθερόν, ὅταν αἱ χορδαὶ αὐταὶ στρέφωνται περὶ τὸ Σ καὶ μένουν ὀρθογώνιοι.

1237. (1269). Δίδονται δύο περιφέρειαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν κέντρα Ο καὶ Ο' καὶ τοιαῦται, ὥστε τὸ κέντρον Ο' νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τὸ Ο. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν εἰς τυχὸν σημεῖον Μ τῆς περιφερείας Ο' φέρωμεν τὴν ἐφαπτομένην, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β', τὸ γινόμενον Ο'Α×Ο'Β εἶναι σταθερόν.

1238. (1238). Δίδεται μία ἡμιπεριφέρεια Ο διαμέτρου ΑΒ. Ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΑΒ λαμβάνομεν δύο σημεῖα Σ καὶ Σ', τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἰσάκις ἀπὸ τὸ κέντρον Ο καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα Σ καὶ Σ' φέρομεν δύο παραλλήλους ΣΜ καὶ Σ'Μ', αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ γινόμενον ΣΜ×Σ'Μ', μένει σταθερόν, ὅταν ἡ διεύθυνσις τῶν παραλλήλων μεταβάλλεται.

1239. (1271). Ἐὰν συνδέσωμεν μὲ εὐθεῖαν δοθὲν σημεῖον Σ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς ἑνὸς κύκλου Ο, μὲ ἕνα μεταβλητὸν σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας Ο καὶ ἐὰν φέρωμεν τὴν χορδὴν ΑΒ κάθετον ἐπὶ τὴν ΣΑ καὶ ἔπειτα ἀπὸ τὸ Β μίαν χορδὴν ΒΓ παράλληλον πρὸς τὴν ΣΑ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ τελευταία χορδὴ διέρχεται ἀπὸ ἕνα ὡρισμένον σημεῖον Ν καὶ ὅτι τὸ γινόμενον ΣΑ×ΝΒ εἶναι σταθερόν.

1240. (1272). Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Σ, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ μιᾶς διαμέτρου ἑνὸς κύκλου Ο καὶ εἰς ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ κέντρον Ο καὶ ἀπὸ τὸ Σ φέρομεν μίαν χορδὴν ΒΣΓ μεταβλητῆς διευθύνσεως. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ μένει σταθερόν.

Ε' Ὁμάς. **1241.** (1273). Δίδεται ἕνας κύκλος Ο καὶ ἕνα σημεῖον Σ ἐντὸς αὐτοῦ· ἀπὸ τὸ Σ φέρομεν μίαν τέμνουσαν μεταβλητῆς διευθύνσεως. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰ ἄκρα τῆς τεμνούσης, κινεῖται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ὡρισμένης, καθέτου ἐπὶ τὴν διάμετρον, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Σ.

1242. (1274). Δίδεται ἕνας κύκλος Ο καὶ μία εὐθεῖα ΧΥ ἐκτὸς αὐτοῦ· ἀπὸ ἕνα σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον κινεῖται ἐπὶ τῆς ΧΥ φέρομεν τὰς δύο ἐφαπτομένας εἰς τὸν κύκλον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν δύο ἐφαπτομένων, τέμνει τὴν διάμετρον, τὴν κάθετον ἐπὶ ΧΥ, εἰς ἕνα ὡρισμένον σημεῖον.

1243. (1275). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τραπέζιον περιγεγραμμένον περὶ κύκλον, αἱ διαγώνιοι καὶ ἡ διάμετρος, ἡ ὁποία συνδέει τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν βάσεών του, τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

1244. (1276). Δίδονται τρεῖς κύκλοι, ἕκαστος τῶν ὁποίων τέμνει τοὺς δύο ἄλλους. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ τρεῖς κοιναὶ τέμνουσαι διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον.

ΣΤ' Ὁμάς. **1245.** (1277). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο εὐθείας ὀρθογωνίους εἶναι ἴσον μὲ k^2.

1246. (1278). Δίδεται μία εὐθεῖα ΑΒ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν ἄκρων Μ τῶν καθέτων ἐπὶ τὴν ΑΒ, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὰ σημεῖα Γ αὐτῆς, ἂν εἶναι

$$\overline{\Gamma M}^2 = A\Gamma \times \Gamma B.$$

1247. (1279). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας x'x λαμβάνομεν κατὰ σειρὰν τὰ σημεῖα Ο, Α, Β. Ἀπὸ τὸ Β φέρομεν κάθετον y'y ἐπὶ τὴν x'x. Ἕνα σημεῖον Μ κινεῖ-

ται ἐπὶ τῆς y'y· ἐπὶ τῆς εὐθείας ΟΜ λαμβάνομεν ἕνα σημεῖον Μ', τὸ ὁποῖον κεῖται μεταξὺ τῶν Ο καὶ Μ καὶ τοιοῦτον, ὥστε ΟΜ×ΟΜ'=ΟΑ×ΟΒ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου Μ'.

1248. (1280). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας δίδονται κατὰ σειρὰν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν ἐφαπτομένων, τῶν ἀγομένων ἀπὸ τὸ Γ πρὸς ὅλας τὰς περιφερείας, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὰ σημεῖα Β καὶ Γ.

1249. (1281). Ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ὑψοῦμεν μίαν κάθετον ΔΕΖ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΒΑ εἰς τὸ Ε καὶ τὴν ΓΑ εἰς τὸ Ζ. Ἐπὶ τῆς καθέτου αὐτῆς λαμβάνομεν ἕνα μῆκος ΔΜ τοιοῦτον, ὥστε $\overline{\Delta M}^2$=ΔΕ×ΔΖ (1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου Μ.

1250. (1282). Ἐπὶ μιᾶς καθέτου ΔΕΖ ἐπὶ μίαν εὐθεῖαν ΓΔΒ λαμβάνομεν δύο σημεῖα Ε καὶ Ζ τοιαῦτα, ὥστε ΔΕ×ΔΖ=ΒΔ×ΓΔ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων Α, εἰς τὰ ὁποῖα τέμνονται αἱ ΒΕΑ καὶ ΓΑΖ.

1251. (1284). Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Ο φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία συναντᾷ μίαν ἄλλην δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ εἰς ἕνα σημεῖον Ν. Ἐπὶ τῆς τυχούσης εὐθείας λαμβάνομεν ἕνα μῆκος ΟΜ τοιοῦτον, ὥστε ΟΝ×ΟΜ=k^2 (1). Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου Μ.

1252. (1252). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἡ βάσις ΒΓ εἶναι ὡρισμένη κατὰ τὴν θέσιν καὶ κατὰ τὸ μέγεθος, ἡ δὲ ἀπέναντι γωνία Α εἶναι σταθερὰ κατὰ τὸ μέγεθος. Ἐκ τοῦ μέσου Ε μιᾶς τῶν μεταβλητῶν πλευρῶν του ΑΓ φέρομεν κάθετον ΕΜ ἐπὶ τὴν ἄλλην μεταβλητὴν πλευρὰν ΑΒ Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τοῦ σημείου Μ;

1253. (1285). Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Δ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς κύκλου Ο φέρομεν μίαν χορδὴν ΒΔΓ. Μὲ ὑποτείνουσαν τὴν χορδὴν αὐτὴν ΒΓ γράφομεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ κορυφὴ Α προσβάλλεται ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης εἰς τὸ Δ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῆς κορυφῆς Α.

1254. (1286). Ἐπὶ τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν ἑκατέρωθεν τοῦ Α δύο τμήματα ΑΔ, ΑΕ τοιαῦτα, ὥστε ΑΔ×ΑΕ=ΑΒ×ΑΓ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων Μ, εἰς τὰ ὁποῖα τέμνονται αἱ ΔΒ καὶ ΓΕ.

1255. (1287). Δίδονται δύο ὁμόκεντροι περιφέρειαι. Φέρομεν μίαν σταθερὰν ἀκτῖνα ΟΑΑ' καὶ μίαν ἄλλην ΟΒΒ' μεταβλητήν. Φέρομεν τὰς ΑΒ' καὶ ΒΑ', αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ Μ.

1256. (1288). Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς κύκλου Ο φέρομεν μίαν τέμνουσαν ΑΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου Μ τῆς τομῆς τῶν περιφερειῶν, τῶν διερχομένων διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β καὶ διὰ τῶν σημείων Α καὶ Γ, ὅταν αἱ περιφέρειαι αὗται ἐφάπτωνται τῆς δοθείσης περιφερείας.

1257 (1289). Ἀπὸ τὰ ἄκρα μιᾶς εὐθείας ΑΒ ὑψοῦμεν καθέτους ΑΑ' καὶ ΒΒ' ἐπὶ τὴν ΑΒ. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΑΒ ἕνα σημεῖον Ρ. Λαμβάνομεν ἐπίσης ἐπὶ τῆς ΑΑ' ἕνα σημεῖον Γ καὶ ἐπὶ τῆς ΒΒ' ἕνα ἄλλο σημεῖον Δ καὶ τοιαῦτα, ὥστε ΑΓ×ΒΔ=ΡΑ×ΡΒ. Φέρομεν ἐκ τοῦ Ρ, τὴν ΡΜ κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΔ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ Μ, ὅταν τὰ Γ καὶ Δ κινοῦνται ἐπὶ τῶν ΑΑ' καὶ ΒΒ', τὸ δὲ Ρ μένῃ σταθερόν.

1258. (1290). Δίδονται δύο εὐθεῖαι ΑΑ καὶ ΒΒ' κάθετοι ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν εὐθειῶν τούτων τὰ σημεῖα Α' καὶ Β' τοιαῦτα, ὥστε $AA' \times BB' = \overline{AB}^2$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων Μ τῆς τομῆς τῶν ΑΒ' καὶ ΒΑ'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ Μ τοῦ τόπου τούτου διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Σ τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ Β'Α'.

1259. (1291). Δίδεται τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τῆς βάσεως εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ἀποστάσεών των ἀπὸ τὰς ἴσας πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ.

1260. (1292). Ἡ βάσις ΑΒ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ὡρισμένη κατὰ τὴν θέσιν καὶ τὸ μέγεθος, καὶ ἡ ἀπέναντι γωνία του Γ σταθερά. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ λαμβάνομεν ἕνα σημεῖον Ε τοιοῦτον, ὥστε $\frac{BE}{E\Gamma} = \frac{\mu}{\nu}$. Διὰ τοῦ Ε φέρομεν μίαν εὐθεῖαν ΕΜ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ἀπέναντι πλευρὰν ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν ΑΜΕ=ω. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου Μ.

1261. (1294). Ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ στρέφεται περὶ μίαν τῶν κορυφῶν του Α, ἐνῶ ἡ κορυφὴ Β διαγράφει τὴν περιφέρειαν δοθέντος κύκλου Ο. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῆς κορυφῆς Γ, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ τρίγωνον μένει ὅμοιον πρὸς ἑαυτό.

1262. (1295). Ἑνὸς τραπεζίου ΑΒΓΔ δίδονται τὰ μήκη ΑΒ=α καὶ ΔΓ=β τῶν δύο βάσεών του, καὶ τὸ μῆκος ΑΔ=γ μιᾶς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του. Ἡ βάσις ΑΒ=α εἶναι ὡρισμένη καὶ κατὰ τὴν θέσιν. Νὰ εὑρεθῇ:

1ον. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του.

2ον. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του.

1263. (1296). Τραπεζίου ΑΒΓΔ δίδονται αἱ βάσεις ΑΒ=α καὶ ΓΔ=β. Ἡ βάσις ΑΒ εἶναι ὡρισμένη καὶ κατὰ τὴν θέσιν. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του καὶ ὁ τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων, ὅταν ἡ κορυφὴ Δ γράφῃ μίαν εὐθεῖαν γραμμὴν ἢ μίαν δοθεῖσαν περιφέρειαν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ

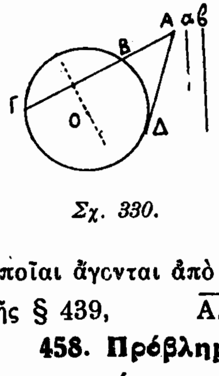
Εἰς προηγούμενα κεφάλαια (§ 391, 392, 404, 430) ἐλύσαμεν μερικὰ γεωμετρικὰ προβλήματα. Κατωτέρω θὰ λύσωμεν καὶ ἄλλα γεωμετρικὰ προβλήματα γραφικῶς.

457. Πρόβλημα 1ον. ***Νὰ κατασκευασθῇ ἡ μέση ἀνάλογος μεταξὺ δύο εὐθυγράμμων τμημάτων α καὶ β.***

Εἰς τὴν § 430 ἐδώσαμεν δύο μεθόδους τῆς κατασκευῆς τῆς μέσης ἀναλόγου δύο εὐθυγράμμων τμημάτων α καὶ β.

Τὸ θεώρημα τῆς § 439 δίδει καὶ μίαν *τρίτην κατασκευὴν τῆς μέσης ἀναλόγου δύο εὐθυγράμμων τμημάτων α καὶ β.*

Πράγματι· ἐπὶ τυχούσης εὐθείας λαμβάνομεν δύο τμήματα ΑΒ=α καὶ ΑΓ=β *(Σχ. 330)*. Γράφομεν ἔπειτα τυχοῦσαν περιφέρειαν, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Β, Γ καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον Α φέρομεν ἐφαπτομένην ΑΔ τῆς περιφερείας αὐτῆς. Ἡ ΑΔ εἶναι ἡ ζητουμένη μέση ἀνάλογος τῶν δύο εὐθυγράμμων τμημάτων α καὶ β.



Σχ. 330.

Πράγματι· ἐπειδὴ ἡ ΑΒΓ εἶναι τέμνουσα τοῦ κύκλου Ο, ἡ δὲ ΑΔ ἐφαπτομένη αὐτοῦ, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Α, θὰ εἶναι κατὰ τὸ θεώρημα τῆς § 439, $\overline{ΑΔ}^2 = ΑΒ \times ΑΓ$ ἢ $\overline{ΑΔ}^2 = α \times β$.

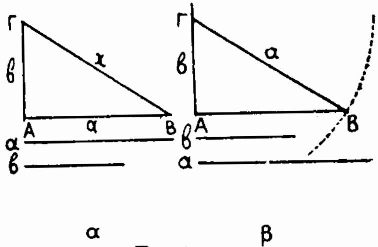
458. Πρόβλημα 2ον. ***Ἂν α καὶ β εἶναι δοθέντα εὐθύγραμμα τμήματα, νὰ κατασκευασθῇ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα x, τὸ ὁποῖον δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :***

1ον. $x = \sqrt{α^2 + β^2}$. *2ον.* $x = \sqrt{α^2 - β^2}$. *3ον.* $x = α\sqrt{5}$.

Λύσις. 1ον. Ὑψοῦμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος $x = \sqrt{α^2 + β^2}$ εἰς τὸ τετράγωνον καὶ ἔχομεν $x^2 = α^2 + β^2$.

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτὴν παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ζητούμενον εὐθύγραμμον τμῆμα x εἶναι ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ κάθετοι πλευραὶ εἶναι αἱ α καὶ β. *(Σχ. 331α).*

2ον. Ὁμοίως ἀπὸ τὴν ἰσότητα $x=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$ λαμβάνομεν $x^2=\alpha^2-\beta^2$. Τὸ ζητούμενον εὐθύγραμμον τμῆμα εἶναι ἡ κάθετος πλευρὰ ΑΒ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ὑποτείνουσα εἶναι ἡ α καὶ ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ ἡ β. Ἡ κατασκευὴ τοῦ ὀρθογωνίου αὐτοῦ τριγώνου εἶναι εὔκολος. *(Σχ. 331β)*.



Σχ. 331.

3ον. Ὑψώνομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος $x=\alpha\sqrt{5}$ εἰς τὸ τετράγωνον καὶ ἔχομεν

$$x^2=5\alpha^2 \quad \text{ἢ} \quad x^2=5\alpha\cdot\alpha.$$

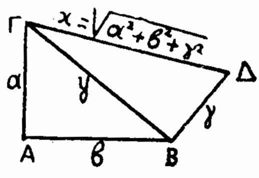
Ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτὴν συνάγομεν, ὅτι τὸ ζητούμενον τμῆμα x εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων 5α καὶ α, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν (§ 457).

459. Πρόβλημα 3ον. ***Νὰ κατασκευασθῇ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα x, τὸ ὁποῖον δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου: $x=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$, ὅπου α, β, γ εἶναι δοθέντα εὐθύγραμμα τμήματα.***

Λύσις: Ἂν ὑψώσωμεν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὰ δύο μέλη τοῦ δοθέντος τύπου ἔχομεν $x^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ (1)

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha^2+\beta^2=y^2$ (2)

ὁ τύπος (1) γράφεται $x^2=y^2+\gamma^2$ (3)



Σχ. 332.

Κατασκευάζομεν κατ' ἀρχὰς τὴν εὐθεῖαν y, ἡ ὁποία δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον (2) καὶ ἡ ὁποία εἶναι ἡ ὑποτείνουσα ΒΓ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου αἱ κάθετοι πλευραὶ εἶναι α καὶ β *(Σχ. 332)*.

Μένει τώρα νὰ κατασκευάσωμεν τὴν εὐθεῖαν x, ἡ ὁποία δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου (3).

Πρὸς τοῦτο κατασκευάζομεν τὴν ὑποτείνουσαν x τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΓΒΔ, τὸ ὁποῖον ἔχει καθέτους πλευρὰς τὰς y καὶ γ.

Ἡ ὑποτείνουσα ΓΔ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΓΒΔ εἶναι τὸ ζητούμενον μῆκος.

Πράγματι· ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓΒΔ ἔχομεν

$$\overline{\Gamma\Delta}^2=\overline{\Gamma B}^2+\overline{B\Delta}^2 \quad \text{ἢ} \quad x^2=y^2+\gamma^2.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα αὐτὴν τὸ y^2 μὲ τὸ ἴσον του $\alpha^2+\beta^2$ καὶ ἔχομεν $x^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ ἢ $x=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$.

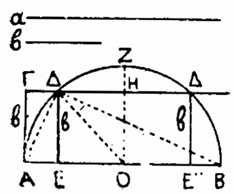
Σημ. Γενικῶς, ἐὰν εἶναι $x^2=\alpha^2\pm\beta^2\pm\gamma^2\pm\ldots$ δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὴν x, διὰ μιᾶς σειρᾶς ὀρθογωνίων τριγώνων, ἂν κατασκευάσωμεν διαδοχικῶς τὰς γραμμὰς $y, z, \ldots$ τοιαύτας, ὥστε νὰ εἶναι

$$y^2=\alpha^2\pm\beta^2,\quad z^2=y^2\pm\gamma^2,\ \ldots$$

Ἀσκήσεις: 1264, 1265, 1266, 1267, 1268.

460. Πρόβλημα 4ον. ***Νὰ κατασκευασθοῦν δύο εὐθύγραμμα τμήματα x καὶ y, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ἄθροισμά των α καὶ τὸ γινόμενόν των β^2.***

Λύσις: Πρέπει νὰ εἶναι $\begin{cases} x+y=\alpha \\ xy=\beta^2. \end{cases}$



Σχ. 333.

Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν ἕνα τμῆμα ΑΒ ἴσον μὲ τὸ δοθὲν ἄθροισμα α. Μὲ διάμετρον τὴν ΑΒ γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν Ο· ἀπὸ τὸ Α φέρομεν ἐφαπτομένην τῆς ἡμιπεριφερείας καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς τμῆμα ΑΓ ἴσον μὲ β. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς δύο σημεῖα Δ καὶ Δ'. Ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν τὴν κάθετον ΔΕ ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία χωρίζει τὴν ΑΒ εἰς δύο τμήματα ΑΕ καὶ ΕΒ, τὰ ὁποῖα εἶναι τὰ ζητούμενα.

Πράγματι εἶναι $AE+EB=AB$ ἢ $AE+EB=\alpha$ (1)

Ἐπὶ πλέον, ἐὰν φέρωμεν τὰς εὐθείας ΔΑ καὶ ΔΒ, σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΒ Τὸ ὕψος ΔΕ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΒ εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῶν δύο τμημάτων, τὰ ὁποῖα ὁρίζει ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης, ἤτοι εἶναι

$$\overline{\Delta E}^2=AE\times EB \quad ἢ \quad \overline{A\Gamma}^2=AE\times EB \quad ἢ \quad \beta^2=AE\times EB \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι τὰ ζητούμενα εὐθύγρ. τμήματα εἶναι $x=AE$ καὶ $y=EB$.

Διερεύνησις. Διὰ νὰ εἶναι τὸ πρόβλημα δυνατὸν πρέπει ἡ παράλληλος, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ Γ πρὸς τὴν ΑΒ, νὰ τέμνῃ τὴν ἡμιπεριφέρειαν ἢ νὰ ἐφάπτεται αὐτῆς· δηλ. πρέπει νὰ εἶναι

$$A\Gamma\leqslant OZ \quad ἢ \quad \beta\leqslant\frac{\alpha}{2}.$$

Ἐὰν $\beta<\frac{\alpha}{2}$, τὰ εὐθύγρ. τμήματα εἶναι διάφορα μεταξύ των.

Ἐὰν $\beta=\frac{\alpha}{2}$, ἡ ΓΔ ἐφάπτεται τῆς ἡμεπεριφερείας Ο εἰς τὸ σημεῖον Ζ καὶ θὰ εἶναι $x=y=\frac{\alpha}{2}$.

Σημ. Δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὰ τμήματα ΑΕ καὶ ΕΒ συναρτήσει τῶν α καὶ β.

Πράγματι, ἐὰν φέρωμεν τὴν ΟΔ, ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΕΔ ἔχομεν
$$\overline{ΟΕ}^2=\overline{ΟΔ}^2-\overline{ΕΔ}^2 \qquad (1)$$

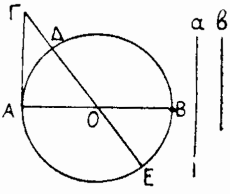
Ἐπειδὴ $ΟΔ=ΟΑ=\frac{α}{2}$ καὶ $ΕΔ=ΑΓ=β$, ἡ (1) γίνεται
$$\overline{ΟΕ}^2=\left(\frac{α}{2}\right)^2-β^2 \quad ἢ \quad ΟΕ=\sqrt{\frac{α^2}{4}-β^2}$$

Γνωρίζοντες τώρα τὸ ΟΕ εὑρίσκομεν, ὅτι
$$ΑΕ=ΑΟ-ΕΟ=\frac{α}{2}-\sqrt{\frac{α^2}{4}-β^2} \quad καὶ \quad ΕΒ=ΟΒ+ΟΕ=\frac{α}{2}+\sqrt{\frac{α^2}{4}-β^2}.$$

461. Πρόβλημα 5ον. ***Νὰ κατασκευασθοῦν δύο εὐθεῖαι x καὶ y, ἂν γνωρίζωμεν τὴν διαφορὰν των α καὶ τὸ γινόμενόν των β².***

Λύσις. Πρέπει νὰ εἶναι $\begin{cases} x-y=α \\ xy=β^2. \end{cases}$

Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν τμῆμα ΑΒ ἴσον μὲ τὴν δοθεῖσαν διαφορὰν α. Μὲ διάμετρον τὴν ΑΒ γράφομεν περιφέρειαν κύκλου Ο. Εἰς τὸ Α φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν τμῆμα ΑΓ=β. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΓΟ, ἡ ὁποία, προεκτεινομένη, τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε. Τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΓΕ καὶ ΓΔ εἶναι τὰ ζητούμενα.



Σχ. 334.

Πράγματι ἔχομεν ΓΕ − ΓΔ=ΔΕ=ΑΒ ἢ ΓΕ−ΓΔ=α (1)

Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ ἡ ΓΑ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας Ο ἡ δὲ ΓΔΕ τέμνουσα αὐτῆς, θὰ εἶναι
$$\overline{ΓΑ}^2=ΓΕ\times ΓΔ \quad ἢ \quad ΓΕ\times ΓΔ=β^2 \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι αἱ ζητούμεναι εὐθεῖαι εἶναι αἱ x=ΓΕ, y=ΓΔ.

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι πάντοτε δυνατόν.

Σημ. Δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὰ μήκη ΓΕ καὶ ΓΔ συναρτήσει τῶν α καὶ β.

Πράγματι ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓΑΟ λαμβάνομεν
$$\overline{ΓΟ}^2=\overline{ΓΑ}^2+\overline{ΑΟ}^2 \quad ἢ \quad \overline{ΓΟ}^2=β^2+\left(\frac{α}{2}\right)^2 \quad ἢ \quad ΓΟ=\sqrt{\frac{α^2}{4}+β^2}.$$

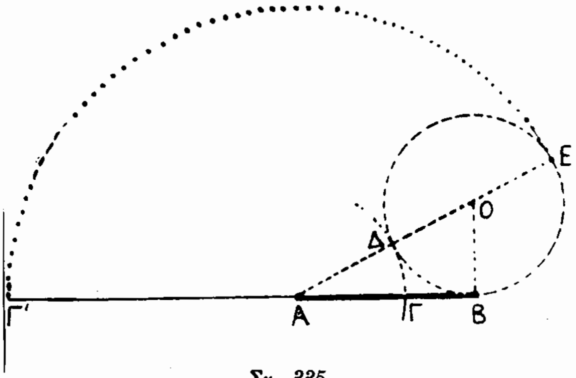
Γνωρίζοντες τὸ ΓΟ εὑρίσκομεν, ὅτι
$$ΓΕ=ΓΟ+ΟΕ=\sqrt{\frac{α^2}{4}+β^2}+\frac{ΑΒ}{2}=\sqrt{\frac{α^2}{4}+β^2}+\frac{α}{2}$$

$$ΓΔ = ΓΟ - ΟΔ = \sqrt{\frac{α^2}{4} + β^2} - \frac{ΑΒ}{2} = \sqrt{\frac{α^2}{4} + β^2} - \frac{α}{2}.$$

Ἀσκήσεις: 1269, 1270, 1271, 1272, 1273, 1278, 1279, 1274, 1275, 1276.

462. Πρόβλημα 6ον. *(Πρόβλημα τῆς χρυσῆς τομῆς).* ***Νὰ διαιρεθῇ μία εὐθεῖα εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον· δηλ. νὰ διαιρεθῇ ἡ εὐθεῖα αὐτὴ εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ μεγαλύτερον μέρος της νὰ εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῆς ὅλης εὐθείας καὶ τοῦ μικροτέρου μέρους της.***

Λύσις: Ἀπὸ τὸ ἄκρον Β τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ ὑψοῦμεν κά-



Σχ. 335.

θετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς ἕνα τμῆμα ΒΟ ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ. Μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα τὴν ΟΒ γράφομεν περιφέρειαν κύκλου, ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτεται τῆς ΑΒ εἰς τὸ Β. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΟ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε. Μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα τὴν ΑΔ γράφομεν ἕνα τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Γ, ὁπότε θὰ εἶναι ΑΔ=ΑΓ. Τὸ Γ εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον, τὸ ὁποῖον διαιρεῖ τὴν ΑΒ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

Πράγματι· ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας Ο, ἡ δὲ ΑΔΕ τέμνουσα αὐτῆς, θὰ ἔχωμεν

$$\overline{ΑΒ}^2 = ΑΔ \times ΑΕ \quad ἢ \quad \overline{ΑΒ}^2 = ΑΔ \times (ΑΔ + ΔΕ)$$

$$ἢ \quad \overline{ΑΒ}^2 = \overline{ΑΔ}^2 + ΑΔ \times ΔΕ \qquad (1)$$

Ἀντικαθιστῶμεν τὰ τμήματα ΑΛ. ΔΕ μὲ ἴσα τμήματα, τὰ ὁποῖα

κεῖνται ἐπὶ τῆς ΑΒ. Ἐπειδὴ ΑΔ=ΑΓ καὶ ΔΕ=2×ΟΒ=ΑΒ, ἡ ἰσότης (1) γράφεται

$$\overline{AB}^2=\overline{A\Gamma}^2+A\Gamma\times AB \quad \text{ἢ} \quad \overline{A\Gamma}^2=\overline{AB}^2-A\Gamma\times AB$$

$$\text{ἢ} \quad \overline{A\Gamma}^2=AB\times(AB-A\Gamma) \quad \text{ἢ} \quad \overline{A\Gamma}^2=AB\times\Gamma B\cdot$$

ὥστε τὸ σημεῖον Γ διαιρεῖ τὴν ΑΒ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

Ὑπολογισμὸς τῆς ΑΓ. Ἐὰν θέσωμεν ΑΒ=α, καὶ ΑΓ=x, θὰ εἶναι ΓΒ=α−x καὶ ἡ ἰσότης $\overline{A\Gamma}^2=AB\times\Gamma B$ γίνεται

$$x^2=\alpha(\alpha-x \quad \text{ἢ} \quad x^2=\alpha^2-\alpha x \quad \text{ἢ} \quad x^2+\alpha x-\alpha^2=0.$$

Λύοντες τὴν δευτεροβάθμιον αὐτὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν

$$A\Gamma=x=\frac{\alpha}{2}(\sqrt{5}-1).$$

463. Παρατήρησις. Ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΑ ἕνα σημεῖον Γ′ τοιοῦτον, ὥστε ΑΓ′=ΑΕ, ἡ ἰσότης $\overline{AB}^2=A\Delta\times AE$ γράφεται

$$\overline{AB}^2=A\Delta\times A\Gamma' \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ ΑΔ=ΑΕ−ΔΕ=ΑΓ′−ΑΒ, ἡ (1) γίνεται

$$\overline{AB}^2=(A\Gamma'-AB)\times A\Gamma' \quad \text{ἢ} \quad \overline{AB}^2=\overline{A\Gamma'}^2-AB\times A\Gamma'$$

$$\text{ἢ} \quad \overline{A\Gamma'}^2=\overline{AB}^2+AB\times A\Gamma' \quad \text{ἢ} \quad \overline{A\Gamma'}^2=AB\times(AB+A\Gamma')$$

$$\text{ἢ} \quad \overline{A\Gamma'}^2=AB\times B\Gamma'.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι ὑπάρχει καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς εὐθείας ΑΒ ἕνα σημεῖον Γ′ τοιοῦτον, ὥστε $\overline{A\Gamma'}^2=AB\times B\Gamma'$.

Ἐὰν εἰς τὴν ἰσότητα $\overline{A\Gamma'}^2=AB\times\Gamma'B$ θέσωμεν ΑΒ=α καὶ ΑΓ′=x καὶ Γ′Β=Γ′Α+ΑΒ=x+α, θὰ ἔχωμεν $x^2=\alpha(x+\alpha)$ ἢ $x^2-\alpha x-\alpha^2=0$.

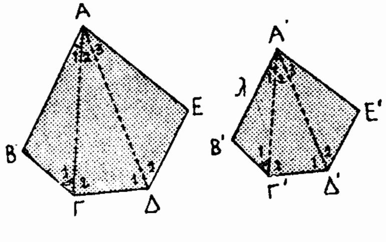
Λύοντες αὐτὴν εὑρίσκομεν $A\Gamma'=x=\frac{\alpha}{2}(\sqrt{5}+1)$.

Ἀσκήσεις: 1278, 1279.

464. Πρόβλημα 7ον. *Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα πολύγωνον Α′Β′Γ′Δ′,.... ὅμοιον πρὸς δοθὲν πολύγωνον ΑΒΓΔ,.... καὶ τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ Α′Β′, ἡ ὁμόλογος πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ τοῦ δοθέντος πολυγώνου, νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος λ.*

1η Λύσις. Χωρίζομεν τὸ δοθὲν πολύγωνον εἰς τρίγωνα· πρὸς τοῦτο φέρομεν τὰς διαγωνίους ΑΓ, ΑΔ, ...

Μὲ κορυφὴν τὸ Α′, καὶ πλευρὰν τὴν Α′Β′=λ κατασκευάζομεν γωνίαν A_1' ἴσην μὲ τὴν γωνίαν A_1· μὲ κορυφὴν τὸ Β′ καὶ πλευρὰν τὴν Β′Α′ κατασκευάζομεν γωνίαν Β′ ἴσην μὲ τὴν γωνίαν Β. Αἱ πλευραὶ Β′Γ′ καὶ Α′Γ′

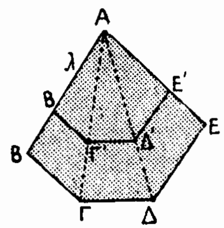


Σχ. 336.

τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Γ'. Τὸ σχηματισθὲν τρίγωνον Α'Β'Γ' εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, διότι ἔχουν δύο γωνίας ἴσας μίαν πρὸς μίαν, ἐκ κατασκευῆς.

Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Α'Γ', ἡ ὁποία εἶναι ὁμόλογος τῆς ΑΓ κατασκευάζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἕνα τρίγωνον Α'Γ'Δ' ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΓΔ· ὁμοίως ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Α'Δ', ὁμολόγου τῆς ΑΔ, κατασκευάζομεν ἕνα τρίγωνον Α'Δ'Ε' ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΔΕ. Τὸ πολύγωνον Α'Β'Γ'Δ'Ε', τὸ ὁποῖον κατεσκευάσθη κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓΔΕ, διότι τὰ δύο αὐτὰ πολύγωνα ἀποτελοῦνται ἀπὸ ὅμοια τρίγωνα, ἰσάριθμα καὶ ὁμοίως κείμενα (§ 417).

2α Λύσις. Χωρίζομεν τὸ δοθὲν πολύγωνον ΑΒΓΔΕ εἰς τρίγωνα· πρὸς τοῦτο φέρομεν τὰς διαγωνίους ΑΓ, ΑΔ. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ λαμβάνομεν ἕνα τμῆμα ΑΒ' ἴσον μὲ δοθὲν μῆκος λ. Ἀπὸ τὸ Α φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Γ'.



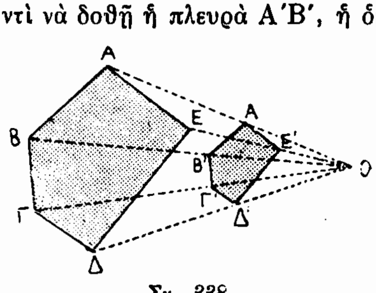
Σχ. 337

Ἀπὸ τὸ Γ' φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΓΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΔ εἰς τὸ Δ'. Τέλος ἀπὸ τὸ Δ' φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΔΕ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΕ εἰς τὸ Ε'.

Τὰ τρίγωνα ΑΒ'Γ', ΑΓ'Δ', ΑΔ'Ε' εἶναι ὅμοια, ἀντιστοίχως, πρὸς τὰ ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ, διότι ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν.

Τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ ΑΒ'Γ'Δ'Ε' εἶναι ὅμοια, διότι ἀποτελοῦνται ἀπὸ τρίγωνα ὅμοια, ἰσάριθμα καὶ ὁμοίως κείμενα.

465. Παρατήρησις. Ἐάν, ἀντὶ νὰ δοθῇ ἡ πλευρὰ Α'Β', ἡ ὁμόλογος τῆς ΑΒ, δίδεται ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητος $\frac{\mu}{\nu}$, κατασκευάζομεν πρῶτον ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα Α'Β', τοῦ ὁποίου ὁ λόγος πρὸς τὴν ΑΒ νὰ εἶναι $\frac{\mu}{\nu}$, δηλ. εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον τῶν μ, ν, ΑΒ, $\left(\frac{\mu}{\nu}=\frac{AB}{A'B'}\right)$



Σχ. 338.

καὶ ἔπειτα ἐφαρμόζομεν μίαν ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω λύσεις. Εἶναι προτιμότερον ὅμως νὰ ἀκολουθῶμεν τὴν κάτωθι κατασκευήν:

Λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Ο, ἐκτὸς τοῦ δοθέντος πολυγώνου ΑΒΓΔΕ καὶ φέρομεν τὰς εὐθείας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, ΟΕ. Ἐπὶ τῆς

ΟΑ λαμβάνομεν ἕνα τμῆμα ΟΑ′ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{ΟΑ'}{ΟΑ}=\frac{μ}{ν}$. Ἀπὸ τὸ Α′ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΟΒ εἰς τὸ Β′. Ἀπὸ τὸ Β′ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΟΓ εἰς τὸ Γ′, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Τὰ τρίγωνα ΟΑ′Β′, ΟΒ′Γ′, ΟΓ′Δ′, ΟΔ′Ε′, ΟΕ′Α′ εἶναι ὅμοια ἀντιστοίχως πρὸς τὰ ΟΑΒ, ΟΒΓ, . . . ΟΕΑ, διότι ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν.

Ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων αὐτῶν συνάγομεν, ὅτι

$$\frac{ΟΑ'}{ΟΑ}=\frac{Α'Β'}{ΑΒ}=\frac{ΟΒ'}{ΟΒ}=\frac{Β'Γ'}{ΒΓ}=\frac{ΟΓ'}{ΟΓ}=\frac{Γ'Δ'}{ΓΔ}=\dots\frac{μ}{ν}.$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν συνάγομεν, ὅτι

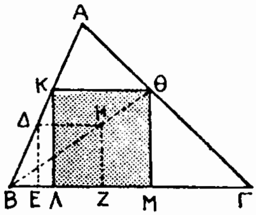
$$\frac{Α'Β'}{ΑΒ}=\frac{Β'Γ'}{ΒΓ}=\frac{Γ'Δ'}{ΓΔ}=\dots=\frac{Ε'Α'}{ΕΑ}=\frac{μ}{ν}.$$

Τὰ πολύγωνα λοιπὸν Α′Β′Γ′Δ′Ε′ καὶ ΑΒΓΔΕ ἔχουν τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους καὶ τὰς γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν, διότι αἱ πλευραί των εἶναι παράλληλοι καὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν· ἄρα τὰ πολύγωνα αὐτὰ εἶναι ὅμοια.

Ἀσκήσεις: 1280, 1281.

466. Πρόβλημα 8ον. ***Εἰς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ** (Σχ. 339), **νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον.***

Κατασκευή: Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Δ τῆς πλευρᾶς ΑΒ φέρομεν κάθετον ΔΕ ἐπὶ τὴν ΒΓ· μὲ πλευρὰν τὴν ΔΕ κατασκευάζομεν τὸ τετράγωνον ΔΕΖΗ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΒΗ, ἡ ὁποία, προεκτεινομένη, τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Θ. Ἀπὸ τὸ Θ φέρομεν τὴν ΘΜ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ τὴν ΘΚ κάθετον ἐπὶ τὴν ΘΜ· ἀπὸ τὸ Κ φέρομεν τὴν ΚΛ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ. Τὸ σχηματισθὲν ὀρθογώνιον ΛΜΘΚ εἶναι τὸ ζητούμενον τετράγωνον.



Σχ. 339.

Ἀπόδειξις: Αἱ ΗΖ καὶ ΘΜ εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν· ἄρα τὰ τρίγωνα ΒΖΗ καὶ ΒΜΘ εἶναι ὅμοια καὶ ἑπομένως θὰ ἔχωμεν $\frac{ΗΖ}{ΘΜ}=\frac{ΒΗ}{ΒΘ}$ (1).

Ὁμοίως ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΒΗΔ καὶ ΒΘΚ ἔχομεν $\frac{ΔΗ}{ΚΘ}=\frac{ΒΗ}{ΒΘ}$ (2).

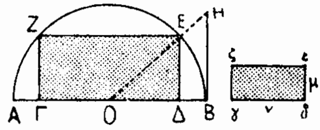
Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι $\frac{ΗΖ}{ΘΜ}=\frac{ΔΗ}{ΚΘ}$.

Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΗΖ=ΔΗ, θὰ εἶναι καὶ ΘΜ=ΚΘ.

Ὥστε τὸ ὀρθογώνιον ΛΜΘΚ ἔχει δύο διαδοχικὰς πλευρὰς ἴσας· ἄρα εἶναι τετράγωνον.

467. Πρόβλημα 9ον. ***Εἰς δοθὲν ἡμικύκλιον νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον, ὅμοιον πρὸς δοθὲν ὀρθογώνιον.***

Ἀνάλυσις. Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω ΓΔΕΖ *(Σχ. 340)* τὸ ζητούμενον ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ ἡμικύκλιον Ο διαμέτρου ΑΒ καὶ τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ δοθὲν ὀρθογώνιον γδεζ.



Σχ. 340.

Ἐπειδὴ τὰ ὀρθογώνια ΓΔΕΖ καὶ γδεζ εἶναι ὅμοια, θὰ εἶναι

$$\frac{ΓΖ}{ΓΔ}=\frac{γζ}{γδ} \quad ἢ \quad \frac{ΓΖ}{ΓΔ}=\frac{μ}{ν} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ $ΓΔ=2\times ΟΔ$, ἡ ἰσότης (1) γράφεται

$$\frac{ΓΖ}{2\times ΟΔ}=\frac{μ}{ν} \qquad \frac{ΓΖ}{ΟΔ}=\frac{2μ}{ν} \qquad (1')$$

Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΕ, ἡ ὁποία, προεκτεινομένη, τέμνει τὴν κάθετον, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ Β ἐπὶ τὴν ΑΒ, εἰς τὸ σημεῖον Η. Ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΟΒΗ καὶ ΟΔΕ ἔχομεν

$$\frac{ΒΗ}{ΔΕ}=\frac{ΟΒ}{ΟΔ} \quad ἢ \quad \frac{ΒΗ}{ΟΒ}=\frac{ΔΕ}{ΟΔ} \quad ἢ \quad \frac{ΒΗ}{ΟΒ}=\frac{ΓΖ}{ΟΔ} \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1′) καὶ (2) συνάγομεν

$$\frac{ΒΗ}{ΟΒ}=\frac{2μ}{ν} \quad ἢ \quad \frac{ν}{ΟΒ}=\frac{2μ}{ΒΗ}.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ΒΗ εἶναι ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν γνωστῶν τμημάτων ν, ΟΒ, 2μ καὶ ἑπομένως δύναται νὰ κατασκευασθῇ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι κατασκευήν:

Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον ΒΗ τῶν γνωστῶν τμημάτων ν, ΟΒ, 2μ. Ἀπὸ τὸ Β φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΒ καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου αὐτῆς λαμβάνομεν τμῆμα ἴσον μὲ ΒΗ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΟΗ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Ε. Ἀπὸ τὸ Ε φέρομεν τὴν ΕΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ τὴν ΕΖ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὸ Ζ. Τέλος φέρομεν τὴν κάθετον ΖΓ ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ τὸ σχηματιζόμενον ὀρθογώνιον ΓΔΕΖ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἀσκήσεις: 1280, 1281, 1282, 1283, 1284, 1285, 1286, 1287, 1288, 1289.

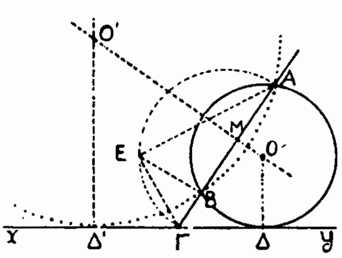
468. Πρόβλημα 10ον. ***Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β καὶ νὰ ἐφάπτεται δοθείσης εὐθείας xy.***

Ἀνάλυσις. Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω Ο ἡ ζητουμένη περιφέρεια, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ ἐφάπτεται τῆς xy, ἔστω εἰς τὸ σημεῖον Δ.

Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, ἡ ὁποία, προεκτεινομένη, τέμνει τὴν xy εἰς τὸ σημεῖον Γ.

Ἐπειδὴ ἡ ΓΔ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας Ο, ἡ δὲ ΓΒΑ τέμνουσα αὐτῆς, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον, θὰ εἶναι

$$\overline{\Gamma\Delta}^2 = \Gamma\mathrm{A} \times \Gamma\mathrm{B}.$$



Σχ. 341.

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτὴν συνάγομεν, ὅτι ἡ ΓΔ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν γνωστῶν τμημάτων ΓΑ καὶ ΓΒ καὶ ἑπομένως δύναται νὰ κατασκευασθῇ. Γνωρίζοντες τὴν ΓΔ δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὸ σημεῖον Δ ἐπαφῆς τῆς xy καὶ τῆς ζητουμένης περιφερείας, καὶ ἑπομένως νὰ κατασκευάσωμεν τὴν περιφέρειαν, ἡ ὁποία θὰ διέρχεται ἀπὸ τὰ τρία σημεῖα Α, Β καὶ Δ. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι κατασκευήν:

Σύνθεσις. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, ἡ ὁποία, προεκτεινομένη, τέμνει τὴν xy εἰς τὸ σημεῖον Γ. Κατασκευάζομεν ἔπειτα τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν ΓΑ καὶ ΓΒ· πρὸς τοῦτο μὲ διάμετρον τὴν ΓΑ γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον Β φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΑ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Ε· φέρομεν τὴν ΓΕ ἡ ὁποία εἶναι ἡ μέση ἀνάλογος τῶν ΓΑ καὶ ΒΓ (§ 422. 3ον).

Λαμβάνομεν ἔπειτα ἐπὶ τῆς εὐθείας xy ἕνα τμῆμα ΓΔ=ΓΕ καὶ γράφομεν τὴν περιφέρειαν Ο, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α, Β, Δ καὶ ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη περιφέρεια.

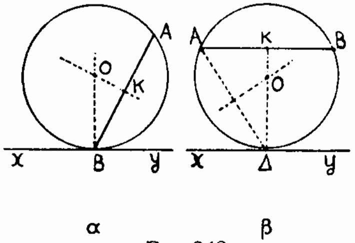
Ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας Γx ἕνα τμῆμα ΓΔ′=ΓΕ καὶ γράψωμεν τὴν περιφέρειαν, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α, Β, Δ′, εὑρίσκομεν καὶ δευτέραν περιφέρειαν, ἡ ὁποία λύει τὸ πρόβλημα.

Διερεύνησις. Διὰ νὰ ἔχῃ τὸ πρόβλημα λύσιν πρέπει τὰ σημεῖα Α καὶ Β νὰ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας xy.

Ἐὰν λοιπὸν τὰ σημεῖα Α καὶ Β κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς xy, τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις, διότι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς ζητου-

μένης περιφερείας καὶ τῆς δοθείσης εὐθείας δύναται νὰ εἶναι τὸ Δ ἢ τὸ Δ'.

Ἐὰν τὸ Β κεῖται ἐπὶ τῆς xy, τὸ Β εἶναι καὶ σημεῖον ἐπαφῆς καὶ ἑπομένως τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν xy, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ Β καὶ ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τῆς ΑΒ *(Σχ. 342α)*.



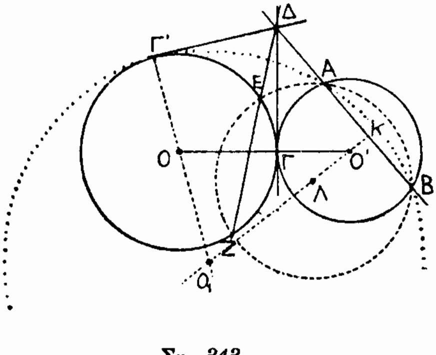
Σχ. 342.

Ἐὰν ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν xy, τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Δ κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τῆς ΑΒ καὶ ἡ περιφέρεια, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α, Β καὶ Δ εἶναι ἡ ζητουμένη *(Σχ. 342β)*.

469. Πρόβλημα 11ον. *Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα καὶ νὰ ἐφάπτεται δοθείσης περιφερείας.*

Ἀνάλυσις. Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω Ο' *(Σχ. 343)* ἡ ζητουμένη περιφέρεια, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β καὶ ἐφάπτεται τῆς δοθείσης περιφερείας Ο στω εἰς τὸ σημεῖον Γ.

Ἐὰν τὸ σημεῖον Γ ἦτο γνωστόν, τότε τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τό: *νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ τὰ τρία σημεῖα Α, Β, Γ.*



Σχ. 343.

Εἶναι ἀνάγκη λοιπὸν νὰ προσδιορίσωμεν τὸ σημεῖον Γ.

Φέρομεν τὴν κοινὴν ἐφαπτομένην τῶν περιφερειῶν Ο καὶ Ο' εἰς τὸ σημεῖον Γ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς εὐθείας ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Δ. Ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν ΔΕΖ τῆς δοθείσης περιφερείας Ο.

Ἐπειδὴ ἡ ΔΓ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας Ο, ἡ δὲ ΔΕΖ τέμνουσα αὐτῆς, ἔχομεν $\overline{\Delta\Gamma^2}=\Delta\mathrm{E}\times\Delta\mathrm{Z}$ (1)

Ὡμοίως ἐπειδὴ ἡ ΔΓ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας Ο', ἡ δὲ ΔΑΒ τέμνουσα αὐτῆς, ἔχομεν $\overline{\Delta\Gamma^2}=\Delta\mathrm{A}\times\Delta\mathrm{B}$ (2)

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι

$$ΔΕ \times ΔΖ = ΔΑ \times ΔΒ \qquad (3)$$

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα (3) συνάγομεν, ὅτι τὰ σημεῖα Α, Β, Ε, Ζ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι κατασκευήν:

Σύνθεσις. Γράφομεν τυχοῦσαν περιφέρειαν Λ, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ τὰ δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β καὶ ἡ ὁποία νὰ τέμνη τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν Ο, ἔστω εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΖΕ, ἡ ὁποία, προεκτεινομένη, τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς εὐθείας ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Δ. Ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΔΓ τῆς περιφερείας Ο. Ἔπειτα γράφομεν τὴν περιφέρειαν, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ τρία σημεῖα Α, Β, Γ, ἡ ὁποία εἶναι καὶ ἡ ζητουμένη.

Ἐπειδὴ ἀπὸ τὸ Δ δυνάμεθα νὰ φέρωμεν δύο ἐφαπτομένας ΔΓ καὶ ΔΓ′ τῆς περιφερείας Ο, τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις: τὴν περιφέρειαν Ο′ καὶ τὴν περιφέρειαν $Ο_1$.

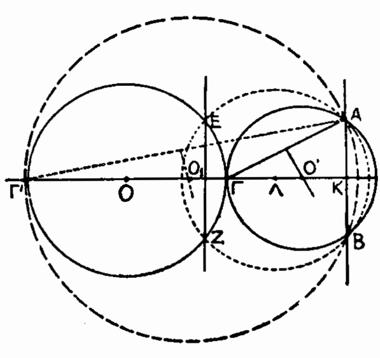
Διερεύνησις. *1ον.* Τὸ σημεῖον Δ τῆς τομῆς τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ τῆς εὐθείας ΕΖ *θὰ ὑπάρχη, ὅταν ἡ ΕΖ δὲν εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ.*

Ἀλλὰ διὰ νὰ ἔχη τὸ πρόβλημα λύσιν πρέπει νὰ δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἀπὸ τὸ σημεῖον Δ ἐφαπτομένην πρὸς τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν Ο· δηλ. πρέπει τὸ Δ νὰ κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου Ο.

Ὥστε, *ὅταν τὸ Δ κεῖται ἐκτὸς τῆς περιφερείας Ο,* τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις, διότι δυνάμεθα νὰ φέρωμεν δύο ἐφαπτομένας ΔΓ καὶ ΔΓ′ πρὸς τὴν περιφέρειαν αὐτήν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ περιφέρειαι Ο καὶ Ο′ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς, ἐὰν φέρωμεν τὴν ἐφαπτομένην ΔΓ καὶ αἱ Ο καὶ $Ο_1$ ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς, ἐὰν φέρωμεν τὴν ἐφαπτομένην ΔΓ′.

Ὅταν τὸ Δ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας Ο τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν μόνον λύσιν, διότι μία καὶ μόνον ἐφαπτομένη ἄγεται ἀπὸ τὸ Δ πρὸς τὴν Ο.

Ὅταν τὸ Δ κεῖται ἐντὸς τῆς περιφερείας Ο, τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει λύσιν, διότι δὲν δυνάμεθα ἀπὸ τὸ Δ νὰ φέρωμεν ἐφαπτομένην πρὸς τὴν περιφέρειαν Ο.



Σχ. 344.

2ον. Ὅταν ἡ ΕΖ εἶναι παράλ-

ληλος πρὸς τὴν ΑΒ *(Σχ. 344)*, αἱ εὐθεῖαι αὐταὶ δὲν τέμνονται καὶ ἑπομένως τὸ σημεῖον Δ δὲν ὑπάρχει.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ μεσοκάθετος τῆς ΑΒ εἶναι ἐπίσης καὶ μεσοκάθετος τῆς ΕΖ. Ἡ μεσοκάθετος αὐτὴ διέρχεται ἀπὸ τὰ κέντρα Ο καὶ Λ τῆς δοθείσης περιφερείας καὶ τῆς βοηθητικῆς περιφερείας καὶ ἑπομένως εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος.

Διὰ νὰ παρουσιασθῇ αὐτὴ ἡ διάταξις τοῦ σχήματος, πρέπει νὰ εἶναι ΟΑ=ΟΒ. Τὰ σημεῖα ἐπαφῆς Γ καὶ Γ' τῶν κύκλων Ο' καὶ O_1 μὲ τὸν δοθέντα κύκλον Ο, εἶναι αἱ τομαὶ τοῦ ἄξονος συμμετρίας καὶ τοῦ δοθέντος κύκλου καὶ τὰ κέντρα των κεῖνται ἐπὶ τῶν μεσοκαθέτων ΑΓ καὶ ΑΓ'.

'Ασκήσεις: 1290, 1291, 1292, 1293, 1294. 1320, 1321, 1322, 1323, 1324.

'Ασκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν ἐπὶ τοῦ Ε' Κεφαλαίου

Α' 'Ομάς. **1264.** (1297). Νὰ λυθῇ γραφικῶς ἡ ἐξίσωσις $5x=4\times3$

1265. (1298). Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ εὐθεῖαι:

1ον. $x=\sqrt{5}$. 2ον. $x=\sqrt{15}$. 3ον. $x=\alpha\sqrt{3}$

1266. (1299). Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων: $x=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}$ $x=\sqrt{\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-\delta^2}$.

1267. (1300). Νὰ κατασκευασθῇ ἡ εὐθεῖα $x=\sqrt{\alpha\beta-\beta\delta}$.

1268. (1301). Νὰ κατασκευασθῇ ἡ εὐθεῖα $x=\sqrt{\alpha^2-\beta\gamma}$.

1269. (1302). Νὰ κατασκευασθοῦν δύο εὐθεῖαι, ἂν γνωρίζωμεν τὸν λόγον των μ:ν καὶ τὸ ἄθροισμά των α.

1270. (1303). Νὸ κατασκευασθοῦν δύο εὐθεῖαι, ἂν γνωρίζωμεν τὸν λόγον των μ:ν καὶ τὴν διαφοράν των α.

1271. (1304). Νὰ κατασκευασθοῦν δύο εὐθεῖαι, ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ ἄθροισμά των α καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των β^2.

1272. (1305). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα x, τὸ ὁποῖον δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $\frac{x^2}{\alpha^2}=\frac{\mu}{\nu}$, ὅπου α, μ, ν εἶναι δοθέντα εὐθύγραμμα τμήματα.

1273. (1306). Νὰ κατασκευασθοῦν δύο εὐθύγραμμα τμήματα, ἂν γνωρίζωμεν τὸν λόγον των μ:ν καὶ τὸ γινόμενόν των k^2

1274. (1324). Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ εὐθεῖαι x, αἱ ὁποῖαι δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων: 1ον. $\frac{1}{x^2}=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$. 2ον $\frac{1}{x^2}=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}$.

1275. (1325). Νὰ κατασκευασθοῦν δύο εὐθεῖαι x καὶ y τοιαῦται, ὥστε

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{\alpha}, \quad \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{\beta^2}.$$

1276. (1326). Νὰ κατασκευασθοῦν δύο εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν κύβων δύο εὐθειῶν μ καὶ ν.

1277. (1327). Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ ρίζαι μιᾶς ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

1278. (1307). Ἂν γνωρίζωμεν τὸ μεγαλύτερον τμῆμα μιᾶς εὐθείας, ἡ ὁποία διῃρέθη εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, νὰ κατασκευασθῇ ἡ εὐθεῖα αὐτή.

1279. (1308). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Σ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς μιᾶς γωνίας xOy, νὰ ἀχθῇ τέμνουσα ΣΑΒ, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν Oy εἰς τὸ Α καὶ τὴν Ox εἰς τὸ Β εἰς τρόπον, ὥστε τὸ σημεῖον Α νὰ διαιρῇ τὴν ΣΑΒ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

Β' Ὁμάς. **1280** (1309). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ὅμοιον πρὸς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος νὰ εἶναι ἴση μὲ 2τ.

1281. (1310). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ὅμοιον πρὸς δοθὲν τρίγωνον καὶ τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ νὰ εὑρίσκωνται ἐπὶ τριῶν δοθεισῶν ὁμοκέντρων περιφερειῶν.

1282. (1311). Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγραφῇ ἕνα ὀρθογώνιον ὅμοιον πρὸς δοθὲν ὀρθογώνιον.

1283. (1312). Εἰς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἐγγραφῇ ἕνα τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ εἶναι παράλληλοι ἀντιστοίχως πρὸς τρεῖς δοθείσας εὐθείας.

1284. (1313). Εἰς δοθέντα κυκλικὸν τομέα ΟΑΒΓ, νὰ ἐγγραφῇ ἕνα τετράγωνον.

1285. (1314). Εἰς δοθὲν ἡμικύκλιον νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον.

1286. (1315). Εἰς δοθέντα κύκλον, νὰ ἐγγραφῇ ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὸ ἄθροισμα λ τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους.

1287. (1316). Νὰ περιγραφῇ περὶ δοθέντα κύκλον ἕνα τρίγωνον, ὅμοιον πρὸς δοθὲν τρίγωνον.

1288. (1317). Νὰ περιγραφῇ ἕνα τρίγωνον περὶ δοθέντα κύκλον, οὕτως ὥστε αἱ τρεῖς κορυφαί του νὰ κεῖνται ἐπὶ τριῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

1289. (1318). Περὶ δοθὲν τετράπλευρον ΑΒΓΔ νὰ περιγραφῇ ἕνα τετράπλευρον ὅμοιον πρὸς δοθὲν τετράπλευρον εζηθ.

Γ' Ὁμάς. **1290.** (1319). Δίδεται μία εὐθεῖα xy, ἕνα σημεῖον της Α καὶ ἕνα σημεῖον Β ἐκτὸς τῆς xy. Νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ κέντρον τὸ Β, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ τὴν xy εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $ΑΓ \times ΑΔ = λ^2$.

1291. (1320). Νὰ γραφῇ περιφέρεια κύκλου, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β καὶ τοιαύτη, ὥστε ἡ ἐφαπτομένη αὐτῆς, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τρίτον δοθὲν σημεῖον Γ νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος λ.

1292. (1321). Νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β καὶ νὰ ἀποκόπτῃ ἀπὸ δοθεῖσαν εὐθεῖαν xy χορδὴν ΓΔ ἴσην μὲ δοθὲν μῆκος.

1293. (1322). Νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α καὶ νὰ ἐφάπτεται δύο δοθεισῶν εὐθειῶν Χ καὶ Υ.

1294. (1323). Νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α καὶ νὰ ἐφάπτεται δοθείσης εὐθείας xy καὶ δοθείσης περιφερείας Ο.

Δ' Ὁμάς. 1295. (1328). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν διχοτόμον $ΑΕ=δ_α$, τὸ ὕψος $ΑΔ=υ_α$ καὶ τὸ γινόμενον $ΑΒ \times ΑΓ=λ^2$.

1296. (1329). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὸ γινόμενον $βγ=k^2$ τῶν δύο πλευρῶν του, τὸ ὕψος $ΑΔ=υ_α$ καὶ τὴν διάμεσον $ΑΜ=μ_α$.

1297. (1330). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν διχοτόμον $ΑΔ=δ_α$ τῆς γωνίας Α, τὸ γινόμενον βγ τῶν δύο πλευρῶν του καὶ τὴν διαφορὰν $Γ-Β=ω$ τῶν γωνιῶν του Β καὶ Γ.

1298. (1331). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν Α, τὴν πλευρὰν $ΒΓ=α$ καὶ τὸ γινόμενον $ΑΒ \times ΑΓ=λ^2$ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του.

1299. (1332). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν κάθετον πλευρὰν καὶ τὸν λόγον τῆς ὑποτεινούσης πρὸς τὴν ἄλλην κάθετον πλευράν.

1300. (1333). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, τὴν διχοτόμον $Δ_α$ τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α καὶ τὴν διαφορὰν $β-γ=δ$.

1301. (1334). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν, τὴν πλευρὰν α, τὴν διάμεσον $μ_α$ καὶ τὴν διαφορὰν $Β-Γ=ω$.

1302. (1335). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὸν λόγον $\frac{β}{γ}=k$, τὸ ὕψος $υ_α$ καὶ τὴν διχοτόμον $δ_α$.

1303. (1336). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὸν λόγον $\frac{β}{γ}=k$, τὴν διαφορὰν $\widehat{Β}-\widehat{Γ}=ω$ καὶ τὴν διχοτόμον $δ_α$.

1304. (1337. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὸν λόγον $\frac{β}{γ}=k$, τὴν διάμεσον $μ_α$ καὶ τὴν γωνίαν, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν ἡ διάμεσος καὶ ἡ διχοτόμος $δ_α$.

1305. (1338). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὰς ἀκτῖνας $ρ_β$, $ρ_γ$ τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων καὶ τὰς εὐθείας $Ο_βΓ$, $Ο_γΒ$, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ κέντρα των μὲ τὰς κορυφὰς Γ καὶ Β.

1306. (1339). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν Α, τὴν πλευρὰν α, καὶ ὅτι ἡ διχοτόμος ΑΔ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν δύο τμημάτων ΒΔ καὶ ΔΓ.

1307. (1340). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ὕψος $υ_α$, τὴν διαφορὰν $Β-Γ=ω$ καὶ τὸ γινόμενον k^2 τῶν τμημάτων εἰς τὰ ὁποῖα ἡ πλευρὰ ΒΓ διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ ὕψους $υ_α$.

1308. (1341). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, τὴν διάμεσον $μ_α$ καὶ τὴν διαφορὰν $Β-Γ=ω$.

1309. (1342). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὰ τρία ὕψη του $υ_α$, $υ_β$, $υ_γ$.

1310. (1343). Ἐπὶ τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας xΟy λαμβάνομεν ἕνα σημεῖον Μ, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ τὴν κορυφὴν Ο ἀπόστασιν $ΟΜ=α$. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΜΒ τοιοῦτον, ὥστε ἡ περίμετρός του νὰ εἶναι ἴση μὲ 2τ. Ἡ κορυφὴ Α νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς Οx καὶ ἡ κορυφὴ Β ἐπὶ τῆς Οy.

1311. (1344). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν βάσιν, τὴν ἀπέναντι γωνίαν καὶ τὸν λόγον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του πρὸς τὴν διαφοράν των.

Ε' Ὁμάς. **1312.** (1345). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ὀρθογώνιον, ἂν γνωρίζωμεν τὴν περίμετρόν του 2τ καὶ τὴν διαφορὰν k^2 τῶν τετραγώνων τῶν δύο προσκειμένων πλευρῶν του.

1313. (1346). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ὀρθογώνιον, ἂν γνωρίζωμεν τὴν περίμετρον 2τ καὶ τὸ ἄθροισμα k^2 τῶν τετραγώνων τῶν δύο προσκειμένων πλευρῶν του.

1314. (1347). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ὀρθογώνιον, ἂν γνωρίζωμεν τὴν περίμετρόν του 2τ καὶ τὸν λόγον τῶν δύο προσκειμένων πλευρῶν του.

1315. (1348). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα παραλληλόγραμμον ὅμοιον πρὸς δοθὲν παραλληλόγραμμον καὶ τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ διέρχωνται ἀπὸ τέσσαρα σημεῖα, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

1316. (1349). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τραπέζιον ΑΒΓΔ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν βάσιν ΑΒ, τὸ ὕψος ΑΖ, τὴν γωνίαν φ τῶν διαγωνίων του καὶ τὴν σχέσιν

$$\overline{\text{ΑΓ}}^2 = \overline{\text{ΓΖ}}^2 + \text{ΓΖ} \times \text{ΔΖ}.$$

1317. (1350). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τραπέζιον ΑΒΓΔ, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ὕψος ΑΕ=υ, τὴν ἀπόστασιν λ τῶν μέσων τῶν διαγωνίων του, ὅτι ἡ διαγώνιος ΑΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΔ καὶ ὅτι $\overline{\text{ΑΓ}}^2 = \text{ΑΒ} \times \text{ΓΔ}$ (Πολυτεχνεῖον)

1318. (1351). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τραπέζιον ΑΒΓΔ, ἂν γνωρίζωμεν τὰς γωνίας του καὶ τὰς διαγωνίους του.

1319. (1352). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράπλευρον ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, ἂν γνωρίζωμεν τὰς τέσσαρας πλευράς του (Sturm).

ΣΤ' Ὁμάς. **1320.** (1353). Νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτεται δοθείσης εὐθείας καὶ δύο δοθεισῶν περιφερειῶν.

1321. (1354). Νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον καὶ νὰ ἐφάπτεται δύο περιφερειῶν.

1322. (1355). Νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτεται δύο εὐθειῶν καὶ μιᾶς περιφερείας.

1323. (1356). Νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτεται τριῶν δοθεισῶν περιφερειῶν.

1324. (1357). Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ τὸ κέντρον της ἐπὶ δοθείσης εὐθείας καὶ νὰ ἐφάπτεται δύο ἀνίσων περιφερειῶν.

1325. (1358). Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτεται δοθείσης εὐθείας καὶ περιφερείας καὶ ἡ ὁποία νὰ ἀποκόπτῃ ἀπὸ ἄλλην δοθεῖσαν περιφέρειαν, χορδὴν παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

1326. (1359). Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β καὶ νὰ ἀποκόπτῃ ἀπὸ δοθεῖσαν περιφέρειαν Ο χορδὴν μήκους λ ἢ κυκλικὸν τμῆμα, τὸ ὁποῖον νὰ δέχεται δοθεῖσαν γωνίαν.

1327. (1360). Δίδονται δύο κύκλοι Ο καὶ Ο' ἀκτίνων R καὶ R/2, οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον Α. Νὰ γραφῇ περιφέρεια Ο'', ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτεται τῶν Ο καὶ Ο' καὶ τῆς εὐθείας ΟΑ εἰς τὸ Β.

1328. (1361). Δίδεται ἕνα τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α. Μὲ διάμετρον τὴν ΒΓ γράφομεν περιφέρειαν Ο.

1ον. Νὰ γραφῇ περιφέρεια Ο', ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτεται τῆς ΑΔ εἰς τὸ Δ καὶ τῆς περιφερείας Ο.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς Ο'Δ τῆς περιφερείας Ο'.

3ον. Ἐὰν Μ εἶναι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῶν δύο περιφερειῶν Ο καὶ Ο', νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη τῶν χορδῶν ΜΔ, ΜΒ καὶ ἡ γωνία τῶν χορδῶν αὐτῶν.

Ζ' Ὁμάς. **1329.** (1362). Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Ο καὶ ἕνα σημεῖον Μ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς αὐτῶν. Νὰ ἀχθῇ ἀπὸ τὸ Μ μία εὐθεῖα τοιαύτη, ὥστε τὰ δύο τμήματα αὐτῆς, τὰ ὁποῖα ἀποκόπτονται ἀπὸ τὰς τρεῖς εὐθείας, νὰ εἶναι ἴσα.

1330. (1363). Δίδεται μία περιφέρεια Ο καὶ ἕνα σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτοῦ. Νὰ ἀχθῇ ἀπὸ τὸ Α μία τέμνουσα ΑΒΓ τῆς περιφερείας Ο καὶ τοιαύτη, ὥστε ἡ περιφέρεια, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὴν ΒΓ, νὰ ἐφάπτεται τῆς εὐθείας ΟΑ.

1331. (1364). Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Ρ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς δοθείσης περιφερείας Ο, νὰ ἀχθῇ μία τέμνουσα ΡΑΒ τοιαύτη, ὥστε $\overline{AB}^2 = PA \times PB$.

1332 (1365). Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Σ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς κύκλου Ο, νὰ ἀχθῇ μία τέμνουσα ΣΑΒ τῆς περιφερείας του τοιαύτη, ὥστε $\Sigma A \times AB = k^2$, ὅπου k δοθὲν μῆκος.

1333. (1366). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Σ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς κύκλου, νὰ ἀχθῇ τέμνουσα ΣΑΒ τοῦ κύκλου καὶ τοιαύτη, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{\Sigma A}{AB} = \frac{\mu}{\nu}$.

1334. (1367). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α, νὰ ἀχθῇ τέμνουσα ΑΒΓ περιφερείας Ο τοιαύτη, ὥστε $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{\mu}{\nu}$.

1335. (1368). Ἀπὸ τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς τομῆς δύο περιφερειῶν νὰ ἀχθῇ τέμνουσα τοιαύτη, ὥστε τὸ γινόμενον τῶν ἀποτεμνομένων χορδῶν νὰ εἶναι ἴσον μὲ k^2.

1336. (1370). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀχθῇ μία εὐθεῖα ΔΕ παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ τὴν πλευρὰν ΑΒ εἰς τὸ Δ καὶ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ε καὶ τοιαύτη, ὥστε $\overline{E\Delta}^2 = A\Gamma \times E\Gamma$.

1337. (1371). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Ρ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς κύκλου Ο ἀκτῖνος R, νὰ ἀχθῇ μία τέμνουσα ΡΑΒ τοιαύτη, ὥστε $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = 2R$.

1338. (1372). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ζητεῖται νὰ ἀχθῇ μία εὐθεῖα ΔΕ, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Δ καὶ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ε οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι:

$$\frac{\Delta B}{E\Gamma} = \frac{\mu}{\nu}, \quad \frac{\Delta B}{\Delta E} = \frac{\mu}{\lambda} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\Gamma E}{\Delta E} = \frac{\nu}{\lambda}.$$

Η' Ὁμάς. **1339.** (1373). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας xy λαμβάνομεν τέσσαρα διαδοχικὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ. Νὰ εὑρεθῇ ἕνα σημεῖον ἀπὸ τὸ ὁποῖον φαίνονται ὑπὸ ἴσας γωνίας τὰ τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ.

1340. (1374). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν δύο σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας αὐτῆς ἕνα σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = k^2$, ὅπου k εἶναι δοθὲν μῆκος.

1341. (1375). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν τρία διαδοχικὰ σημεῖα Α, Β, Γ. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τοῦ τμήματος ΒΓ ἕνα σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε $\overline{AM}^2 = MB \times M\Gamma$.

1342. (1376). Δίδεται μία περιφέρεια Ο. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως μιᾶς διαμέτρου της ΒΑ ἕνα σημεῖον Σ τοιοῦτον, ὥστε ἡ ἐφαπτομένη ΣΓ τῆς περιφερειας νὰ εἶναι διπλασία τοῦ τμήματος ΣΑ.

1343. (1377). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν κατὰ σειρὰν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας αὐτῆς ἕνα σημεῖον Μ, τὸ ὁποῖον νὰ κεῖται ἐκτὸς τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΒΓ καὶ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $\overline{MA}^2 = MB \times M\Gamma$.

1344. (1378). Νὰ προσδιορισθῇ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς πλευρᾶς ΒΓ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ ἕνα σημεῖον Σ τοιοῦτον, ὥστε $\overline{\Sigma A}^2 = \Sigma B \times \Sigma\Gamma$.

1345. (1379). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας xy νὰ εὑρεθῇ ἕνα σημεῖον τοιοῦτον, ὥστε αἱ ἀποστάσεις του ἀπὸ δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Γ νὰ εἶναι ἴσαι.

1346. (1380). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας xy νὰ εὑρεθῇ ἕνα σημεῖον, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β νὰ εἶναι ἴσον μὲ k.

1347. (1381). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας xy, νὰ εὑρεθῇ ἕνα σημεῖον, τοῦ ὁποίου ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β νὰ εἶναι ἴση μὲ δοθὲν μῆκος δ.

1348. (1382). Δίδεται περιφέρεια Ο καὶ μία χορδή της ΑΒ. Νὰ ὁρισθῇ ἐπὶ τῆς περιφερείας ἕνα σημεῖον Γ τοιοῦτον, ὥστε ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ΓΑ, ΓΒ νὰ εἶναι ἴσος μὲ μ : ν.

1349. (1383). Δίδεται ἡμιπεριφέρεια διαμέτρου ΒΓ=2R καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας ἕνα σημεῖον Α τοιοῦτον, ὥστε, ἐὰν φέρωμεν τὴν κάθετον ΑΔ ἐπὶ τὴν διάμετρον ΒΓ καὶ τὴν χορδὴν ΑΒ νὰ εἶναι

$$\overline{BA}^2 + \overline{A\Delta}^2 = k^2.$$

1350. (1384). Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β μιᾶς περιφερείας Κ καὶ μία χορδὴ ΕΖ ὡρισμένη. Νὰ ὁρισθῇ ἐπὶ τῆς περιφερείας ἕνα σημεῖον Γ τοιοῦτον, ὥστε αἱ χορδαὶ ΓΑ καὶ ΓΒ νὰ ἀποκόπτουν ἀπὸ τὴν χορδὴν ΕΖ καὶ ἀπὸ τὸ μέσον της Ο δύο εὐθύγραμμα τμήματα ΟΜ καὶ ΟΝ, τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν λόγον μ : ν.

Θ' Ὁμάς. **1351.** (1385). Εἰς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ, νὰ ἐγγραφῇ ἕνα ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν περίμετρον 2τ.

1352. (1386). Εἰς δοθὲν τρίγωνον νὰ ἐγγραφῇ, ἕνα παραλληλόγραμμον, ὅμοιον πρὸς δοθὲν παραλληλόγραμμον.

1353. (1387). Εἰς δοθὲν τετράγωνον, νὰ ἐγγραφῇ ἕνα ἄλλο τετράγωνον πλευρᾶς λ. Μεταξὺ ποίων τιμῶν πρέπει νὰ μεταβάλλεται τὸ μῆκος λ;

1354. (1388). Εἰς δοθὲν τετράπλευοον νὰ ἐγγραφῇ ῥόμβος, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς διαγωνίους τοῦ τετραπλεύρου.

1355. (1389). Εἰς δοθὲν ἡμικύκλιον νὰ ἐγγραφῇ ἕνα ὀρθογώνιον, ἔχον δοθεῖσαν περίμετρον 2τ.

1356. (1390). Νὰ ἐγγραφῇ εἰς κυκλικὸν τομέα ΟΑΒ, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς ΟΑ εἶναι ἴση μὲ R=6 καὶ τοῦ ὁποίου ἡ ἐπίκεντρος γωνία εἶναι 45^o, ἕνα ὀρθογώνιον ΚΛΜΝ, τοῦ ὁποίου ἡ διαγώνιος εἶναι ἴση μὲ $\delta = 3\sqrt{2}$. Ὑποτίθεται,

ὅτι ἡ πλευρὰ ΚΛ κεῖται ἐπὶ τῆς ΟΑ, τὸ σημεῖον Μ ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΒ καὶ τὸ σημεῖον Ν ἐπὶ τῆς ΟΒ.

1357. (1391). Νὰ ἐγγραφῇ εἰς ἕνα κύκλον ἕνα τρίγωνον, τοῦ ὁποίου μία πλευρὰ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν, καὶ αἱ δύο ἄλλαι πλευραὶ νὰ διέρχωνται ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Μ καὶ Ν.

1358. (1392). Εἰς δοθέντα κύκλον, νὰ ἐγγραφῇ ἕνα ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν δύο προσκειμένων πλευρῶν νὰ ἰσοῦται μὲ $4k^2$.

1359. (1393). Εἰς δοθέντα κύκλον, νὰ ἐγγραφῇ ἕνα τετράπλευρον, ἂν γνωρίζωμεν δύο ἀπέναντι πλευρὰς καὶ τὸν λόγον τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

1360. (1394). Εἰς δοθέντα κύκλον, νὰ ἐγγραφῇ ἕνα τετράπλευρον, ἂν γνωρίζωμεν δύο διαδοχικὰς πλευράς του καὶ τὸν λόγον τῶν δύο ἄλλων.

1361. (1395). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον τὸ ὕψος του ΑΔ εἶναι ἴσον μὲ τὴν πλευρὰν ΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὅλα τὰ ὀρθογώνια, τὰ ἐγγεγραμμένα εἰς τὸ τρίγωνον αὐτὸ καὶ τὰ ὁποῖα ἔχουν δύο κορυφὰς ἐπὶ τῆς ΒΓ, ἔχουν τὴν αὐτὴν περίμετρον.

1362. (1396). Εἰς ἕνα παραλληλόγραμμον εἶναι ἐγγεγραμμένον ἕνα τραπέζιον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων τοῦ τραπεζίου κεῖται ἐπὶ μιᾶς τῶν διαγωνίων τοῦ παραλληλογράμμου.

1363. (1397). Νὰ περιγραφῇ περὶ δοθὲν τρίγωνον, τὸ μέγιστον δυνατὸν τρίγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι ὅμοιον πρὸς δοθὲν τρίγωνον.

1364. (1398). Νὰ περιγραφῇ περὶ κύκλον ἀκτῖνος R ἕνα ἰσοσκελὲς τραπέζιον, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι 4τ μέτρα. Ἐφαρμογὴ R=3 καὶ τ=5.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ΄

ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

1. Γενικότητες

471. Ὁρισμοί. *Ἕνα πολύγωνον λέγεται* ***κανονικόν,*** *ὅταν ὅλαι αἱ γωνίαι του εἶναι ἴσαι καὶ ὅλαι αἱ πλευραί του εἶναι ἴσαι.*

Τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον, τὸ τετράγωνον εἶναι κανονικὰ πολύγωνα.

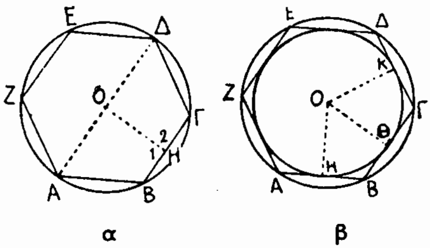
Μία τεθλασμένη γραμμὴ λέγεται ***κανονική,*** *ὅταν ὅλαι αἱ πλευραί της εἶναι ἴσαι καὶ ὅλαι αἱ γωνίαι της εἶναι ἴσαι.*

472. Θεώρημα. ***Κάθε κανονικὸν πολύγωνον δύναται νὰ ἐγγραφῇ εἰς κύκλον καὶ νὰ περιγραφῇ περὶ κύκλον.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ κανονικὸν πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ *(Σχ. 345α).*

Συμπέρασμα 1ον: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ πολύγωνον αὐτὸ δύναται ***νὰ ἐγγραφῇ εἰς κύκλον.***

Ἀπόδειξις: Γράφομεν τὴν περιφέρειαν Ο, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰς τρεῖς διαδοχικὰς κορυφάς του Α, Β, Γ. Λέγομεν, ὅτι ἡ περιφέρεια αὐτὴ θὰ περάσῃ καὶ ἀπὸ τὰς ἄλλας κορυφάς του, ἔστω τὴν Δ.



Σχ. 345.

Πράγματι· ἀπὸ τὸ κέντρον Ο φέρομεν τὴν κάθετον ΟΗ ἐπὶ τὴν ΒΓ· τὸ σημεῖον Η εἶναι τὸ μέσον τῆς ΒΓ· φέρομεν τὰς εὐθείας ΟΑ καὶ ΟΔ. Ἐὰν στρέψωμεν τὸ τετράπλευρον ΟΗΒΑ περὶ τὴν ΟΗ, μέχρις ὅτου πέσῃ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΟΗΓΔ, ἡ ΗΒ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΗΓ, διότι αἱ γωνίαι H_1 καὶ H_2 εἶναι ἴσαι ὡς ὀρθαί, τὸ Β θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Γ, διότι ΗΒ=ΗΓ, ἡ πλευρὰ ΒΑ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΓΔ, διότι αἱ γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι ἴσαι ἐξ ὑποθέσεως καὶ τὸ σημεῖον Α θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Δ, διότι εἶναι ΒΑ=ΓΔ ἐξ ὑποθέσεως. Ἄρα θὰ εἶναι ΟΔ΄=ΟΑ καὶ ἑπομένως ἡ περιφέρεια Ο θὰ περάσῃ καὶ ἀπὸ τὴν κορυφὴν Δ.

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι ἡ περιφέρεια Ο θὰ περάση καὶ ἀπὸ τὰς ἄλλας κορυφὰς Ε καὶ Ζ καὶ ἑπομένως τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον.

Συμπέρασμα 2ον: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ (*Σχ. 344β*) δύναται ***νὰ περιγραφῇ περὶ κύκλον.***

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ τὸ κανονικὸν αὐτὸ πολύγωνον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, αἱ πλευραί του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, . . . εἶναι ἴσαι χορδαὶ τοῦ κύκλου Ο καὶ ἑπομένως αἱ ἀποστάσεις των ΟΗ, ΟΘ, ΟΚ, . . . ἀπὸ τὸ κέντρον Ο θὰ εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Ἡ περιφέρεια λοιπόν, ἡ ὁποία γράφεται μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΗ, θὰ περάση ἀπὸ τὰ μέσα Η, Θ, Κ, ... τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ...

Κάθε πλευρὰ τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖ, ὡς κάθετος εἰς τὸ ἄκρον ἀκτῖνος, εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας καὶ ἑπομένως τὸ πολύγωνον αὐτὸ εἶναι περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον (Ο, ΟΗ).

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Κάθε κανονικὸν πολύγωνον. . . .***

473. Ὁρισμοί. *Τὸ κοινὸν κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου κύκλου εἰς ἕνα κανονικὸν πολύγωνον, λέγεται* ***κέντρον τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου.***

Ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου λέγεται ***ἀκτὶς τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου,*** *καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου λέγεται* ***ἀπόστημα τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου.***

Οὕτω αἱ ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ... εἶναι αἱ ἀκτῖνες τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖ, αἱ δὲ ΟΗ, ΟΘ, ΟΚ, ... εἶναι τὰ ἀποστήματα αὐτοῦ.

Ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν δύο διαδοχικαὶ ἀκτῖνες ἑνὸς πολυγώνου, λέγεται ***κεντρικὴ γωνία τοῦ πολυγώνου.***

Π.χ. ἡ γωνία ΑΟΒ εἶναι κεντρικὴ γωνία τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖ.

Εἰς ἕνα κανονικὸν πολόγωνον μὲ ν πλευράς, αἱ ν κεντρικαὶ γωνίαι του εἶναι ἴσαι καὶ ἔχουν ἄθροισμα 4 ὀρθῶν γωνιῶν· ἄρα καθεμία ἀπὸ αὐτὰς εἶναι ἴση μὲ $\frac{4 \text{ ὀρθ.}}{\nu}$ ἢ μὲ $\frac{360^\circ}{\nu}$.

Εἰς ἕνα κανονικὸν πολύγωνον μὲ ν πλευράς, τὸ ἄθροισμα τῶν ν ἐσωτερικῶν γωνιῶν του εἶναι ἴσον μὲ 2ν—4 ὀρθὰς γωνίας.

Ἐπειδὴ αἱ ν γωνίαι τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι ἴσαι ἕπεται, ὅτι κάθε μία εἶναι ἴση μὲ $\frac{2\nu-4}{\nu}$ ὀρθάς.

Ἡ ἐσωτερικὴ γωνία ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου καὶ ἡ κεντρικὴ γωνία του εἶναι παραπληρωματικαί, διότι τὸ ἄθροισμά των εἶναι:

$$\frac{2\nu-4}{\nu}+\frac{4}{\nu}=\frac{2\nu-4+4}{\nu}=\frac{2\nu}{2}=2 \text{ ὀρθάς.}$$

Ἀσκήσεις: 1365, 1366, 1367, 1368, 1369.

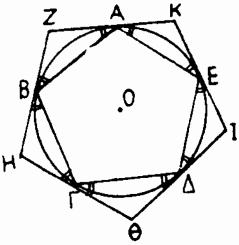
474. Θεώρημα. ***Ἐὰν μία περιφέρεια διαιρεθῇ εἰς ἴσα μέρη:***

1ον. Αἱ χορδαί, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ διαδοχικὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως, σχηματίζουν ἕνα κανονικὸν πολύγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον.

2ον. Αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως σχηματίζουν ἕνα κανονικὸν πολύγωνον περιγεγραμμένον περὶ κύκλον.

1η Ὑπόθεσις: Ἔστω ἡ περιφέρεια Ο *(Σχ. 346)*, ἡ ὁποία ἔχει διαιρεθῇ εἰς ν=5 ἴσα τόξα ΑΒ, ΒΓ. . . . Φέρομεν τὰς χορδὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ εἶναι κανονικόν.



Σχ. 346.

Ἀπόδειξις: Αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ, ... τοῦ πολυγώνου αὐτοῦ εἶναι ἴσαι, ὡς χορδαὶ τῶν ἴσων τόξων, ΑΒ, ΒΓ. . . . Αἱ γωνίαι Α, Β, Γ, ... εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸν κύκλον Ο καὶ ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον, τὸ ἥμισυ τοῦ μέτρου τῶν ν—2 διαιρέσεων τῆς περιφερείας. Τὸ πολύγωνον λοιπὸν ΑΒΓΔΕ ἔχει τὰς πλευράς του ἴσας καὶ τὰς γωνίας του ἴσας καὶ ἐπομένως εἶναι κανονικόν.

2α Ὑπόθεσις: Ἔστω ἡ περιφέρεια Ο, ἡ ὁποία ἔχει διαιρεθῇ εἰς 5 ἴσα τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ. Εἰς τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως Α, Β, Γ, Δ, Ε φέρομεν ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας, αἱ ὁποῖαι, τεμνόμεναι, σχηματίζουν τὸ περιγεγραμμένον, περὶ τὸν κύκλον Ο, πολύγωνον ΖΗΘΙΚ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ πολύγωνον αὐτὸ εἶναι κανονικόν.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὰς χορδὰς ΑΒ, ΒΓ, ... αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι, ὡς χορδαὶ ἴσων τόξων.

Τὸ τρίγωνον ΑΖΒ εἶναι ἰσοσκελές, διότι αἱ ΖΑ καὶ ΖΒ εἶναι ἴσαι, ὡς ἐφαπτόμεναι κύκλου, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Ζ. Ὁμοίως τὰ τρίγωνα ΒΗΓ, ΓΘΔ, ... εἶναι ἰσοσκελῆ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον.

Τὰ ἰσοσκελῆ αὐτὰ τρίγωνα ΑΖΒ, ΒΗΓ, ΓΘΔ, ... εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς βάσεις των ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ... ἴσας, ὡς χορδὰς ἴσων τόξων καὶ τὰς παρὰ τὴν βάσιν των γωνίας ἴσας, διότι ἑκάστη τούτων σχηματίζεται ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης καὶ ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ μέτρου τοῦ τόξου μιᾶς ἐκ τῶν ἴσων διαιρέσεων τῆς περιφερείας.

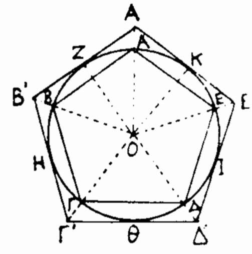
Ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν ἰσοσκελῶν αὐτῶν τριγώνων συνάγομεν, ὅτι

$\widehat{Z}=\widehat{H}=\widehat{\Theta}=\widehat{I}=\widehat{K}$ καὶ $AZ=ZB=BH=H\Gamma=\cdots$

Τὸ πολύγωνον λοιπὸν ΖΗΘΙΚ ἔχει ὅλας τὰς γωνίας του Ζ, Η, Θ,.... ἴσας καὶ τὰς πλευράς του ΖΗ, ΗΘ, ΘΙ, ... ἴσας, διότι ἑκάστη τούτων ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἴσα τμήματα· ἄρα εἶναι κανονικόν.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν μία περιφέρεια. . . .***

475. Παρατήρησις. Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, διὰ νὰ περιγράψωμεν περὶ δοθέντα κύκλον ἕνα κανονικὸν πολύγωνον μὲ ν πλευράς, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου εἰς ν ἴσα μέρη καὶ νὰ φέρωμεν τὰς ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου εἰς τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως.



Σχ. 347.

Ἀλλὰ καὶ τὰ μέσα Ζ, Η, Θ, ... τῶν τόξων ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ... *(Σχ. 347)* τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς πλευρὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ διαιροῦν προφανῶς τὴν περιφέρειαν εἰς ν ἴσα μέρη. Ἂν λοιπὸν φέρωμεν ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας εἰς τὰ σημεῖα αὐτά, θὰ σχηματισθῇ ἕνα πολύγωνον κανονικὸν περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον Ο.

Ἡ κατασκευὴ αὐτὴ εἶναι προτιμοτέρα, διότι τὸ πολύγωνον Α'Β'Γ'Δ'Ε', τὸ ὁποῖον σχηματίζεται κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἔχει τὰς πλευράς του παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ καὶ τὰς κορυφάς του Α', Β', Γ', ... ἐπὶ τῶν ἀκτίνων ΟΑΑ', ΟΒΒ', ΟΓΓ', ... ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται καὶ αἱ κορυφαὶ τοῦ ΑΒΓΔΕ.

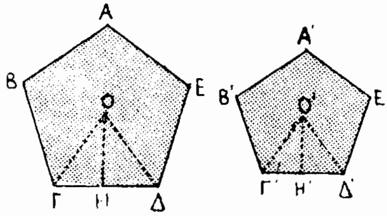
Πράγματι· δύο πλευραί, ὅπως αἱ ΑΒ καὶ Α'Β' εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΟΖ· ἐπίσης δύο κορυφαί, ὅπως Α' καὶ Α κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἀκτῖνος ΟΑΑ', διότι αἱ ἐφαπτόμεναι Α'Ζ καὶ Α'Κ πρέπει νὰ τέμνωνται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας ΖΟΚ.

476. Θεώρημα. ***Δύο κανονικὰ πολύγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸ αὐτὸ πλῆθος πλευρῶν εἶναι ὅμοια καὶ ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητός των εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων των ἢ τῶν ἀποστημάτων των.***

1η Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν τὰ κανονικὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ Α'Β'Γ'Δ'Ε', τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸ αὐτὸ πλῆθος $\nu=5$ πλευρῶν.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ πολύγωνα αὐτὰ εἶναι ὅμοια.

Ἀπόδειξις: Τὸ ἄθροισμα τῶν ν=5 γωνιῶν τοῦ πολυγώνου ΑΒΓ... εἶναι ἴσον μὲ 2ν—4 ὀρθ. γωνίας καὶ ἐπειδὴ αἱ ν γωνίαι του εἶναι ἴσαι, κάθε μία ἀπὸ τὰς γωνίας του εἶναι ἴση μὲ $\frac{2\nu-4}{\nu}$ ὀρθάς.



Σχ. 348.

Ὁμοίως κάθε μία ἀπὸ τὰς ν=5 γωνίας τοῦ πολυγώνου Α΄Β΄Γ΄.... εἶναι ἴση μὲ $\frac{2\nu-4}{\nu}$ ὀρθάς. Τὰ πολύγωνα λοιπὸν ΑΒΓ... καὶ Α΄Β΄Γ΄... ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας.

Ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα αὐτὰ εἶναι κανονικά, αἱ πλευραί των εἶναι ἴσαι· ἤτοι εἶναι ΑΒ=ΒΓ=ΓΔ=··· (1) Α΄Β΄=Β΄Γ΄=Γ΄Δ΄=··· (2).

Διαιροῦμεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}=\cdots$$

Τὰ πολύγωνα λοιπὸν ΑΒΓΔ.... καὶ Α΄Β΄Γ΄Δ΄.... ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους· ἄρα εἶναι ὅμοια.

2α *Ὑπόθεσις:* Ἔστω Ο τὸ κέντρον τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔ.... καὶ ΟΓ, ΟΔ δύο ἀκτῖνες του καὶ ΟΗ τὸ ἀπόστημά του. Ὁμοίως ἔστω Ο΄ τὸ κέντρον τοῦ πολυγώνου Α΄Β΄Γ΄...., Ο΄Γ΄, Ο΄Δ΄ δύο ἀκτῖνες του καὶ Ο΄Η΄ τὸ ἀπόστημά του.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}=\frac{O\Gamma}{O'\Gamma'}=\frac{OH}{O'H'}$.

Ἀπόδειξις: Τὰ τρίγωνα ΟΓΔ καὶ Ο΄Γ΄Δ΄ εἶναι ὅμοια, διότι εἶναι ἰσοσκελῆ καὶ ἔχουν ἴσας τὰς γωνίας τῆς κορυφῆς· πράγματι αἱ γωνίαι ΓΟΔ καὶ Γ΄Ο΄Δ΄ εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι κεντρικαὶ γωνίαι καὶ ἑκάστη τούτων εἶναι ἴση μὲ $\frac{4\text{ ὀρθ.}}{\nu}$.

Ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων αὐτῶν ἔχομεν $\frac{O\Gamma}{O'\Gamma'}=\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}$ (3)

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΟΓΔ καὶ Ο΄Γ΄Δ΄ εἶναι ὅμοια, ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων ὑψῶν των ΟΗ καὶ Ο΄Η θὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῆς ὁμοιότητός των· δηλ. θὰ εἶναι $\frac{OH}{O'H'}=\frac{O\Gamma}{O'\Gamma'}$ (4)

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (3) καὶ (4) συνάγομεν, ὅτι $\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}=\frac{O\Gamma}{O'\Gamma'}=\frac{OH}{O'H'}$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Δύο κανονικὰ πολύγωνα....***

Ἀσκήσεις: 1370, 1371, 1372, 1373, 1374, 1375.

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. **1365.** (1399). Νὰ ὑπολογισθῇ: 1ον ἡ κεντρικὴ γωνία καὶ 2ον ἑκάστη γωνία τῶν κάτωθι κανονικῶν πολυγώνων: ἰσοπλεύρου τριγώνου, τετραγώνου, πενταγώνου, ἑξαγώνου, ὀκταγώνου, δεκαγώνου.

1366. (1400). Ποίου κανονικοῦ πολυγώνου ἡ κεντρικὴ γωνία εἶναι: 1ον. 30^0; 2ον 45^0; 3ον 36^0;

1367. (1401). Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ ἐξωτερικὴ γωνία ἑνὸς κανονικοῦ: 1ον πενταγώνου, 2ον ἑξαγώνου, 3ον ὀκταγώνου, 4ον δεκαγώνου;

1368. (1402). Ποίου κανονικοῦ πολυγώνου ἡ ἐξωτερικὴ γωνία του εἶναι ἴση μὲ δύο τρίτα τῆς ὀρθῆς;

1369. (1403). Θέλομεν νὰ καλύψωμεν, χωρὶς κενά, ἕνα ἐπίπεδον μὲ κανονικὰ πολύγωνα ἴσα μεταξύ των. Νὰ δειχθῇ, ὅτι τοῦτο εἶναι δυνατὸν μὲ τρία μόνον εἴδη κανονικῶν πολυγώνων. Ποῖα εἶναι αὐτά;

Β' Ὁμάς. **1370.** (1404). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἀπόστημα ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου, συναρτήσει τῆς πλευρᾶς του λ καὶ τῆς ἀκτῖνος του.

1371. (1405). Κάθε ἰσόπλευρον πολύγωνον, τὸ ὁποῖον εἶναι περιγεγραμμένον περὶ κύκλον καὶ ἔχει περιττὸν πλῆθος πλευρῶν, εἶναι κανονικόν.

1372. (1406). Κάθε ἰσογώνιον πολύγωνον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον καὶ ἔχει περιττὸν πλῆθος πλευρῶν, εἶναι κανονικόν.

1373. (1407). Κάθε ἰσογώνιον πολύγωνον, τὸ ὁποῖον εἶναι περιγγεγραμμένον περὶ κύκλον εἶναι κανονικόν.

1374. (1408). Πολύγωνον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένον καὶ περιγεγραμμένον εἰς δύο ὁμοκέντρους κύκλους, εἶναι κανονικόν.

1375. (1409). Ἐὰν φέρωμεν ὅλας τὰς διαγωνίους κανονικοῦ πενταγώνου σχηματίζεται νέον κανονικὸν πεντάγωνον.

Γ' Ὁμάς. **1376.** (1410). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΒΕ ἑνὸς κανονικοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ.

1377. (1411). Ἐὰν Α, Β, Γ, Δ εἶναι διαδοχικαὶ κορυφαὶ μιᾶς κανονικῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι $\overline{\text{ΑΓ}}^2 - \overline{\text{ΑΒ}}^2 = \text{ΑΒ} \times \text{ΑΔ}$.

1378. (1412). Ἑνὸς κανονικοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ αἱ διαγώνιοι ΑΔ καὶ ΒΕ τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Ο. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΔΟ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν ΑΟ καὶ ΑΔ.

1379. (1413). Ἐὰν αἱ πλευραὶ κανονικοῦ πολυγώνου προεκταθοῦν κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, ἡ μία μετὰ τὴν ἄλλην καὶ κατὰ τὸ αὐτὸ μῆκος καὶ συνδέσωμεν τὰ ἄκρα τῶν προεκτάσεων, σχηματίζεται νέον κανονικὸν πολύγωνον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν περιμέτρων τῶν δύο κανονικῶν πολυγώνων.

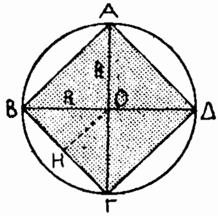
1380. (1414). Εἰς ἕνα κανονικὸν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ αἱ διαγώνιοί του ΑΓ καὶ ΒΖ τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Θ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΑΓ=3ΑΘ, ΒΖ=3ΒΘ.

2. Ἐγγραφὴ κανονικῶν πολυγώνων

477. Πρόβλημα. ***Νὰ ἐγγραφῇ ἕνα τετράγωνον εἰς δοθέντα κύκλον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρά του καὶ τὸ ἀπόστημά του, συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R τοῦ κύκλου.***

Ἔστω ὁ κύκλος Ο *(Σχ. 349)* ἀκτῖνος R εἰς τὸν ὁποῖον θέλομεν νὰ ἐγγράψωμεν ἕνα τετράγωνον.

Κατασκευή: Φέρομεν δύο διαμέτρους ΑΓ καὶ ΒΔ καθέτους μεταξύ των, αἱ ὁποῖαι διαιροῦν τὴν περιφέρειαν εἰς τέσσαρα ἴσα τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ· φέρομεν τὰς χορδὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ καὶ τὸ σχηματιζόμενον τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον τετράγωνον.



Σχ. 349.

Ἀπόδειξις: Τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι τετράγωνον, διότι ἔχει τὰς πλευράς του ἴσας ὡς χορδὰς ἴσων τόξων καὶ τὰς γωνίας του ὀρθάς, ὡς ἐγγεγραμμένας εἰς ἡμιπεριφερείας.

Ὑπολογισμὸς τῆς πλευρᾶς του καὶ τοῦ ἀποστήματός του. Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΟΒ ἔχομεν

$$\overline{AB}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OA}^2 \quad \text{ἢ} \quad \overline{AB}^2 = R^2 + R^2 \quad \text{ἢ} \quad \overline{AB}^2 = 2R^2 \quad \text{ἢ} \quad AB = R\sqrt{2}.$$

Ἔστω ΟΗ τὸ ἀπόστημα τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ· τὸ Η εἶναι μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἡ ΟΗ συνδέει τὰ μέσα δύο πλευρῶν του, ἄρα εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς τρίτης πλευρᾶς του·

δηλ. εἶναι $OH = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}.$

Ἂν παραστήσωμεν μὲ λ_4 τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου καὶ μὲ α_4 τὸ ἀπόστημά του θὰ ἔχωμεν

$$\boxed{\lambda_4 = R\sqrt{2}} \quad \text{καὶ} \quad \boxed{\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}}$$

478. Κανονικὰ πολύγωνα μὲ 2^ν πλευράς. Ἂν διαιρέσωμεν εἰς δύο ἴσα μέρη κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ τόξα ΑΒ, ΒΓ, ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς πλευρὰς τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ καὶ συνδέσωμεν μὲ εὐθείας τὰ διαδοχικὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως θὰ λάβωμεν ἕνα κανονικὸν ὀκτάγωνον.

Οὕτω, μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ τετραγώνου, ἐγγράφομεν εἰς ἕνα κύκλον ἕνα κανονικὸν ὀκτάγωνον.

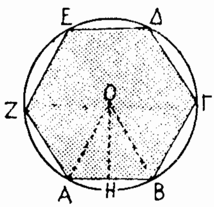
Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ ὀκταγώνου ἐγγράφομεν, κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ἕνα κανονικὸν πολύγωνον μὲ 16 πλευρὰς κ.ο.κ.

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ ἐγγράψωμεν εἰς ἕνα κύκλον ἕνα πολύγωνον μὲ 4, 8, 16, 32. . . . καὶ γενικῶς μὲ 2^{ν} πλευράς.

Ἀσκήσεις: 1381, 1382, 1383, 1384.

479. Πρόβλημα. ***Νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν ἑξάγωνον εἰς δοθέντα κύκλον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρά του καὶ τὸ ἀπόστημά του, συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R τοῦ κύκλου.***

Ἀνάλυσις: Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω ΑΒ *(Σχ. 350)* ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον Ο.



Σχ. 350.

Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΑ καὶ ΟΒ. Ἡ κεντρικὴ γωνία ΑΟΒ εἶναι ἴση μὲ $360^\circ : 6 = 60^\circ$. Αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι Α καὶ Β ἔχουν ἄθροισμα 120° καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἴσαι, διότι τὸ τρίγωνον ΟΑΒ εἶναι ἰσοσκελές, θὰ εἶναι $\widehat{A} = \widehat{B} = 60^\circ$. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΟΑΒ εἶναι ἰσόπλευρον καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ΑΒ=ΟΑ, δηλ. ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου.

Κατασκευή: Διὰ νὰ ἐγγράψωμεν λοιπὸν ἕνα κανονικὸν ἑξάγωνον εἰς ἕνα κύκλον πρέπει νὰ φέρωμεν 6 φορὰς ἐπὶ τῆς περιφερείας ἕνα ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου, ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου καὶ νὰ συνδέσωμεν ἔπειτα μὲ εὐθείας τὰ διαδοχικὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως.

Ὑπολογισμὸς τῆς πλευρᾶς του λ_6 καὶ τοῦ ἀποστήματός του α_6. Ἐδείχθη ἀνωτέρω, ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου· ἄρα θὰ εἶναι $\boxed{\lambda_6 = R}$

Ἔστω ΟΗ *(Σχ· 350)* τὸ ἀπόστημα τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ. Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΗΑ ἔχομεν

$$\overline{OH}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AH}^2 \quad \text{ἤ} \quad \overline{OH}^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{4R^2 - R^2}{4} = \frac{3R^2}{4}$$

$$\text{ἄρα} \quad OH = \frac{R\sqrt{3}}{2}, \quad \text{ἤ} \quad \boxed{\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}}$$

480. Πρόβλημα. ***Νὰ ἐγγραφῇ ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον εἰς δοθέντα κύκλον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρά του καὶ τὸ ἀπόστημά του, συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R τοῦ κύκλου.***

Κατασκευή: Διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν Ο εἰς 6 ἴσα μέρη, ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ. . . . *(Σχ. 351),* ὅπως ἐδείξαμεν εἰς τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον καὶ συνδέομεν μὲ εὐθείας, ἀνὰ δύο, τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως· λαμβάνομεν

οὕτω ἕνα τρίγωνον ΑΓΕ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσόπλευρον, διότι αἱ πλευραί του εἶναι ἴσαι, ὡς χορδαὶ ἴσων τόξων.

Ὑπολογισμὸς τῆς πλευρᾶς του λ_3. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΔ καὶ τὴν χορδὴν ΓΔ. Ἐπειδὴ τὸ τόξον ΑΒΓΔ εἶναι $^3/_6$ ἢ $^1/_2$ τῆς περιφερείας, ἡ ΑΔ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου Ο.

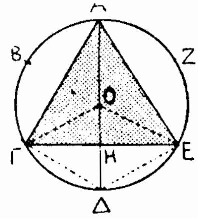
Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΓΔ ἔχομεν

$$\overline{\text{ΑΓ}}^2 = \overline{\text{ΑΔ}}^2 - \overline{\text{ΓΔ}}^2 \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ ΑΔ=2R καὶ ΓΔ=πλευρὰ κανονικοῦ ἑξαγώνου=R, ἡ ἰσότης (1) γίνεται

$$\overline{\text{ΑΓ}}^2 = 4R^2 - R^2 \quad \text{ἢ} \quad \overline{\text{ΑΓ}}^2 = 3R^2 \cdot$$

ἄρα $\text{ΑΓ} = R\sqrt{3}$.



Σχ. 351.

Ὥστε ἡ πλευρὰ λ_3 τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι $\boxed{\lambda_3 = R\sqrt{3}}$.

Ὑπολογισμὸς τοῦ ἀποστήματος τοῦ α_3. Ἔστω ΟΗ τὸ ἀπόστημα τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΓΕ. Ἐὰν φέρωμεν τὰς ἀκτῖνας ΟΓ καὶ ΟΕ σχηματίζεται ὁ ρόμβος ΟΓΔΕ· ἐπειδὴ αἱ διαγώνιοι ρόμβου εἶναι κάθετοι καὶ διχοτομοῦνται, θὰ εἶναι ΟΗ=ΗΔ· τὸ ἀπόστημα λοιπὸν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου· δηλ. εἶναι $\boxed{\alpha_3 = \frac{R}{2}}$.

481. Παρατήρησις. Στηριζόμενοι εἰς τὸ ὅτι τὸ ἀπόστημα τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου, δυνάμεθα νὰ ἐγγράψωμεν, ἀπ' εὐθείας, ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον εἰς ἕνα κύκλον. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν μίαν διάμετρον ΑΔ τοῦ κύκλου Ο *(Σχ. 351)* καὶ μίαν χορδὴν ΓΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΔ εἰς τὸ μέσον Η αὐτῆς. Τὰ σημεῖα Α,Γ,Ε εἶναι κορυφαὶ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου.

482. Πολύγωνα μὲ $3 \times 2^\nu$ πλευράς. Ἐὰν διαιρέσωμεν εἰς δύο ἴσα μέρη κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ..., τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς πλευρὰς ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγώνου, ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον καὶ συνδέσωμεν μὲ εὐθείας τὰ διαδοχικὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως, λαμβάνομεν ἕνα κανονικὸν δωδεκάγωνον.

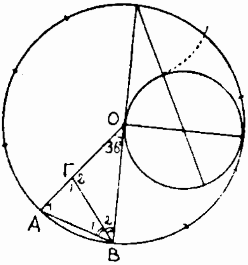
Ἂν ἐργασθῶμεν ὁμοίως καὶ εἰς τὸ δωδεκάγωνον, λαμβάνομεν ἕνα κανονικὸν πολύγωνον μὲ 24 πλευρὰς καὶ οὕτω καθεξῆς.

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ ἐγγράψωμεν κανονικὰ πολύγωνα μὲ 3, 6, 12, 24, ... καὶ γενικῶς μὲ $3 \times 2^\nu$ *πλευράς.*

Ἀσκήσεις: 1385, 1386, 1387, 1388, 1389, 1390, 1391, 1392, 1393, 1394.

483. Πρόβλημα. ***Νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν δεκάγωνον εἰς δοθέντα κύκλον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρά του, συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R τοῦ κύκλου.***

Ἀνάλυσις: Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω ΑΒ ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον Ο *(Σχ. 352)*.



Σχ. 352.

Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΑ καὶ ΟΒ. Ἡ κεντρικὴ γωνία ΑΟΒ εἶναι ἴση μὲ $360^\circ : 10 = 36^\circ$. Αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι Α καὶ Β τοῦ τριγώνου ΟΑΒ ἔχουν ἄθροισμα $180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$ καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἴσαι, διότι τὸ τρίγωνον ΟΑΒ εἶναι ἰσοσκελές, θὰ εἶναι $Α = Β = 72^\circ$. Διχοτομοῦμεν τὴν γωνίαν Β καὶ ἔστω ΒΓ ἡ διχοτόμος αὐτῆς, ὁπότε θὰ εἶναι

$$\text{γων.}Β_1 = \text{γων.}Β_2 = 36^\circ.$$

Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΟΓΒ εἶναι ἰσοσκελές, διότι

$$\text{γων.}Ο = \text{γων.}Β_2 = 36^\circ \quad \text{ἄρα θὰ εἶναι} \quad ΟΓ = ΒΓ \qquad (1)$$

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἡ γωνία $Α = 72^\circ$, ἡ γωνία $Β_1 = 36^\circ$, ἄρα ἡ τρίτη γωνία του $Γ_1$ εἶναι 72°. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως εἶναι $ΑΒ = ΒΓ$ (2)

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι

$$ΓΟ = ΒΓ = ΑΒ \qquad (3)$$

Εἰς τὸ τρίγωνον ΟΑΒ ἡ ΒΓ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Β, ἄρα κατὰ τὸ θεώρημα τῆς διχοτόμου γωνίας (§ 393), θὰ ἔχωμεν

$$\frac{ΓΟ}{ΓΑ} = \frac{ΟΒ}{ΑΒ} \qquad (4)$$

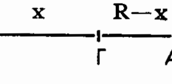
Εἰς τὴν σχέσιν αὐτὴν ἀντικαθιστῶμεν τὰ τμήματα ΟΒ καὶ ΑΒ μὲ ἴσα τμήματα, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος ΟΑ. Δηλ. θέτομεν $ΟΒ = ΟΑ$ καὶ $ΑΒ = ΓΟ$, ὡς φαίνεται ἀπὸ τὴν ἰσότητα (3), ὁπότε ἡ σχέσις (4) γράφεται $\frac{ΓΟ}{ΓΑ} = \frac{ΟΑ}{ΓΟ}$ ἢ $\overline{ΓΟ}^2 = ΟΑ \times ΓΑ$ (4)

Ἡ ἰσότης αὐτὴ δεικνύει, ὅτι τὸ σημεῖον Γ διαιρεῖ τὴν ἀκτῖνα ΟΑ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον. Τὸ μεγαλύτερον τμῆμα της εἶναι τὸ ΓΟ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ ΑΒ, δηλ. μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ δεκαγώνου.

Κατασκευή: Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι: διὰ νὰ ἐγγράψωμεν ἕνα κανονικὸν δεκάγωνον εἰς ἕνα κύκλον διαιροῦμεν τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον (§ 462)· ἔπειτα λαμβάνομεν ἕνα ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου ἴσον μὲ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα ΟΓ καὶ φέρομεν αὐτὸ τὸ μῆκος 10 φορὰς ἐπὶ τῆς περιφερείας. Τέλος συνδέομεν μὲ εὐ-

θείας τὰ διαδοχικὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως τῆς περιφερείας καὶ οὕτω λαμβάνομεν τὸ κανονικὸν δεκάγωνον, τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον.

Ὑπολογισμὸς τῆς πλευρᾶς τοῦ λ_{10}. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ R τὴν ἀκτῖνα ΟΑ τοῦ κύκλου καὶ μὲ x τὸ μεγαλύτερον τμῆμα ΟΓ τῆς ἀκτῖνος ΟΑ, ἡ ἰσότης (5) γράφεται



$$x^2 = R(R-x) \quad \text{ἢ} \quad x^2 + Rx - R^2 = 0 \quad (6)$$

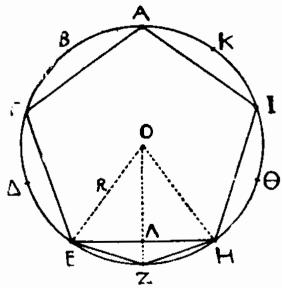
Αἱ ῥίζαι τῆς δευτεροβαθμίου αὐτῆς ἐξισώσεως εἶναι $\frac{-R \pm R\sqrt{5}}{2}$.

Ἐκ τούτων ἡ ῥίζα $x = \frac{R}{2}(-1-\sqrt{5})$ ἀποκλείεται, ὡς ἀρνητικὴ καὶ ἀπολύτως μεγαλυτέρα τῆς ἀκτῖνος R· ἄρα ἡ παραδεκτὴ ῥίζα τῆς ἐξισώσεως (6) εἶναι $x = \frac{R}{2}(-1+\sqrt{5})$, δηλ. εἶναι

$$\boxed{\lambda_{10} = \frac{R}{2}(-1+\sqrt{5}) = R \times 0{,}61803}$$

484. Πρόβλημα. ***Νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν πεντάγωνον εἰς δοθέντα κύκλον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρά του καὶ τὸ ἀπόστημά του, συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R τοῦ κύκλου.***

Κατασκευή: Ἐγγράφομεν εἰς τὸν δοθέντα κύκλον Ο ἕνα κανονικὸν δεκάγωνον ΑΒΓΔ. . . . *(Σχ. 353)* καὶ συνδέομεν ἀνὰ δύο τὰς κορυφάς του· δηλ. φέρομεν τὰς χορδὰς ΑΓ, ΓΕ, ΕΗ, ΗΙ, ΙΑ καὶ λαμβάνομεν οὕτω τὸ κανονικὸν πεντάγωνον ΑΓΕΗΙΑ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον.



Σχ. 353.

Ὑπολογισμὸς τῆς πλευρᾶς του λ_5. Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΕ καὶ ΟΗ. Ἡ ΟΖ τέμνει τὴν ΕΗ εἰς τὸ σημεῖον Λ, μέσον τῆς ΕΗ. Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΛΕ ἔχομεν

$$\overline{E\Lambda}^2 = \overline{OE}^2 - \overline{O\Lambda}^2 \quad \text{ἢ} \quad \overline{E\Lambda}^2 = R^2 - \overline{O\Lambda}^2 \quad (1).$$

Ὑπολογίζομεν τὴν ΟΛ· ἡ ΟΛ εἶναι προβολὴ τῆς ΟΕ ἐπὶ τὴν ΟΖ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΟΕΖ ἡ πλευρὰ ΕΖ κεῖται ἀπέναντι τῆς ὀξείας γωνίας Ο καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι $\overline{EZ}^2 = \overline{OE}^2 + \overline{OZ}^2 - 2 \cdot OZ \times O\Lambda$ (2).

Ἀλλὰ $EZ = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$, ὡς πλευρὰ κανονικοῦ δεκαγώνου καὶ $OE = OZ = R$· ἑπομένως ἡ ἰσότης (2) γράφεται

$$\frac{R^2}{4}(\sqrt{5}-1)^2 = R^2 + R^2 - 2R \times O\Lambda$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{R^2}{4}(5 - 2\sqrt{5} + 1) = 2R^2 - 2R \times O\Lambda$$

ἢ $\quad 2R\times O\Lambda = 2R^2 - \frac{R^2}{4}(6-2\sqrt{5})$

ἢ $\quad 2R\times O\Lambda = \frac{R^2(1+\sqrt{5})}{2}$, ἄρα $O\Lambda = \frac{R}{4}(1+\sqrt{5})$.

Τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ ΟΛ θέτομεν εἰς τὴν (1) καὶ ἔχομεν

$\overline{E\Lambda}^2 = R^2 - \frac{R^2}{16}(1+\sqrt{5})^2$ ἢ $\overline{E\Lambda}^2 = \frac{16R^2 - R^2(1+2\sqrt{5}+5)}{16}$

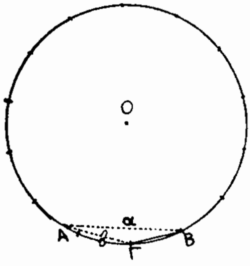
ἢ $\overline{E\Lambda}^2 = \frac{R^2(10-2\sqrt{5})}{16}$, ἄρα $E\Lambda = \frac{R}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

Ὥστε ἡ πλευρὰ λ_5 τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου εἶναι

$$\boxed{\lambda_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = R\times 1{,}17557}\,.$$

Ὑπολογισμὸς τοῦ ἀποστήματός του α_5. Τὸ ἀπόστημα α_5 τοῦ πενταγώνου ΑΓΕΗΙ εἶναι τὸ ΟΛ, τὸ ὁποῖον, ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω, εἶναι ἴσον μὲ $\frac{R}{4}(1+\sqrt{5})$. Ὥστε εἶναι: $\boxed{\alpha_5 = \frac{R}{4}(1+\sqrt{5})}$.

485. Πρόβλημα. ***Νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν δεκαπεντάγωνον εἰς δοθέντα κύκλον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρά του, συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R τοῦ κύκλου.***



Σχ. 354.

Κατασκευή: Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Α τῆς δοθείσης περιφερείας φέρομεν μίαν χορδὴν ΑΒ ἴσην μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου Ο, ὁπότε τὸ ἀντίστοιχον τόξον ΑΒ εἶναι τὸ $^1/_6$ τῆς περιφερείας Ο. Ἐπίσης ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Α φέρομεν μίαν χορδὴν ΑΓ ἴσην μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου, τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον Ο· τὸ ἀντίστοιχον τόξον ΑΓ θὰ εἶναι τὸ $^1/_{10}$ τῆς περιφερείας. Θὰ εἶναι λοιπὸν

τόξ.ΓΒ=τόξ.ΑΒ−τόξ.ΑΓ=

$= \frac{1}{6}$ περιφ. $- \frac{1}{10}$ περιφ. $= \frac{5-3}{30}$ περιφ. $= \frac{1}{15}$ περιφ.

Ἐπειδὴ τὸ τόξον ΓΒ εἶναι τὸ $\frac{1}{15}$ τῆς περιφερείας Ο, ἡ χορδή του ΓΒ θὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δεκαπενταγώνου, τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον Ο.

Λαμβάνομεν ἔπειτα 15 διαδοχικὰς χορδὰς ἴσας μὲ τὴν χορδὴν ΓΒ καὶ σχηματίζεται οὕτω τὸ κανονικὸν δεκαπεντάγωνον.

Ὑπολογισμὸς τῆς πλευρᾶς του λ_{15}. Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν

πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ δεκαπενταγώνου, τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος R, ἐφαρμόζομεν τὸ ***θεώρημα τῶν τριῶν χορδῶν****.

Ἂν καλέσωμεν μὲ α τὴν χορδὴν ΑΒ καὶ μὲ β τὴν χορδὴν ΑΓ θὰ ἔχωμεν κατὰ τὸ θεώρημα αὐτὸ $ΓΒ=\frac{α\sqrt{4R^2-β^2}-β\sqrt{4R^2-α^2}}{2R}$.

Ἂν θέσωμεν εἰς τὸν τύπον αὐτὸν $ΓΒ=λ_{15}$, $α=R$, $β=\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$ λαμβάνομεν

$$λ_{15}=\frac{R\sqrt{4R^2-\frac{R^2}{4}(\sqrt{5}-1)^2}-\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)\sqrt{4R^2-R^2}}{2R}$$

$$=\frac{R\sqrt{4R^2-\frac{R^2}{4}(5-2\sqrt{5}+1)}-\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)\sqrt{3R^2}}{2R}$$

$$=\frac{\frac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)\sqrt{3}}{2}$$

ἢ $$\boxed{λ_{15}=\frac{R}{4}(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{15}+\sqrt{3})}.$$

Ἀσκήσεις: 1395.

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. **1381.** (1415). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ καὶ ἡ διαγώνιος ἑνὸς τετραγώνου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμά των εἶναι ἴσον μὲ $\sqrt{2}$.

1382. (1416). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ καὶ τὸ ἀπόστημα ἑνὸς κανονικοῦ ὀκταγώνου, ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος R.

1383. (1417). Ἡ πλευρὰ ἑνὸς κανονικοῦ ὀκταγώνου εἶναι 1 μέτρ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

1384. (1418). Ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου καὶ τοῦ κανονικοῦ ὀκταγώνου, ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον, εἶναι 3 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου αὐτοῦ καὶ αἱ πλευραὶ τῶν δύο πολυγώνων.

1385. (1419). Τὸ ὕψος ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ 1 μέτρ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ περίμετρος τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον.

1386. (1420). Ἡ περίμετρος ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγώνου εἶναι 120 μέτρ. Πόσον εἶναι τὸ ἀπόστημά του;

1387. (1421). Τὸ ἀπόστημα ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγώνου εἶναι 2,80 μ. Πόση εἶναι ἡ περίμετρός του.

1388. (1422). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγώνου, περιγεγραμμένου περὶ κύκλον ἀκτῖνος R.

---

* Τὸ θεώρημα τῶν τριῶν χορδῶν θὰ ἀναγραφῇ εἰς τὸ ***Συμπλήρωμα τοῦ τρίτου καὶ τετάρτου βιβλίου.***

1389. (1423). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ ἑνὸς κανονικοῦ δωδεκαγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος R.

Β' Ὁμάς. **1390.** (1424). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου καὶ τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου.

1391. (1425). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ περίμετρος ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον, εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς περιμέτρου τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον.

1392. (1426). Δίδεται ἕνα κανονικὸν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι: 1ον: ἡ διαγώνιος ΒΖ διαιρεῖ τὴν ΑΔ εἰς δύο μέρη ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἕνα εἶναι τριπλάσιον τοῦ ἄλλου.

2ον. αἱ διαγώνιοι ΖΔ καὶ ΕΓ χωρίζονται εἰς δύο μέρη, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἕνα εἶναι διπλάσιον τοῦ ἄλλου.

1393. (1427). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἕνα κυρτὸν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς πλευράς του ἴσας καὶ τὰς γωνίας Α, Β, Γ, Ε ἴσας, εἶναι κανονικόν.

1394. (1428). Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγώνου καὶ ἐξωτερικῶς αὐτοῦ, κατασκευάζομεν τετράγωνα. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ κορυφαὶ τοῦ τετραγώνου, αἱ ὁποῖαι δὲν συμπίπτουν μὲ τὰς κορυφὰς τοῦ ἑξαγώνου, εἶναι κορυφαὶ κανονικοῦ δωδεκαγώνου.

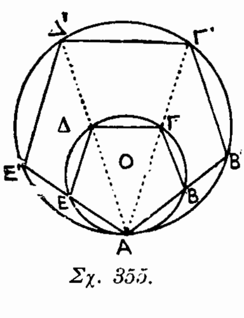
1395. (1429). Ἡ πλευρὰ ἑνὸς κανονικοῦ δεκαγώνου εἶναι λ=0,20 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἀπόστημά του.

3. Προβλήματα ἐπὶ τῶν κυρτῶν κανονικῶν πολυγώνων

486. Πρόβλημα. ***Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα κανονικὸν πολύγωνον, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν πλευράν του.***

Λύσις. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν ἕνα κανονικὸν πεντάγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ πλευρὰν ἴσην μὲ λ.

Ἐγγράφομεν εἰς τυχόντα κύκλον Ο τὸ κανονικὸν πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ. Ἐπειδὴ τὸ ζητούμενον πεντάγωνον εἶναι κανονικόν, θὰ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓΔΕ (§ 476). Τὸ πρόβλημα λοιπὸν ἀνάγεται εἰς τό: ***Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα πολύγωνον ὅμοιον πρὸς πολύγωνον ΑΒΓΔΕ καὶ τοῦ ὁποίου ἡ πλευρά, ἡ ὁμόλογος πρὸς τὴν ΑΒ, νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος λ*** (§ 464).



Σχ. 355.

Πρὸς τοῦτο ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ λαμβάνομεν τμῆμα ΑΒ'=λ. Ἀπὸ τὸ Β' φέρομεν παράλληλον Β'Γ' πρὸς τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς διαγωνίου ΑΓ εἰς τὸ Γ'. Ἀπὸ τὸ Γ' φέρο-

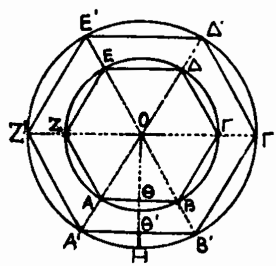
μεν παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν ΓΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς διαγωνίου ΑΔ εἰς τὸ Δ΄. Τέλος ἀπὸ τὸ Δ΄ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΔΕ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΕ εἰς τὸ Ε΄. Τὸ πεντάγωνον ΑΒ΄Γ΄Δ΄Ε΄ εἶναι τὸ ζητούμενον πεντάγωνον.

487. Πρόβλημα. ***Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα κανονικὸν πολύγωνον, ὅταν γνωρίζωμεν τὸ ἀπόστημά του.***

Λύσις. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν ἕνα κανονικὸν πολύγωνον μὲ ν πλευρὰς καὶ τοῦ ὁποίου τὸ ἀπόστημα νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος k.

Ἐγγράφομεν εἰς τυχόντα κύκλον Ο ἕνα κανονικὸν πολύγωνον μὲ ν πλευράς, ἔστω τὸ ΑΒΓ. . . . *(Σχ. 356).*

Ἐπειδὴ τὸ ζητούμενον κανονικὸν πολύγωνον θὰ ἔχῃ ν πλευράς, θὰ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ. . . . καὶ ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητός των θὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν ἀποστημάτων των.



Σχ. 356.

Πρὸς τοῦτο φέρομεν τὸ ἀπόστημα ΟΘ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ΑΒΓ. . . . καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτοῦ τμῆμα ΟΘ΄=k. Ἀπὸ τὸ Θ΄ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὰς προεκτάσεις τῶν ἀκτίνων ΟΑ καὶ ΟΒ εἰς τὰ σημεῖα Α΄ καὶ Β΄. Ἀπὸ τὸ Β΄ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ἀκτῖνα ΟΓ εἰς τὸ Γ΄. Ἀπὸ τὸ Γ΄ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΓΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΟΔ εἰς τὸ Δ΄ κ.ο.κ. Τὸ σχηματιζόμενον πολύγωνον Α΄Β΄Γ΄Δ΄..... εἶναι τὸ ζητούμενον πολύγωνον.

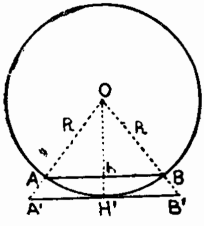
488. Πρόβλημα. ***Νὰ περιγραφῇ περὶ δοθέντα κύκλον κανονικὸν πολύγωνον μὲ ν πλευράς.***

Λύσις. Ἐγγράφομεν εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ἕνα κανονικὸν πολύγωνον μὲ ν πλευρὰς καὶ φέρομεν ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου, εἴτε εἰς τὰς κορυφάς, εἴτε παραλλήλως πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου.

489. Πρόβλημα. ***Ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν $AB=\lambda_\nu$ ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου μὲ ν πλευράς, ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος R, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ $A'B'=\lambda_\nu'$ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον καὶ τὸ ὁποῖον ἔχει τὸ αὐτὸ πλῆθος πλευρῶν*** *(Σχ. 357).*

Λύσις. Ἔστω $AB=\lambda_\nu$ ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον Ο. Διὰ νὰ λάβωμεν τὴν πλευρὰν $A'B'=\lambda_\nu'$

τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου φέρομεν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου Ο εἰς τὸ μέσον Η′. τοῦ τόξου ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὰς ἀκτῖνας ΟΑ καὶ ΟΒ εἰς τὰ σημεῖα Α′ καὶ Β′.



Σχ. 357.

Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΗ′, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Η.

Τὸ ΟΗ εἶναι τὸ ἀπόστημα τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου καὶ τὸ ΟΗ′ εἶναι τὸ ἀπόστημα τοῦ περιγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου.

Ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα αὐτὰ εἶναι ὅμοια, διότι εἶναι κανονικὰ καὶ ἔχουν τὸ αὐτὸ πλῆθος πλευρῶν, ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητός των θὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν ἀποστημάτων (§ 476)· ἤτοι θὰ εἶναι $\frac{A'B'}{AB}=\frac{OH'}{OH}$, $\frac{\lambda_\nu'}{\lambda_\nu}=\frac{R}{OH}$.

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν λαμβάνομεν $\lambda_\nu'=\frac{\lambda_\nu R}{OH}$ (1)

Ὑπολογίζομεν τὸ ἀπόστημα ΟΗ. Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΗΑ ἔχομεν $\overline{OH}^2=\overline{OA}^2-\overline{AH}^2$ ἢ $\overline{OH}^2=R^2-\frac{\lambda_\nu^2}{4}=\frac{4R^2-\lambda_\nu^2}{4}$,

ἄρα $HO=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-\lambda_\nu^2}$.

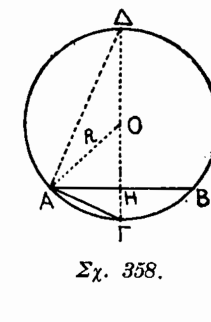
Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὸ ΟΗ μὲ τὸ ἴσον του καὶ ἔχομεν

$$\boxed{\lambda_\nu'=\frac{2\lambda_\nu R}{\sqrt{4R^2-\lambda_\nu^2}}}.$$

Ἄσκησις: 1396.

490. Πρόβλημα. ***Ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν*** $AB=\lambda_\nu$ ***ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου μὲ ν πλευράς, ἐγγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος R, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ*** $\lambda_{2\nu}$ ***τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον καὶ τὸ ὁποῖον ἔχει διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν.***

Λύσις. Ἔστω ΑΒ ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον Ο *(Σχ. 358)*. Ἐὰν Γ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τόξου ΑΒ, ἡ χορδὴ ΑΓ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν.



Σχ. 358.

Φέρομεν τὴν διάμετρον ΓΟΔ καὶ τὴν χορδὴν ΑΔ. Ἡ διάμετρος ΔΓ τέμνει τὴν πλευ-

ρὰν ΑΒ εἰς τὸ μέσον Η. Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΔΑΓ ἔχομεν

$$\overline{А\Gamma}^2 = \Delta\Gamma \times \Gamma H \quad \text{ἢ} \quad \overline{А\Gamma}^2 = 2R \times (R - OH) \qquad (1)$$

Ὑπολογίζομεν τὸ ἀπόστημα ΟΗ· ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον

ΟΗΑ ἔχομεν $\quad \overline{OH}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AH}^2 = R^2 - \frac{\lambda_\nu^2}{4} = \frac{4R^2 - \lambda_\nu^2}{4},$

ἄρα $\quad OH = \frac{\sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2}}{2}.$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὸ ΟΗ μὲ τὴν τιμήν του καὶ ἔχομεν

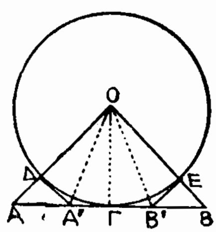
$$\overline{А\Gamma}^2 = 2R\left(R - \frac{\sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2}}{2}\right) = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2}$$

ἄρα $\quad \boxed{\mathbf{А\Gamma = \lambda_{2\nu} = \sqrt{R(2R - \sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2})}}}.$

Ἄσκησις: 1397.

491. Πρόβλημα. ***Ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν $AB = \lambda_\nu$ ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου μὲ ν πλευράς, περιγεγραμμένου περὶ κύκλον, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ $A'B' = \lambda'_{2\nu}$ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον καὶ τὸ ὁποῖον ἔχει διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν.***

Λύσις. Ἔστω ΑΒ *(Σχ. 359)* ἡ πλευρὰ ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου, περιγεγραμμένου περὶ τὸν κύκλον Ο. Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΑ καὶ ΟΒ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε. Φέρομεν ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου Ο εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Α′ καὶ Β′. Ἡ Α′Β′ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν κύκλον Ο καὶ τὸ ὁποῖον ἔχει διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν.



Σχ. 359.

Πράγματι· αἱ εὐθεῖαι ΟΑ′ καὶ ΟΒ′ εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ΔΟΓ καὶ ΓΟΕ καὶ συνεπῶς ἡ γωνία Α′ΟΒ′ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας ΑΟΒ.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΟΓ ἡ ΟΑ′ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Ο καὶ ἑπομένως διαιρεῖ τὴν πλευρὰν ΑΓ εἰς δύο τμήματα Α′Α καὶ Α′Γ, ἀνάλογα τῶν πλευρῶν ΟΑ καὶ ΟΓ· ἤτοι εἶναι

$$\frac{A'\Gamma}{A'A} = \frac{O\Gamma}{OA} \quad \text{ἢ} \quad \frac{A'\Gamma}{O\Gamma} = \frac{A'A}{OA}$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{A'\Gamma}{O\Gamma} = \frac{A'A}{OA} = \frac{A'\Gamma + A'A}{O\Gamma + OA} = \frac{\Gamma A}{O\Gamma + OA}.$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν λαμβάνομεν $A'\Gamma = \dfrac{O\Gamma \times \Gamma A}{O\Gamma + OA}$ (1)

Ἐδῶ εἶναι $O\Gamma = R$, $\Gamma A = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\lambda_\nu'}{2}$.

Ὑπολογίζομεν τὴν ΟΑ· ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΓΑ ἔχομεν

$$\overline{OA}^2 = \overline{O\Gamma}^2 + \overline{A\Gamma}^2 = R^2 + \frac{\lambda_\nu'^2}{4} = \frac{4R^2 + \lambda_\nu'^2}{4}, \text{ ἄρα } OA = \frac{\sqrt{4R^2 + \lambda_\nu'^2}}{2}.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (1) τὰ ΟΓ, ΓΑ, ΟΑ μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν

$$A'\Gamma = \frac{R \times \dfrac{\lambda_\nu'}{2}}{R + \dfrac{\sqrt{4R^2 + \lambda_\nu'^2}}{2}} = \frac{R\lambda_\nu'}{2R + \sqrt{4R^2 + \lambda_\nu'^2}}$$

ἄρα

$$\boxed{A'B' = \lambda_{2\nu} = \frac{2R\lambda_\nu'}{2R + \sqrt{4R^2 + \lambda_\nu'^2}}}$$

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. **1396.** (1430). Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραί:
1ον. τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου. 2ον. τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου. 3ον. τοῦ κανονικοῦ ὀκταγώνου, τὰ ὁποῖα εἶναι περιγεγραμμένα περὶ κύκλον ἀκτῖνος R.

1397. (1431). Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ πλευραὶ τῶν κανονικῶν πολυγώνων μὲ 4, 8, 16, 32, ... , 2^ν πλευράς, τὰ ὁποῖα εἶναι ἐγγεγραμμένα εἰς κύκλον ἀκτῖνος R=1.

Β' Ὁμάς. **1398.** (1432). Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Α μιᾶς περιφερείας ἀκτῖνος R λαμβάνομεν διαδοχικῶς τὰ τόξα ΑΒ=60°, ΒΓ=120°, ΓΔ=120° καὶ σχηματίζομεν τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ.

1ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ τοῦ τετραπλεύρου συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι κάθετοι.

3ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ καὶ τὰ τμήματα αὐτῶν, τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς των.

1399. (1433). Ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ πλευρᾶς α εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Ο. Ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΓ λαμβάνομεν ἕνα σημεῖον Μ καὶ φέρομεν τὰς εὐθείας ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ. Ἡ ΜΑ τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Δ. Ἐπὶ τῆς ΜΑ λαμβάνομεν ἕνα σημεῖον Ε τοιοῦτον, ὥστε γων.ΜΒΕ=60°.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἶναι ΜΕ=ΜΒ καὶ ΕΑ=ΜΓ.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΒΜΑ καὶ ΔΜΓ εἶναι ὅμοια.

3ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ΜΒ, ΜΓ, ΜΔ, συναρτήσει τοῦ α εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν εἶναι ΜΒ=ΜΓ.

1400. (1434). Εἰς κύκλον Ο ἀκτῖνος R ἐγγράφομεν ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ. Μὲ πλευρὰς τὰς ΑΓ καὶ ΒΓ κατασκευάζομεν τὰ τετράγωνα ΑΓΔΖ καὶ ΒΗΘΓ, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ πλευραὶ ΑΖ καὶ ΒΗ τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Μ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας Ο καὶ ὅτι αἱ πλευραὶ ΖΔ καὶ ΗΘ τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Ν, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς διαμέτρου ΜΟΓ.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΖΗΝ εἶναι ἰσόπλευρον.

1401. (1435) Δίδεται περιφέρεια Ο διαμέτρου ΑΒ=2R. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Γ τῆς περιφερείας φέρομεν τὰς χορδὰς ΓΔ καὶ ΓΕ κειμένας πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς διαμέτρου ΑΒ καὶ ἀντιστοίχως ἴσας μὲ τὰς πλευρὰς ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγώνου καὶ ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν κύκλον Ο.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ σημεῖον Δ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τόξου ΓΔΕ καὶ ὅτι ἡ ἀκτὶς ΟΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΕ εἰς τὸ μέσον Ζ αὐτῆς.

2ον. Νὰ ὁρισθῇ τὸ σχῆμα τοῦ τετραπλεύρου ΓΔΕΟ καὶ νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραί του καὶ αἱ διαγώνιοί του, συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R.

3ον. Προβάλλομεν τὰ σημεῖα Γ, Δ, Ζ, Ε ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ἔστωσαν Γ′, Δ′, Ζ′, Ε′ αἱ προβολαί των. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ Ζ′ εἶναι τὸ μέσον τῆς Γ′Ε′ καὶ τῆς Δ′Ο, καὶ ὅτι ΔΔ′=ΓΓ′+ΕΕ′.

1402. (1436). Δίδεται περιφέρεια Ο ἀκτῖνος R. Ἐπὶ τῆς περιφερείας λαμβάνομεν τὰ διαδοχικὰ τόξα ΑΒ=60°, ΒΓ=90° καὶ ΓΔ=120°.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι τραπέζιον καὶ νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραί του.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ εἶναι κάθετοι.

3ον. Ἔστω Η τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων ΑΓ καὶ ΒΔ καὶ Ε καὶ Ζ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΓΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Ε, Η, Ο, Ζ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

4ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ τμήματα ΑΗ, ΗΓ, ΕΗ, ΗΖ.

1403. (1437). Δίδεται περιφέρεια Ο διαμέτρου ΑΒ καὶ μία χορδὴ ΓΔ κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΒ. Ἐκ τυχόντος σημείου Μ τῆς περιφερείας Ο φέρομεν τὰς ΜΓ, καὶ ΜΔ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ σημεῖον Α εἶναι τὸ κέντρον μιᾶς περιφερείας, ἐφαπτομένης τῆς ΜΓ καὶ ΜΔ. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ περιφέρεια αὐτὴ διὰ δοθεῖσαν θέσιν τοῦ Μ.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ὅταν τὸ Μ διαγράφῃ τὴν περιφέρειαν Ο, τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ κύκλου Α καὶ τῶν εὐθειῶν ΜΓ καὶ ΜΔ γράφουν περιφερείας σταθεράς.

3ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ κύκλου Α καὶ τῶν εὐθειῶν ΜΓ καὶ ΜΔ καὶ τὸ σημεῖον Η τῆς τομῆς τῆς διαμέτρου ΑΒ καὶ τῆς χορδῆς ΓΔ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

4ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου Α εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ἡ ΓΔ εἶναι πλευρὰ τετραγώνου, ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον Ο διαμέτρου ΑΒ=8 ἑκ. καὶ τὸ Μ κεῖται μεταξὺ Α καὶ Γ· καὶ εἰς τοιαύτην θέσιν, ὥστε νὰ εἶναι τοξ.ΜΓ=90°.

1404. (1438). Δίδεται ἕνα τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς 2α καὶ κέντρου Ο. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΔ λαμβάνομεν μήκη ΑΑ′=ΑΑ″=λ, μικρότερα τοῦ ἡμίσεως τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου. Ἐπίσης ἀπὸ τὰς κορυφὰς Β, Γ, Δ, καὶ ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου λαμβάνομεν ὁμοίως μήκη

ΒΒ′=ΒΒ″=ΓΓ′=ΓΓ″=ΔΔ′=ΔΔ″=λ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ σχηματιζόμενον ὀκτάγωνον Α′Β″Β′Γ″Γ′Δ″Δ′Α″, εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

2ον. Πῶς πρέπει νὰ ἐκλεγῇ ὁ λ, ἵνα τὸ ὀκτάγωνον εἶναι κανονικόν.

3ον. Πῶς πρέπει νὰ ἐκλεγῇ ὁ λ συναρτήσει τοῦ α, ἵνα τὰ τρίγωνα ΟΑ′Β″, ΟΒ′Γ″, . . . , εἶναι ἰσόπλευρα ;

1405. (1439). Ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν ἀκτῖνα καὶ τὸ ἀπόστημα ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου μὲ ν πλευράς, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς καὶ τὸ ἀπόστημα ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου μὲ 2ν πλευρὰς καὶ ἰσοπεριμέτρου πρὸς τὸ πρῶτον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ΄.

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΗΣ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ ΕΝΟΣ ΚΥΚΛΟΥ

---

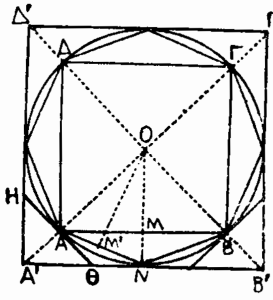
492. Μῆκος περιφερείας. *Κάθε εὐθύγραμμον τμῆμα δύναται νὰ παρασταθῇ μὲ ἕνα ἀριθμόν, διότι ἠμποροῦμεν νὰ τὸ συγκρίνωμεν πρὸς ἕνα ἄλλο εὐθύγραμμον τμῆμα, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ὡς μονάδα.*

Ἐπίσης *κάθε τόξον κύκλου δύναται νὰ παρασταθῇ μὲ ἕνα ἀριθμόν, ἂν τὸ συγκρίνωμεν πρὸς ἕνα ἄλλο τόξον τοῦ αὐτοῦ κύκλου, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ὡς μονάδα.*

Δὲν δυνάμεθα ὅμως νὰ συγκρίνωμεν μεταξύ των δύο τόξα διαφόρων περιφερειῶν ἢ ἕνα τόξον καὶ ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα, διότι δὲν ἠμποροῦμεν νὰ θέσωμεν τὸ ἕνα ἐπὶ τοῦ ἄλλου, ὥστε τὰ σημεῖα των νὰ συμπέσουν.

Εἶναι ἀνάγκη λοιπὸν νὰ ὁρίσωμεν τί ὀνομάζομεν ***μῆκος περιφερείας ἑνὸς κύκλου, μῆκος τόξου.***

Ἔστω μία περιφέρεια Ο, ἕνα πολύγωνον ΑΒΓΔ *(Σχ. 360)* ἐγγεγραμμένον εἰς αὐτὴν καὶ Α΄Β΄Γ΄Δ΄ ἕνα πολύγωνον περιγεγραμμένον περὶ αὐτήν, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸ αὐτὸ πλῆθος πλευρῶν μὲ τὸ ΑΒΓ. . . . Εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ περιφέρεια Γ τοῦ κύκλου Ο εἶναι μεγαλυτέρα τῆς περιμέτρου Π τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ΑΒΓ. . . , καὶ μικροτέρα τῆς περιμέτρου Π΄ τοῦ πολυγώνου Α΄Β΄Γ΄. . . . , δηλ. εἶναι $\Pi < \Gamma < \Pi'$.



Σχ. 360.

Ἐὰν διπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τῶν δύο αὐτῶν πολυγώνων οὕτως, ὥστε νὰ παραμένουν κανονικά, ἡ περίμετρος Π αὐξάνει, διότι κάθε πλευρὰ τοῦ πρώτου πολυγώνου, ὅπως ἡ ΑΒ, ἀντικαθίσταται μὲ τὴν τεθλασμένην γραμμὴν ΑΝΒ, ἐνῶ ἡ περίμετρος Π΄ ἐλαττοῦται, διότι, ὅταν μεταβαίνωμεν ἀπὸ τὸ ἕνα πολύγωνον εἰς τὸ ἄλλο, κάθε τεθλασμένη γραμμή, ὅπως ἡ ΗΑ΄Θ, ἀντικαθίσταται μὲ τὴν εὐθεῖαν ΗΘ. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Π_1 καὶ Π_1' τὰς νέας περιμέτρους, θὰ εἶναι

πάλιν $\Pi_1 < \Gamma < \Pi_1'$. Ἐὰν διπλασιάζωμεν ἀκαταπαύστως τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τῶν δύο αὐτῶν πολυγώνων, αἱ περίμετροι τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου καὶ τοῦ περιγεγραμμένου πλησιάζουν ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον πρὸς τὴν περιφέρειαν Γ, δηλ. θὰ ἔχουν ἕνα κοινὸν ὅριον (*) *τὴν περιφέρειαν* καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι: ὅριον Π=ὅριον $\Pi'=\Gamma$.

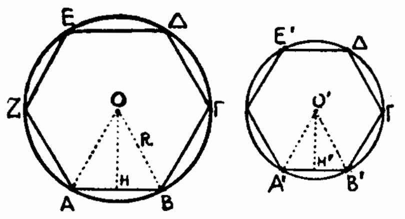
Ὥστε δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, ὅτι:

Τὸ μῆκος μιᾶς περιφερείας κύκλου *εἶναι τὸ κοινὸν ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνουν αἱ περίμετροι Π καὶ Π′ τῶν ὁμοίων κανονικῶν πολυγώνων, τοῦ μὲν ἑνὸς ἐγγεγραμμένου, τοῦ δὲ ἄλλου περιγεγραμμένου περὶ τὸν κύκλον, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῶν πολυγώνων αὐτῶν διπλασιάζεται ἀπεριορίστως.*

493. Ἀνάπτυγμα περιφερείας. *Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶναι ἴσον μὲ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἑνὸς κύκλου λέγεται* ***ἀνάπτυγμα τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου αὐτοῦ.***

494. Θεώρημα. ***Ὁ λόγος τῶν μηκῶν δύο περιφερειῶν εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων των.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν Ο καὶ Ο′ *(Σχ. 361)* δύο κύκλοι καὶ R καὶ R′ αἱ ἀκτῖνες των ἀντιστοίχως.



Σχ. 361.

Συμπέρασμα: Ἂν παραστήσωμεν μὲ Γ καὶ Γ′ τὰ μήκη τῶν περιφερειῶν τῶν κύκλων αὐτῶν θὰ δείξωμεν, ὅτι $\frac{\Gamma}{\Gamma'} = \frac{R}{R'}$.

Ἀπόδειξις: Ἐγγράφομεν εἰς τοὺς δύο αὐτοὺς κύκλους κανονικὰ πολύγωνα μὲ τὸ αὐτὸ πλῆθος πλευρῶν, ἔστω ἑξάγωνα. Ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα αὐτὰ εἶναι κανονικὰ καὶ ἔχουν

(*) Τὸ κάτωθι παράδειγμα θὰ μᾶς δώσῃ τὴν ἔννοιαν τοῦ κοινοῦ ὁρίου. Ἔστωσαν τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{3}{2}$. Ἂν προσθέσωμεν διαδοχικῶς τὴν μονάδα καὶ εἰς τοὺς δύο ὅρους των, τὸ πρῶτον κλάσμα γίνεται

$$\frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6}\cdots\frac{9}{10}\cdots\frac{99}{100}\cdots\frac{9999}{10000},\cdots$$

τὸ δὲ δεύτερον $\frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \frac{6}{5}\cdots\frac{10}{9}\cdots\frac{100}{99}\cdots\frac{10000}{9999}\cdots$

Παρατηροῦμεν, ὅτι καὶ τὰ δύο κλάσματα πλησιάζουν πρὸς τὴν μονάδα, τὸ μὲν πρῶτον μένον πάντοτε μικρότερον τῆς μονάδος, καὶ τὸ δεύτερον μένον πάντοτε μεγαλύτερον τῆς μονάδος. Λέγομεν, ὅτι τὰ κλάσματα αὐτὰ ἔχουν ἕνα κοινὸν ὅριον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ μονάς.

τὸ αὐτὸ πλῆθος πλευρῶν, εἶναι ὅμοια καὶ ἑπομένως ὁ λόγος τῶν περιμέτρων των θὰ ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῆς ὁμοιότητός των ἢ μὲ τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων των. Ἂν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ Π καὶ Π′, τὰς περιμέτρους των θὰ ἔχωμεν $\frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{R}{R'}$ (1)

Ἐὰν διπλασιάσωμεν ἀπεριορίστως τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τῶν δύο πολυγώνων, αἱ περίμετροί των Π καὶ Π′ θὰ ἔχουν ὅρια τὰ μήκη Γ καὶ Γ′ τῶν περιφερειῶν τῶν κύκλων εἰς τὰ ὁποῖα ἀνήκουν. Ἂν λοιπὸν λάβωμεν τὰ ὅρια καὶ τῶν δύο μελῶν τῆς ἰσότητος (1) θὰ ἔχωμεν

$$\text{ὅρ.}\frac{\Pi}{\Pi'} = \text{ὅρ.}\frac{R}{R'} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\text{ὅρ.}\Pi}{\text{ὅρ.}\Pi'} = \frac{\text{ὅρ.}R}{\text{ὅρ.}R'} \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ ὅρ.Π=Γ, ὅρ.Π′=Γ′, καὶ ὅρ.R=R, ὅρ.R′=R′, διότι αἱ ἀκτῖνες R καὶ R′ εἶναι σταθεραί, ἡ ἰσότης (2) γράφεται

$$\frac{\Gamma}{\Gamma'} = \frac{R}{R'} \qquad (3)$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ὁ λόγος τῶν μηκῶν. . . .***

495. Πόρισμα I. Ἡ ἰσότης (3) γράφεται

$$\frac{\Gamma}{\Gamma'} = \frac{2R}{2R'} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\Gamma}{2R} = \frac{\Gamma'}{2R'}.$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἰσότητα συνάγομεν, ὅτι: ὁ λόγος τῆς περιφερείας Γ ἑνὸς κύκλου πρὸς τὴν διάμετρόν του 2R εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῆς περιφερείας Γ′ ἑνὸς ἄλλου κύκλου πρὸς τὴν διάμετρόν του 2R′.

Ὥστε: ***Ὁ λόγος τοῦ μήκους τῆς περιφερείας ἑνὸς κύκλου πρὸς τὴν διάμετρόν του εἶναι σταθερός, δηλ. ὁ αὐτὸς δι' ὅλας τὰς περιφερείας.***

496. Ὁ ἀριθμὸς π. *Ὁ σταθερὸς λόγος τοῦ μήκους μιᾶς περιφερείας πρὸς τὸν διάμετρόν του παρίσταται, διεθνῶς, μὲ τὸ ἑλληνικὸν γράμμα π·* δηλ. εἶναι $\frac{\Gamma}{2R} = \pi$.

Ἀπεδείχθη, ὅτι *ὁ ἀριθμὸς π εἶναι ἀσύμμετρος καὶ ὑπερβατικὸς ἀριθμός*, τοῦ ὁποίου ἔχουν ὑπολογισθῆ, μέχρι σήμερον περισσότερα ἀπὸ ἑπτακόσια δεκαδικὰ ψηφία. Ὁ π λέγεται *ὑπερβατικὸς ἀριθμός*, διότι δὲν εἶναι ρίζα ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως.

Ἡ κατὰ προσέγγισιν τιμή του, μὲ 20 δεκαδικὰ ψηφία, εἶναι:

$$\pi = 3{,}14159\ 26435\ 89793\ 23846 \ldots$$

Εἰς τὰς ἐφαρμογὰς γίνεται χρῆσις τῆς τιμῆς π=3,14159 καὶ $\frac{1}{\pi} = 0{,}3183$.

497. Πόρισμα II. ***Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἑνὸς κύκλου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς διαμέτρου του ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν π.***

Πράγματι· ἀπὸ τὴν ἰσότητα $\frac{\Gamma}{2R}=\pi$ λαμβάνομεν

$$\Gamma=2R\times\pi \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\Gamma=2\pi R}.$$

Ἀσκήσεις: *1406, 1407, 1408, 1409, 1410, 1411, 1412, 1413, 1414.*

498. Μῆκος τόξου. ***Μῆκος τόξου*** *μιᾶς περιφερείας ὀνομάζεται τὸ ὅριον πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ἡ περίμετρος μιᾶς κανονικῆς τεθλασμένης γραμμῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ τόξον, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν της διπλασιάζεται ἀπεριορίστως·*

Ἡ ὕπαρξις τοῦ ὁρίου αὐτοῦ ἀποδεικνύεται μὲ τοὺς αὐτοὺς συλλογισμοὺς μὲ τοὺς ὁποίους ἀπεδείχθη καὶ διὰ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.

499. Μῆκος ἑνὸς τόξου μ^0. Δύο τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς ἴσας ἐπικέντρους γωνίας ἔχουν τὰ αὐτὰ μήκη, διότι τὰ τόξα αὐτὰ δύνανται νὰ ἐφαρμόσουν δι᾿ ἐπιθέσεως.

Ἐὰν R εἶναι ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου, τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του θὰ εἶναι $2\pi R$, καὶ τὸ μῆκος αὐτὸ ἀντιστοιχεῖ εἰς 360^0.

Ὥστε, ἐὰν τὸ τόξον ἦτο 360^0, τὸ μῆκος του θὰ ἦτο $2\pi R$·

ἐὰν τὸ τόξον ἦτο 1^0, τὸ μῆκος του θὰ ἦτο $\frac{2\pi R}{360}$ ἢ $\frac{\pi R}{180^0}$

καὶ ἐὰν τὸ τόξον ἦτο μ^0, τὸ μῆκος του θὰ ἦτο $\frac{\pi R\mu}{180^0}$.

Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ T τὸ μῆκος ἑνὸς τόξου μ^0, θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον

$$\boxed{T=\frac{\pi R\mu}{180}} \qquad (1).$$

500. Ὅμοια τόξα. *Δύο τόξα, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς ἴσας ἐπικέντρους γωνίας δύο διαφόρων κύκλων, λέγονται* ***ὅμοια τόξα.***

501. Θεώρημα. ***Ὁ λόγος δύο ὁμοίων τόξων εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων των.***

Ἔστωσαν T, T′ τὰ μήκη δύο ὁμοίων τόξων καὶ R, R′ αἱ ἀκτῖνες τῶν κύκλων εἰς τοὺς ὁποίους ἀνήκουν τὰ τόξα αὐτά· θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\frac{T}{T'}=\frac{R}{R'}.$$

Πράγματι· ἐὰν μ εἶναι τὸ κοινὸν μέτρον τῶν ἐπικέντρων γωνιῶν

εἰς τὰς ὁποίας ἀντιστοιχοῦν τὰ ὅμοια αὐτὰ τόξα, θὰ ἔχωμεν

$$T = \frac{\pi R\mu}{180}, \qquad T' = \frac{\pi R'\mu}{180}.$$

Διαιροῦμεν κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας αὐτὰς καὶ ἔχομεν

$$\frac{T}{T'} = \frac{\pi R\mu}{\pi R'\mu} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\frac{T}{T'} = \frac{R}{R'}}.$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ὁ λόγος δύο ὁμοίων τόξων....***

Ἀσκήσεις: 1415, 1416, 1417, 1418, 1419, 1420, 1421, 1422, 1423.

Ὑπολογισμὸς τοῦ π

502. Ὑπολογισμὸς τοῦ π. Γνωρίζομεν, ὅτι μεταξὺ τοῦ μήκους Γ μιᾶς περιφερείας ἑνὸς κύκλου ἀκτῖνος R καὶ τοῦ ἀριθμοῦ π ὑπάρχει ἡ σχέσις

$$\pi = \frac{\Gamma}{2R} \qquad (1).$$

Ἀπὸ τὸν τύπον (1) συνάγομεν, ὅτι διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν π πρέπει:
ἢ νὰ ὑπολογίσωμεν πρῶτον τὸ μῆκος Γ τῆς περιφερείας, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν ἀκτῖνα R (μέθοδος τῶν περιμέτρων)
ἢ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ἀκτῖνα R τοῦ κύκλου, ὅταν γνωρίζωμεν τὸ μῆκος Γ τῆς περιφερείας (μέθοδος τῶν ἰσοπεριμέτρων).

Θὰ ἐξετάσωμεν μόνον τὴν πρώτην μέθοδον.

503. Μέθοδος τῶν περιμέτρων. Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι $2R=1$, ὁ τύπος (1) γίνεται $\pi=\Gamma$· δηλ. ***ὁ ἀριθμὸς π εἶναι ἴσος μὲ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας κύκλου, τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος εἶναι ἴση μὲ τὴν μονάδα.***

Εἶναι ἀνάγκη λοιπὸν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας, τῆς ὁποίας ἡ διάμετρος εἶναι ἴση μὲ τὴν μονάδα.

Ἔπειτα, μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ τύπου (§ 490) $\lambda_{2\nu}=\sqrt{R(2R-\sqrt{4R^2-\lambda_\nu^2})}$(1) ὑπολογίζομεν τὰς πλευρὰς καὶ ἐπομένως καὶ τὰς περιμέτρους $\Pi_{2\nu}$, $\Pi_{4\nu}$, $\Pi_{8\nu}$, ... τῶν κανονικῶν πολυγώνων, τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον καὶ τὰ ὁποῖα λαμβάνομεν, ἂν διαπλασιάζωμεν διαδοχικῶς τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου.

Κάθε μία ἀπὸ τὰς περιμέτρους αὐτάς εἶναι καὶ μία κατὰ προσέγγισιν τιμὴ τοῦ π, κατ' ἔλλειψιν καὶ τόσον γειτονικὴ πρὸς τὸ π, ὅσον ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου εἶναι ἀρκετὰ μεγάλος.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ὑπελογίσαμεν τὴν περίμετρον Π_ν ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου μὲ ν πλευράς, ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον αὐτόν. Ἔπειτα ὑπολογίζομεν, μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ τύπου (§ 491) $\lambda_\nu'=\dfrac{2\lambda_\nu R}{\sqrt{4R^2-\lambda_\nu^2}}$ (2), τὴν πλευρὰν τοῦ περιγεγραμμένου καὶ ὁμοίου κανονικοῦ πολυγώνου καὶ ἐπο-

μένως καὶ τὴν περίμετρόν του $Π_ν'$. Ἡ περίμετρος αὐτὴ εἶναι μία κατὰ προσέγγισιν τιμὴ τοῦ π καθ' ὑπεροχήν.

Ἐπειδὴ ἡ περιφέρεια περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν περιμέτρων $Π_ν$ καὶ $Π_ν'$ καὶ ἐπειδὴ αἱ διαφοραὶ τῶν περιμέτρων αὐτῶν δύνανται νὰ γίνουν τόσον μικραί, ὅσον θέλομεν, ἀρκεῖ νὰ διπλασιάζωμεν ἀδιακόπως τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τῶν πολυγώνων, ἕπεται ὅτι δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας καὶ ἐπομένως καὶ τοῦ ἀριθμοῦ π μὲ μίαν προσέγγισιν τόσον μεγάλην, ὅσον θέλομεν.

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἐγγράφομεν κατ' ἀρχὰς εἰς τὴν περιφέρειαν ἕνα κανονικὸν ἑξάγωνον, ὅπως ἔκαμεν ὁ Ἀρχιμήδης. Ἡ πλευρὰ $λ_6$ τοῦ ἑξαγώνου αὐτοῦ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, δηλ. μὲ $\frac{1}{2}$. Ἐπομένως ἡ περίμετρός του $Π_6$ εἶναι $Π_6 = \frac{1}{2} \times 6 = 3$.

Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ τύπου (2) ὑπολογίζομεν τὴν πλευρὰν $λ_6'$ τοῦ περιγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου καὶ εὑρίσκομεν $λ'_6 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, καὶ ἐπομένως ἡ περίμετρός του $Π'_6$ εἶναι $Π'_ν = 6 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 3{,}46410$.

Ἔπειτα ἐργαζόμενοι, ὡς ἀνωτέρω, ὑπολογίζομεν τὰς περιμέτρους $Π_{12}$, $Π_{24}$, $Π_{48}$. . . . καὶ $Π'_{12}$, $Π'_{24}$, $Π'_{48}$, ...

Ὁ κάτωθι πίναξ δίδει τὰς τιμὰς . ν περιμέτρων αὐτῶν.

Ἀριθμὸς πλευρῶν	*Περίμετρος ἐγγεγραμμένου πολυγώνου*	*Περίμετρος περιγεγρομμένου πολυγώνου*
6	$Π_6 = 3$	$Π'_6 = 3{,}46410$
12	$Π_{12} = 3{,}10582$	$Π'_{12} = 3{,}21539$
24	$Π_{24} = 3{,}13262$	$Π'_{24} = 3{,}15966$
48	$Π_{48} = 3{,}13933$	$Π'_{48} = 3{,}14608$
96	$Π_{96} = 3{,}14103$	$Π'_{96} = 3{,}14271$
192	$Π_{192} = 3{,}14156$	$Π'_{192} = 3{,}14187$
384	$Π_{384} = 3{,}14155$	$Π'_{384} = 3{,}14166$

Παρατηροῦμεν, ὅτι, ἐὰν σταματήσωμεν εἰς τὸ πολύγωνον μὲ 384 πλευράς, ὁ ἀριθμὸς π περιλαμβάνεται μεταξὺ 3,14155 καὶ 3,14166 καὶ ἐπομένως ἡ τιμὴ τοῦ π εἶναι ἡ 3,14155 κατ' ἔλλειψιν, μικροτέρα τοῦ 0,00001.

504. Παρατήρησις. Εἰς τὸν Ἀρχιμήδην, τὸν διάσημον Ἕλληνα Μαθηματικὸν (287—212 π.Χ.) ἀνήκει ἡ δόξα, ὅτι πρῶτος εὗρε τὴν τιμὴν τοῦ π. Ὁ Ἀρχιμήδης, ἀναχωρήσας ἀπὸ ἕνα κανονικὸν ἑξάγωνον καὶ σταματήσας εἰς τὰ κανονικὰ πολύγωνα, τὰ ἐγγεγραμμένα καὶ περιγεγραμμένα περὶ κύκλον μὲ 96 πλευρὰς ἀπέδειξεν, ὅτι ὁ π περιλαμβάνεται μεταξὺ $3\frac{10}{71}$ καὶ

$3\frac{10}{70}$. Ἡ τιμὴ $3\frac{10}{70}$ ἢ $\frac{22}{7}=3{,}1428$ διαφέρει τῆς ἀληθοῦς τιμῆς διαφορὰν μικροτέραν τοῦ 0,001.

Ὁ Πτολεμαῖος (87—167 μ.Χ.) εὗρεν ἀκριβεστέραν τιμὴν τοῦ π, τὴν 3,14166.

Ὁ Adrien Metius Ὀλλανδὸς γεωμέτρης (1571—1635 μ.Χ.) εὗρεν ὡς τιμὴν τοῦ π τὴν $\frac{355}{113}=3{,}1415920$.

Αἱ τιμαὶ τοῦ π, τὰς ὁποίας εὑρῆκαν οἱ ἀνωτέρω σοφοὶ εἶναι τιμαὶ πλησιάζουσαι τοῦ π καὶ ὄχι ἀκριβεῖς, διότι ὅπως ἀπέδειξεν ὁ Γερμανὸς μαθηματικὸς Lindemann ὁ π εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμός.

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. **1406.** (1440). Ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου εἶναι R=2,75 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του.

1407. (1441). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου, τοῦ ὁποίου ἡ περιφέρεια εἶναι 4,40 μέτρα.

1408. (1442). Ἡ διάμετρος τοῦ τροχοῦ μιᾶς ἁμάξης εἶναι 1,30 μέτρα. Πόσας στροφὰς θὰ κάμῃ ὁ τροχὸς διὰ νὰ διανύσῃ μίαν ἀπόστασιν 15 χιλιομέτρ.

1409. (1443). Ὁ τροχὸς μιᾶς ἁμάξης ἔκαμεν 2400 στροφὰς διὰ νὰ διανύσῃ 5026 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ τροχοῦ.

1410. (1444). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κυκλικοῦ στίβου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι χρειαζόμεθα 845 βήματα διὰ νὰ τὸν διανύσωμεν καὶ ὅτι τὰ 130 βήματα ἰσοδυναμοῦν πρὸς 100 μέτρα.

Β' Ὁμάς. **1411.** (1445). Ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς 2 μέτρ. εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.

1412. (1446). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας xy λαμβάνομεν διαδοχικὰ τμήματα ΑΒ, ΒΓ, . . . ΚΛ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γραμμή, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὰς ἡμιπεριφερείας, αἱ ὁποῖαι γράφονται μὲ διαμέτρους τὰ τμήματα αὐτά, ἔχει μῆκος ἴσον μὲ τὸ μῆκος τῆς ἡμιπεριφερείας διαμέτρου ΑΛ.

1413. (1447). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου καὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν, παριστάνει κατὰ προσέγγισιν τὸ μῆκος τοῦ ἡμίσεως τῆς περιφερείας αὐτῆς.

1414. (1448). Ἐὰν Δ εἶναι ἡ διάμετρος μιᾶς περιφερείας, κατασκευάζομεν ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει καθέτους πλευρὰς $\frac{3Δ}{5}$ καὶ $\frac{6Δ}{5}$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου αὐτοῦ καὶ τοῦ μήκους τῆς περιφερείας εἶναι μικροτέρα τοῦ ἑνὸς δεκάκις χιλιοστοῦ τῆς διαμέτρου.

Γ' Ὁμάς. **1415.** (1449). Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τόξου 36^0 μιᾶς περιφερείας, ἀκτῖνος 12 μέτρων.

1416. (1350). Ἕνα τόξον 45^0 μιᾶς περιφερείας ἔχει μῆκος 14,1372 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας αὐτῆς.

1417. (1451). Δύο τόξα τῶν 22° καὶ 35° ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν. Τὸ μῆκος τοῦ πρώτου εἶναι 5,40 μέτρ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τοῦ δευτέρου καὶ πόση ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου;

1418. (1452). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας, τῆς περιγεγραμμένης περὶ ἕνα τετράγωνον πλευρᾶς α=8 ἑκ.

Δ' Ὁμάς. **1419.** (1453). Ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΑΒ μιᾶς περιφερείας Ο λαμβάνομεν ἕνα σημεῖον Γ μεταξὺ τῶν Α καὶ Ο καὶ ἕνα σημεῖον Δ μεταξὺ τῶν Ο καὶ Β. Μὲ διαμέτρους τὰς ΑΓ, ΓΟ, ΟΔ, ΔΒ γράφομεν περιφερείας κύκλων. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν περιφερειῶν αὐτῶν εἶναι ἴσον μὲ τὸ μῆκος τῆς μεγάλης περιφερείας.

1420. (1454). Δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο' ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς εἰς ἕνα σημεῖον Α καὶ ἡ μικροτέρα διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον Ο τῆς μεγάλης. Μία ἀκτὶς ΟΓ τῆς μεγάλης συναντᾷ τὴν μικροτέραν εἰς τὸ Β. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τόξα ΑΒ καὶ ΑΓ ἔχουν τὸ αὐτὸ μῆκος.

1421. (1455). Δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο' ἔχουν ἀκτῖνας ἀντιστοίχως 100 μέτρα καὶ 25 μ. Ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων των εἶναι 150 μ. Φέρομεν τὰς κοινὰς ἐξωτερικὰς ἐφαπτομένας ΑΒ καὶ ΓΔ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου τοῦ κυρτοῦ μικτογράμμου σχήματος, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ἀπὸ τὰς δύο ἐφαπτομένας καὶ τὰς δύο περιφερείας.

1422. (1456). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς δύο περιφερείας ἀκτίνων διαφόρων, ὁ λόγος τῶν ἐπικέντρων γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι βαίνουν εἰς τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰ αὐτὰ μήκη, εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀντίστροφον λόγον τῶν ἀκτίνων των.

1423. (1457). Ἐὰν δύο κανονικὰ πολύγωνα μὲ ν πλευρὰς εἶναι τὸ ἕνα ἐγγεγραμμένον καὶ τὸ ἄλλο περιγεγραμμένον εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν, ἡ περιφέρεια αὐτὴ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς περιφερείας τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ πρῶτον πολύγωνον καὶ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὸ δεύτερον.

Ἀσκήσεις ἐπὶ τοῦ Γ' βιβλίου πρὸς γενικὴν ἐπανάληψιν

Α' Ὁμάς. **1424.** (1458). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ καὶ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Σ αὐτοῦ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΒΣ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Β' καὶ τὴν εὐθεῖαν ΓΣ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Γ'. Αἱ κάθετοι Β'Β'' καὶ Γ'Γ'', αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὰ σημεῖα Β' καὶ Γ' ἐπὶ τὴν ΒΓ, τέμνουν τὰς ΓΓ' καὶ ΒΒ' ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν καὶ τὴν ΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Β'' καὶ Γ''. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ Β'Γ', ΜΝ καὶ ΒΓ τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

1425. (1459). Ἀπὸ τὸ μέσον Μ ἑνὸς τόξου ΑΒ ἑνὸς κύκλου Ο φέρομεν μίαν τέμνουσαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν χορδὴν ΑΒ εἰς τὸ Γ καὶ τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ χορδὴ ΜΑ εἶναι ἐφαπτομένη εἰς τὸ Α τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α, Γ καὶ Δ.

1426. (1461). Ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἡμιπεριφέρειαν διαμέτρου ΒΓ. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς πλευρᾶς ΒΓ ὑψοῦμεν κάθετον ἐπ' αὐτήν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν πλευρὰν ΑΓ εἰς τὸ σημεῖον Δ, τὴν ἡμιπεριφέρειαν

εἰς τὸ σημεῖον Ε καὶ τὴν προέκτασιν τῆς ΒΑ εἰς τὸ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἶναι

$\overline{ΜΕ}^2 = ΜΖ \times ΜΔ$ (Σχολὴ Εὐελπίδων).

1427. (1462). Ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΑΓ εἶναι ἄνισοι, εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον Ο. Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ, τὸ ὁποῖον προεκτεινόμενον τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Θ. Ἐπίσης φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΑΟ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Ζ καὶ τέλος φέρομεν τὴν κάθετον ΟΜ ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Ε. Ἔστω Η τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ὑψῶν.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ γωνίαι ΒΓΘ, ΓΒΖ, ΒΓΗ εἶναι ἴσαι καὶ ὅτι αἱ γωνίαι ΖΑΕ, ΕΑΘ εἶναι ἐπίσης ἴσαι.

2ον. Ὅτι ΖΘ=2ΜΔ.

3ον. Ὅτι τὰ τρία σημεῖα Ζ, Μ, Η κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

4ον. Νὰ συγκριθοῦν τὰ τμήματα ΟΜ καὶ ΑΗ.

1428. (1463). Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($Α=90^0$). Μὲ διάμετρον τὴν διάμεσον ΑΜ γράφομεν περιφέρειαν Ο, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Δ καὶ τὴν ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Ν.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ περιφέρεια Ο διέρχεται ἀπὸ τὸν πόδα Η τοῦ ὕψους ΑΗ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν καὶ ὅτι τὰ Δ καὶ Ν εἶναι τὰ μέσα τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ.

2ον. Ποία εἶναι ἡ φύσις τοῦ τετραπλεύρου ΑΔΜΝ;

3ον. Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ σημεῖον Α κινεῖται ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας διαμέτρου ΒΓ. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τί γράφουν τὰ σημεῖα Δ καὶ Ν; Τί δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν περὶ τῆς διευθύνσεως καὶ τοῦ μεγέθους τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΔΝ κατὰ τὴν κίνησιν αὐτήν;

1429. (1464). Ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Ο ἀκτῖνος R. Ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α τέμνει τὴν πλευρὰν ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Δ καὶ τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Ε.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ Ε εἶναι τὸ μέσον τοῦ τόξου ΒΕΓ.

2ον. Φέρομεν τὴν ΕΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὑπάρχουν ἐπὶ τοῦ σχήματος δύο τρίγωνα, ὅμοια πρὸς τὸ ΔΕΓ.

3ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΕΓ ἐφάπτεται εἰς τὸ Γ τῆς περιφερείας τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρίγωνον ΑΔΓ.

4ον. Ἐὰν R=6 ἑκ. καὶ ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ πλευρὰ ΒΓ ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον 3 ἑκ. καὶ ὅτι ΑΕ=9 ἑκ. νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ΕΔ, ΔΑ.

1430. (1465). Δίδεται τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, (ΑΒ=ΑΓ). Γράφομεν τὴν περιφέρειαν Ο, τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ τόξου ΒΜΓ φέρομεν τὰς καθέτους ΜΔ, ΜΕ, ΜΖ ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ. Φέρομεν τὰς ΜΓ καὶ ΜΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον. ὅτι τὰ τετράπλευρα ΜΕΓΖ καὶ ΜΔΒΕ, εἶναι ἐγγράψιμα εἰς κύκλον.

2ον. ὅτι αἱ γωνίαι ΜΖΕ καὶ ΜΕΔ εἶναι ἴσαι.

3ον. ὅτι τὰ τρίγωνα ΜΔΕ καὶ ΜΕΖ εἶναι ὅμοια καὶ ὅτι $\overline{ΜΕ}^2 = ΜΔ \times ΜΖ$.

1431. (1466). Δίδεται μία ἡμιπεριφέρεια Ο διαμέτρου ΑΒ=2R. Μὲ διάμετρον τὴν ΑΟ γράφομεν ἐντὸς τῆς ἡμιπεριφερείας μίαν νέαν ἡμιπεριφέρειαν κέντρου Ο'. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Β φέρομεν τὴν ΒΓ ἐφαπτομένην τῆς Ο' καὶ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΓ, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν Ο εἰς τὸ Γ'. Ἡ ἐφαπτομένη εἰς

τὸ Γ' συναντᾷ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Β'. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. ὅτι ἡ ΟΓ εἶναι διάμεσος τοῦ τριγώνου ΑΟΓ'.

2ον. ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι ΓΒ καὶ Γ'Β' εἶναι παράλληλοι. Νὰ ὑπολογισθοῦν συναρτήσει τῆς R, αἱ Β'Α, ΒΓ, Β'Γ'.

1432. (1467). Δίδεται μία ἡμιπεριφέρεια Ο διαμέτρου ΑΒ=2R. Φέρομεν τὴν χορδὴν $ΑΓ=\frac{3R}{2}$. Ἡ προέκτασις τῆς ΑΓ τέμνει τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ Β εἰς τὸ σημεῖον Θ. Ἔστω Η ἡ προβολὴ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ Δ τὸ σημεῖον ὅπου ἡ κάθετος, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ Θ ἐπὶ τὴν ΑΘ τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΑΒ. 1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ΗΒ.

2ον. Νὰ δειχθῇ ὅτι ΓΗ×ΒΘ=ΓΑ×ΓΘ.

3ον. Νὰ ἐκφρασθῇ συναρτήσει τοῦ R ἡ κοινὴ τιμὴ τῶν δύο αὐτῶν γινομένων.

4ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ΓΘ καὶ ΒΔ.

1433. (1468). Δίδεται ἡμιπεριφέρεια Ο διαμέτρου ΑΒ=2R. Εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας Αx καὶ Βy τῆς ἡμιπεριφερείας. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς ἡμιπεριφερείας φέρομεν τρίτην ἐφαπτομένην αὐτῆς, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Αx εἰς τὸ Γ καὶ τὴν Βy εἰς τὸ Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. ὅτι ΓΔ=ΑΓ+ΒΔ.

2ον. ὅτι ἡ γωνία ΓΟΔ εἶναι ὀρθή.

3ον. ὅτι $ΑΓ×ΒΔ=R^2$.

4ον. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΔ καὶ ΒΓ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ν. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΜΝ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν διάμετρον ΑΒ εἰς τὸ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΜΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ὅτι τὸ Ν εἶναι τὸ μέσον τῆς ΜΖ.

1434. (1469). Δίδεται ἡμιπεριφέρεια Ο διαμέτρου ΑΒ=2R. Εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β φέρομεν ἐφαπτομένας Αx καὶ Βy τῆς ἡμιπεριφερείας. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς ἡμιπεριφερείας φέρομεν τρίτην ἐφαπτομένην, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Αx εἰς τὸ Γ, τὴν Βy εἰς τὸ Δ καὶ τὴν προέκτασιν τῆς ΑΒ εἰς τὸ Σ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $ΑΓ×ΒΔ=R^2$.

2ον. Ἐὰν ΑΓ=3ΒΔ, νὰ ὑπολογισθοῦν, συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R, τὰ ΑΓ, ΒΔ, ΓΔ, ΒΣ.

3ον. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ ἐφαπτομένη ΣΔΓ εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ΑΓ=2ΒΔ.

4ον. Ἀπὸ τὸ Μ φέρομεν τὴν ΜΝ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ἀπὸ Δ τὴν ΔΕ κάθετον ἐπὶ τὴν Αx· νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΜΟΝ καὶ ΓΕΔ εἶναι ὅμοια.

5ον. Ἐὰν ΓΔ εἶναι ἴσον μὲ τὴν διαγώνιον τοῦ τετραγώνου, τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν κύκλον Ο, νὰ ὑπολογισθοῦν, συναρτήσει τῆς ΓΔ, τὰ μήκη ΜΝ, ΑΝ, ΒΝ, ΑΓ, ΓΜ, ΒΔ, ΔΜ.

1435. (1470). Ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Ο. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ λαμβάνομεν ἕνα μῆκος ΑΓ'=ΑΓ καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΓ ἕνα μῆκος ΑΒ'=ΑΒ. Φέρομεν τὴν Β'Γ', ἡ ὁποία τέμεει τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Δ καὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ εἰς τὸ Μ. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. ὅτι ἡ ΑΜ διέρχεται ἀπὸ ἕνα ὡρισμένον σημεῖον, ὅταν ἡ κορυφὴ Α διαγράφῃ τὸ τόξον ΒΑΓ.

2ον. ὅτι ΑΔ=ΑΕ καὶ ὅτι $\overline{ΑΔ}^2=ΑΒ×ΑΓ$.

1436. (1471). Μὲ διάμετρον τὴν πλευρὰν ΓΔ=α ἑνὸς τετραγώνου ΑΒΓΔ κατασκευάζομεν ἡμιπεριφέρειαν κειμένην ἐκτὸς τοῦ τετραγώνου. Ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας αὐτῆς λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Μ καὶ ἀπὸ τὸ Μ φέρομεν τὰς ΜΑ καὶ ΜΒ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν ΔΓ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως. Ἀπὸ τὸ Ε ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΔΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΜΔ εἰς τὸ σημεῖον Θ καὶ ἀπὸ τὸ Ζ ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΔΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΜΓ εἰς τὸ σημεῖον Η. Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι τετράγωνον.

2ον. ὅτι τὰ τρίγωνα ΔΕΘ, ΔΜΓ καὶ ΗΖΓ εἶναι ὅμοια καὶ ὅτι $\overline{ΕΖ}^2=ΔΕ\times ΖΓ$.

3ον. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν x ἀπὸ τῆς ΔΓ πρέπει νὰ κεῖται τὸ Μ, ἵνα ΕΖ=αk, ὅπου k εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς μικρότερος τῆς μονάδος.

4ον. Νὰ προσδιορισθῇ ὁ x, ἵνα ἡ ΕΖ ἔχῃ τὴν μεγαλυτέραν τιμήν.

1437. (1472). Δίδεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α τῆς ὀρθῆς γωνίας φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν. Ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν τὰς καθέτους ΔΕ καὶ ΔΖ ἐπὶ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως· ἀπὸ τὰ Ε καὶ Ζ φέρομεν τὰς καθέτους ΕΗ καὶ ΖΘ ἐπὶ τὴν ΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\frac{ΒΗ}{ΓΘ}=\frac{\overline{ΑΒ}^4}{\overline{ΑΓ}^4}.$$

1438. (1473). Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Μ καὶ ἀπὸ τὸ Μ φέρομεν τὰς καθέτους ΜΔ καὶ ΜΕ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ καὶ ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

1ον. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ λόγοι, οἱ ἴσοι πρὸς $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}$ καὶ οἱ λόγοι, οἱ ἴσοι πρὸς $\frac{ΑΕ}{ΑΓ}$.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν λόγων $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}$ καὶ $\frac{ΑΕ}{ΑΓ}$ διατηρεῖ τὴν αὐτὴν τιμήν, ὅταν τὸ Μ κινῆται ἐπὶ τῆς ΒΓ.

3ον. Ἐὰν εἶναι ΑΒ=6 μ. καὶ ΑΓ=8 μέτρα, νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ λόγοι $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}$ καὶ $\frac{ΑΕ}{ΑΓ}$, ὅταν τὸ Μ εἶναι ἡ προβολὴ τῆς Α ἐπὶ τὴν ΒΓ.

1439. (1474). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὰ ὕψη του ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' καὶ Η τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ὑψῶν του.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $ΑΑ'+ΒΒ'+ΓΓ'<ΑΒ+ΒΓ+ΓΑ$.

2ον. Ἀπὸ τὰ Β καὶ Γ φέρομεν καθέτους ΒΔ καὶ ΓΕ ἐπὶ τὴν προέκτασιν τῆς εὐθείας Γ'Β'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΔΓ'=Β'Ε καὶ ὅτι Α'Γ'+Α'Β'=ΔΕ.

1440. (1475). Τὸ ὕψος ΑΔ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τὴν πλευρὰν ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Δ, μεταξὺ Β καὶ Γ. Ἔστω ὅτι εἶναι ΒΑ=ΒΓ, ΒΔ=α καὶ ΔΓ=2α.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος ΑΔ.

2ον. Ἐὰν Μ καὶ Ν εἶναι τὰ μέσα τῶν ΑΔ καὶ ΑΓ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τραπέζιον ΜΒΓΝ εἶναι ἰσοσκελές.

3ον. Ἡ διαγώνιος ΒΝ τοῦ τραπεζίου ΜΒΓΝ τέμνει τὸ ὕψος ΑΔ εἰς τὸ σημεῖον Η καὶ τὴν διαγώνιον ΜΓ εἰς τὸ σημεῖον Ο. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν λόγων $\frac{ΗΝ}{ΗΒ}$, $\frac{ΗΔ}{ΗΑ}$, $\frac{ΟΝ}{ΟΒ}$.

4ον. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ Ο εἶναι τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου αὐτοῦ.

1441. (1476). Δίδεται ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Ο τὸ μέσον τῆς βάσεώς του ΒΓ. 'Επὶ τῶν ἴσων πλευρῶν του ΑΒ καὶ ΑΓ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως δύο σημεῖα Δ καὶ Ε καὶ τοιαῦτα, ὥστε $\overline{ΟΒ}^2=ΒΔ\times ΓΕ$.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΔΒΟ καὶ ΕΟΓ εἶναι ὅμοια. Νὰ ἐξαχθῇ ἐξ αὐτοῦ, ὅτι ἡ γωνία ΔΟΕ εἶναι σταθερά.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΔΟΕ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὰ δύο προηγούμενα τρίγωνα ΒΔΟ καὶ ΕΓΟ.

3ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΔΕ ἐφάπτεται τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα τὴν ἀπόστασιν τοῦ Ο ἀπὸ τὰς ἴσας πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

1442. (1477). Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι x καὶ y καὶ μία κοινὴ κάθετος αὐτῶν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν x εἰς τὸ Α καὶ τὴν y εἰς τὸ Β. Μία ὀρθὴ γωνία ΓΟΔ στρέφεται περὶ τὸ μέσον Ο τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ συναντᾷ τὴν x εἰς τὸ Γ καὶ τὴν y εἰς τὸ Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. ὅτι $\overline{ΟΑ}^2=ΑΓ\times ΒΔ$.

2ον. ὅτι $ΓΔ=ΑΓ+ΒΔ$.

3ον. ὅτι ἡ ΓΔ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει διάμετρον τὴν ΑΒ.

1443. (1478). Αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ ἑνὸς παραλληλογράμμου τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ο. 'Απὸ ἕνα σημεῖον Ε τῆς ΟΒ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ εἰς τὰ σημεῖα Ζ, Η, Θ, Κ. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. ὅτι $\dfrac{ΕΖ}{ΟΑ}=\dfrac{ΕΒ}{ΟΒ}$.

2ον. ὅτι $\dfrac{ΕΖ}{ΕΚ}=\dfrac{ΕΒ}{ΕΔ}\times\dfrac{ΟΔ}{ΟΒ}$.

3ον. ὅτι $\dfrac{ΕΖ}{ΕΚ}=\dfrac{ΕΗ}{ΕΘ}$.

4ον. ὅτι ἡ παράλληλος, ἡ ἀγομένη ἀπὸ τὸ Ζ πρὸς τὴν ΑΔ καὶ ἡ παράλληλος, ἡ ἀγομένη ἀπὸ τὸ Η, πρὸς τὴν ΓΔ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ν, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς ΒΔ.

1444. (1479), Δίδεται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ· ἀπὸ τὴν κορυφὴν Δ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν διαγώνιον ΑΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΒΓ εἰς τὸ Η καὶ ἀπὸ τὸ Γ παράλληλον πρὸς τὴν διαγώνιον ΒΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΑΔ εἰς τὸ Ζ. Αἱ ΓΖ καὶ ΔΗ τέμνονται εἰς τὸ Ε. Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον. ὅτι τὸ τετράπλευρον ΔΖΗΓ εἶναι παραλληλόγραμμον.

2ον. ὅτι αἱ ΑΕ καὶ ΒΕ τέμνουν τὴν ΔΓ εἰς τρία ἴσα μέρη.

3ον. ὅτι $2(\overline{ΑΕ}^2+\overline{ΒΕ}^2)=\overline{ΑΒ}^2+9\overline{ΑΔ}^2$.

1445. (1480). Δίδεται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ, ὅπου $ΑΒ=ΓΔ=α$ καὶ $ΑΔ=ΓΒ=β$. Φέρομεν τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ, Δ, αἱ ὁποῖαι τεμνόμεναι σχηματίζουν τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ διχοτόμοι δύο ἀπέναντι γωνιῶν τοῦ δοθέντος παραλληλογράμμου εἶναι παράλληλοι.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ὅτι αἱ διαγώνιοί του εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ δοθέντος παραλληλογράμμου.

3ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου ΕΖΗΘ εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ἡ γωνία Α εἶναι 60°.

4ον. Ὑποθέτομεν, ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΒ τοῦ δοθέντος παραλληλογράμμου μένει ὡρισμένη, ἡ δὲ ΓΔ κινεῖται παραλλήλως πρὸς ἑαυτὴν καὶ οὕτως, ὥστε τὸ Δ νὰ μένῃ ἐπὶ τῆς εὐθείας Αδx, τὸ δὲ Γ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΓy. α) Νὰ ἐξετασθῇ, ἐὰν τὸ σημεῖον Η τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Δ καὶ Γ δύναται νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν τομὴν Ε τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Α καὶ Β· διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ β θὰ συμβῇ τοῦτο; β) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ β τὸ σημεῖον Η θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ΑΒ. γ) Κατὰ τὴν κίνησιν αὐτὴν τῆς ΔΓ, ποίαν γραμμὴν διαγράφει τὸ σημεῖον Η;

1446. (1481). Ἐὰν Ε, Ζ, Η, Θ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ἑνὸς ὀρθογωνίου τραπεζίου ΑΒΓΔ (γων.Α=γων.Β=1 ὀρθ.) καὶ Μ, Ν τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του ΒΔ καὶ ΑΓ, αἱ ὁποῖαι εἶναι κάθετοι ἀναμεταξύ των, νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον. ὅτι ΕΗ=ΘΖ.

2ον. ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου ΑΜΝ εἰς τὸ σημεῖον Α.

1447. (1482). Ἕνα τραπέζιον ΑΒΓΔ, ὀρθογώνιον εἰς τὰ Α καὶ Δ, ἔχει τὰς διαγωνίους του ΑΓ καὶ ΒΔ καθέτους. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. ὅτι τὰ τρίγωνα ΒΑΔ καὶ ΑΔΓ εἶναι ὅμοια καὶ νὰ ἐξαχθῇ ἐξ αὐτοῦ ἡ σχέσις $\overline{ΑΔ}^2=ΑΒ\times ΔΓ$·

2ον. ὅτι αἱ τέσσαρες περιφέρειαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν διαμέτρους τὰς τέσσαρας πλευρὰς τοῦ τραπεζίου ἔχουν ἕνα κοινὸν σημεῖον. Νὰ προσδιορισθῇ τὸ κοινὸν αὐτὸ σημεῖον.

3ον. ὅτι αἱ περιφέρειαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν διαμέτρους τὰς ΑΒ καὶ ΓΔ ἐφάπτονται.

1448. (1483). Δίδεται ὁ ρόμβος ΑΒΓΔ. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ λαμβάνομεν τμῆμα ΒΕ τοιοῦτον, ὥστε $\frac{ΒΕ}{ΔΑ}=\mu$, καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΔΑ λαμβάνομεν τμῆμα ΔΖ, τοιοῦτον, ὥστε $\frac{ΔΖ}{ΔΑ}=\mu$, ὅπου μ εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς μικρότερος τῆς μονάδος.

1ον. Νὰ προσδιορισθῇ τὸ σχῆμα τῶν τετραπλεύρων ΒΕΔΖ καὶ ΑΕΓΖ.

2ον. Αἱ εὐθεῖαι ΒΑ καὶ ΕΖ προεκτεινόμεναι τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Η. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος $\frac{ΗΑ}{ΗΒ}$.

3ον. Ἐὰν $\mu=\frac{2}{3}$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΗΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΔ.

1449. (1484). Δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο' ἀκτίνων R καὶ R' (R>R') τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β· αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν περιφερειῶν Ο καὶ Ο' εἰς τὸ σημεῖον Α διέρχονται διὰ τῶν κέντρων Ο' καὶ Ο.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διάκεντρος ΟΟ', συναρτήσει τῶν ἀκτίνων R καὶ R'.

2ον. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς προεκτάσεως τῆς κοινῆς χορδῆς ΒΑ φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ΜΓ καὶ ΜΓ' τῶν περιφερειῶν Ο καὶ Ο', ὅπου Γ καὶ Γ' εἶναι τὰ σημεῖα ἐπαφῆς. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ΜΓ=ΜΓ'.

3ον. Νὰ κατασκευασθῇ γεωμετρικῶς ἡ ἐφαπτομένη ΜΓ διὰ νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος λ.

4ον. Νὰ ἐκφρασθῇ ἡ διαφορὰ $\overline{ΜΟ}^2-\overline{ΜΟ'}^2$ καὶ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διαφορὰ αὐτὴ εἶναι σταθερά.

1450. (1485). Δύο κύκλοι O καὶ O' ἀκτίνων R καὶ R' ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον A. Ἀπὸ τὸ A φέρομεν μίαν τυχοῦσαν τέμνουσαν BAΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν O εἰς τὸ B καὶ τὴν περιφέρειαν O' εἰς τὸ Γ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ ἀκτῖνες OB καὶ OΓ εἶναι παράλληλοι.

2ον. Προεκτείνομεν τὴν BO μέχρις, ὅτου συναντήσει τὴν περιφέρειαν O εἰς ἕνα σημεῖον Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΔΓ προεκτεινομένη τέμνει τὴν διάκεντρον OO' εἰς ἕνα ὡρισμένον σημεῖον Σ.

3ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ τμήματα ΣO καὶ ΣO'.

4ον. Ἐὰν R=3R' νὰ ὁρισθῇ ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ θέσις τῆς τεμνούσης BAΓ, ἵνα ἡ ΔΓΣ εἶναι κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν περιφερειῶν O καὶ O'.

5ον. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη των.

1451. (1486). *Θεώρημα τοῦ Maclaurin.* Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον A μιᾶς περιφερείας O φέρομεν μίαν χορδὴν AB καὶ ἑκατέρωθεν αὐτῆς τὰς χορδὰς AΓ, AΔ οὕτως, ὥστε γων.ΓAB=γων.BAΔ. Ἀπὸ ἕνα δεύτερον σημεῖον A_1 τῆς αὐτῆς περιφερείας φέρομεν τὰς χορδὰς A_1B_1, $A_1\Gamma_1$, $A_1\Delta_1$ παραλλήλους πρὸς τὰς AB, AΓ, AΔ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\dfrac{A\Gamma+A\Delta}{A_1\Gamma_1+A_1\Delta_1}=\dfrac{AB}{A_1B_1}$.

B' Ὁμάς. **1452.** (1487). Ἡ ὑποτείνουσα BΓ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι διπλασία τῆς πλευρᾶς AB· προεκτείνομεν τὰς BΓ καὶ BA κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς BA ἕνα μῆκος AΔ=x, ἐπὶ δὲ τῆς προεκτάσεως τῆς BΓ ἕνα μῆκος ΓE=x. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος x, ἵνα ἡ εὐθεῖα ΔE εἶναι ἴση μὲ 2x.

1453. (1488). Δίδεται περιφέρεια O διαμέτρου AB=2R. Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα OΓ κάθετον ἐπὶ τὴν AB. Συνδέομεν τὸ A μὲ τὸ μέσον E τῆς OΓ δι' εὐθείας, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον M.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι AM=2MB.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου AMB συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R.

1454. (1489). Δίδεται περιφέρεια O διαμέτρου AB=2R. Φέρομεν τὴν χορδὴν ΓΔ παράλληλον τῆς AB καὶ εἰς ἀπόστασιν R/2 ἀπ' αὐτῆς.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία AOΓ=30°.

2ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι καὶ αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου ABΓ.

1455. (1490). Εἰς ἕνα κύκλον O ἀκτῖνος R=5 ἐκ. φέρομεν μίαν χορδὴν AΓ=6 ἐκ. καὶ τὴν διάμετρον BΔ κάθετον ἐπὶ τὴν χορδὴν αὐτὴν εἰς τὸ σημεῖον E.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι AE=EΓ.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ABΓ καὶ AΔΓ.

3ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῶν εὐθειῶν BE καὶ ΔE.

4ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ περίμετρος τοῦ τετραπλεύρου ABΓΔ.

5ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῆς παραλλήλου ZΘ πρὸς τὴν AΓ, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ O καὶ τέμνει τὰς πλευρὰς AΔ καὶ ΓΔ εἰς τὰ σημεῖα Z καὶ Θ.

1456. (1491). Ἑνὸς τριγώνου ABΓ ἡ γωνία A εἶναι 60° καὶ ἡ γωνία B εἶναι 45° καὶ τὸ ὕψος ΓΔ=4 μετρ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΓΔB εἶναι ἰσοσκελές.

2ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου ABΓ κατὰ προσέγγισιν 0,01.

3ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος BH τοῦ τριγώνου ABΓ κατὰ προσέγγισιν 0,01.

1457. (1492). Δύο ὀρθογώνια καὶ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΒΑΓ καὶ ΑΔΒ (ὀρθογώνια εἰς τὰ Α καὶ Δ) ἔχουν κοινὴν τὴν πλευρὰν ΑΒ=α, αἱ δὲ κορυφαί των κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς πλευρᾶς ΑΒ.

1ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη τῶν ΒΓ, ΑΔ, ΓΔ.

2ον. Ἐὰν Ε εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ.

3ον. Ἀπὸ τὸ Β φέρομεν τὴν ΒΖ, κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΔ. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη ΕΖ καὶ ΖΔ.

1458. (1493). Δίδεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ. Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ, τὸ ὁποῖον ὁρίζει ἐπ' αὐτῆς τμήματα ΒΔ=3,6 ἑκ. καὶ ΔΓ=6,4 ἑκ.

1ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη, ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ.

2ον. Ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν τὰς καθέτους ΔΕ καὶ ΔΖ ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΔΕΒ, ΔΖΓ καὶ ΑΒΓ εἶναι ὅμοια καὶ νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη ΔΕ καὶ ΔΖ.

3ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

1459. (1494). Εἰς ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ δίδεται τὸ ὕψος του ΑΔ=υ, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν βάσιν του 2α καὶ ἡ ἀκτὶς ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου. Νὰ ὑπολογισθοῦν συναρτήσει τῶν υ καὶ ρ, αἱ ἴσαι πλευραὶ β, ἡ βάσις 2α, καὶ ἡ ἀκτὶς R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

Γ' Ὁμάς. **1460.** (1495). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς ἕνα τετράπλευρον, περιγεγραμμένον περὶ κύκλον, αἱ διαγώνιοί του καὶ αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ κύκλου καὶ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

1461. 1496). Δίδεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου αἱ κάθετοι πλευραὶ εἶναι ΑΒ=15 ἑκ., ΑΓ=20 ἑκ. Ἀπὸ τὸ μέσον Μ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Δ καὶ τὴν προέκτασιν τῆς ΒΑ εἰς τὸ Ε.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ΜΓ.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΔΜΓ καὶ ΑΒΓ εἶναι ὅμοια καὶ νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΔΜΓ.

3ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ΒΕ.

4ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Ε, Α, Μ, Γ, κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ΕΓ.

1462. (1497). Ἕνα τραπέζιον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον Ο. Αἱ διαγώνιοί του τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ε καὶ αἱ προεκτάσεις τῶν πλευρῶν του ΑΔ καὶ ΒΓ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. ὅτι τὰ τέσσαρα σημεῖα Α, Δ, Ο, Ε κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

2ον. ὅτι τὰ σημεῖα Α, Γ, Ο, Ζ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

1463. (1498). Ἀπὸ τὸ μέσον Ο ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ=2α ὑψοῦμεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου αὐτῆς λαμβάνομεν τμῆμα ΟΔ=$\alpha/_2$. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΔ καὶ ἐκ τοῦ Β τὴν ΒΓ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΔ.

1ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν, συναρτήσει τοῦ α, τὰ μήκη ΑΔ, ΑΓ, ΓΒ.

2ον. Προεκτείνομεν τὴν ΔΟ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμῆμα

ΟΕ=α καὶ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΓΕ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Ε κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας καὶ νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ΑΖ καὶ ΒΖ.

1464. (1499). Δίδεται κύκλος Ο διαμέτρου ΑΒ. Ἀπὸ τὸ Α φέρομεν τὰς χορδὰς ΑΓ καὶ ΑΔ κειμένας πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς διαμέτρου ΑΒ. Φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας Ο εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Δ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ε. Φέρομεν καὶ τὴν ἀκτῖνα, τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν χορδὴν ΑΓ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΔΓ εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον. ὅτι τὰ τρίγωνα ΕΑΔ καὶ ΖΑΓ εἶναι ἰσοσκελῆ καὶ ὅμοια.

2ον. ὅτι τὰ σημεῖα Α, Ζ, Ε, Δ, Ο κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

3ον. ὅτι ἡ ΖΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ.

1465. (1500). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἕνα σημεῖον Δ καὶ ἐπὶ τῆς ΒΓ ἕνα σημεῖον Ε οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι ΒΔ=ΕΓ καὶ ἡ εὐθεῖα ΔΕ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν.

1466. (1501). Δίδεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὕψος του ΑΔ καὶ Μ τὸ μέσον τοῦ ΑΔ.

1ον. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Μ ἡ εὐθεῖα ΕΜΖ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ε καὶ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ζ καὶ τοιαύτη, ὥστε νὰ εἶναι ΕΜ=ΜΖ.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Β, Γ, Ε, Ζ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας Ο.

3ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ κάθετος ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΕΖ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Ν τῆς ΒΓ.

4ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΜΟΝ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Δ' Ὁμάς. **1467.** (1502). Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Ο μιᾶς ὡρισμένης γωνίας xOy φέρομεν ἕνα κύκλον μεταβλητόν, ὁ ὁποῖος τέμνει τὴν Ox εἰς τὸ Α καὶ τὴν Oy εἰς τὸ Β.

1ον. Ἐὰν ἡ ΑΒ ἔχῃ μίαν διεύθυνσιν ὡρισμένην, νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν ἄκρων τῆς διαμέτρου τῆς παραλλήλου πρὸς τὴν ΑΒ.

2ον. Ἐὰν ἡ ΑΒ ἔχῃ ἕνα δοθὲν μῆκος, νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου καὶ ὁ τόπος, τὸν ὁποῖον γράφει τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου αὐτοῦ.

1468. (1503). Δίδονται δύο ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι Ox καὶ Oy, ἕνα σημεῖον Σ ἐπὶ τῆς Oy καὶ ἕνα σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς ἀπόστασιν ΑΗ=k ἀπὸ τὴν Ox. Μία ὀρθὴ γωνία ἔχει κορυφὴν τὸ Α καὶ αἱ πλευραί της συναντοῦν τὴν Ox εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. Ἡ τέμνουσα ΣΗ τέμνει εἰς τὸ σημεῖον Μ τὸν κύκλον ΣΒΓ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ σημεῖον Μ εἶναι ὡρισμένον, ὅταν ἡ γωνία στρέφεται περὶ τὸ Α.

2ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ Μ, ὅταν τὸ Σ διαγράφῃ τὴν Oy.

1469. (1504). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων Μ τοιούτων, ὥστε, ἂν φέρωμεν τὰς καθέτους ΜΑ καὶ ΜΒ ἐπὶ τὰς πλευρὰς μιᾶς γωνίας, νὰ ἔχωμεν: ΜΑ+2ΜΒ=α.

1470. (1505). Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Μ μιᾶς εὐθείας Oy φέρομεν τὴν κάθετον ΜΑ ἐπὶ μίαν ἄλλην εὐθεῖαν Ox, ἔπειτα ἐπὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν Ox λαμβάνομεν ἕνα μῆκος ΜΒ τοιοῦτον, ὥστε ΜΑ+ΜΒ=λ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου Β.

1471. (1506). Δίδεται μία εὐθεῖα ΑΒ καὶ ἕνα σημεῖον Ν ἐπ' αὐτῆς. Ἀπὸ

τὰ Α καὶ Β φέρομεν τὰς καθέτους Ax καὶ By ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς Ax τμῆμα ΑΓ, ἐπὶ δὲ τῆς By τμῆμα ΒΔ καὶ τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι ΝΑ×ΝΒ=ΓΑ×ΒΔ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΓΑΝ καὶ ΝΒΔ εἶναι ὅμοια.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία ΓΝΔ εἶναι ὀρθή.

3ον. Ἀπὸ τὸ Ν φέρομεν τὴν ΝΜ κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΔ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου Μ.

1472. (1507). Δίδεται μία εὐθεῖα xy καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β καὶ τοιαῦτα, ὥστε ἡ ΑΒ νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν xy. Συνδέομεν μὲ εὐθείας τυχὸν σημεῖον Γ τῆς xy μὲ τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ φέρομεν τὰς καθέτους ΑΜ καὶ ΒΜ ἐπὶ τὰς εὐθείας ΓΑ καὶ ΓΒ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου Μ.

1473. (1508). Δίδεται τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, (ΑΒ=ΑΓ). Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν, εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας ΒΑΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν βάσιν ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Μ καὶ τὸν περιγεγραμμένον κύκλον Ο εἰς τὸ σημεῖον Ν.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ γινόμενον ΑΜ×ΑΝ εἶναι σταθερόν, ὅταν ἡ ΑΝ στρέφεται περὶ τὸ Α.

2ον. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Γ φέρομεν τὴν κάθετον ΓΔ ἐπὶ τὴν ΑΝ, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν προέκτασιν τῆς ΝΒ εἰς τὸ σημεῖον Ε. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΓΔ=ΔΕ.

3ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ Ε, ὅταν ἡ ΑΝ στρέφεται περὶ τὸ Α.

1474. (1509). Ἐπὶ τῆς βάσεως ΒΓ ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Δ καὶ φέρομεν ἀπὸ τὸ Δ παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς αὐτὰς εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ παραλληλογράμμου ΑΕΔΖ εἶναι σταθερά, ὅταν τὸ σημεῖον Δ κινῆται ἐπὶ τῆς βάσεως ΒΓ.

2ον. Ὅταν τὸ σημεῖον Δ κινῆται ἐπὶ τῆς ΒΓ, ποῖος εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ μέσου Μ τῆς ΕΖ· ἐξ αὐτοῦ νὰ συναχθῇ, ὅτι τὸ σημεῖον Μ κινεῖται μὲ ταχύτητα δύο φορὰς μικροτέραν τῆς ταχύτητος τοῦ σημείου Δ.

1475. (1510). Δίδεται ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐκ τυχόντος σημείου Δ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ ὑψοῦμεν κάθετον ἐπ' αὐτήν, ἡ ὁποία τέμνει τὰς πλευρὰς ΑΓ καὶ ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων Μ τῆς εὐθείας ΕΖ καὶ τοιούτων, ὥστε νὰ εἶναι $\overline{ΔΜ}^2=ΔΕ\times ΔΖ$.

1476. (1511). Ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Ο ἀκτῖνος R. Φέρομεν τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Α, ἡ ὁποία τέμνει τὴν πλευρὰν ΒΓ εἰς τὸ Δ καὶ τὸ τόξον ΒΓ εἰς τὸ Μ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ σημεῖον Μ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τόξου ΒΜΓ.

2ον. Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΑ' καὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΑ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ΑΜ σχηματίζει ἴσας γωνίας μὲ τὸ ὕψος ΑΑ' καὶ τὴν ἀκτῖνα ΑΟ.

3ον. Φέρομεν τὴν ΜΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΜΔΓ, ΜΑΓ, καὶ ΑΒΔ εἶναι ὅμοια, καὶ ὅτι $\overline{ΜΓ}^2=ΔΜ\times ΜΑ$.

4ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κορυφῶν Β καὶ Γ, ὅταν τὰ τρία σημεῖα Α, Δ, Μ μένουν σταθερά, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ κινῆται καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους

1477. (1512). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ. Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΒΓ

καὶ λαμβάνομεν ἑκατέρωθεν τοῦ Β τὰ μήκη ΒΒ' καὶ ΒΒ'' ἴσα πρὸς δοθὲν μῆκος λ· ἐπίσης ἑκατέρωθεν τοῦ Γ λαμβάνομεν τὰ μήκη ΓΓ' καὶ ΓΓ'' ἴσα πρὸς δοθὲν μῆκος μ. Ἀπὸ τὰ σημεῖα Β' καὶ Β'' φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΒ καὶ ἀπὸ τὰ Γ' καὶ Γ'' παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΓ καὶ σχηματίζομεν ἕνα παραλληλόγραμμον ΕΖΗΘ. Ἐπίσης ἀπὸ τὰ σημεῖα Β' καὶ Β'' φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΓ καὶ ἀπὸ τὰ Γ' καὶ Γ'' παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΒ καὶ σχηματίζομεν ἕνα παραλληλόγραμμον Ε'Ζ'Η'Θ'.

1ον. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τόποι τῶν κορυφῶν τῶν παραλληλογράμμων αὐτῶν, ἐὰν λ καὶ μ μεταβάλλωνται εἰς τρόπον, ὥστε ὁ λόγος $\frac{\lambda}{\mu}$ νὰ εἶναι ἴσος μὲ δοθέντα ἀριθμὸν k.

2ον. Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ k ἕνα ἀπὸ τὰ παραλληλόγραμμα αὐτὰ εἶναι ῥόμβος ;

1478. (1513). Εἰς ἕνα τραπέζιον ἡ μία ἀπὸ τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς εἶναι ὡρισμένη καὶ αἱ βάσεις του ἔχουν σταθερὰ μήκη. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του.

1479. (1514). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο ἀπέναντι πλευρὰς ἐγγραψίμου τετραπλεύρου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

1480. (1515). Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Σ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς κύκλου Ο φέρομεν τὰς δύο ἐφαπτομένας ΣΑ καὶ ΣΒ. Αἱ δύο αὗται ἐφαπτόμεναι τέμνονται ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ ὑπὸ τῆς διαμέτρου τῆς παραλλήλου πρὸς τὴν ΑΒ. Φέρομεν μίαν ἐφαπτομένην ΕΜΖ τῆς περιφερείας Ο, ἡ ὁποία τέμνει τὰς ἐφαπτομένας ΣΑ καὶ ΣΒ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ καὶ οὕτω σχηματίζεται τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον Ο τρίγωνον ΣΕΖ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον ΕΓ×ΔΖ εἶναι σταθερόν, ὅταν τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Μ κινῆται ἐπὶ τῆς περιφερείας.

2ον. Γράφομεν περιφέρειαν Κ διερχομένην διὰ τῶν τριῶν σημείων Ε, Ο, Ζ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ κέντρου Κ, ὅταν τὸ Μ κινῆται ἐπὶ τῆς περιφερείας.

1481. (1516). Δίδεται περιφέρεια Ο καὶ μία ὡρισμένη διάμετρος αὐτῆς ΑΒ. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς περιφερείας Ο φέρομεν τὴν ΜΜ' κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου Ν τῆς καθέτου ΜΜ' καὶ τοιούτου, ὥστε $\frac{\overline{AM}^2}{\overline{AN}^2} = k^2$, ὅταν τὸ Μ γράφῃ τὴν περιφέρειαν Ο.

1482. (1517). Δύο κύκλοι Ο καὶ Ο' τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Ἐπ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου Ο λαμβάνομεν ἕνα σημεῖον Γ μεταβλητὸν καὶ φέρομεν τὰς εὐθείας ΓΑ καὶ ΓΒ, αἱ ὁποῖαι προεκτεινόμεναι τέμνουν τὴν περιφέρειαν Ο' εἰς τὰ σημεῖα Α' καὶ Β' ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τόποι τοῦ κέντρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τὸ τρίγωνον ΓΑ'Β' καὶ τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν ὑψῶν του.

1483. (1518). Εἰς ἕνα κύκλον Ο διαμέτρου ΑΒ φέρομεν μίαν τυχοῦσαν χορδὴν ΑΓ ἐπὶ τῆς ὁποίας ὁρίζομεν ἑκατέρωθεν τοῦ Γ τὰ σημεῖα Δ καὶ Δ τοιαῦτα, ὥστε $\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma B} = \frac{\Gamma\Delta'}{\Gamma B'} = \frac{\mu}{\nu}$. Νὰ εὑρεθῇ :

1ον. ὁ τόπος τῶν σημείων Δ καὶ Δ'.

2ον. ὁ τόπος τῶν σημείων τῆς τομῆς τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΔ ἢ τοῦ τριγώνου ΑΒΔ'.

3ον. ὁ τόπος τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον ΒΔΔ'.

1484. (1519). Δίδεται μία περιφέρεια Ο ὡρισμένη καὶ ἕνα σημεῖον Μ μεταβλητόν, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας Ο'. Ἀπὸ τὸ Μ φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ΜΤ καὶ ΜΤ' πρὸς τὴν περιφέρειαν Ο.

1ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τοῦ κύκλου τοῦ παρεγγεγραμμένου εἰς τὴν γωνίαν Μ τοῦ τριγώνου ΜΤΤ'.

2ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον ΜΤΤ'

3ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου ΜΤΤ'.

1485. (1520). Δίδονται δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο', αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ· συνδέομεν μὲ εὐθείας ἕνα τυχὸν σημεῖον Α τῆς πρώτης περιφερείας μὲ τὰ σημεῖα Β καὶ Γ· αἱ ΑΒ καὶ ΑΓ τέμνουν τὴν δευτέραν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Β' καὶ Γ' ἀντιστοίχως.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία, ἡ ὁποία σχηματίζεται ὑπὸ τῆς ΑΟ καὶ τῆς Β'Γ'.

2ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν τομῶν τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α καὶ τῆς καθέτου, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ Ο' ἐπὶ τὴν Β'Γ'.

1486. (1521). Δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο' τέμνονται εἰς δύο σημεῖα Α καὶ Β. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Σ τῆς πρώτης περιφερείας, φέρομεν τὰς εὐθείας ΣΑ καὶ ΣΒ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν περιφέρειαν Ο' εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ κέντρου βάρους τοῦ τριγώνου ΑΓΔ.

1487. (1522). Δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο' τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Ἐκ τυχόντος σημείου Π τῆς περιφερείας Ο φέρομεν τὰς τεμνούσας ΠΑΓ καὶ ΠΒΔ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν περιφέρειαν Ο' εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ χορδὴ ΓΔ εἶναι σταθερά.

2ον. Φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΠΜ τῆς περιφερείας Ο'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ λόγος $\frac{\overline{\Pi M}^2}{\Pi A . \Pi B}$ εἶναι σταθερός.

3ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου ΑΔΓ.

Ε' Ὁμάς. **1488.** (1523). Δίδονται τρεῖς περιφέρειαι Ο, Ο', Ο''. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ μίαν κορυφὴν ἐπὶ ἑκάστης τῶν περιφερειῶν αὐτῶν καὶ αἱ πλευραί του νὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΟΟ'Ο''.

1489. (1524). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, τὸ ὕψος $υ_α$ καὶ ὅτι $Γ - Β = 2ω$.

1490. (1525). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ὕψος $υ_α$ καὶ τὴν διάμεσον $μ_β$.

1491. (1526). Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι Χ, Υ Ζ καὶ ζητεῖται νὰ ἀχθῇ μία εὐθεῖα ΑΒΓ τέμνουσα τὰς Χ, Υ, Ζ εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ ἀντιστοίχως, κάθετος ἐπὶ τὴν Υ εἰς τὸ σημεῖον Β καὶ τοιαύτη, ὥστε νὰ εἶναι ΒΓ=2ΑΒ.

1492. (1527). Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι Χ καὶ Υ καὶ ἐπὶ τῆς Χ ἕνα σημεῖον Α καὶ ἐπὶ τῆς Υ ἕνα σημεῖον Β. Νὰ ἀχθῇ ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Σ μία τέμνουσα ΣΑΒ τὴν Χ εἰς τὸ Γ καὶ τὴν Υ εἰς τὸ Δ καὶ τοιαύτη, ὥστε

$$\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΔ}} = \frac{\mu}{\nu}.$$

1493. (1528). Αἱ πλευραὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ΑΒ=8 μ., ΒΓ=10 μ., ΓΑ=6 μ. Νὰ εὑρεθῇ ἕνα σημεῖον Μ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ τοιοῦτον, ὥστε

$$\text{ΜΑ}+\text{ΜΓ}=2.\text{ΜΒ}.$$

1494. (1493). Δίδονται δύο σημεῖα ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς μιᾶς ὀρθῆς γωνίας. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ἄλλης πλευρᾶς ἕνα σημεῖον Γ τοιοῦτον, ὥστε, ἂν φέρωμεν τὰς εὐθείας ΓΑ καὶ ΓΒ νὰ εἶναι γων.ΑΓΒ=2 γων.ΑΒΓ.

1495. (1530). Δίδεται ἡμιπεριφέρεια Ο διαμέτρου ΑΒ=2R. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας αὐτῆς ἕνα σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε, ἂν φέρωμεν τὴν χορδὴν ΜΑ καὶ τὴν κάθετον ΜΓ ἐπὶ τὴν ΑΒ, νὰ εἶναι $\overline{\text{ΑΜ}}^2+\overline{\text{ΜΓ}}^2=k^2$, ὅπου k δοθὲν μῆκος.

1496. (1531). Δύο κύκλοι Ο καὶ Ο' ἀκτίνων R καὶ $\frac{R}{2}$ ἀντιστοίχως ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον Α. Ζητεῖται νὰ γραφῇ ἕνας τρίτος κύκλος Κ, ὁ ὁποῖος νὰ ἐφάπτεται τῶν δύο πρώτων Ο καὶ Ο' καὶ τῆς εὐθείας ΟΑ. (Νὰ προσδιορισθῇ ὁ κύκλος Κ ἀπὸ τὴν ἀπόστασιν ΟΒ τοῦ κέντρου Ο τοῦ μεγάλου κύκλου ἀπὸ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τοῦ Β μὲ τὴν ΑΟ καὶ ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα ΚΒ).

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΕΜΒΑΔΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

1. Γενικότητες. Ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου

505. Ἐμβαδόν. Διὰ νὰ ἐκτιμήσωμεν τὴν ἔκτασιν μιᾶς ἐπιφανείας, τὴν συγκρίνομεν πρὸς μίαν ἄλλην ἐπιφάνειαν, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ὡς μονάδα.

Τὸ ἐξαγόμενον τῆς συγκρίσεως τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς πρὸς τὴν μονάδα τῶν ἐπιφανειῶν, δηλ. ὁ ἀριθμος ποὺ ἐκφράζει πόσας φορὰς ἡ δοθεῖσα ἐπιφάνεια περιέχει τὴν μονάδα τῶν ἐπιφανειῶν ἢ τὰ μέρη αὐτῆς, λέγεται ***ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας.***

Ὡς μονάδα ἐπιφανείας λαμβάνομεν τὸ ***τετραγωνικὸν μέτρον,*** δηλ. τὴν ἐπιφάνειαν ἑνὸς τετραγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ 1 μέτρον.

Ὅταν λαμβάνωμεν ὡς μονάδα μήκους τὸ *δεκατόμετρον*, τὸ *ἑκατοστόμετρον*, τὸ *χιλιοστόμετρον*, κλπ. πρέπει νὰ λαμβάνωμεν ἀντιστοίχως ὡς μονάδα ἐπιφανείας τὸ *τετραγωνικὸν δεκατόμετρον*, τὸ *τετραγωνικὸν ἑκατοστόμετρον*, τὸ *τετραγωνικὸν χιλιοστόμετρον* κλπ. δηλ. τὴν ἐπιφάνειαν ἑνὸς τετραγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ 1 δεκατόμετρον, 1 ἑκατοστόμετρον, 1 χιλιοστόμετρον.

Δύο ἐπιφάνειαι εἶναι ἴσαι, *ὅταν δύνανται νὰ ἐφαρμόσουν ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης.*

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ ἐπιφάνειαι αὐταὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν ἔκτασιν, τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν.

Ἐμάθαμεν εἰς τὴν (§ 8), ὅτι *δύο σχήματα* ***εἶναι ἰσοδύναμα,*** *ὅταν ἔχουν τὴν αὐτὴν ἔκτασιν, χωρὶς νὰ ἔχουν καὶ τὴν αὐτὴν μορφήν.* Εἶναι φανερόν, ὅτι δύο σχήματα ἰσοδύναμα θὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν, ἐὰν μετρηθοῦν διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος.

Σημ. Αἱ λέξεις *ἐπιφάνεια* καὶ *ἐμβαδὸν* ἑνὸς σχήματος, π.χ. ἑνὸς

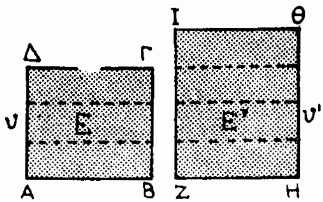
πολυγώνου, δὲν σημαίνουν τὸ αὐτὸ πρᾶγμα. Ἡ λέξις *ἐπιφάνεια* δηλώνει τὴν μορφήν, τὴν ἔκτασιν ἑνὸς σχήματος, ἐνῶ ἡ λέξις *ἐμβαδὸν* δηλώνει τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος μετρεῖ μίαν ἐπιφάνειαν. Ὥστε, ἂν δύο σχήματα ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν, δὲν πρέπει νὰ συμπεραίνωμεν ἀπαραιτήτως, ὅτι τὰ σχήματα αὐτὰ εἶναι καὶ ἴσα.

506. Διαστάσεις ὀρθογωνίου. *Ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος ἑνὸς ὀρθογωνίου ὀνομάζονται **διαστάσεις** αὐτοῦ.*

Εἶναι φανερόν, ὅτι: *Δύο ὀρθογώνια, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη ἐφαρμόζουν καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσα.*

507. Θεώρημα. ***Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὀρθογωνίων, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας βάσεις εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν ὑψῶν των.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν τὰ ὀρθογώνια ΑΒΓΔ καὶ ΖΗΘΙ *(Σχ. 362)*, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας βάσεις ΑΒ=ΖΗ=β καὶ διάφορα ὕψη υ καὶ υ′,



Σχ. 362.

Συμπέρασμα: Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Ε καὶ Ε′ τὰ ἐμβαδά των, ἀντιστοίχως, θὰ δείξωμεν, ὅτι $\frac{E}{E'}=\frac{\upsilon}{\upsilon'}$.

Ἀπόδειξις: 1ον. Ὑποθέτομεν, ὅτι τὰ ὕψη υ καὶ υ′ ἔχουν ἕνα κοινὸν μέτρον, τὸ ὁποῖον χωρεῖ 3 φορὰς εἰς τὸ υ καὶ 4 φορὰς εἰς τὸ υ′. Θὰ εἶναι λοιπὸν $\frac{\upsilon}{\upsilon'}=\frac{3}{4}$ (1)

Διαιροῦμεν τὸ ὕψος υ εἰς 3 ἴσα μέρη καὶ τὸ ὕψος υ′ εἰς 4 ἴσα μέρη καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς βάσεις ΑΒ καὶ ΖΗ.

Τὰ ὀρθογώνια ΑΒΓΔ καὶ ΖΗΘΙ διῃρέθησαν, τὸ πρῶτον εἰς τρία ὀρθογώνια καὶ τὸ δεύτερον εἰς τέσσαρα. Ὅλα τὰ ὀρθογώνια αὐτὰ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν ἴσα ὕψη καὶ ἴσας βάσεις. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$\frac{ΑΒΓΔ}{ΖΗΘΙ}=\frac{3}{4} \quad \text{καὶ} \quad \frac{E}{E'}=\frac{3}{4} \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι $\frac{E}{E'}=\frac{\upsilon}{\upsilon'}$.

2ον. Ὑποθέτομεν, ὅτι τὰ ὕψη υ καὶ υ′ δὲν ἔχουν κοινὸν μέτρον. Διαιροῦμεν τὸ ὕψος υ′ εἰς ν ἴσα μέρη, ὁπότε τὸ ἕνα ἀπὸ αὐτὰ τὰ μέρη θὰ εἶναι ἴσον μὲ $\frac{1}{\nu}$ τοῦ υ′, δηλ. μὲ $\frac{1}{\nu}\times\upsilon'$ καὶ ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ ὕψος υ περιέχει μ ἀπὸ τὰ ἴσα αὐτὰ μέρη, ἀλλὰ δὲν περιέχει μ+1

ἀπὸ αὐτά, ἤτοι ὅτι εἶναι $\mu \times \frac{1}{\nu} \upsilon' < \upsilon < (\mu+1)\frac{1}{\nu}\upsilon'$.

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν λαμβάνομεν $\frac{\mu}{\nu} < \frac{\upsilon}{\upsilon'} < \frac{\mu+1}{\nu}$ (3)

Ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως τῶν ὑψῶν υ καὶ υ′ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς βάσεις ΑΒ καὶ ΖΗ, ὁπότε τὸ δεύτερον ὀρθογώνιον Ε′ θὰ χωρισθῇ εἰς ν ἴσα ὀρθογώνια. Ἕνα ἀπὸ τὰ ὀρθογώνια αὐτά, δηλ. τὸ $\frac{1}{\nu} \times E'$ θὰ χωρῇ μ φορὰς εἰς τὸ Ε, ἀλλὰ δὲν θὰ χωρῇ μ+1 φοράς, ἤτοι θὰ εἶναι

$$\mu \times \frac{1}{\nu} E' < E < (\mu+1)\frac{1}{\nu} E' \quad \text{ἢ} \quad \frac{\mu}{\nu} < \frac{E}{E'} < \frac{\mu+1}{\nu} \qquad (4)$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (3) καὶ (4) παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ λόγοι $\frac{\upsilon}{\upsilon'}$ καὶ $\frac{E}{E'}$ περιέχονται μεταξὺ τῶν αὐτῶν τιμῶν $\frac{\mu}{\nu}$ καὶ $\frac{\mu+1}{\nu}$, αἱ ὁποῖαι διαφέρουν κατὰ $\frac{1}{\nu}$.

Ἀλλὰ ἡ διαφορὰ αὐτὴ δύναται νὰ γίνῃ ὁσονδήποτε μικρὰ καὶ ἂν θέλωμεν, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸ ὕψος υ′ εἰς ἕνα μεγάλον ἀριθμὸν ἴσων μερῶν.

Οἱ λόγοι λοιπὸν $\frac{\upsilon}{\upsilon'}$ καὶ $\frac{E}{E'}$, οἱ ὁποῖοι περιέχονται μεταξὺ δύο τιμῶν $\frac{\mu}{\nu}$ καὶ $\frac{\mu+1}{\nu}$, αἱ ὁποῖαι διαφέρουν τόσον ὀλίγον, ὅσον θέλομεν, θὰ διαφέρουν μεταξύ των κατὰ μίαν ποσότητα, ἡ ὁποία τείνει πρὸς τὸ μηδὲν καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ἴσοι· ἄρα θὰ εἶναι $\frac{E}{E'} = \frac{\upsilon}{\upsilon'}$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο....***

508. Πόρισμα. ***Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὀρθογωνίων, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσα ὕψη, εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν βάσεών των.***

Τοῦτο γίνεται φανερὸν ἐκ τοῦ ὅτι δυνάμεθα εἰς ἕνα ὀρθογώνιον νὰ λάβωμεν τὴν βάσιν του ὡς ὕψος καὶ τὸ ὕψος του ὡς βάσιν.

509. Θεώρημα. ***Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὀρθογωνίων εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν γινομένων τῶν διαστάσεών των.***

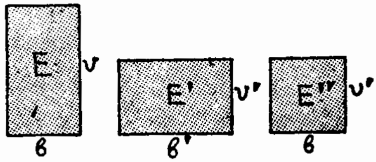
Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν Ε καὶ Ε′ τὰ ἐμβαδὰ δύο ὀρθογωνίων, τὰ ὁποῖα ἔχουν διαστάσεις, τὸ πρῶτον β καὶ υ καὶ τὸ δεύτερον β′ καὶ υ′. *(Σχ. 363).*

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\frac{E}{E'} = \frac{\beta\upsilon}{\beta'\upsilon'}$.

Ἀπόδειξις: Φανταζόμεθα ἕνα τρίτον ὀρθογώνιον Ε″, τὸ ὁποῖον

ἔχει διαστάσεις β καὶ υ', δηλ. τὴν βάσιν τοῦ πρώτου καὶ τὸ ὕψος τοῦ δευτέρου.

'Επειδὴ τὰ ὀρθογώνια Ε καὶ Ε'' ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν β, ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν των θὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν ὑψῶν των: (§ 507)· δηλ. θὰ εἶναι $\frac{E}{E''} = \frac{\upsilon}{\upsilon'}$ (1)



Σχ. 363.

'Επίσης, ἐπειδὴ τὰ ὀρθογώνια Ε'' καὶ Ε' ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος υ', ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν των, θὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν βάσεών των· (§ 508)· δηλ. νὰ εἶναι $\frac{E''}{E'} = \frac{\beta}{\beta'}$ (2)

Πολλαπλασιάζομεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\frac{E}{E''} \times \frac{E''}{E'} = \frac{\upsilon}{\upsilon'} \times \frac{\beta}{\beta'} \quad \text{ἢ} \quad \frac{E}{E'} = \frac{\beta\upsilon}{\beta'\upsilon'}.$$

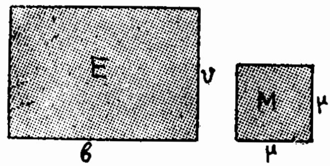
'Εδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν. . . .***

510. 'Εμβαδὸν ὀρθογωνίου. Θεώρημα. ***Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν διαστάσεών των.***

'Υπόθεσις: Ἔστωσαν β καὶ υ αἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου.

Συμπέρασμα: 'Εὰν παραστήσωμεν μὲ Ε τὸ ἐμβαδόν του θὰ δείξωμεν, ὅτι Ε=β×υ.

'Απόδειξις: 'Υποθέτομεν, ὅτι αἱ διαστάσεις β καὶ υ ἐμετρήθησαν μὲ τὴν μονάδα μ τοῦ μήκους. 'Η μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν θὰ εἶναι τότε ἕνα τετράγωνον Μ, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ μ.



Σχ. 364.

Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα τὰ ἐμβαδὰ Ε καὶ Μ τῶν δύο ὀρθογωνίων θὰ ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν γινομένων τῶν διαστάσεών των (§ 509)· δηλ. θὰ εἶναι

$$\frac{E}{M} = \frac{\beta \times \upsilon}{\mu \times \mu} \qquad (1)$$

'Επειδὴ τὸ Μ εἶναι ἡ μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν, ὁ λόγος $\frac{E}{M}$ παριστάνει τὸ ἐμβαδὸν Ε τοῦ δοθέντος ὀρθογωνίου καὶ ἐπειδὴ μ=1, ἡ ἰσότης (1) γράφεται $E = \frac{\beta \times \upsilon}{1 \times 1}$ ἢ $\boxed{E = \beta \times \upsilon}$

'Εδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου. . . .***

Παράδειγμα: Ἐὰν ἡ βάσις ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι 14,5 μ. καὶ τὸ ὕψος του 8 μ., τὸ ἐμβαδόν του εἶναι $14{,}5 \times 8 = 116$ τετρ. μέτρα.

Παρατηρήσεις: *I.* Ὅταν λέγωμεν ὅτι: *τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του, ἐννοοῦμεν, ὅτι τὸ ἐμβαδόν του εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι μετροῦν τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος.*

Γενικῶς: ἂν δύο ἀριθμοὶ ἐκφράζουν μήκη εὐθειῶν, τὸ γινόμενόν των θὰ σημαίνῃ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου, ποὺ ἔχει βάσιν καὶ ὕψος τὰς εὐθείας αὐτάς.

II. Ὁ τύπος $E = \beta \times \upsilon$ εἶναι μία σχέσις, ἡ ὁποία συνδέει τὰ τρία μεγέθη Ε (ἐμβαδόν), β (βάσιν), υ (ὕψος). Ὁ τύπος αὐτὸς μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ἕνα μέγεθος, ὅταν γνωρίζωμεν τὰ δύο ἄλλα.

Δηλ. εἶναι: $\boxed{E = \beta \times \upsilon}$, $\boxed{\beta = \frac{E}{\upsilon}}$, $\boxed{\upsilon = \frac{E}{\beta}}$.

511. Ἐμβαδὸν τετραγώνου. Τὸ τετράγωνον εἶναι ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις εἶναι ἴσαι. Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ α τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου καὶ μὲ Ε τὸ ἐμβαδόν του, θὰ εἶναι

$$E = \alpha \times \alpha \quad \text{ἢ} \quad \boxed{E = \alpha^2}.$$

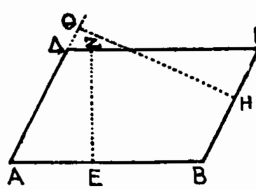
Ὥστε: ***Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς του.***

Σημ. Ἡ δευτέρα δύναμις ἑνὸς ἀριθμοῦ, π.χ. ἡ 5^2 *λέγεται καὶ τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ,* διότι δίδει τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ τὸν ἀριθμόν.

Ἀσκήσεις: 1497, 1498, 1499, 1500, 1501, 1502, 1503, 1505, 1511, 1514.

2. Ἐμβαδὸν εὐθυγράμμων σχημάτων

512. Ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου. Ὁρισμοί. *Εἰς ἕνα παραλληλόγραμμον λαμβάνομεν ὡς **βάσιν** του μίαν ἀπὸ τὰς πλευράς του· τότε τὸ **ὕψος** του εἶναι ἡ ἀπόστασις τῆς πλευρᾶς αὐτῆς* (βάσεως)*ἀπὸ τὴν ἀπέναντι πλευράν.*

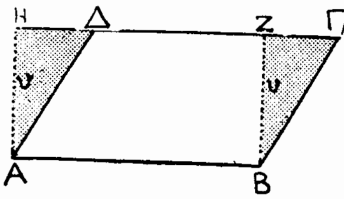


Σχ. 365.

Π.χ. εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ *(Σχ. 365)*, ἐὰν ληφθῇ ὡς βάσις ἡ πλευρὰ ΑΒ, ὕψος του θὰ εἶναι ἡ ΕΖ. Ἂν ληφθῇ ὡς βάσις του ἡ ΑΔ, ὕψος θὰ εἶναι ἡ ΗΘ.

513. Πρόβλημα. ***Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ βάσις του καὶ τὸ ὕψος του.***

Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ *(Σχ. 366)*, ΑΒ=β ἡ βάσις του καὶ ΒΖ=υ τὸ ὕψος του. Ἀπὸ τὰς κορυφὰς Α καὶ Β φέρομεν καθέτους ΑΗ καὶ ΒΖ ἐπὶ τὴν ΑΒ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν ΓΔ εἰς τὰ σημεῖα Η καὶ Ζ. Σχηματίζεται οὕτω τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΖΗ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΒΖ μὲ τὸ παραλληλόγραμμον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΖΗ εἶναι ἰσοδύναμα.



Σχ. 366.

Ἀπόδειξις: Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΗΔ καὶ ΒΖΓ εἶναι ἴσα. Ἐὰν ἀπὸ τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΗ ἀφαιρέσωμεν τὸ τρίγωνον ΑΗΔ, μένει τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Ἐπίσης, ἂν ἀπὸ τὸ αὐτὸ τετράπλευρον ἀφαιρέσωμεν τὸ τρίγωνον ΒΖΓ, μένει τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΖΗ. Ἐπειδὴ καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις ἀφαιροῦμεν ἴσα τρίγωνα ἀπὸ τὸ αὐτὸ τετράπλευρον, τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ὀρθογώνιον καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι

$$\text{ἐμβ.παραλλ.}ΑΒΓΔ=\text{ἐμβ. ὀρθογ.}ΑΒΖΗ=ΑΒ\times ΒΖ$$

ἢ

$$\boxed{\text{ἐμβ. παραλλ. }ΑΒΓΔ=β\times υ}.$$

Ὥστε: ***Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς παραλληλογράμμου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.***

514. Πόρισμα Ι. ***Δύο παραλληλόγραμμα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη, εἶναι ἰσοδύναμα.***

Διότι ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν: τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος.

515. Πόρισμα ΙΙ. ***Ἂν δύο παραλληλόγραμμα ἔχουν ἴσας βάσεις, τὰ ἐμβαδά των ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν ὑψῶν των· ἂν ἔχουν ἴσα ὕψη, τὰ ἐμβαδά των ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν βάσεών των.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν Ε καὶ Ε′ τὰ ἐμβαδὰ δύο παραλληλογράμμων, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν β καὶ ὕψη υ καὶ υ′ ἀντιστοίχως.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\frac{Ε}{Ε'}=\frac{υ}{υ'}$.

Ἀπόδειξις: Γνωρίζομεν, ὅτι $Ε=β\times υ$ καὶ $Ε'=β\times υ'$. Διαιροῦμεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\frac{E}{E'}=\frac{\beta\times\upsilon}{\beta\times\upsilon'} \quad ἢ \quad \frac{E}{E'}=\frac{\upsilon}{\upsilon'}.$$

Ἐὰν τὰ παραλληλόγραμμα ἔχουν βάσεις β καὶ β′ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος υ εὑρίσκομεν ὁμοίως, ὅτι $\frac{E}{E'}=\frac{\beta}{\beta'}$.

516. Πόρισμα III. ***Τὰ ἐμβαδὰ δύο τυχόντων παραλληλογράμμων ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν γινομένων τῶν βάσεών των ἐπὶ τὰ ὕψη των.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν Ε καὶ Ε′ τὰ ἐμβαδὰ δύο παραλληλογράμμων, τὰ ὁποῖα ἔχουν βάσεις β καὶ β′ καὶ ὕψη υ καὶ υ′.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\frac{E}{E'}=\frac{\beta\times\upsilon}{\beta'\times\upsilon'}$.

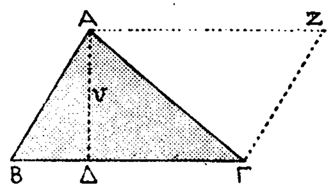
Ἀπόδειξις: Γνωρίζομεν, ὅτι $E=\beta\times\upsilon$ και $E'=\beta'\times\upsilon'$.

Διαιροῦμεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν $\frac{E}{E'}=\frac{\beta\times\upsilon}{\beta'\times\upsilon'}$.

Ἀσκήσεις: 1524, 1525, 1526, 1527, 1528.

517. Β′. Ἐμβαδὸν τριγώνου. Πρόβλημα. ***Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου, συναρτήσει τῆς βάσεώς του καὶ τοῦ ὕψους του.***

Λύσις. Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ *(Σχ. 367)*, ΒΓ=β ἡ βάσις του καὶ ΑΔ=υ τὸ ὕψος του.



Σχ. 367.

Ἀπὸ τὰς κορυφὰς Α καὶ Γ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς ἀπέναντι πλευράς του, αἳ ὁποῖαι τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Ζ. Τὸ σχηματισθὲν τετράπλευρον ΑΒΓΖ εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἐπειδὴ ἡ διαγώνιος ΑΓ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΖ διαιρεῖ αὐτὸ εἰς δύο ἴσα τρίγωνα, τὸ ΑΒΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΖ. Ἑπομένως καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου θὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ ΒΓ×ΑΔ· δηλ. θὰ εἶναι:

$$ἐμβ.\ τριγ. ΑΒΓ=\frac{1}{2}\ ἐμβ.\ παραλληλογρ.\ ΑΒΓΔ=\frac{1}{2}\,ΒΓ\times ΑΔ.$$

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Ε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, θὰ εἶναι:

$$E=\frac{1}{2}\,ΒΓ\times ΑΔ \quad ἢ \quad \boxed{E=\frac{\beta\times\upsilon}{2}}.$$

Ὥστε: ***Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.***

518. Πόρισμα I. ***Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῶν καθέτων πλευρῶν του.***

Διότι, ἐὰν λάβωμεν τὴν μίαν ἀπὸ τὰς καθέτους πλευρὰς ὡς βάσιν ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ θὰ εἶναι ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου.

Παρατήρησις: Ἐὰν α εἶναι ἡ ὑποτείνουσα ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, β, γ αἱ κάθετοι πλευραί του καὶ υ τὸ ὕψος του ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν, θὰ εἶναι: $\boxed{\beta\gamma = \alpha\upsilon}$ διότι καθένα ἀπὸ τὰ γινόμενα αὐτὰ παριστάνει τὸ διπλάσιον ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου.

519. Πόρισμα II. ***Δύο τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη εἶναι ἰσοδύναμα.***

Διότι ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν: τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς βάσεώς των ἐπὶ τὸ ὕψος των.

520. Πόρισμα III. ***Ἂν δύο τρίγωνα ἔχουν ἴσας βάσεις, τὰ ἐμβαδά των ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν ὑψῶν των. Ἂν ἔχουν ἴσα ὕψη, τὰ ἐμβαδά των ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν βάσεών του.***

1ον Ἔστωσαν δύο τρίγωνα Τ καὶ Τ', τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν β καὶ ὕψη υ καὶ υ' ἀντιστοίχως. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Ε καὶ Ε' τὰ ἐμβαδά των, θὰ εἶναι: $E = \frac{\beta \times \upsilon}{2}$ καὶ $E' = \frac{\beta \times \upsilon'}{2}$.

Διαιροῦμεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\frac{E}{E'} = \frac{\beta \times \upsilon}{\beta \times \upsilon'} \quad \text{ἢ} \quad \frac{E}{E'} = \frac{\upsilon}{\upsilon'}.$$

2ον. Ἐὰν τὰ τρίγωνα Τ καὶ Τ' ἔχουν βάσεις β καὶ β' καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος υ εὑρίσκομεν ὁμοίως, ὅτι $\frac{E}{E'} = \frac{\beta}{\beta'}$.

521. Πόρισμα IV. ***Τὰ ἐμβαδὰ δύο τυχόντων τριγώνων ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν γινομένων τῶν βάσεών των ἐπὶ τὰ ὕψη των.***

Ἔστωσαν Τ καὶ Τ' δύο τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀντιστοίχως, βάσεις β καὶ β' καὶ ὕψη υ καὶ υ'. Ἂν παραστήσωμεν μὲ Ε καὶ Ε' τὰ ἐμβαδά των, θὰ ἔχωμεν $E = \frac{\beta \times \upsilon}{2}$ καὶ $E' = \frac{\beta' \times \upsilon'}{2}$.

Διαιροῦμεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\frac{E}{E'} = \frac{\beta \times \upsilon}{\beta' \times \upsilon'}.$$

Ἀσκήσεις: 1529, 1530, 1531, 1532, 1536, 1537, 1539, 1542.

522. Πρόβλημα. ***Νὰ ἐκφρασθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου, συναρτήσει τῆς πλευρᾶς του α.***

Λύσις. Ἡ βάσις τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι α, τὸ ὕψος του εἶναι ἴσον (§ 362) μὲ $\frac{\alpha}{2}\sqrt{3}$. Ἑπομένως τὸ ἐμβαδόν του Ε εἶναι

$$E=\frac{1}{2}\alpha\times\frac{\alpha}{2}\sqrt{3} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{E=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}}$$

Ἀσκήσεις: 1547, 1548, 1549.

523. Πρόβλημα. ***Νὰ ἐκφρασθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ: 1ον. συναρτήσει τῶν πλευρῶν α, β, γ.***

2ον. συναρτήσει τῶν πλευρῶν του καὶ τῆς ἀκτῖνος R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

Λύσις. 1ον. Ἂν λάβωμεν ὡς βάσιν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τὴν πλευρὰν α, τότε τὸ ὕψος του (§ 446) θὰ εἶναι $\upsilon_\alpha=\frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ καὶ ἑπομένως τὸ ἐμβαδόν του Ε θὰ εἶναι

$$E=\frac{1}{2}\alpha\times\frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}\,^{*}$$

2ον Γνωρίζομεν (§ 448), ὅτι $\beta\gamma=2R\upsilon_\alpha$· ἄρα $\upsilon_\alpha=\frac{\beta\gamma}{2R}$.

Ἂν λοιπὸν λάβωμεν ὡς βάσιν τοῦ τριγώνου τὴν πλευρὰν α, τὸ ὕψος του θὰ εἶναι $\upsilon=\frac{\beta\gamma}{2R}$ καὶ ἑπομένως τὸ ἐμβαδόν του Ε, θὰ εἶναι

$$E=\frac{1}{2}\alpha\times\frac{\beta\gamma}{2R} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{E=\frac{\alpha\beta\gamma}{4R}}$$

Ἀσκήσεις: 1549, 1550.

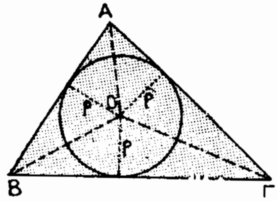
524. Πρόβλημα. ***Νὰ ἐκφρασθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου, συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.***

Λύσις. Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ *(Σχ. 368)* καὶ Ο ὁ ἐγγεγραμμένος εἰς αὐτὸ κύκλος. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ καὶ τὰς ἀκτῖνας ρ εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶ-

---

* Ὁ τύπος αὐτὸς φέρεται ὡς τύπος τοῦ Ἥρωνος. Περιέχεται εἰς τὸ ἔργον τοῦ Ἥρωνος «Μετρικά» Ι. 8 καθὼς καὶ εἰς τὸ ἔργον του «Διόπτρα» κεφ. 30. Ἤδη κατὰ τὸν κ. Ε. Σταμάτην καθηγ. Φυσικῶν, ὁ ὁποῖος ἀσχολεῖται ἀπὸ καιροῦ μὲ τὰ ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους, εἶναι γνωστὸν ἐξ Ἀραβικῶν πηγῶν, ὅτι ἡ ἀπόδειξις τοῦ τύπου αὐτοῦ ὀφείλεται εἰς τὸν Ἀρχιμήδην.

ναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων ΟΒΓ, ΟΓΑ, ΟΑΒ, τὰ ὁποῖα ἔχουν βάσεις τὰς πλευρὰς α, β, γ τοῦ τριγώνου, ἀντιστοίχως καὶ ὕψη ἴσα μὲ τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Ε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ θὰ ἔχωμεν :



Σχ. 368.

$$Ε=\text{ἐμβ.τρ.}ΟΒΓ+\text{ἐμβ.τρ.}ΟΓΑ+\text{ἐμβ.τρ.}ΟΑΒ=$$
$$=\frac{α\times ρ}{2}+\frac{β\times ρ}{2}+\frac{γ\times ρ}{2}=\frac{ρ}{2}(α+β+γ).$$

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ $2τ$ τὴν περίμετρον $α+β+γ$ τοῦ τριγώνου, θὰ ἔχωμεν $\boxed{Ε=ρτ}$.

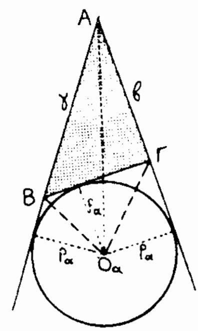
525. Πρόβλημα. ***Νὰ ἐκφρασθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου, συναρτήσει τῆς περιμέτρου του καὶ τῆς ἀκτῖνος $ρ_α$ ἢ $ρ_β$ ἢ $ρ_γ$ ἑνὸς ἐκ τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων.***

Λύσις. Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (*Σχ. 369*) καὶ $Ο_α$ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τοῦ παρεγγεγραμμένου εἰς τὴν γωνίαν Α τοῦ τριγώνου. Φέρομεν τὰς εὐθείας $Ο_αΑ$, $Ο_αΒ$, $Ο_αΓ$ καὶ τὰς ἀκτῖνας $ρ_α$ εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς. Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα, τὸ ἐμβαδὸν Ε τοῦ τριγώνου εἶναι

$$Ε=\text{ἐμβ. τρ.}Ο_αΑΒ+\text{ἐμβ. τρ.}Ο_αΑΓ-$$
$$-\text{ἐμβ. τριγ.}Ο_αΒΓ$$

ἢ
$$Ε=\frac{γ\times ρ_α}{2}+\frac{β\times ρ_α}{2}-\frac{α\times ρ_α}{2}$$

$$Ε=(γ+β-α)\times\frac{ρ_α}{2} \qquad (1)$$



Σχ. 369.

Ἐὰν θέσωμεν $α+β+γ=2τ=$ περιμετρος τριγώνου, τότε $β+γ-α=2τ-2α=2(τ-α)$ καὶ ἡ ἰσότης (1) γράφεται

$$\boxed{Ε=(τ-α)ρ_α}.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

$$\boxed{Ε=(τ-β)ρ_β} \quad \text{καὶ} \quad \boxed{Ε=(τ-γ)ρ_γ}.$$

526. Παρατήρησις. Οἱ τύποι τῶν § 523, 524, 525 μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ ὑπολογίσωμεν, συναρτήσει τῶν τριῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου, τὰς ἀκτῖνας τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων.

Πράγματι οἱ τύποι $Ε=ρτ$, $Ε=(τ-α)ρ_α=(τ-β)ρ_β=(τ-γ)ρ_γ$

δίδουν $\quad \varrho = \frac{E}{\tau} = \frac{\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}{\tau} = \sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}}$

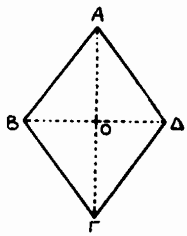
$$\varrho_\alpha = \frac{E}{\tau-\alpha} = \frac{\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)(\tau-\gamma)}}{\tau-\alpha} = \sqrt{\frac{\tau(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau-\alpha}}$$

$$\varrho_\beta = \sqrt{\frac{\tau(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)}{\tau-\beta}}, \qquad \varrho_\gamma = \sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\tau-\gamma}}.$$

Ἀσκήσεις: 1551, 1552, 1553.

527. Γ΄. Ἐμβαδὸν ρόμβου. Πρόβλημα. ***Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ρόμβου, συναρτήσει τῶν διαγωνίων του.***

Λύσις. Ἔστω ὁ ρόμβος ΑΒΓΔ καὶ ΑΓ, ΒΔ *(Σχ. 370)* αἱ διαγώνιοί του.



Σχ. 370.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ρόμβου ΑΒΓΔ εἶναι ἴσον μὲ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΓΒΔ, ἢ μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ΑΒΔ, διότι τὰ δύο αὐτὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα. Δηλ. εἶναι

ἐμβ. ρόμβου ΑΒΓΔ $=2\times$ ἐμβ. τριγ. ΑΒΔ $\quad (1)$

Ἐπειδὴ αἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου διχοτομοῦνται καὶ εἶναι κάθετοι μεταξύ των, τὸ ΑΟ εἶναι ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΒΔ. Θὰ εἶναι λοιπὸν

ἐμβ. τριγ. ΑΒΔ $= \frac{\text{ΒΔ}\times\text{ΑΟ}}{2}$, ὁπότε ἡ (1) γράφεται

ἐμβ. ρόμβ. ΑΒΓΔ $=2\times\frac{\text{ΒΔ}\times\text{ΑΟ}}{2} = \text{ΒΔ}\times\text{ΑΟ} \qquad (2)$

Ἐπειδὴ ΑΟ $=\frac{\text{ΑΓ}}{2}$, ἡ ἰσότης (2) γράφεται

ἐμβ. ρόμβ. ΑΒΓΔ $= \frac{\text{ΒΔ}\times\text{ΑΓ}}{2}$

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Ε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ρόμβου καὶ μὲ δ καὶ δ΄ τὰς διαγωνίους του, θὰ εἶναι $\boxed{E = \frac{\delta\times\delta'}{2}}$.

Ὥστε: ***Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ρόμβου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῶν δύο διαγωνίων του.***

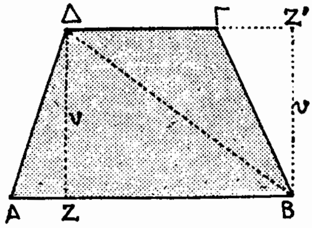
Ἀσκήσεις: 1554, 1555, 1556, 1557.

528. Δ΄. Ἐμβαδὸν τραπεζίου. Πρόβλημα. ***Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τραπεζίου, συναρτήσει τῶν δύο βάσεών του καὶ τοῦ ὕψους του.***

Λύσις. Ἔστω τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσεις τὰς ΑΒ=Β καὶ ΓΔ=β καὶ ὕψος τὸ ΔΖ=υ *(Σχ. 371).*

Φέρομεν τὴν διαγώνιον ΒΔ· τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ εἶναι ἄθροισμα

τῶν δύο τριγώνων ΔΑΒ καὶ ΔΓΒ· τὸ τρίγωνον ΔΑΒ ἔχει βάσιν τὴν ΑΒ=Β καὶ ὕψος τὸ ΔΖ=υ καὶ τὸ τρίγωνον ΔΓΒ ἔχει βάσιν τὴν ΓΔ=β καὶ ὕψος ΒΖ′=υ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὕψος ΔΖ. Θὰ εἶναι λοιπόν:



Σχ. 371.

ἐμβ. τραπ.ΑΒΓΔ=

$=$ἐμβ. τριγ.ΔΑΒ+ἐμβ. τριγ.ΔΒΓ=

$=\frac{1}{2}B.\upsilon+\frac{1}{2}\beta.\upsilon=\frac{1}{2}\upsilon.(B+\beta).$

Ἄρα εἶναι: **Ἐμβ. τραπ.** $=\frac{B+\beta}{2}\times\upsilon$.

Ὥστε: ***Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τραπεζίου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν δύο βάσεών του ἐπὶ τὸ ὕψος του.***

Παρατήρησις: Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Ε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τραπεζίου, μὲ Β καὶ β τὰς δύο βάσεις του ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ μὲ υ τὸ ὕψος του ΔΖ, θὰ ἔχωμεν, ὅπως εὑρέθη ἀνωτέρω, τὸν τύπον

$$E=\frac{B+\beta}{2}\times\upsilon \qquad (1)$$

ὁ ὁποῖος δίδει τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τραπεζίου.

Ὁ τύπος (1) συνδέει τὰ τέσσαρα μεγέθη Ε, Β, β, υ. Ἐὰν τρία ἀπὸ τὰ μεγέθη αὐτὰ εἶναι γνωστά, δυνάμεθα, ἀπὸ τὸν τύπον αὐτόν, νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ τέταρτον. Ὥστε ὁ τύπος (1) μᾶς ἐπιτρέπει νὰ λύσωμεν 4 διάφορα προβλήματα, καθόσον τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ μεγέθη αὐτὰ λαμβάνεται ὡς ἄγνωστον. Δηλ. εἶναι

$$B=\frac{2E-\beta\upsilon}{\upsilon},\quad \beta=\frac{2E-B\upsilon}{\upsilon},\quad \upsilon=\frac{2E}{B+\beta}.$$

529. Πόρισμα. Ἐπειδὴ τὸ ἡμιάθροισμα $\frac{B+\beta}{2}$ τῶν δύο βάσεων Β καὶ β ἑνὸς τραπεζίου εἶναι ἴσον μὲ τὴν διάμεσόν του (§ 224) συνάγομεν, ὅτι:

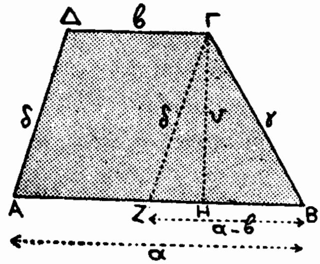
Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τραπεζίου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς διαμέσου του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

530. Πρόβλημα. ***Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τραπεζίου, συναρτήσει τῶν πλευρῶν του.***

Λύσις. Ἔστω τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ *(Σχ. 372)* καὶ ΑΒ=α, ΓΔ=β, ΒΓ=γ, ΔΑ=δ αἱ πλευραί του. Ἐὰν ΓΗ εἶναι τὸ ὕψος του, θὰ εἶναι:

$$\text{ἐμβ. τραπ ΑΒΓΔ}=\frac{\alpha+\beta}{2}\times \Gamma H \qquad (1).$$

Ὑπολογίζομεν τὸ ὕψος ΓΗ. Ἀπὸ τὸ Γ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΔΑ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ζ. Θὰ εἶναι ΓΖ=ΔΑ=δ, ΑΖ=ΔΓ=β, ὁπότε ΖΒ=ΑΒ—ΑΖ=α—β. Τοῦ τριγώνου ΓΖΒ γνωρίζομεν τὰς τρεῖς πλευρὰς του ΓΖ=δ, ΖΒ=α—β, ΒΓ=γ καὶ ἑπομένως δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ὕψος του ΓΗ.



Σχ. 372.

Γνωρίζομεν (§ 379), ὅτι

$$ΓΗ=\frac{2}{α-β}\sqrt{τ[τ-(α-β)](τ-γ)(τ-δ)} \quad (2).$$

ὅπου $τ=\frac{(α-β)+γ+δ}{2}$ = ἡμιπερίμετρος τριγώνου ΓΖΒ. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (2) τὸ τ μὲ τὴν τιμήν του καὶ ἔχομεν:

$$ΓΗ=\frac{2}{α-β}\sqrt{\frac{α-β+γ+δ}{2}\times\frac{β+γ+δ-α}{2}\times\frac{α-β-γ+δ}{2}\times\frac{α-β+γ-δ}{2}} \quad (3).$$

Ἐὰν θέσωμεν α+β+γ+δ=2σ=περίμετρος τραπεζίου, θὰ εἶναι

$$α-β+γ+δ=2(σ-β)$$
$$β+γ+δ-α=2(σ-α)$$
$$α-β-γ+δ=2(σ-β-γ)$$
$$α-β+γ-δ=2(σ-β-δ).$$

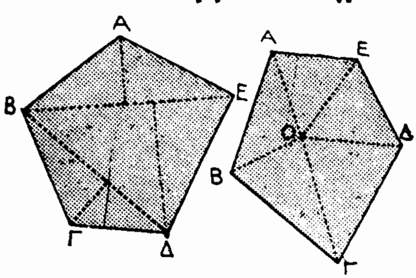
Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (3) τὰ α—β+γ+δ κλπ. μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν $ΓΗ=\frac{2}{α-β}\sqrt{(σ-α)(σ-β)(σ-β-γ)(σ-β-δ)}$.

Τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ ΓΗ θέτομεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) καὶ εὑρίσκομεν

$$\textbf{ἐμβ.τραπ.ΑΒΓΔ}=\frac{α+β}{α-β}\sqrt{(σ-α)(σ-β)(σ-β-γ)(σ-β-δ)}.$$

Ἀσκήσεις: 1558, 1559, 1560, 1561, 1562, 1563, 1564, 1565, 1566, 1567.

531. Ε΄. Ἐμβαδὸν τυχόντος πολυγώνου. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τυχόντος πολυγώνου ἐργαζόμεθα κατὰ δύο τρόπους:



Σχ. 373.

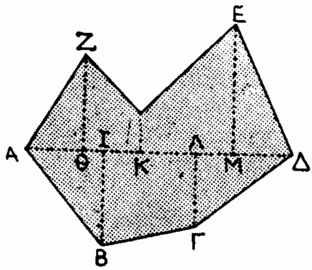
Πρῶτος τρόπος. Διαιροῦμεν τὸ πολύγωνον εἰς τρίγωνα, εἴτε φέροντες ὅλας τὰς διαγωνίους του, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὴν αὐτὴν κορυφήν του (*Σχ.373*), εἴτε συνδέοντες ὅλας τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου μὲ τυχὸν ση-

μεῖον, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ἐντὸς τοῦ πολυγώνου.

Ὑπολογίζομεν χωριστὰ τὸ ἐμβαδὸν τῶν τριγώνων, ποὺ ἐσχηματίσθησαν καὶ προσθέτομεν ἔπειτα τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων αὐτῶν.

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων αὐτῶν δίδει τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου.

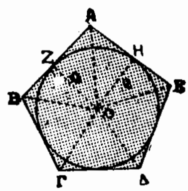
Δεύτερος τρόπος. Φέρομεν τὴν μεγαλυτέραν διαγώνιον ΑΔ τοῦ πολυγώνου *(Σχ. 374)*. Ἔπειτα ἀπὸ ὅλας τὰς κορυφάς του φέρομεν τὰς καθέτους ΒΙ, ΓΛ, ... ἐπὶ τὴν διαγώνιον αὐτήν, αἱ ὁποῖαι χωρίζουν τὸ πολύγωνον εἰς τρίγωνα καὶ τραπέζια. Μετροῦμεν τὰ μήκη τῶν καθέτων ΖΘ, ΒΙ, ... καὶ τὰ μήκη ΑΘ, ΘΙ, ... , τὰ ὁποῖα ὁρίζουν οἱ πόδες τῶν καθέτων ἐπὶ τῆς διαγωνίου ΑΔ. Ἔπειτα ὑπολογίζομεν τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων καὶ τῶν τραπεζίων, ποὺ ἐσχηματίσθησαν. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων καὶ τῶν τραπεζίων αὐτῶν εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δοθέντος πολυγώνου. Ἡ μέθοδος αὐτὴ ἐφαρμόζεται συνήθως ἐπὶ τοῦ ἐδάφους κατὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς ἀγροῦ κλπ.



Σχ. 374.

532. Ἰδιαίτεραι περιπτώσεις: Πρόβλημα. *Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς πολυγώνου, περιγεγραμμένου περὶ ἕνα κύκλον ἀκτῖνος ρ.*

Λύσις. Ἔστω ἕνα πολύγωνον ΑΒΓΔΕ περιγεγραμμένον περὶ ἕνα κύκλον Ο *(Σχ. 375)*. Ἂν φέρωμεν τὰς εὐθείας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ... τὸ πολύγωνον χωρίζεται εἰς τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν βάσεις ἀντιστοίχως τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου καὶ ὡς ὕψη τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ κύκλου. Ἑπομένως, ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Ε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου, θὰ εἶναι



Σχ. 375.

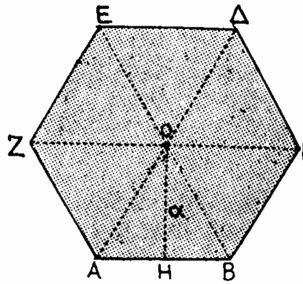
$$\text{Ε} = \text{ἐμβ. τριγ. ΟΑΒ} + \text{ἐμβ. τριγ. ΟΒΓ} + \text{ἐμβ. τριγ.ΟΓΔ} + \cdots$$
$$= \frac{1}{2}\,\text{ΑΒ}.\rho + \frac{1}{2}\,\text{ΒΓ}.\rho + \frac{1}{2}\,\text{ΓΔ}.\rho + \cdots$$
$$= \frac{1}{2}(\text{ΑΒ} + \text{ΒΓ} + \text{ΓΔ} + \cdots).\rho.$$

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ 2τ τὴν περίμετρον ΑΒ+ΒΓ+···· τοῦ πολυγώνου, θὰ εἶναι $\text{Ε} = \frac{1}{2}\cdot 2\tau\cdot\rho$ ἢ $\boxed{\text{Ε} = \rho\tau}$.

Ὥστε: ***Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς πολυγώνου, περιγεγραμμένου περὶ κύκλον, εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς ἡμιπεριμέτρου του ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου.***

533. Θεώρημα. ***Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς περιμέτρου του ἐπὶ τὸ ἀπόστημά του.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω ἕνα κανονικὸν πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ *(Σχ.376)*, ΑΒ ἡ πλευρά του, ΟΗ=α τὸ ἀπόστημά του καὶ ν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν του.



Σχ. 376.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι

ἐμβ.ΑΒΓΔΕΖ$=\frac{1}{2}$περιμ.×ἀπόστημα.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν φέρωμεν τὰς ἀκτῖνας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ,... τὸ πολύγωνον χωρίζεται εἰς ν ἴσα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΒΓ... Τὰ τρίγωνα αὐτὰ ἔχουν ὡς βάσιν μίαν πλευρὰν ΑΒ=ΒΓ=ΓΔ=$\cdots$ τοῦ πολυγώνου καὶ ὕψος τὸ ἀπόστημα ΟΗ. Ἐπειδὴ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑνὸς τριγώνου, π.χ. τοῦ ΟΑΒ, εἶναι $\frac{ΑΒ\times ΟΗ}{2}$, τὸ ἐμβαδὸν τῶν ν ἴσων τριγώνων θὰ εἶναι $\frac{ΑΒ\times ΟΗ}{2}\times ν$ ἢ $\frac{1}{2}ΑΒ\times ν\times ΟΗ$.

Δηλ. θὰ εἶναι ἐμβ. πολυγ.ΑΒΓΔ$\cdots=\frac{1}{2}ΑΒ\times ν\times ΟΗ$.

Ἐπειδὴ ΑΒ×ν παριστάνει τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου καὶ ΟΗ τὸ ἀπόστημά του, ἡ ἰσότης (1) γράφεται:

ἐμβ. πολυγ. ΑΒΓΔ....$=\frac{1}{2}$ περιμέτρου×ἀπόστημα.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κανονικοῦ....***

534. Ἐφαρμογαί. Στηριζόμενοι εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου, συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου. Οὕτω:

1ον. Διὰ τὸ ***ἰσόπλευρον τρίγωνον*** ἔχομεν

$$E=\frac{1}{2}\text{περίμετρ.}\times\text{ἀπόστημα}=\frac{1}{2}\times 3\lambda_3\times\alpha_3=\frac{1}{2}.3R\sqrt{3}\times\frac{R}{2},$$

ἄρα $$\mathbf{E=\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}}.$$

2ον. Διὰ τὸ ***τετράγωνον*** ἔχομεν

$$E = \frac{1}{2}\ \text{περίμετρ.} \times \text{ἀπόστημα} = \frac{1}{4} \times 4\lambda_4 \times \alpha_4 = \frac{1}{2} \times 4\, R\sqrt{2} \times \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

ἄρα

$$\boxed{E = 2R^2}.$$

3ον. Διὰ τὸ ***κανονικὸν ἑξάγωνον*** ἔχομεν

$$E = \frac{1}{2}\ \text{περίμετρ.} \times \text{ἀπόστημα} = \frac{1}{2} \times 6\lambda_6 \times \alpha_6 = \frac{1}{2} \times 6.R \times \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

ἄρα

$$\boxed{E = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}}.$$

Ἀσκήσεις: 1568, 1569, 1570, 1571, 1572, 1573.

Ἀσκήσεις

Ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου: ***Α' Ὁμάς*. 1497.** (1533). Τὸ μῆκος ἑνὸς ὀρθογωνίου κήπου εἶναι 84,6 μ. καὶ τὸ πλάτος του εἶναι τὰ δύο τρίτα τοῦ μήκους του. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδόν του καὶ ἡ ἀξία του πρὸς 12000 δρχ. τὸ στρέμμα.

1498. (1534). Θέλομεν νὰ περιβάλλωμεν ἕνα κῆπον, ὁ ὁποῖος ἔχει μῆκος 60 μέτρα καὶ πλάτος 48,20 μέτρα μὲ συρματόπλεγμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ὕψος 1,20 μ. Πόσον θὰ κοστίσῃ τὸ συρματόπλεγμα, ἐὰν τὸ τετραγωνικὸν μέτρον ἀξίζῃ 25 δρ.

1499. (1535). Ἡ πλευρὰ ἑνὸς τετραγώνου εἶναι 35,40 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει διπλασίαν πλευράν; Κατὰ πόσον εἶναι μεγαλύτερον τὸ δεύτερον τετράγωνον ἀπὸ τὸ πρῶτον;

1500. (1536). Ἕνας τετραγωνικὸς κῆπος περιβάλλεται μὲ συρματόπλεγμα, τὸ ὁποῖον ἐκόστισε 1152 δρ. πρὸς 1,80 δρ. τὸ μέτρον. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κήπου.

1501. (1537). Μία αὐλὴ ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶναι 24,60 μ. καὶ τὸ πλάτος 18,20 μ. Θέλομεν νὰ στρώσωμεν τὴν αὐλὴν αὐτὴν μὲ τετραγωνικὰ πλακάκια πλευρᾶς 0,25 μ. Πόσα πλακάκια θὰ χρειασθῶμεν;

***Β' Ὁμάς*. 1502.** (1538). Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι 1 τετραγ. χιλιόμετρον. Τὸ μῆκος του εἶναι πενταπλάσιον τοῦ πλάτους. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις του.

1503. (1539). Ἕνα φύλλον χάρτου σχήματος ὀρθογωνίου ἔχει περίμετρον 1,92 μ. Ἀπὸ κάθε πλευράν του ἀποκόπτομεν μίαν ταινίαν χάρτου πλάτους 0,02 μ. Κατὰ πόσον ἠλαττώθη τὸ ἐμβαδὸν τοῦ φύλλου;

1504. (1540). Ἡ περίμετρος ἑνὸς ὀρθογωνίου τάπητος εἶναι 8,50 μ. καὶ ἡ διαφορὰ τῶν διαστάσεών του 0,75 μ. Ἐὰν καλύψωμεν τὸν τάπητα αὐτὸν μὲ ὕφασμα πλάτους 0,90 μ., πόσον θὰ κοστίσῃ τὸ ὕφασμα πρὸς 250 δρ. τὸ μέτρον;

1505. (1541). Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κήπου ὀρθογωνίου εἶναι 2504 τετρ. μέτρα. Ἡ μεγαλυτέρα πλευρά του εἶναι 84 μ. Ἂν θέλωμεν νὰ αὐξήσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κήπου κατὸ 200 τ.μ., χωρὶς νὰ μεταβάλλωμεν τὸ μῆκος του, κατὰ πόσον πρέπει νὰ αὐξήσωμεν τὸ πλάτος του;

1506. (1542). Τὸ μῆκος ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι τριπλάσιον τοῦ πλάτους

του. Ἐὰν αὐξήσωμεν τὰς διαστάσεις κατὰ τὸ ἕνα τέταρτον αὐτῶν, τὸ ἐμβαδόν του αὐξάνει κατὰ 5292 τ.μ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀρχικαὶ καὶ αἱ νέαι διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου.

1507. (1543). Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραγώνου εἶναι 7225 τ.μ. Ἐὰν ἐλαττώσωμεν τὰς πλευράς του κατὰ 15 μ. πόσον θὰ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ νέου τετραγώνου;

1508. (1544). Ἐὰν αὐξήσωμεν τὴν μίαν πλευρὰν ἑνὸς τετραγώνου κατὰ 2,80 μ. καὶ τὴν ἄλλην κατὰ 1,80 μ. τὸ ἐμβαδόν του αὐξάνει κατὰ 38,16 τ.μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου.

1509. (1545). Ἕνας ὀρθογώνιος ἀγρὸς ἔχει μῆκος 420,40 μ. καὶ πλάτος 385,75 μ. Πόση θὰ ἦτο ἡ πλευρὰ ἑνὸς ἰσοδυνάμου τετραγώνου;

1510. (1546). Ἕνα ὀρθογώνιον ἔχει μῆκος 75,60 μ. καὶ πλάτος 47,25 μ. Κατὰ πόσον πρέπει νὰ ἐλαττώσωμεν τὸ μῆκος καὶ νὰ αὐξήσωμεν τὸ πλάτος του διὰ νὰ λάβωμεν ἕνα ἰσοδύναμον τετράγωνον.

Γ' Ὁμάς. **1511.** (1547). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι αἱ διαστάσεις του εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 4 καὶ 5 καὶ τὸ ἐμβαδόν του 2880 τ.μ.

1512. (1548). Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν διαγώνιόν του 17 μ. καὶ τὸ ἐμβαδόν του 120 τ.μ.

1513. (1549). Αἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι 10 μ. καὶ 18 μ. Ἐὰν ἐλαττώσωμεν τὴν πρώτην κατὰ 4 μ., πόσον πρέπει νὰ αὐξήσωμεν τὴν δευτέραν διὰ νὰ λάβωμεν ἕνα δεύτερον ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον μὲ τὸ πρῶτον;

1514. (1550). Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου, ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ ἐμβαδόν του 360 τ.μ. καὶ ὅτι τὸ ἐμβαδόν του δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἐλαττώσωμεν τὴν βάσιν του κατὰ 10 μέτρα καὶ αὐξήσωμεν τὸ ὕψος του κατὰ 6 μέτρα.

1515 (1551). Αἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι α καὶ β. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου ὁμοίου πρὸς τὸ πρῶτον, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ περίμετρός του καὶ τὸ ἐμβαδόν του ἐκφράζονται μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Ἐφαρμογή: $\alpha=5$, $\beta=5$.

1516. (1552). Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου, ἰσοδυνάμου πρὸς τετράγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν 99 μ. καὶ ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία εἶναι τὰ $\frac{9}{16}$ τῆς ἄλλης.

1517. (1553). Ἐὰν αἱ πλευραὶ τετραγώνου αὐξηθοῦν κατὰ 3 μ. τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶναι 2,26 φορὰς μεγαλύτερον τοῦ ἀρχικοῦ. Πόση εἶναι ἡ πλευρὰ αὐτοῦ;

Δ' Ὁμάς. **1518.** (1554). Νὰ ἐγγραφῇ ἕνα τετράγωνον εἰς ἕνα κύκλον ἀκτῖνος 7,5 έκ. καὶ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδόν του, ἡ περίμετρός του καὶ ἡ διαγώνιός του.

1519. (1555). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραγώνου, περιγεγραμμένου περὶ κύκλον ἀκτῖνος 0,80 μ.

1520. (1556). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ ἑνὸς τετραγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου, τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν αὐτον κύκλον, εἶναι 30 τ.μ.

Ε' Ὁμάς. **1521.** (1557). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραγώνου

εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τετραγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν τὴν διαγώνιον τοῦ πρώτου τετραγώνου.

1522. (1558). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἀπὸ ὅλα τὰ ὀρθογώνια, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν περίμετρον, τὸ τετράγωνον ἔχει τὴν μεγαλυτέραν ἐπιφάνειαν.

1523. (1559). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι κάθε ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοδύναμον μὲ δοθὲν τετράγωνον, ἔχει περίμετρον μεγαλυτέραν τῆς περιμέτρου τοῦ τετραγώνου.

Ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου. 1524. (1560). Εἰς ἕνα παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι ΑΒ=1,25 μ. ΒΓ=2,70 μ. Ἐὰν ἡ ἀπόστασις τῶν παραλλήλων πλευρῶν ΒΓ καὶ ΑΔ εἶναι 1,64 μ., νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν παραλλήλων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΓΔ.

1525. (1561). Κάθε εὐθεῖα, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων ἑνὸς παραλληλογράμμου, διαιρεῖ τὸ παραλληλόγραμμον εἰς δύο τραπέζια ἴσα καὶ ἑπομένως ἰσοδύναμα.

1526. (1562). Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον μιᾶς διαγωνίου ἑνὸς παραλληλογράμμου φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς πλευράς του. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι δύο ἀπὸ τὰ σχηματισθέντα παραλληλόγραμμα εἶναι ἰσοδύναμα.

1527. (1563). Ἀπὸ τὰς κορυφὰς ἑνὸς τετραπλεύρου φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς διαγωνίους του. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχηματιζομένου παραλληλογράμμου εἶναι διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τετραπλεύρου.

1528. (1564). Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἑνὸς τετραπλεύρου εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τετραπλεύρου.

Ἐμβαδὸν τριγώνου. ***Α' Ὁμάς.*** **1529.** (1565). Ἡ περίμετρος ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι 187,50 μέτρα καὶ ἡ βάσις του 52 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος του καὶ τὸ ἐμβαδόν του.

1530. (1466). Ἡ περίμετρος ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι 2169 μέτρ. καὶ ἡ βάσις εἶναι τὰ $^2/_9$ τῆς περιμέτρου. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου.

1531. (1567). Ἡ ὑποτείνουσα ἑνὸς ἰσοσκελοῦς καὶ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι 8 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδόν του.

1532. (1568). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ ἑνὸς τετραγώνου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοδύναμον μὲ ἕνα τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν 17,375 μέτρα καὶ ὕψος 1,39 μέτρ.

1533. (1569). Ἕνας κτηματίας ἀνταλλάσσει ἕνα τριγωνικὸν ἀγρόν, ὁ ὁποῖος ἔχει βάσιν 184 μ. καὶ ὕψος 38 μ. μὲ ἕνα ὀρθογώνιον ἀγρόν, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶναι τριπλάσιον τοῦ ὕψους τοῦ τριγώνου. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ βάσις τοῦ ὀρθογωνίου.

1534. (1570). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος καὶ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ ὑποτείνουσά του εἶναι 20 μ. καὶ μία ἀπὸ τὰς καθέτους πλευρὰς ἴση μὲ 14 μέτρ.

1535. (1571). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου μία κάθετος πλευρὰ εἶναι 15 ἑκ. καὶ τὸ ὕψος πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν εἶναι 11 ἑκ.

Β' Ὁμάς. **1536.** (1572). Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου εἶναι 300 τ.μ. καὶ ἡ βάσις του 40 μ. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος του.

1537. (1573). Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου εἶναι 1134 τ.μ. Τὸ ὕψος του εἶναι τὰ $4/5$ τῆς βάσεως. Νὰ ὑπολογισθοῦν ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου.

1538. (1574). Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι 4675 τ.μ. Ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι μία ἀπὸ τὰς καθέτους πλευράς του εἶναι 85 μ., νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἄλλη κάθετος πλευρά, ἡ ὑποτείνουσα καὶ τὸ ὕψος του $υ_α$.

Γ' Ὁμάς. **1539.** (1575). Δίδεται ἕνα τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ λαμβάνομεν ἕνα τμῆμα $ΑΕ = \frac{2}{3}ΑΒ$ καὶ ἐπὶ τῆς ΑΔ ἕνα τμῆμα $ΑΖ = \frac{3}{4}ΑΔ$ καὶ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΕΖ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πενταγώνου ΕΒΓΔΖ.

1540. (1576). Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ καὶ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ τὴν ἀκτῖνα R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

1541. (1577). Δύο τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος, ἔχουν βάσεις β καὶ β' τοιαύτας ὥστε $β = 0{,}75β'$. Ἐὰν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, ποὺ ἔχει βάσιν β, εἶναι 28 τ.μ. πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἄλλου;

1542. (1578). Ἕνα τρίγωνον ἔχει βάσιν β καὶ ὕψος υ καὶ ἕνα ἄλλο τρίγωνον ἔχει βάσιν $β' = \frac{2}{3}β$ καὶ ὕψος $υ' = \frac{5}{6}υ$. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πρώτου εἶναι 18 τ.μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δευτέρου;

Δ' Ὁμάς. **1543.** (1579). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διάμεσος ἑνὸς τριγώνου διαιρεῖ τὸ τρίγωνον εἰς δύο ἰσοδύναμα τρίγωνα.

1544. (1580). Νὰ χωρισθῇ δοθὲν τρίγωνον εἰς 5 ἰσοδύναμα τρίγωνα μὲ τὴν βοήθειαν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὴν αὐτὴν καρυφήν.

1545. (1581) Ποῖος εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κορυφῶν τῶν τριγώνων, τὰ ὁποῖα εἶναι ἰσοδύναμα καὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν;

Ε' Ὁμάς. **1546.** (1582). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι 27 μ.

1547. (1583). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ καὶ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶναι 65 μ.

1548. (1584). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ καὶ τὸ ὕψος ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 925 τ.μ.

ΣΤ' Ὁμάς. **1549.** (1585). Αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου εἶναι 5 μ., 6 μ., 7 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδόν του καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

1550. (1586). Αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου εἶναι 13 μέτρ., 37 μέτρ. καὶ 40 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθοῦν:

1ον. τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου.

2ον. τὰ ὕψη του.

3ον. τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου, ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ὕψος του 4 μ. καὶ ὅτι ἡ βάσις τοῦ ὀρθογωνίου κεῖται ἐπὶ τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς τοῦ τριγώνου.

1551. (1587). Αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι 40 ἑκ., 51 ἑκ., 77 ἑκ.

Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδόν του, ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

1552. (1588). Διὰ νὰ ἐκφράζωνται μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου καὶ ἡ περίμετρός του πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου, τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον, νὰ εἶναι ἴσαι μὲ 2.

1553. (1589). Ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ δίδονται αἱ κάθετοι πλευραὶ ΑΒ=15 ἑκ., ΑΓ=8 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ περίμετρός του, τὸ ἐμβαδόν του καὶ αἱ ἀκτῖνες τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ παρεγγεγραμμένων κύκλων.

Ἐμβαδὸν ρόμβου. 1554. (1590). Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ρόμβου εἶναι Ε. Αἱ διαγώνιοι ἑνὸς ἄλλου ρόμβου εἶναι ἡ μία τὰ $^2/_8$ μιᾶς διαγωνίου τοῦ πρώτου ρόμβου καὶ ἡ ἄλλη τὰ $^5/_6$ τῆς ἄλλης διαγωνίου τοῦ πρώτου. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δευτέρου ρόμβου.

1555. (1591). Ἑνὸς ρόμβου ΑΒΓΔ ἡ γωνία Α εἶναι 60°, ἡ διαγώνιος ΑΓ=12 ἑκ. καὶ ἡ πλευρὰ ΑΒ=16 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδόν του.

1556. (1592). Αἱ διαγώνιοι ἑνὸς ρόμβου εἶναι 16 ἑκ. καὶ 12 ἑκ. καὶ ἡ πλευρά του 10 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν του.

1557. (1593). Ἡ πλευρὰ ἑνὸς ρόμβου εἶναι 16 μέτρα καὶ δύο διαδοχικαὶ πλευραί του σχηματίζουν γωνίαν 45°. Νὰ ὑπολογισθῇ :

1ον. τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ρόμβου.

2ον. ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

Ἐμβαδὸν τραπεζίου. *Α' Ὁμάς.* **1558.** (1594). Αἱ βάσεις ἑνὸς τραπεζίου εἶναι 95 μέτρα καὶ 80 μέτρα καὶ τὸ ὕψος του 10,4 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του ; Πόση θὰ εἶναι ἡ βάσις ἑνὸς ἰσοδυνάμου τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὸ τραπέζιον ;

1559. (1595). Αἱ βάσεις ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τραπεζίου εἶναι 100 μέτρα καὶ 40 μέτρα καὶ ἡ μία ἀπὸ τὰς μὴ παραλλήλους πλευράς του 50 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδόν του.

1560. (1596). Ἡ μεγάλη βάσις ΑΒ ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τραπεζίου ΑΒΓΔ εἶναι 100 μέτρα, ἡ μὴ παράλληλος πλευρὰ ΑΔ=20 μέτρα καὶ γων.Α=γων.Β=60°. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου.

1561. (1597). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν καὶ ἡ περίμετρος ἑνὸς ὀρθογωνίου τραπεζίου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ πλαγία πλευρά του εἶναι 24 μέτρα καὶ ἴση μὲ τὴν μεγάλην βάσιν του καὶ σχηματίζει μὲ αὐτὴν γωνίαν 60°.

1562. (1598). Τὸ ὕψος ἑνὸς τραπεζίου εἶναι 54 μέτρα, ἡ διαφορὰ τῶν βάσεών του 25 μέτρα καὶ ἡ μία ἀπὸ τὰς βάσεις του εἶναι τὸ τρίτον τῆς ἄλλης. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου.

Β' Ὁμάς. **1563.** (1599). Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τραπεζίου εἶναι 6308 τ. μέτρα, τὸ ὕψος του 38 μέτρα καὶ ἡ μία ἀπὸ τὰς βάσεις του 228 μέτρα. Πόση εἶναι ἡ ἄλλη βάσις του ;

1564. (1600). Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τραπεζίου εἶναι 361 τ.μ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος του, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι εἶναι ἴσον μὲ τὴν διάμεσόν του.

1565. (1601). Τὸ ὕψος ἑνὸς τραπεζίου εἶναι 84 μέτρα καὶ τὸ ἐμβαδόν του 4896 τ.μ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ βάσεις τοῦ τραπεζίου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ μεγάλη βάσις εἶναι κατὰ 54 μέτρα μεγαλυτέρα τῆς μικρᾶς βάσεως.

1566. (1602). Ἡ μεγάλη βάσις ἑνὸς τραπεζίου εἶναι τριπλασία τῆς μικρᾶς

βάσεως καὶ τὸ ὕψος του εἶναι 52 μέτρα. Ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν ἴσην μὲ τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ βάσεις τοῦ τραπεζίου.

1567. (1603). Αἱ πλευραὶ ἑνὸς τραπεζίου εἶναι 10 μέτρα, 12 μέτρα, 15 μέτρα, 17 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδόν του.

Ἐμβαδὸν τυχόντος πολυγώνου. **1568.** (1604). Ἕνας ἀγρὸς ἔχει σχῆμα τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. Ἡ γωνία Α εἶναι ὀρθή, ἡ πλευρὰ ΑΒ=216 μέτρα, ἡ πλευρὰ ΑΔ=283 μέτρα καὶ αἱ πλευραὶ ΒΓ=ΓΔ=300 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἀγροῦ αὐτοῦ.

1569. (1605). Ἑνὸς τετραπλεύρου ΑΒΓΔ δίδονται αἱ πλευραὶ ΑΒ=224 μ., ΑΔ=168 μ., ΓΔ=490 μ. καὶ αἱ διαγώνιοι ΑΓ=518 μ. καὶ ΒΔ=280 μ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ γωνίαι Α καὶ Δ εἶναι ὀρθαί.

2ον, Νὰ προσδιορισθῇ ἡ φύσις καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου αὐτοῦ.

1570. (1606). Συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R ἑνὸς κύκλου, νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν κύκλον αὐτὸν κανονικῶν: ὀκταγώνου, δωδεκαγώνου, δεκαγώνου, πενταγώνου.

1571. (1607). Νὰ ὑπολογισθοῦν κατὰ προσέγγισιν 0,01 αἱ ἀκτῖνες δύο ὁμοκέντρων περιφερειῶν, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι αἱ ἀκτῖνες των διαφέρουν κατὰ 1 μ. καὶ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου, τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν μεγαλύτερον κύκλον, εἶναι μεγαλύτερον κατὰ 6 τετρ. μέτρ. ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου, τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν μικρότερον κύκλον.

1572. (1608). Ἡ πλευρὰ ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγώνου εἶναι α. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν περίμετρον μὲ τὸ ἑξάγωνον καὶ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑξαγώνου εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου.

1573 (1609). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγώνου, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἐμβαδῶν τῶν κανονικῶν ἑξαγώνων, τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου περὶ κύκλον ἀκτῖνος R=1,25 μ.

3. Ἐμβαδὸν κύκλου, κυκλικοῦ τομέως

535. Ὁρισμός. ***Ἐμβαδὸν κύκλου*** *ὀνομάζομεν τὸ ὅριον πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου, ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον αὐτόν, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν του διπλασιάζεται ἀπεριορίστως.*

Παραδεχόμεθα, ὅτι τὰ ἐμβαδὰ τῶν διαδοχικῶν πολυγώνων, τὰ ὁποῖα λαμβάνομεν, διπλασιάζοντες ἀπεριορίστως τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν των, ἔχουν ἕνα ὅριον καὶ ὅτι τὸ ὅριον αὐτὸ εἶναι τὸ αὐτό, οἱονδήποτε καὶ ἐὰν εἶναι τὸ πολύγωνον, τὸ ὁποῖον ἐγγράφομεν ἀρχικῶς εἰς τὸν κύκλον.

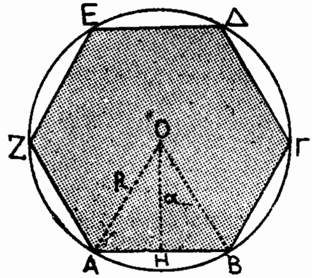
536. Θεώρημα. ***Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κύκλου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς περιφερείας του ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα του.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω ὁ κύκλος O καὶ R ἡ ἀκτίς του.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\text{ἐμβ. κύκλου} = \frac{1}{2}\,\text{περιφερείας} \times \text{ἀκτῖνα},$$

Ἀπόδειξις: Ἐγγράφομεν εἰς τὸν κύκλον O ἕνα κανονικὸν πολύγωνον ΑΒΓΔ.... μὲ ν πλευράς.



Σχ. 377.

Γνωρίζομεν, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου, ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς περιμέτρου του ἐπὶ τὸ ἀπόστημά του (§ 533). Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ E_1 τὸ ἐμβαδόν, μὲ Π_1 τὴν περίμετρον καὶ μὲ α_1 τὸ ἀπόστημα τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔ...., θὰ εἶναι $E_1 = \frac{\Pi_1 \times \alpha_1}{2}$.

Ἐὰν διπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου, τὸ νέον πολύγωνον θὰ ἔχῃ ἕνα ἐμβαδὸν E_2, μίαν περίμετρον Π_2 καὶ ἕνα ἀπόστημα α_2 καὶ θὰ εἶναι πάλιν $E_2 = \frac{\Pi_2 \times \alpha_2}{2}$.

Ἐὰν συνεχίσωμεν νὰ διπλασιάζωμεν ἀπεριορίστως τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου, αἱ περίμετροι τῶν διαδοχικῶν πολυγώνων θὰ ἔχουν ὅριον τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, τὰ ἀποστήματά των θὰ ἔχουν ὅριον τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου καὶ τὰ ἐμβαδά των θὰ ἔχουν ὅριον, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς § 535, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου.

Θὰ εἶναι λοιπόν·

$$\boxed{\textbf{ἐμβ. κύκλου} = \frac{\text{περιφέρεια} \times \text{ἀκτῖνα}}{2}} \quad (1)$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κύκλου....***

537. Τύπος τοῦ ἐμβαδοῦ κύκλου. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ E τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κύκλου καὶ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸν τύπον (1) τὴν περιφέρειαν μὲ $2\pi R$ καὶ τὴν ἀκτῖνα μὲ R, λαμβάνομεν τὸν τύπον

$$E = \frac{1}{2} \times 2\pi R \times R \quad \text{ἢ} \quad \boxed{E = \pi R^2}$$

ὁ ὁποῖος δίδει τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κύκλου.

538. Πόρισμα I. ***Τὰ ἐμβαδὰ δύο κύκλων, ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ἀκτίνων των.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν E καὶ E′ τὰ ἐμβαδὰ δύο κύκλων, ἀκτίνων ἀντιστοίχως R καὶ R′.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\frac{E}{E'}=\frac{R^2}{R'^2}$.

Ἀπόδειξις: Γνωρίζομεν, ὅτι $E=\pi R^2$ καὶ $E'=\pi R'^2$.
Διαιροῦμεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\frac{E}{E'}=\frac{\pi R^2}{\pi R'^2} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\frac{E}{E'}=\frac{R^2}{R'^2}}$$

Ἀσκήσεις: 1574, 1575, 1576, 1579, 1580, 1583, 1584, 1585.

539. Κυκλικὸς τομεύς. Γνωρίζομεν (§ 76), ὅτι: *τὸ μέρος τοῦ κύκλου, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ ἑνὸς τόξου καὶ τῶν ἀκτίνων, αἱ ὁποῖαι καταλήγουν εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τόξου, λέγεται* ***κυκλικὸς τομεύς.*** Π.χ. ὁ κυκλικὸς τομεὺς ΟΑΒΟ *(Σχ. 378).*

Ἡ ΟΑ εἶναι ***ἀκτὶς τοῦ κυκλικοῦ τομέως,*** τὸ τόξον ΑΒ εἶναι ***ἡ βάσις αὐτοῦ*** καὶ ἡ γωνία ΑΟΒ εἶναι ἡ ***γωνία τοῦ κυκλικοῦ τομέως.***

540. Πρόβλημα. ***Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κυκλικοῦ τομέως μ^0 καὶ ἀκτῖνος R.***

Λύσις. Ἕνας κύκλος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς κυκλικὸς τομεὺς 360^0. Θὰ εἶναι λοιπὸν

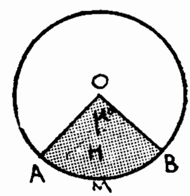
Ἐμβαδὸν τομέως 360^0 ἢ κύκλου $=\pi R^2$

Ἐμβαδὸν τομέως 1^0 $=\frac{\pi R^2}{360}$

Ἐμβαδὸν τομέως μ^0 $=\frac{\pi R^2\mu}{360}$

Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ Ε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τομέως μ^0, θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον

$$\boxed{E=\frac{\pi R^2\mu}{360}}.$$



Σχ. 378.

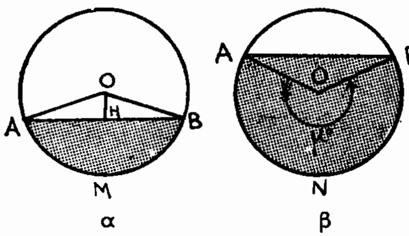
541. Πόρισμα. Ἐπειδὴ ἡ παράστασις $\frac{\pi R^2\mu}{360}$ δύναται νὰ γραφῇ: $\frac{2\pi R\mu}{360}\times\frac{R}{2}$, δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, ὅτι:

Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κυκλικοῦ τομέως εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τοῦ τόξου του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος του.

542. Κυκλικὸν τμῆμα. *Τὸ μέρος τοῦ κύκλου, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ ἑνὸς τόξου καὶ τῆς χορδῆς του, λέγεται* ***κυκλικὸν τμῆμα.*** Π.χ. τὸ μέρος ΑΜΒΑ εἶναι ἕνα κυκλικὸν τμῆμα *(Σχ. 379α).*

Ἡ ΟΑ εἶναι ἡ ***ἀκτὶς*** τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΑΜΒΑ καὶ ἡ γωνία ΑΟΒ εἶναι ἡ ***γωνία*** τοῦ κυκλικοῦ αὐτοῦ τμήματος.

543. Ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τμήματος. Ἕνα κυκλικὸν τμῆμα, ὅπως τὸ ΑΜΒΑ *(Σχ. 379α)* δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς διαφορὰ μεταξὺ τοῦ κυκλικοῦ τομέως ΟΑΜΒΟ καὶ τοῦ τριγώνου ΟΑΒ. Θὰ εἶναι λοιπὸν



Σχ. 379.

Ἐμβ. κυκλ. τμ. ΑΜΒΑ=
=ἐμβ. κυκλ. τομ. ΟΑΜΒΟ—
—ἐμβ. τριγ. ΟΑΒ.

Ἐὰν τὸ κυκλικὸν τμῆμα εἶναι μεγαλύτερον ἡμικυκλίου, ὅπως τὸ ΑΒΝΑ *(Σχ. 379β)* θὰ εἶναι

ἐμβ.ΑΒΝΑ=ἐμβ. κυκλ. τομ. ΟΑΝΒΟ+ἐμβ. τριγ. ΟΑΒ.

Ἀσκήσεις: 1591, 1592, 1593, 1594, 1595, 1596, 1597.

Ἀσκήσεις

Ἐμβαδὸν κύκλου. *Α' Ὁμάς.* **1574.** (1610). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κύκλου, ἂν γνωρίζωμεν :

1ον. τὴν ἀκτῖνα του 0,25 μ.

2ον. τὴν διάμετρόν του 25,13272 μ.

1575. (1611). Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κύκλου εἶναι 9,42477 μ. Πόση εἶναι ἡ ἀκτίς του καὶ πόσον τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του;

1576. (1612). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου, τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος 3,20 μ. καὶ τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τῶν τεσσάρων μερῶν τοῦ κύκλου, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐκτὸς τοῦ τετραγώνου.

1577. (1613). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τετράγωνον πλευρᾶς 48 ἑκ.

1578. (1614). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τετράγωνον πλευρᾶς 50 ἑκ.

Β' Ὁμάς. **1579.** (1615). Ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου εἶναι 4 μ. Πόση θὰ εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει τετραπλασίαν ἐπιφάνειαν τοῦ πρώτου.

1580. (1616). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου, ὁ ὁποῖος εἶναι ἰσοδύναμος μὲ δύο ἄλλους κύκλους ἀκτίνων 3,40 μ. καὶ 5,60 μ.

1581. (1617). Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος εἶναι ἰσοδύναμος μὲ ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς 3,5 μ.

1582. (1618). Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου, ὁ ὁποῖος εἶναι ἰσοδύναμος μὲ ἕνα κανονικὸν ἑξάγωνον 100 τ.μ.

Γ' Ὁμάς. **1583.** (1619). Εἰς ἕνα κύκλον ἀκτῖνος 0,85 μ. ἐγγράφομεν ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν ἐμβαδῶν τοῦ κύκλου καὶ τοῦ τριγώνου αὐτοῦ.

1584. (1620). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κύκλου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον αὐτὸν εἶναι 12,40 τ.μ.

1585. (1621). Εἰς ἕνα κύκλον ἀκτῖνος 0,45 μ. ἐγγράφομεν ἕνα κανονικὸν ἑξάγωνον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ἑξαγώνου καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου.

1586. (1622). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κύκλου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν ἐμβαδῶν τοῦ κύκλου καὶ τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου, τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον, εἶναι 0,625 τ.μ.

1587. (1623). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κύκλου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ περιγεγραμμένου τετραγώνου εἶναι 2,82 τ.μ.

1588. (1624). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγώνου, περιγεγραμμένου περὶ περιφέρειαν, τῆς ὁποίας τὸ μῆκος εἶναι 7,854 μ.

1589. (1625). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν ἐμβαδῶν τῶν κανονικῶν ἑξαγώνων, ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου, εἶναι 68,28 τ.μ.

1590. (1626). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς στεφάνης, τῆς ὁριζομένης ὑπὸ δύο ὁμοκέντρων περιφερειῶν, εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει διάμετρον μίαν χορδὴν τῆς μεγάλης περιφερείας, ἡ ὁποία ἐφάπτεται τῆς μικρᾶς περιφερείας.

Ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως κλπ. ***Α' Ὁμάς.*** **1591.** (1627). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κυκλικοῦ τομέως 20° καὶ ἀκτῖνος 20 ἑκ.

1592. (1628). Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κυκλικοῦ τομέως 50° εἶναι 15,708 τετρ. ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει ὁ τομεύς.

1593. (1629). Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κυκλικοῦ τομέως ἀκτῖνος 4 ἑκ. εἶναι 14 τετρ. ἑκ. Πόσων μοιρῶν εἶναι ὁ τομεύς;

1594. (1630). Ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου εἶναι 4 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τμήματος, τοῦ ὁποίου τὸ τόξον εἶναι 120°.

Β' Ὁμάς. **1595.** (1631). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδόν, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τριῶν ἴσων περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται ἀνὰ δύο.

1596. (1632). Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγώνου κατασκευάζομεν ἐξωτερικῶς αὐτοῦ, ὀρθογώνια ἴσα, τῶν ὁποίων συνδέομεν τὰς ἐξωτερικὰς πλευρὰς μὲ τόξα, τὰ ὁποῖα γράφομεν μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς τοῦ ἑξαγώνου. Οὕτω τὸ ἀρχικὸν ἑξάγωνον περιβάλλεται μὲ μίαν ἐπιφάνειαν, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ 6 ὀρθογώνια καὶ 6 κυκλικοὺς τομεῖς. Ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑξαγώνου, νὰ ὑπολογισθῇ:

1ον. τὸ κοινὸν ὕψος τῶν ὀρθογωνίων, ἐὰν ἡ ἀκτὶς τοῦ ἑξαγώνου εἶναι 13 μ.

2ον. ἡ περίμετρος ὁλοκλήρου τοῦ σχήματος.

1597. (1633). Δίδεται κύκλος ἀκτῖνος 1 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ τὴν πλευράν:

1ον. τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου.

2ον. τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου.

3ον. τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν ἐπὶ τῶν ἐμβαδῶν τῶν διαφόρων σχημάτων

Α' Ὁμάς. **1598.** (1634). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν, τὰς πλευρὰς ΑΓ=β, ΑΒ=γ καὶ τὴν γωνίαν Α=45°. Ἐφαρμογή: β=10 ἑκ. καὶ γ ἴσον μὲ τὴν διαγώνιον τετραγώνου πλευρᾶς 3 ἑκ.

1599. (1635). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν, τὰς πλευρὰς ΑΓ=β, ΑΒ=γ καὶ τὴν γωνίαν Α=30°.

1600. (1636). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν, τὰς πλευρὰς ΑΓ=β, ΑΒ=γ καὶ τὴν γωνίαν Α=60°. Ἐφαρμογή: β=5 ἑκ. καὶ γ ἴσον μὲ τὸ ὕψος τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρᾶς 6 ἑκ.

1601. (1637). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, ἂν γνωρίρίζωμεν, τὰς πλευρὰς ΑΓ=β, ΑΒ=γ καὶ τὴν γωνίαν Α=150°.

Β' Ὁμάς. **1602.** (1638). Δίδεται ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ. Κατὰ ποῖον μῆκος ΓΔ πρέπει νὰ προεκτείνωμεν τὴν πλευρὰν ΒΓ, διὰ νὰ εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΔ ὀρθογώνιον; Νὰ συγκριθοῦν τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΓΑΔ.

1603. (1639). Δίδεται ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ. Προεκτείνομεν τὰς πλευράς του κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν καὶ κατὰ μήκη ἴσα μὲ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ ἄκρα τῶν προεκτάσεων αὐτῶν, εἶναι ἰσόπλευρον καὶ νὰ συγκριθῇ τὸ ἐμβαδόν του πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

1604. (1640). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν τμημάτων, τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης ὑπὸ τοῦ σημείου ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ τρίγωνον αὐτό.

1605. (1641). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου, ἐγγεγραμμένου εἰς ἡμικύκλιον, εἶναι τὰ 0,4 τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον τετραγώνου.

1606. (1642). Ἐὰν ἀπὸ τυχὸν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς παραλληλογράμμου φέρωμεν εὐθείας πρὸς τὰς κορυφάς του, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο ἀπέναντι τριγώνων εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ παραλληλογράμμου.

1607. (1643). Δίδεται ἕνα παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ ἕνα τυχὸν σημεῖον Ο τῆς διαγωνίου του ΑΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΟΑΒ καὶ ΟΑΔ εἶναι ἰσοδύναμα.

1608. (1644). Αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ ΑΔ καὶ ΒΓ ἑνὸς τραπεζίου ΑΒΓΔ τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Ο. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΟΑΓ καὶ ΟΒΔ εἶναι ἰσοδύναμα.

1609. (1645). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡς βάσεις τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς ἑνὸς τραπεζίου καὶ κοινὴν κορυφὴν τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του, εἶναι ἰσοδύναμα.

1610. (1646). Ἑνὸς τραπεζίου δίδονται αἱ βάσεις ΑΒ=α καὶ ΓΔ=β (α>β) καὶ τὸ ὕψος υ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχουν βάσεις τὰς ΑΒ καὶ ΓΔ ἀντιστοίχως καὶ κορυφὴν τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του εἶναι ἴσον μὲ $\frac{(\alpha-\beta)\upsilon}{2}$.

1611. (1647). Ἐὰν Θ εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΘΑΒ, ΘΒΓ, ΘΓΑ εἶναι ἰσοδύναμα.

1612. (1648). Ἐὰν Θ εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ καὶ Σ τυχὸν σημεῖον, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ τρία τρίγωνα ΣΘΑ, ΣΘΒ, ΣΘΓ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων.

1613. (1649). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ διάμεσοι ἑνὸς τριγώνου χωρίζουν τὸ τρίγωνον εἰς 6 ἰσοδύναμα τρίγωνα.

1614. (1650). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ· διαιροῦμεν κάθε πλευρὰν τοῦ τριγώνου αὐτοῦ εἰς ν ἴσα μέρη καὶ συνδέομεν τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως μὲ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων του. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ διαιρεῖται εἰς 3ν ἰσοδύναμα μέρη.

1615. (1651). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἡ διάμεσός του ΑΔ καὶ Ο ἕνα τυχὸν σημεῖον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΟΑΜ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἡμιάθροισμα ἢ μὲ τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων ΟΑΒ καὶ ΟΑΓ, καθόσον αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ εὑρίσκονται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΟΑ ἢ ἑκατέρωθεν αὐτῆς.

1616. (1652). Ἕνα κινητὸν διατρέχει τὴν περίμετρον ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, καθ' ὡρισμένην φοράν· προεκτείνομεν κάθε πλευρὰν τοῦ τριγώνου κατὰ τὴν φορὰν αὐτὴν καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων λαμβάνομεν μῆκος ἴσον πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτήν. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ ἄκρα τῶν προεκτάσεων αὐτῶν εἶναι ἑπταπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

1617. (1617). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι ὀξεῖαι· ἀπὸ τὰς κορυφὰς Β καὶ Γ καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΒΓ, φέρομεν τὰς καθέτους ΒΔ καὶ ΓΕ ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ ἴσας μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ ὕψους ΑΗ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἐὰν τὰ σημεῖα Ζ καὶ Θ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ΑΒΓ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων ΒΔΖ καὶ ΓΕΘ.

1618. (1654). Διαιροῦμεν τὴν περίμετρον τριγώνου εἰς ν ἴσα μέρη καὶ συνδέομεν κάθε σημεῖον τῆς διαιρέσεως μὲ τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον διηρέθη οὕτω εἰς ν ἰσοδύναμα μέρη.

1619. (1655). Δίδονται δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'ΒΓ, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν Α=2Α', τὸ ἐμβαδὸν τοῦ Α'ΒΓ εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ΑΒΓ.

1620. (1656). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, Η τὸ ὀρθόκεντρόν του καὶ μία ἡμιπεριφέρεια διαμέτρου ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὸ ὕψος ΑΑ' εἰς τὸ Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΒΓΔ εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων ΒΓΑ καὶ ΒΓΗ.

1621. (1657). Ἐπὶ ἑκάστης πλευρᾶς ἑνὸς ὀξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον τρίγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τοῦ ἀντιστοίχου ὕψους. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἐμβαδῶν τῶν ὀρθογωνίων αὐτῶν τριγώνων εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

1622. (1658). Δίδεται ἕνα τετράγωνον ΑΒΓΔ καὶ Λ, Μ, Ν, Κ, τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΔΛ, ΑΜ, ΒΝ, ΓΚ

ὁρίζουν ἕνα τετράγωνον, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι ἴσον μὲ τὸ πέμπτον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ πρώτου.

1623. (1659). Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ. Προεκτείνομεν τὰς πλευράς του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεών των λαμβάνομεν μήκη ΒΕ=ΑΒ, ΓΖ=ΒΓ, ΔΗ=ΓΔ, ΑΘ=ΔΑ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ εἶναι κορυφαὶ ἑνὸς παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι πενταπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου.

1624. (1660). Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ. Ὁ κύκλος ὁ ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἐφάπτεται τῆς ΑΒ εἰς τὸ Ε, τῆς ΒΓ εἰς τὸ Ζ καὶ τῆς ΑΓ εἰς τὸ Μ. Φέρομεν τὴν ΕΗ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΓΔ εἰς τὸ Η. Ἐπίσης φέρομεν τὴν ΖΘ παράλληλον πρὸς τὴν ΓΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΔ εἰς τὸ Θ. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. ὅτι ἐμβ. τριγ. ΑΒΓ=ΑΜ×ΓΜ.

2ον. ὅτι τὸ ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον ἔχει διαγώνιον τὴν ΘΗ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ.

1625. (1661). Δίδεται ἕνα παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ ἕνα σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται οὔτε ἐντὸς τῆς γωνίας Α, οὔτε ἐντὸς τῆς ἀπέναντι γωνίας Γ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΟΑΓ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων ΟΑΒ καὶ ΟΑΔ.

1626. (1662). Δίδεται μία γωνία xOy καὶ ἕνα σημεῖον Σ ἐπὶ τῆς διχοτόμου της. Θεωροῦμεν ὅλα τὰ τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν πλευρὰς τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας αὐτῆς καὶ μίαν μεταβλητὴν τέμνουσαν, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ Σ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἐξ ὅλων αὐτῶν τῶν τριγώνων, τὸ μικρότερον ἐμβαδὸν ἔχει τὸ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν τέμνουσαν, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΣ.

1627. (1663). Δίδεται ἕνα ἰσοσκελὲς τραπέζιον ΑΒΓΔ, μὲ βάσεις τὰς ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ ὕψος ΓΖ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου αὐτοῦ εἶναι διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΓΖ.

1628. (1664). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τραπεζίου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον μιᾶς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τῆς πλευρᾶς αὐτῆς ἀπὸ τὸ μέσον τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς.

1629. (1665). Αἱ βάσεις ἑνὸς τραπεζίου ΑΒΓΔ εἶναι αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ αἱ διαγώνιοί του ΑΓ καὶ ΒΔ τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Ο. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΟΒΓ εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων ΟΑΒ καὶ ΟΓΔ.

1630. (1666). Δίδεται ἕνα τραπέζιον ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσεις ΑΒ=7 μ., ΓΔ=2 μ. καὶ μὴ παραλλήλους πλευρὰς ΒΓ=4 μ. καὶ ΑΔ=3 μ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ ΒΓ καὶ ΑΔ εἶναι κάθετοι καὶ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου.

1631. (1667). Τὸ ἐμβαδὸν κάθε πολυγώνου, περιγεγραμμένου περὶ κύκλον, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς περιμέτρου του ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου.

1632. (1668). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραπλεύρου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου μιᾶς διαγωνίου του ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς ἄλλης ἐπὶ μίαν εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τὴν πρώτην.

1633. (1669). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραπλεύρου, τοῦ ὁποίου

αἱ διαγώνιοι σχηματίζουν μίαν γωνίαν 30° εἶναι ἴσον μὲ τὸ τέταρτον τοῦ γινομένου τῶν διαγωνίων του.

Γ' Ὁμάς. **1634.** (1670). Εἰς ἕνα κύκλον Ο ἀκτῖνος R δίδονται αἱ χορδαὶ ΑΒ=α καὶ ΒΓ=β. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ χορδὴ ΑΓ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἐφαρμογή. R=6 μ., ΑΒ=5 μ., ΒΓ=4 μ.

1635. (1671). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ μὲ πλευρὰς 3, 4, 5 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ καὶ τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν καὶ ἡ περίμετρος ἐκφράζονται μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

1636 (1672). Ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Ο ἀκτῖνος R=5 καὶ περιγεγραμμένον περὶ κύκλον Κ ἀκτῖνος ρ=2. Νὰ ὑπολογισθοῦν ἡ ἀπόστασις ΟΚ τῶν κέντρων, ἡ βάσις ΒΓ καὶ τὸ ὕψος ΑΔ τοῦ τριγώνου.

1637. (1673). Ἕνας ἀγρὸς ΑΒΓΔ ἔχει σχῆμα τετραγώνου.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρά του, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι, ἐὰν αὐξήσωμεν τὴν πλευρὰν ΑΒ κατὰ 2 μέτρα καὶ ἐὰν ἐλαττώσωμεν τὴν πλευρὰν ΒΓ κατὰ 10 μ. λαμβάνομεν ἕνα ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 8800 τ.μ.

2ον. Θέλομεν νὰ ἀνοίξωμεν ἕνα πηγάδι εἰς τὸν ἀγρὸν αὐτόν, τὸ ὁποῖον νὰ ἀπέχῃ ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ καὶ ἀπὸ τὴν διαγώνιον ΑΓ. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς διαγωνίου αὐτῆς θὰ εὑρίσκεται τὸ πηγάδι;

1638. (1674). Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ· ἐπὶ τῆς διαγωνίου του ΑΓ λαμβάνομεν ἕνα σημεῖον Σ τοιοῦτον, ὥστε $ΑΣ=\frac{ΑΓ}{6}$ καὶ ἀπὸ τὸ Σ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν διαγώνιον ΒΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Β' καὶ τὴν ΑΔ εἰς τὸ Δ'. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων ΒΓΒ' καὶ ΔΓΔ' καὶ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒ'ΓΔ' συναρτήσει τοῦ ἐμβαδοῦ Ε τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ.

1639. (1675). Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τραπεζίου, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν περίμετρόν του ἴσην μὲ 60 μέτρ. τὸ ἐμβαδόν του ἴσον μὲ 160 τ.μ. καὶ τὸ ὕψος του ἴσον μὲ 8 μέτρα.

1640. (1672). Αἱ βάσεις ἑνὸς τραπεζίου εἶναι 12 μέτρα καὶ 6 μέτρα καὶ τὸ ὕψος του 8 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἐμβαδὰ τῶν τεσσάρων τριγώνων εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται τὸ τραπέζιον ὑπὸ τῶν διαγωνίων του.

1641. (1677). Ἑνὸς τραπεζίου ΑΒΓΔ δίδονται αἱ βάσεις ΑΒ=27 μ., ΓΔ=6 μ. καὶ αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ ΒΓ=20 μ., ΔΑ=13 μ. Νὰ ὑπολογισθοῦν ἡ προβολὴ τῆς ΑΔ ἐπὶ τὴν ΑΒ, τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου καὶ τὸ ἐμβαδόν του.

1642. (1678). Ἑνὸς τραπεζίου ΑΒΓΔ δίδονται τὸ ἐμβαδὸν 8 τ.μ., τὸ μῆκος ΕΖ=λ τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του ΑΓ, ΒΔ, καὶ τὸ γινόμενον $3λ^2$ τῶν δύο βάσεών του ΑΒ, ΓΔ. Νὰ ὑπολογισθοῦν:

1ον. τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου.

2ον. τὸ ὕψος ΟΗ τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν, ἐὰν προεκτείνωμεν τὰς μὴ παραλλήλους πλευράς του μέχρι τῆς συναντήσεώς των. (ΑΒ εἶναι ἡ μεγάλη βάσις). Ἐφαρμογή: λ=7 μέτρ.

1643. (1679). Εἰς ἕνα ἰσοσκελὲς τραπέζιον ΑΒΓΔ αἱ βάσεις εἶναι ΑΒ=168 μ. καὶ ΓΔ=40 μ. καὶ αἱ ἴσαι πλευραὶ ΒΓ=ΑΔ=80 μ. Νὰ ὑπολογισθοῦν:

1ον. τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου.

2ον. τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΟΑΒ, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν, ἐὰν προεκτείνωμεν τὰς μὴ παραλλήλους πλευράς του μέχρι τῆς συναντήσεώς των εἰς τὸ σημεῖον Ο.

3ον. αἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου, ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ τρίγωνον ΟΑΒ, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμά των εἶναι 152 μ.

1644. (1680). Εἰς ἕνα κύκλον φέρομεν ἑκατέρωθεν τοῦ κέντρου Ο, δύο χορδὰς ΑΒ καὶ ΓΔ παραλλήλους, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ ΑΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ ἡ ἄλλη ΓΔ μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου, τὰ ὁποῖα εἶναι ἐγγεγραμμένα εἰς τὸν κύκλον αὐτόν. Συνδέομεν τὰ ἄκρα τῶν χορδῶν καὶ λαμβάνομεν ἕνα τραπέζιον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 10 τ.μ.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου καὶ ἡ περίμετρος τοῦ τραπεζίου.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΟΑΒ καὶ ΟΓΔ εἶναι ἰσοδύναμα.

1645. (1681). Δίδονται δύο κυρτὰ πολύγωνα· τὸ ἕνα εἶναι ἐντὸς τοῦ ἄλλου καὶ αἱ πλευραί των εἶναι παράλληλοι, μία πρὸς μίαν καὶ κεῖνται εἰς ἴσην ἀπόστασιν. Ἐὰν γνωρίζωμεν τὰς περιμέτρους 2τ καὶ 2τ′ τῶν δύο αὐτῶν πολυγώνων καὶ τὴν ἀπόστασιν α τῶν παραλλήλων πλευρῶν, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν ἐμβαδῶν των.

1646. (1682). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν τρία διαδοχικὰ σημεῖα Α, Β, Γ τοιαῦτα, ὥστε ΑΒ=α καὶ ΒΓ=β. Μὲ πλευρὰς τὰς ΑΒ καὶ ΒΓ κατασκευάζομεν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΒΓΕ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου ΑΔΕΓ.

1647. (1683). Εἰς ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι γων.Γ=90°, πλευρὰ ΑΒ=13 μ., ΒΓ=20 μ., ΓΔ=10 μ. καὶ ΔΑ=17 μ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία Α εἶναι ἀμβλεῖα καὶ νὰ ὑπολογισθοῦν: ἡ προβολὴ ΑΔ′ τῆς ΑΔ ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ κάθετος ΔΔ′ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου.

1648. (1684). Ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ δίδεται ἡ γωνία Α=120° καὶ αἱ πλευραὶ ΑΓ=α, ΑΒ=2α. Μὲ πλευρὰς τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ κατασκευάζομεν, ἐξωτερικῶς τοῦ τριγώνου, τὰ τετράγωνα ΑΒΔΕ καὶ ΑΓΖΘ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Ζ, Θ, Ε κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ περίμετρος καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πενταγώνου ΒΓΖΕΔ.

1649. (1685). Δίδεται μία ἡμιπεριφέρεια ἀκτῖνος R. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι ἴση μὲ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας αὐτῆς καὶ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑξαγώνου αὐτοῦ εἶναι μικρότερον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος ὁρίζεται ἀπὸ τὴν περιφέρειαν αὐτήν.

Δ′ Ὁμάς. **1650.** (1686). Δίδεται κύκλος Ο διαμέτρου ΑΒ=6α. Διαιροῦμεν τὴν διάμετρον ΑΒ εἰς τρία ἴση μέρη ΑΓ=ΓΔ=ΔΒ καὶ μὲ διαμέτρους τὰς ΑΓ, ΓΔ καὶ ΔΒ γράφομεν τρεῖς ἴσους κύκλους. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριῶν ἴσων κύκλων πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δοθέντος κύκλου Ο.

1651. (1687). Δίδεται κύκλος Ο διαμέτρου ΑΒ. Μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου, τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον αὐτόν, γράφομεν περιφέρειαν κύκλου. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κοινῆς ἐπιφανείας τῶν δύο αὐτῶν κύκλων.

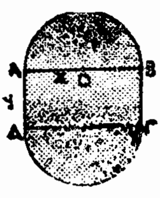
1652. (1688). Μὲ κέντρον μίαν ἀπὸ τὰς κορυφὰς τετραγώνου πλευρᾶς α, περιγεγραμμένου περὶ κύκλον καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν διαγώνιόν του γράφομεν περιφέρειαν κύκλου. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο κύκλων.

1653. (1689). Εἰς ἕνα τετράγωνον, ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, γράφονται τέσσαρες ἴσοι κύκλοι, οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται μεταξύ των ἐξωτερικῶς καὶ ἐφάπτονται τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐμβαδῶν τῶν τεσσάρων κύκλων πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τετράγωνον.

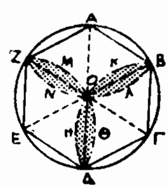
1654. (1690). Μὲ διαμέτρους τὰς πλευρὰς ἑνὸς τετραγώνου κατασκευάζομεν, εἰς τὸ ἐσωτερικόν του, ἡμιπεριφερείας. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῶν τεσσάρων σχηματιζομένων φύλλων εἶναι 30,87 τ.μ.

1655. (1691). Ἕνα παράθυρον ἔχει σχηματισθῇ ἀπὸ ἕνα ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ καὶ ἀπὸ ἕνα καμπυλόγραμμον μέρος ΔΕΓ, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν, ἐὰν γράψωμεν δύο τόξα ΔΕ καὶ ΓΕ μὲ κέντρα τὰ Δ καὶ Γ καὶ μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα ΔΓ. Ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ὕψος τοῦ καμπυλογράμμου μέρους εἶναι τὸ τρίτον ὁλοκλήρου τοῦ ὕψους, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραθύρου αὐτοῦ, ἐὰν τὸ ὕψος ΑΔ τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι 3,40 μ.

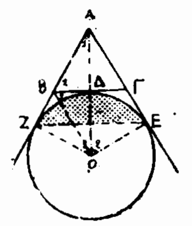
1656. (1692). Ἕνα σχῆμα ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον καταλήγει εἰς δύο ἡμικύκλια Ο καὶ Ο΄, τὰ ὁποῖα ἔχουν διαμέτρους τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΔΓ τοῦ ὀρθογωνίου. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις ΑΒ=x καὶ ΑΔ=y τοῦ ὀρθογωνίου, ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ ἐμβαδὸν Ε ὅλου τοῦ σχήματος καὶ τὴν περίμετρόν του τ. Ἐφαρμογή: τ=100 μ., Ε=200 τ.μ.



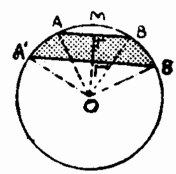
Σχ. ἀσκ. 1656.



Σχ. ἀσκ. 1657.



Σχ. ἀσκ. 1658.



Σχ. ἀσκ. 1659.

1657. (1693). Μὲ κέντρα τὰς ἀρτίας (ἢ περιττὰς) κορυφὰς κανονικοῦ ἑξαγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος R καὶ μὲ ἀκτῖνας ἴσας μὲ R γράφομεν τρία τόξα, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐντὸς τοῦ κύκλου καὶ περατοῦνται εἰς τὴν περιφέρειάν του. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῶν τριῶν σχηματιζομένων φύλλων.

1658. (1694). Δίδεται ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ πλευρᾶς α· ὁ παρεγγεγραμμένος κύκλος O_α εἰς τὴν γωνίαν Α, ἐφάπτεται τῆς πλευρᾶς ΒΓ εἰς τὸ Δ καὶ τῶν προεκτάσεων τῶν ΑΓ καὶ ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου αὐτοῦ.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΖΔΕ.

1659 (1695). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μέρους ἑνὸς κύκλου ἀκτῖνος R, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνεται μεταξὺ δύο χορδῶν παραλλήλων, αἱ ὁποῖαι

κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ κέντρου καὶ αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως μὲ τὰς πλευρὰς ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγώνου καὶ ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν κύκλον αὐτόν.

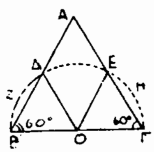
1660. (1696). Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Α μιᾶς περιφερείας Ο λαμβάνομεν δύο τόξα ΑΒ=90°, ΑΓ=45° πρὸς τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν· φέρομεν τὴν χορδὴν ΓΒ καὶ τὴν ΑΔ παράλληλον πρὸς τὴν ΓΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΑΔΒΓ εἶναι τὸ τέταρτον τοῦ κύκλου.

1661. (1697). Δύο ἀκτῖνες ΟΑ καὶ ΟΒ μιᾶς περιφερείας Ο σχηματίζουν γωνίαν 60°. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Α φέρομεν τὴν ΑΓ κάθετον ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ Β. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μέρους, ποὺ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῆς καθέτου ΑΓ, τῆς ἐφαπτομένης ΒΓ καὶ τοῦ τόξου ΑΒ.

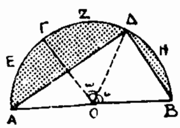
1662. (1698). Εἰς ἕνα κύκλον διαμέτρου 2R=1 μ. φέρομεν δύο χορδὰς ΑΒ καὶ ΑΓ, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ ΑΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα καὶ ἡ ἄλλη μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου, τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον και τοιαύτας, ὥστε τόξα ΑΒ καὶ ΑΓ νὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μέρους τοῦ κύκλου, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν δύο χορδῶν καὶ τοῦ τόξου ΒΓ.

1663. (1699). Μὲ διάμετρον τὴν πλευρὰν ΒΓ=α ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ γράφομεν ἡμικύκλιον πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ τριγώνου. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἐμβαδὰ τῶν κυκλικῶν τμημάτων, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται ἐκτὸς τοῦ τριγώνου.

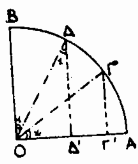
1664. (1700). Δίδεται ἡμικύκλιον διαμέτρου ΑΟΒ, ἡ ἀκτὶς ΟΓ καὶ ἡ ἀκτὶς ΟΔ, ἡ ὁποία διχοτομεῖ τὴν γωνίαν ΒΟΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν δύο κυκλικῶν τμημάτων, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς χορδὰς ΑΔ καὶ ΒΔ, εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸν τομέα ΟΑΓΟ.



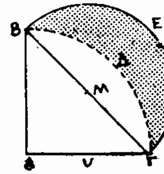
Σχ. ἀσκ. 1663.



Σχ. ἀσκ. 1664.



Σχ. ἀσκ. 1665.



Σχ. ἀσκ. 1666.

1665. (1701). Ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΒ ἑνὸς τεταρτοκυκλίου ΟΑΒ λαμβάνομεν δύο σημεῖα Γ καὶ Δ, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ μέσον τοῦ τόξου ΑΒ καὶ φέρομεν τας καθέτους ΓΓ' καὶ ΔΔ' ἐπὶ τὴν ΟΑ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ μικτόγραμμον σχῆμα ΓΔΔ'Γ' εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸν τομέα ΓΟΔ.

1666. (1702). Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ. Μὲ διάμετρον τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ=2α γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν, ἡ ὁποία κεῖται ἐκτός τοῦ τριγώνου καὶ μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν Α καὶ ἀκτῖνα ἴσην μέ τὴν πλευρὰν ΑΒ γράφομεν τόξον ΒΔΓ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχηματισθέντος μηνίσκου ΒΕΓΔΒ.

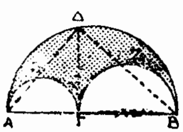
1667. (1703). Ἐπὶ ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ λαμβάνομεν ἕνα σημεῖον Γ καὶ μὲ διαμέτρους τὰς ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ γράφομεν τρία ἡμικύκλια πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΒ. Ἐκ τοῦ Γ ὑψοῦμεν κάθετον ΓΔ, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν

μεγαλυτέραν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὸ Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια, ἡ περιλαμβανομένη μεταξὺ τῶν τριῶν ἡμιπεριφερειῶν, εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸν κύκλον, ὁ ὁποῖος ἔχει διάμετρον τὴν ΓΔ.

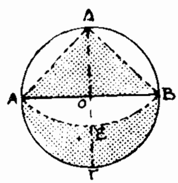
1668. (1704). Δίδεται κύκλος διαμέτρου ΑΒ=2R καὶ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἕνα σημεῖον Γ κείμενον εἰς ἀπόστασιν ΑΓ ἴσην μὲ τὸ τρίτον τῆς διαμέτρου ΑΒ. Μὲ διαμέτρους τὰς ΑΓ καὶ ΓΒ γράφομεν δύο ἡμικύκλια ἑκατέρωθεν τῆς ΑΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γραμμή, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὰς δύο ἡμιπεριφερείας διαιρεῖ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου εἰς δύο μέρη, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἕνα εἶναι διπλάσιον τοῦ ἄλλου.

1669. (1705). Εἰς κύκλον Ο ἀκτῖνος R φέρομεν δύο διαμέτρους ΑΒ, ΓΔ καθέτους. Μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Δ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΔΑ γράφομεν τὸ τόξον ΑΕΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μηνίσκου ΑΓΒΕΑ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΔΑΒ.

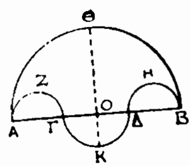
1670. (1706). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν τέσσαρα διαδοχικὰ σημεῖα Α, Γ, Δ, Β καὶ τοιαῦτα, ὥστε ΑΓ=ΔΒ. Μὲ διαμέτρους τὰς ΑΒ, ΑΓ καὶ ΔΒ γράφομεν τρία ἡμικύκλια πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ μὲ διάμετρον τὴν ΓΔ ἕνα ἄλλο ἡμικύκλιον πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῆς ΑΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια, ἡ περιεχομένη μεταξὺ τῶν τεσσάρων ἡμιπεριφερειῶν, εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸν κύκλον, ὁ ὁποῖος ἔχει διάμετρον τὴν ΑΔ.



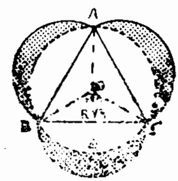
Σχ. ἀσκ. 1667.



Σχ. ἀσκ. 1669.



Σχ. ἀσκ. 1670.



Σχ. ἀσκ. 1672.

1671. (1707). Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ. Μὲ διάμετρον τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ γράφομεν, ἐξωτερικῶς τοῦ τριγώνου, ἡμικύκλιον ΒΕΓ. Ἐπίσης μὲ διαμέτρους τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ γράφομεν, εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου, ἡμικύκλια ΒΔΑ καὶ ΑΔΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ ἡμιπεριφέρειαι τῶν δύο τελευταίων ἡμικυκλίων τέμνονται εἴς τι σημεῖον Δ, κείμενον ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης καί ὅτι τὸ κοινὸν μέρος τῶν δύο τελευταίων ἡμικυκλίων, αὐξανόμενον κατὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ μέρος τοῦ πρώτου ἐκ τῶν ἡμικυκλίων, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐξωτερικῶς τῶν δύο ἄλλων ἡμικυκλίων.

1672. (1708). Δίδεται ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Ο ἀκτῖνος R. Μὲ διαμέτρους τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου γράφομεν τρεῖς ἡμιπεριφερείας ἐξωτερικῶς. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριῶν σχηματισθέντων μηνίσκων ὑπερβαίνει τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου κατὰ τὰ ὄγδοον τοῦ δοθέντου κύκλου.

1673. (1709). Δίδεται ἕνα τεταρτοκύκλιον ΟΑΔΒ, ὁριζόμενον ἀπὸ τὰς καθέτους ἀκτῖνας ΟΑ, ΟΒ τοῦ κύκλου Ο ἀκτῖνος R. Μὲ διαμέτρους τὰς ΟΑ καὶ ΟΒ γράφομεν, εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τεταρτοκυκλίου, δύο ἡμιπεριφερείας ΟΕΓΑ καὶ ΟΖΓΒ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Γ. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. ὅτι τὰ σημεῖα Α, Γ, Β κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

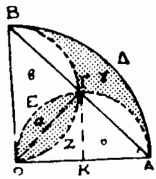
2ον. ὅτι τὰ ἐμβαδὰ τῶν καμπυλογράμμων σχημάτων ΑΔΒΓΑ καὶ ΟΖΓΕΟ, εἶναι ἰσοδύναμα.

3ον. ὅτι ἕκαστον τῶν ἐμβαδῶν τῶν ΟΑΓΖΟ καὶ ΟΕΓΒΟ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ τέταρτον τοῦ τετραγώνου πλευρᾶς ΟΑ.

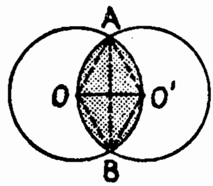
1674. (1710). Ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ δίδεται ἡ ὑποτείνουσα ΒΓ=α καὶ τὸ ἐμβαδόν του=k^2.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ, συναρτήσει τῶν α καὶ k, ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

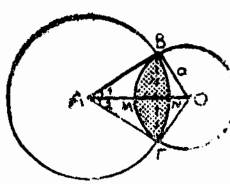
2ον. Ἐὰν Δ, Ε, Ζ εἶναι τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ καὶ τοῦ κύκλου αὐτοῦ, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΖΔΕ, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ὑπὸ τῆς χορδῆς ΕΖ.



Σχ. ἀσκ. 1673.



Σχ. ἀσκ. 1675.

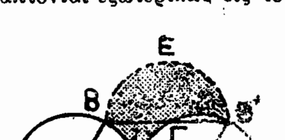


Σχ. ἀσκ. 1676.

1675. (1711). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κοινοῦ μέρους δύο ἴσων κύκλων, τῶν ὁποίων ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων των εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα των.

1676. (1712). Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς ἀπόστασιν ΟΑ=2α ἀπὸ τὸ κέντρον Ο ἑνὸς κύκλου ἀκτῖνος α φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου εἰς τό Β καὶ γράφομεν ἔπειτα μίαν περιφέρειαν μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα τὴν ΑΒ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κοινοῦ μέρους τῶν δύο κύκλων. Ἐφαρμογή : α=3 έκ.

1677. (1713). Δύο ἴσοι κύκλοι Ο καὶ Ο' ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ Α. Φέρομεν δύο ἀκτῖνας ΟΒ καὶ Ο'Β' παραλλήλους καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς καὶ κατασκευάζομεν ἐξωτερικῶς τῶν δύο κύκλων τὴν ἡμιπεριφέρειαν, διαμέτρου ΒΒ'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ καμπυλογράμμου σχήματος, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνεται μεταξὺ τῆς ἡμιπεριφερείας αὐτῆς καὶ τῶν δύο τόξων ΑΒ καὶ ΑΒ' εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου ΟΒΒ'Ο'.



Σχ. ἀσκ. 1677.

1678. (1714). Δίδονται δύο ὁμόκεντροι κύκλοι καὶ δύο ἀκτῖνες ΟΑ'Α καὶ ΟΒ'Β. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς διαφορᾶς τῶν δύο σχηματιζομένων κυκλικῶν τομέων εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς διαφορᾶς τῶν ἀκτίνων ἐπὶ τὸ τόξον ὁμοκέντρου περιφερείας, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ὑπὸ τῶν μέσων τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων ΑΑ' καὶ ΒΒ' τῶν δύο ἀκτίνων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΕΜΒΑΔΩΝ

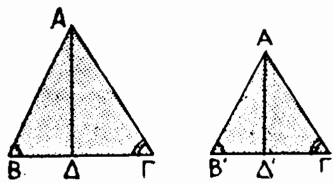
1. Σχέσεις μεταξὺ τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων σχημάτων

544. Θεώρημα. ***Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων τριγώνων εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν τετραγώνων δύο ὁμολόγων πλευρῶν των.***

Ὑπόθεσις. Ἔστωσαν τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ'.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\frac{\text{ἐμβ.τριγ.ΑΒΓ}}{\text{ἐμβ.τριγ.Α'Β'Γ'}}=\frac{\overline{ΑΒ}^2}{\overline{Α'Β'}^2}.$$



Σχ. 380.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὰ ὁμόλογα ὕψη ΑΔ καὶ Α'Δ'. Γνωρίζομεν ὅτι

$$\text{ἐμβ. τριγ.ΑΒΓ}=\frac{ΒΓ\times ΑΔ}{2} \quad \text{καὶ}$$

$$\text{ἐμβ. τριγ.Α'Β'Γ'}=\frac{Β'Γ'\times Α'Δ'}{2}.$$

Διαιροῦμεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\frac{\text{ἐμβ. τριγ.ΑΒΓ}}{\text{ἐμβ. τριγ Α'Β'Γ'}}=\frac{ΒΓ\times ΑΔ}{Β'Γ'\times Α'Δ'}=\frac{ΒΓ}{Β'Γ'}\times\frac{ΑΔ}{Α'Δ'} \qquad (1).$$

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι ὅμοια, ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων ὑψῶν των ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν ὁμολόγων πλευρῶν των (§ 407. III)· δηλ. εἶναι $\frac{ΑΔ}{Α'Δ'}=\frac{ΑΒ}{Α'Β'}=\frac{ΒΓ}{Β'Γ'}=\cdots$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τοὺς λόγους $\frac{ΒΓ}{Β'Γ'}$ καὶ $\frac{ΑΔ}{Α'Δ'}$ μὲ τὸν ἴσον των $\frac{ΑΒ}{Α'Β'}$ καὶ ἔχομεν

$$\frac{\text{ἐμβ. τριγ.ΑΒΓ}}{\text{ἐμβ. τριγ.Α'Β'Γ'}}=\frac{ΑΒ}{Α'Β'}\times\frac{ΑΒ}{Α'Β'}=\frac{ΑΒ\times ΑΒ}{Α'Β'\times Α'Β'}\;\frac{\overline{ΑΒ}^2}{\overline{Α'Β'}^2}.$$

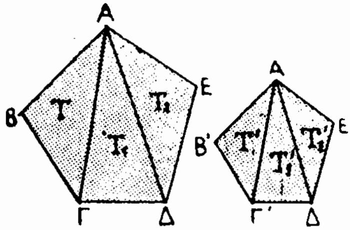
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν....***

545. Θεώρημα. ***Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων πολυγώνων εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν τετραγώνων δύο ὁμολόγων πλευρῶν των.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν τὰ ὅμοια πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ Α'Β'Γ'Δ'Ε' *(Σχ. 381).*

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\frac{\text{ἐμβ ΑΒΓΔΕ}}{\text{ἐμβ.Α'Β'Γ'Δ'Ε'}} = \frac{\overline{ΑΒ}^2}{\overline{Α'Β'}^2}$.

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὰς ὁμολόγους κορυφὰς Α καὶ Α' φέρομεν καὶ εἰς τὰ δύο πολύγωνα, ὅλας τὰς διαγωνίους. Τὰ δοθέντα πολύγωνα χωρίζονται τότε εἰς ὅμοια τρίγωνα, ἰσάριθμα καὶ ὁμοίως κείμενα.



Σχ. 381.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ $Τ, Τ_1, Τ_2$ τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ καὶ μὲ $Τ', Τ_1', Τ_2'$ τὰ ἐμβαδὰ τῶν ὁμοίων τριγώνων Α'Β'Γ', Α'Γ'Δ', Α'Δ'Ε', θὰ ἔχωμεν (§ 544)

$$\frac{Τ}{Τ'} = \frac{\overline{ΑΒ}^2}{\overline{Α'Β'}^2}, \quad \frac{Τ_1}{Τ_1'} = \frac{\overline{ΓΔ}^2}{\overline{Γ'Δ'}^2}, \quad \frac{Τ_2}{Τ_2'} = \frac{\overline{ΔΕ}^2}{\overline{Δ'Ε'}^2} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ Α'Β'Γ'Δ'Ε' εἶναι ὅμοια, θὰ εἶναι

$$\frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{ΓΔ}{Γ'Δ'} = \frac{ΔΕ}{Δ'Ε'} \text{ ὁπότε καὶ } \frac{\overline{ΑΒ}^2}{\overline{Α'Β'}^2} = \frac{\overline{ΓΔ}^2}{\overline{Γ'Δ'}^2} = \frac{\overline{ΔΕ}^2}{\overline{Δ'Ε'}^2}.$$

Ἐπειδὴ τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἰσοτήτων (1) εἶναι ἴσα, θὰ εἶναι ἴσα καὶ τὰ πρῶτα μέλη των καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι

$$\frac{Τ}{Τ'} = \frac{Τ_1}{Τ_1'} = \frac{Τ_2}{Τ_2'} = \frac{\overline{ΑΒ}^2}{\overline{Α'Β'}^2} \qquad (2)$$

Κατὰ γνωστὴν ἰδιότητα τῶν ἴσων κλασμάτων ἡ σχέσις (2) γράφεται

$$\frac{Τ+Τ_1+Τ_2}{Τ'+Τ_1'+Τ_2'} = \frac{\overline{ΑΒ}^2}{\overline{Α'Β'}^2} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\text{ἐμβ.ΑΒΓΔΕ}}{\text{ἐμβ.Α'Β'Γ'Δ'Ε'}} = \frac{\overline{ΑΒ}^2}{\overline{Α'Β'}^2}.$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο. . . .***

546. Παρατήρησις. Ἐπειδὴ $\frac{\overline{ΑΒ}^2}{\overline{Α'Β'}^2} = \left(\frac{ΑΒ}{Α'Β'}\right)^2$ τὰ προηγούμενα θεωρήματα ἐκφράζονται καὶ ὡς ἑξῆς:

Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων τριγώνων ἢ δύο ὁμοίων πολυγώνων εἶναι ἴσος μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου τῆς ὁμοιότητός των.

547. Πόρισμα Ι. ***Ἐὰν ὅλαι αἱ πλευραὶ πολυγώνου πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν k, αἱ δὲ γωνίαι των μείνουν***

ἀμετάβλητοι, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου πολλαπλασιάζεται ἐπὶ k^2.

Πράγματι· ἐν πρώτοις τὸ δοθὲν πολύγωνον καὶ τὸ νέον πολύγωνον εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους, μὲ λόγον ὁμοιότητος k. Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ Ε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δοθέντος πολυγώνου καὶ μὲ Ε′ τοῦ νέου, θὰ ἔχωμεν (§ 545) $\frac{E'}{E}=k^2$ ἢ $E'=E\times k^2$.

548. Πόρισμα ΙΙ. ***Τὰ ἐμβαδὰ πολλῶν ὁμοίων πολυγώνων εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν των.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν $\Pi, \Pi_1, \Pi_2, \ldots$ τὰ ἐμβαδὰ πολλῶν ὁμοίων πολυγώνων καὶ $\alpha, \alpha_2, \alpha_2, \ldots$ αἱ ὁμόλογοι πλευραί των.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\frac{\Pi}{\alpha^2}=\frac{\Pi_1}{\alpha_1^2}=\frac{\Pi_2}{\alpha_2^2}\cdots$

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα Π καὶ Π_1 εἶναι ὅμοια, θὰ ἔχωμεν, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα (§ 545)

$$\frac{\Pi}{\Pi_1}=\frac{\alpha^2}{\alpha_1^2} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\Pi}{\alpha^2}=\frac{\Pi_1}{\alpha_1^2} \qquad (1)$$

Ὁμοίως ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα Π καὶ Π_2 εἶναι ὅμοια, θὰ εἶναι

$$\frac{\Pi}{\Pi_2}=\frac{\alpha^2}{\alpha_2^2} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\Pi}{\alpha^2}=\frac{\Pi_2}{\alpha_2^2} \qquad (2)$$

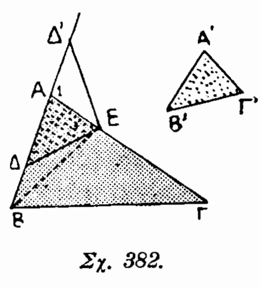
. . . .

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2). . . . συνάγομεν, ὅτι

$$\frac{\Pi}{\alpha^2}=\frac{\Pi_1}{\alpha_1^2}=\frac{\Pi_2}{\alpha_2^2}=\cdots$$

Ἀσκήσεις: 1679, 1680, 1681, 1682, 1683, 1684.

549. Θεώρημα. ***Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην ἢ παραπληρωματικήν, ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν των εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν γινομένων τῶν πλευρῶν, αἱ ὁποῖαι περιέχουν τὰς ἴσας ἢ παραπληρωματικὰς αὐτὰς γωνίας.***



Σχ. 382.

Ὑπόθεσις: 1ον. Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ (*Σχ. 382*), τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς γωνίας Α καὶ Α′ ἴσας.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\frac{\text{ἐμβ. τριγ.}AB\Gamma}{\text{ἐμβ. τριγ.}A'B'\Gamma'}=\frac{AB\times A\Gamma}{A'B'\times A'\Gamma'}.$$

Ἀπόδειξις: Θέτομεν τὸ τρίγωνον Α′Β′Γ′ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ οὕτως, ὥστε νὰ ἐφαρμόσουν αἱ ἴσαι γωνίαι Α

καὶ Α΄ καὶ ἔστω ΑΔΕ ἡ θέσις, τὴν ὁποίαν καταλαμβάνει τοῦτο ἐπὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΒΕ. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒΕ ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος, τὸ ὁποῖον ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν Β πρὸς τὰς βάσεις των ΑΓ καὶ ΑΕ, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΑΓ· ἄρα τὰ τρίγωνα αὐτὰ θὰ ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν βάσεών των (§ 520), δηλ. θὰ εἶναι

$$\frac{\text{ἐμβ. τριγ.ΑΒΓ}}{\text{ἐμβ. τριγ.ΑΒΕ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΕ}} \qquad (1)$$

Ὁμοίως τὰ τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΑΔΕ ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος, τὸ ὁποῖον ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν Ε πρὸς τὰς βάσεις ΑΒ καὶ ΑΔ ἄρα θὰ εἶναι

$$\frac{\text{ἐμβ. τριγ.ΑΒΓ}}{\text{ἐμβ. τριγ.ΑΔΕ}} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΔ}} \qquad (2)$$

Πολλαπλασιάζομεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\frac{\text{ἐμβ. τριγ.ΑΒΓ}}{\text{ἐμβ. τριγ.ΑΒΓ}} \times \frac{\text{ἐμβ. τριγ.ΑΒΕ}}{\text{ἐμβ. τριγ.ΑΔΕ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΕ}} \times \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΔ}}$$

ἤ, ἁπλοποιοῦντες, $$\frac{\text{ἐμβ. τριγ.ΑΒΓ}}{\text{ἐμβ. τριγ.ΑΔΕ}} = \frac{\text{ΑΓ}\times\text{ΑΒ}}{\text{ΑΕ}\times\text{ΑΔ}} \qquad (3)$$

Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΔΕ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ καὶ ἐπειδὴ ΑΕ=Α΄Γ΄, ΑΔ=Α΄Β΄, ἡ ἰσότης (3) γράφεται

$$\boxed{\frac{\text{ἐμβ. τριγ.ΑΒΓ}}{\text{ἐμβ. τριγ.Α΄Β΄Γ΄}} = \frac{\text{ΑΒ}\times\text{ΑΓ}}{\text{Α΄Β΄}\times\text{Α΄Γ΄}}}$$

2ον. Ἐὰν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΕΔ΄ *(Σχ. 382)* ἔχουν τὰς γωνίας ΒΑΓ καὶ ΕΑΔ΄ παραπληρωματικὰς εὑρίσκομεν ὁμοίως, ὅτι

$$\frac{\text{ἐμβ. τριγ.ΑΒΓ}}{\text{ἐμβ. τριγ.ΑΕΔ΄}} = \frac{\text{ΑΒ}\times\text{ΑΓ}}{\text{ΑΕ}\times\text{ΑΔ΄}}.$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν. . . .***

Ἀσκήσεις: 1685, 1686, 1687, 1688, 1689, 1690, 1691, 1692, 1693, 1694.

2. Γεωμετρικὴ ἐξήγησις τοῦ θεωρήματος τοῦ Πυθαγόρα

Εἰς τὸ ΙΙΙ βιβλίον εὑρήκαμεν τὴν σχέσιν $α^2=β^2+γ^2$, ἡ ὁποία ἐκφράζει, ὅτι: ***τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο καθέτων πλευρῶν του.***

Ἡ πρότασις αὐτὴ ἐξηγεῖται γεωμετρικῶς εἰς τὸ κατωτέρω θεώρημα:

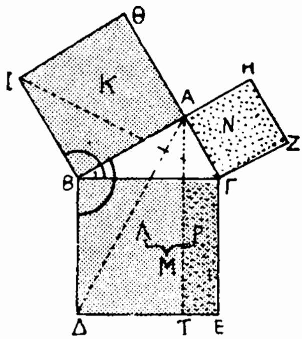
550. Θεώρημα. ***Τὸ τετράγωνον, τὸ ὁποῖον κατασκευάζεται***

μὲ πλευρὰν τὴν ὑποτείνουσαν ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων, τὰ ὁποῖα κατασκευάζονται μὲ πλευρὰς τὰς δύο καθέτους πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου.

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ. Μὲ πλευρὰς τὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ *(Σχ. 383)* κατασκευάζομεν τὰ τετράγωνα Μ, Ν, Κ, τὰ ὁποῖα νὰ κεῖνται ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι

Μ=Ν+Κ.



Σχ. 383.

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α τῆς ὀρθῆς γωνίας φέρομεν κάθετον ΑΣ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη, χωρίζει τὸ τετράγωνον Μ εἰς δύο ὀρθογώνια Λ καὶ Ρ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΔ καὶ ΓΙ.

Τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΙΒΓ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας γωνίας ἴσας· ἤτοι ἔχουν ΒΔ=ΒΓ, ὡς πλευρὰς τοῦ τετραγώνου Μ, ΑΒ=ΒΙ, ὡς πλευρὰς τοῦ τετραγώνου Κ καὶ γων.ΑΒΔ=γων.ΙΒΓ, διότι ἑκάστη τούτων εἶναι ἄθροισμα μιᾶς ὀρθῆς γωνίας καὶ τῆς κοινῆς γωνίας $Β_1$.

Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου Λ, διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΔ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΣΒ. Ἐπίσης τὸ τρίγωνον ΙΒΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ τετραγώνου Κ, διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΙΒ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΒ.

Ἐπειδὴ ὅμως τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΙΒΓ εἶναι ἴσα, ἕπεται ὅτι καὶ τὰ διπλάσια αὐτῶν, δηλ. τὸ ὀρθογώνιον Λ καὶ τὸ τετράγωνον Κ, θὰ εἶναι ἰσοδύναμα· ἤτοι θὰ εἶναι Λ=Κ (1)

Ἀποδεικνύομεν ὁμοίως, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον Ρ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ τετράγωνον Ν· ἤτοι εἶναι Ρ=Ν (2)

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

Λ+Ρ=Κ+Ν ἢ Μ=Κ+Ν.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Τὸ τετράγωνον τὸ ὁποῖον...***

551. Πόρισμα. ***Ἐὰν τρία ὅμοια σχήματα, οἱασδήποτε μορφῆς, πολυγωνικῆς ἢ ἄλλης, ἔχουν ὡς ὁμολόγους πλευρὰς τὰς πλευρὰς α, β, γ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, τὸ ἐμβαδὸν $E_α$ τοῦ***

σχήματος, τὸ ὁποῖον κατασκευάζεται μὲ πλευρὰν τὴν ὑποτείνουσαν α, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν $E_β$, $E_γ$ τῶν σχημάτων, τὰ ὁποῖα κατασκευάζονται μὲ πλευρὰς τὰς δύο ἄλλας πλευρὰς β καὶ γ.

Γνωρίζομεν (§ 548), ὅτι τὰ ἐμβαδὰ $E_α$, $E_β$, $E_γ$ ὁμοίων σχημάτων εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν των α, β, γ· ἄρα θὰ εἶναι $\frac{E_α}{α^2}=\frac{E_β}{β^2}=\frac{E_γ}{γ^2}$.

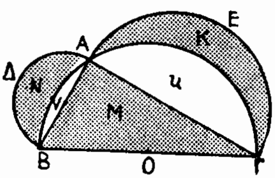
Κατὰ τὴν ἰδιότητα τῶν ἴσων καλασμάτων ἡ προηγουμένη σχέσις γράφεται

$$\frac{E_α}{α^2}=\frac{E_β+E_γ}{β^2+γ^2} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ α, β, γ εἶναι πλευραὶ ὀρθογωνίου τριγώνου, θὰ εἶναι $α^2=β^2+γ^2$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ παρονομασταὶ τῶν ἴσων κλασμάτων τῆς ἰσότητος (1) εἶναι ἴσοι· ἄρα θὰ εἶναι ἴσοι καὶ οἱ ἀριθμηταί των· δηλ. θὰ εἶναι $E_α=E_β+E_γ$.

552. Ἐφαρμογή. *Μηνίσκοι τοῦ Ἱπποκράτους.* Ἡ προηγουμένη σχέσις ἐφαρμόζεται εἰς τὰ τρία ἡμικύκλια, τὰ ὁποῖα γράφονται μὲ διαμέτρους τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ. Ἐκ τούτων τὸ ἡμικύκλιον. τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ διάμετρον τὴν ὑποτείνουσαν διέρχεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α τῆς ὀρθῆς γωνίας, τὰ δὲ δύο ἄλλα κεῖνται ἐκτὸς τοῦ τριγώνου.



Σχ. 384.

Τὰ δύο ἡμικύκλια, τὰ ὁποῖα γράφονται μὲ διαμέτρους τὰς καθέτους πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου χωρίζονται ἀπὸ τὴν ἡμιπεριφέρειαν, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὴν ΒΓ, εἰς τοὺς μηνίσκους Ν καὶ Κ καὶ εἰς τὰ κυκλικὰ τμήματα ν καὶ κ.

Κατὰ τὸ πόρισμα τῆς § 551 θὰ εἶναι

ἐμβ. ἡμικ.ΒΑΓ=ἐμβ. ἡμικ. ΒΔΑ+ἐμβ. ἡμικ. ΑΕΓ

ἢ $M+κ+ν=N+ν+K+κ$ ἢ $M=N+K$.

Ὥστε: ***Τὸ ἐμβαδὸν Μ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο μηνίσκων Ν καὶ Κ.***

Τὰ δύο μέρη Ν καὶ Κ λέγονται *μηνίσκοι τοῦ Ἱπποκράτους*

Ἀσκήσεις: 1695.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΠΙ ΤΩΝ ΕΜΒΑΔΩΝ

553. Πρόβλημα. ***Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράγωνον ἰσοδύναμον: 1ον μὲ τὸ ἄθροισμα δύο δοθέντων τετραγώνων. 2ον μὲ τὴν διαφορὰν δύο δοθέντων τετραγώνων.***

Λύσις. Ἂν παραστήσωμεν μὲ α καὶ β τὰς πλευρὰς τῶν δοθέντων τετραγώνων, τὰ ἐμβαδά των θὰ εἶναι $α^2$ καὶ $β^2$. Ἂν παραστήσωμεν μὲ x τὴν πλευρὰν τοῦ ζητουμένου τετραγώνου, τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶναι x^2.

1ον. Κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ ἔχωμεν $x^2=α^2+β^2$.

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν συνάγομεν, ὅτι ἡ πλευρὰ x τοῦ ζητουμένου τετραγώνου εἶναι ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰς καθέτους πλευράς του α καὶ β.

2ον. Κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ ἔχωμεν $x^2=α^2-β^2$.

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν συνάγομεν, ὅτι ἡ πλευρὰ x τοῦ ζητουμένου τετραγώνου εἶναι ἡ κάθετος πλευρὰ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν ὑποτείνουσαν α καὶ τὴν ἄλλην κάθετον πλευρὰν β.

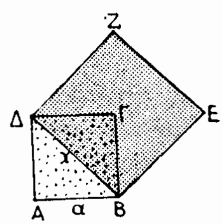
554. Πρόβλημα. ***Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράγωνον, διπλάσιον δοθέντος τετραγώνου.***

Λύσις. Ἂν παραστήσωμεν μὲ α τὴν πλευρὰν τοῦ δοθέντος τετραγώνου καὶ μὲ x τὴν πλευρὰν τοῦ ζητουμένου, τὰ ἐμβαδά των θὰ εἶναι $α^2$ καὶ x^2.

Κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ ἔχωμεν

$$x^2=2α^2 \quad ἢ \quad x^2=α^2+α^2.$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν συνάγομεν, ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου εἶναι ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει καθέτους πλευρὰς τὰς α καὶ α' δηλ. εἶναι ἡ διαγώνιος τοῦ δοθέντος τετραγώνου (*Σχ. 385*).



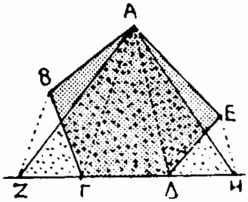
Σχ. 385.

555. Πρόβλημα. ***Νὰ μετασχηματισθῇ δοθὲν πολύγωνον εἰς ἰσοδύναμον τρίγωνον.***

Λύσις. Ἔστω τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ (*Σχ. 386*). Φέρομεν τὴν

διαγώνιον ΑΓ· ἀπὸ τὴν κορυφὴν Β φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν διαγώνιον ΑΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΓΔ εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΖ.

Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΖΓ εἶναι ἰσοδύναμα, ἐπειδὴ ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΓ καὶ ἴσα ὕψη, δεδομένου ὅτι αἱ κορυφαί των Β καὶ Ζ κεῖνται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν.



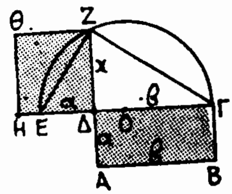
Σχ. 386.

Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ δοθὲν πολύγωνον τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὸ ἀντικαταστήσωμεν μὲ τὸ ἰσοδύναμόν του τρίγωνον ΑΖΓ, λαμβάνομεν ἕνα νέον πολύγωνον ΑΖΔΕ, ἰσοδύναμον μὲ τὸ πρῶτον καὶ τὸ ὁποῖον ἔχει μίαν πλευρὰν ὀλιγώτερον ἀπὸ τὸ πρῶτον.

Ἐπαναλαμβάνοντες τὴν αὐτὴν ἐργασίαν καὶ εἰς τὸ νέον πολύγω-ΑΖΔΕ, μετασχηματίζομεν αὐτὸ εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΖΗ, ἰσοδύναμον μὲ τὸ ΑΖΔΕ καὶ ἑπομένως ἰσοδύναμον μὲ τὸ δοθὲν πολύγωνον.

556. Πρόβλημα. ***Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράγωνον ἰσοδύναμον μὲ δοθὲν ὀρθογώνιον.***

Λύσις. Ἐὰν α καὶ β εἶναι αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου, τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶναι $\alpha \times \beta$. Ἂν παραστήσωμεν μὲ x τὴν πλευρὰν τοῦ ζητουμένου τετραγώνου, τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶναι x^2. Ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον καὶ τὸ ὀρθογώνιον εἶναι ἰσοδύναμα, θὰ εἶναι $x^2 = \alpha\beta$.



Σχ. 387.

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτὴν συνάγομεν, ὅτι ἡ πλευρὰ x τοῦ ζητουμένου τετραγώνου εἶναι ἡ μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν διαστάσεων α καὶ β. Κατασκευάζομεν (§ 430) τὴν μέσην ἀνάλογον x τῶν α καὶ β καὶ μὲ πλευρὰν τὴν x κατασκευάζομεν τετράγωνον, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον.

557. Παρατήρησις. Ὅταν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς πολυγώνου ἐκφράζεται μὲ τὸ γινόμενον δύο μηκῶν, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἕνα τετράγωνον, ἰσοδύναμον μὲ τὸ δοθὲν πολύγωνον. Ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου θὰ εἶναι ἡ μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο αὐτῶν μηκῶν.

Τὰ δύο μήκη, τὰ ὁποῖα ἐκφράζουν τὸ ἐμβαδόν :

Ἑνὸς ***παραλληλογράμμου*** εἶναι ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος του.

Ἑνὸς ***τριγώνου*** εἶναι ἡ βάσις καὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους του ἢ τὸ ὕψος καὶ τὸ ἥμισυ τῆς βάσεώς του.

Ἑνὸς ***τραπεζίου*** εἶναι ἡ διάμεσός του καὶ τὸ ὕψος του.

Ἑνὸς ***κανονικοῦ πολυγώνου*** εἶναι τὸ ἀπόστημα καὶ ἡ ἡμιπερίμετρος του.

Ἑνὸς ***τυχόντος πολυγώνου*** εἶναι ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος τοῦ ἰσοδυνάμου τριγώνου.

Ἑνὸς ***κύκλου*** εἶναι ἡ ἀκτὶς καὶ τὸ μῆκος τῆς ἡμιπεριφερείας του·

558. Τετραγωνισμός. *Ἡ κατασκευὴ ἑνὸς τετραγώνου, ἰσοδυνάμου πρὸς δοθὲν σχῆμα λέγεται* ***τετραγωνισμὸς*** *τοῦ σχήματος.*

Ὁ τετραγωνισμὸς ὅλων τῶν πολυγώνων εἶναι πάντοτε δυνατός· διότι ἀρκεῖ νὰ ἐκφράσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου μὲ τὸ γινόμενον δύο μηκῶν, ὅπως ἀνεφέραμεν εἰς τὴν παρατήρησιν τῆς § 556 καὶ νὰ κατασκευάσωμεν τὴν μέσην ἀνάλογον μεταξὺ τῶν δύο αὐτῶν μηκῶν. Ἡ μέση ἀνάλογος τῶν δύο αὐτῶν μηκῶν εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου, τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ πολύγωνον.

Ὁ τετραγωνισμὸς ὅμως τοῦ κύκλου εἶναι ἀπραγματοποίητος.

Πράγματι ἐὰν x ἦτο ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου, τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς ἕνα κύκλον ἀκτῖνος R, πρέπει νὰ ἔχωμεν

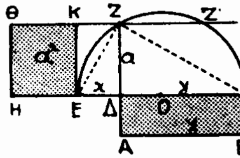
$$x^2 = \pi R^2 \quad \text{ἢ} \quad x^2 = \pi R \times R.$$

Δηλ. ἡ πλευρὰ x τοῦ τετραγώνου εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς ἡμιπεριφερείας τοῦ κύκλου καὶ τῆς ἀκτῖνος του. Ἀλλὰ τὸ μῆκος τῆς ἡμιπεριφερείας τοῦ κύκλου δὲν κατασκευάζεται μὲ τὸν κανόνα καὶ μὲ τὸν διαβήτην, ὅπως ἀπέδειξε ὁ Γερμανὸς μαθηματικὸς Lindemann καὶ ἑπομένως καὶ ὁ τετραγωνισμὸς τοῦ κύκλου εἶναι ἀδύνατος.

559. Πρόβλημα. ***Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ὀρθογώνιον, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ἐμβαδόν του a^2 καὶ τὸ ἄθροισμα k τῶν διαστάσεών του.***

Λύσις. Ἂν παραστήσωμεν μὲ x καὶ y τὰς διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου, τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶναι xy. Κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ ἔχωμεν

$$xy = a^2 \quad \text{καὶ} \quad x + y = k.$$

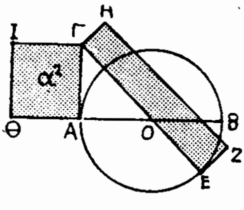


Σχ. 388.

Ἀπὸ τὰς σχέσεις αὐτὰς συνάγομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ νὰ κατασκευάσωμεν δύο εὐθείας x καὶ y, τῶν ὁποίων γνωρίζομεν τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον.

Ἡ κατασκευὴ γίνεται ὅπως ἐδείχθη εἰς τὸ πρόβλημα τῆς § 460.

560. Πρόβλημα. ***Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ὀρθογώνιον, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ἐμβαδόν του $α^2$ καὶ τὴν διαφορὰν k τῶν διαστάσεών του.***



Σχ. 389.

Λύσις. Ἂν παραστήσωμεν μὲ x καὶ y τὰς διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου, τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶναι xy. Κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ ἔχωμεν $xy=α^2$ καὶ $x-y=k$.

Ἀπὸ τὰς σχέσεις αὐτὰς συνάγομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ νὰ κατασκευάσωμεν δύο εὐθείας, τῶν ὁποίων γνωρίζομεν τὸ γινόμενον $α^2$ καὶ τὴν διαφοράν των k.

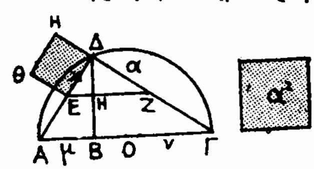
Ἡ κατασκευὴ γίνεται ὅπως ἐδείχθη εἰς τὸ πρόβλημα τῆς § 461.

561. Πρόβλημα. ***Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ λόγον πρὸς δοθὲν τετράγωνον, ἴσον μὲ τὸν λόγον δύο δοθέντων εὐθυγράμμων τμημάτων.***

Λύσις. Ἔστωσαν $α$ ἡ πλευρὰ τοῦ δοθέντος τετραγώνου καὶ $μ$ καὶ $ν$ τὰ δοθέντα εὐθύγραμμα τμήματα. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ x τὴν πλευρὰν τοῦ ζητουμένου τετραγώνου, πρέπει νὰ ἔχωμεν, κατὰ τὸ πρόβλημα

$$\frac{x^2}{α^2}=\frac{μ}{ν}$$

Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν δύο διαδοχικὰ τμήματα $ΑΒ=μ$ καὶ $ΒΓ=ν$ *(Σχ. 390)*. Μὲ διάμετρον τὴν ΑΓ γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν· ἀπὸ τὸ σημεῖον Β φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Δ· φέρομεν τὰς εὐθείας ΔΑ καὶ ΔΓ. Ἐπὶ τῆς ΔΓ λαμβάνομεν τμῆμα ΔΖ ἴσον μὲ τὴν πλευρὰν $α$ τοῦ δοθέντος τετραγώνου· ἀπὸ τὸ Ζ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΓΑ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΔΑ εἰς τὸ Ε. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ ΔΕ εἶναι ἡ πλευρὰ x τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.



Σχ. 390.

Πράγματι· εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΔΕΖ, τὰ τετράγωνα τῶν καθέτων πλευρῶν του x καὶ $α$ ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν προβολῶν των ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν (§ 423)· ἤτοι εἶναι

$$\frac{x^2}{α^2}=\frac{ΕΗ}{ΗΖ} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ΕΖ καὶ ΑΓ τέμνονται ὑπὸ τῆς δέσμης τῶν εὐθειῶν ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ θὰ εἶναι (§ 413)

$$\frac{ΕΗ}{μ}=\frac{ΗΖ}{ν} \quad ἢ \quad \frac{ΕΗ}{ΗΖ}=\frac{μ}{ν} \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι $\frac{x^2}{α^2}=\frac{μ}{ν}$.

Ἀσκήσεις: 1696.

562. Πρόβλημα. ***Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα πολύγωνον, ὅμοιον πρὸς δοθὲν πολύγωνον Π καὶ ἰσοδύναμον πρὸς ἄλλο δοθὲν πολύγωνον Π'.***

Λύσις. Ἔστω α ἡ πλευρὰ τοῦ δοθέντος πολυγώνου Π καὶ x ἡ ὁμόλογος πλευρὰ τοῦ ζητουμένου πολυγώνου Π''.

Ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα Π καὶ Π'' εἶναι ὅμοια, ὁ λόγος των θὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ὁμολόγων πλευρῶν των· ἤτοι θὰ εἶναι $\frac{Π}{Π''}=\frac{α^2}{x^2}$.

Καὶ ἐπειδὴ τὸ πολύγωνον Π'' εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ Π', ἡ προηγουμένη σχέσις γράφεται $\frac{Π}{Π'}=\frac{α^2}{x^2}$ (1)

Τὰ δοθέντα πολύγωνα Π καὶ Π' δύνανται νὰ μετασχηματισθοῦν εἰς ἰσοδύναμα τετράγωνα καὶ ἔστωσαν β καὶ γ αἱ πλευραὶ τῶν τετραγώνων αὐτῶν· ἀλλὰ τότε ἡ σχέσις (1) γίνεται

$$\frac{β^2}{γ^2}=\frac{α^2}{x^2} \quad ἢ \quad \frac{β}{γ}=\frac{α}{x} \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν (2) συνάγομεν, ὅτι ἡ πλευρὰ x τοῦ ζητουμένου πολυγώνου εἶναι ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν εὐθειῶν β, γ καὶ α.

Γνωρίζοντες τὴν πλευρὰν x τοῦ ζητουμένου πολυγώνου, τὴν ὁμόλογον πρὸς τὴν α, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν πολύγωνον Π'' ὅμοιον πρὸς τὸ Π, ὅπως ἐδείχθη εἰς τὴν § 464.

563. Πρόβλημα. ***Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα πολύγωνον, ὅμοιον πρὸς δύο δοθέντα ὅμοια πολύγωνα καὶ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμά των ἢ τὴν διαφοράν των.***

Λύσις. Ἔστωσαν α καὶ α' δύο ὁμόλογοι πλευραὶ τῶν δοθέντων ὁμοίων πολυγώνων Π καὶ Π' καὶ x ἡ ὁμόλογος πλευρὰ τοῦ ζητουμένου πολυγώνου Π''. Ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα Π, Π', Π'' εἶναι ὅμοια, θὰ εἶναι ἀνάλογα τῶν τετραγώνων τῶν ὁμολόγων πλευρῶν των (§ 551)· ἤτοι θὰ εἶναι $\frac{Π}{α^2}=\frac{Π'}{α'^2}=\frac{Π''}{x^2}$ (1)

Κατὰ γνωστὴν ἰδιότητα τῶν ἴσων κλασμάτων ἡ σχέσις (1) γράφεται

$$\frac{Π \pm Π'}{α^2 \pm α'^2}=\frac{Π''}{x^2} \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\Pi''=\Pi\pm\Pi'$, οἱ ἀριθμηταὶ τῶν ἴσων κλασμάτων τῆς σχέσεως (2) εἶναι ἴσοι· ἄρα θὰ εἶναι ἴσοι καὶ οἱ παρονομασταί των· δηλ. θὰ εἶναι $x^2=\alpha^2\pm\alpha'^2$.

Ὥστε τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράγωνον ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ μὲ τὴν διαφορὰν δύο δοθέντων τετραγώνων (§ 553).

Γνωρίζοντες ἤδη τὴν πλευρὰν x, τὴν ὁμόλογον πρὸς τὴν πλευρὰν α τοῦ δοθέντος πολυγώνου, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἕνα πολύγωνον Π'' ὅμοιον πρὸς τὸ Π, ὅπως ἐδείχθη εἰς τὴν § 464.

564. Πρόβλημα. ***Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα πολύγωνον, ὅμοιον πρὸς δοθὲν πολύγωνον καὶ τοιοῦτον, ὥστε ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν των νὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον δύο δοθέντων εὐθυγράμμων τμημάτων.***

Ἔστωσαν μ καὶ ν τὰ δοθέντα εὐθύγραμμα τμήματα, Π τὸ δοθὲν πολύγωνον καὶ Π' τὸ ζητούμενον πολύγωνον.

Κατὰ τὸ πρόβλημα πρέπει νὰ ἔχωμεν $\frac{\Pi}{\Pi'}=\frac{\mu}{\nu}$ (1)

Ἔστωσαν α καὶ x αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ τῶν ὁμοίων πολυγώνων Π καὶ Π'. Ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα Π καὶ Π' εἶναι ὅμοια, ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν των θὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ὁμολόγων πλευρῶν των· ἤτοι θὰ εἶναι $\frac{\Pi}{\Pi'}=\frac{\alpha^2}{x^2}$ (2)

Ἀπὸ τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι

$$\frac{\alpha^2}{x^2}=\frac{\mu}{\nu} \quad \text{ἢ} \quad \frac{x^2}{\alpha^2}=\frac{\nu}{\mu}.$$

Τὸ πρόβλημα λοιπὸν ἀνάγεται εἰς τὸ νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ λόγον πρὸς δοθὲν τετράγωνον ἴσον μὲ τὸν λόγον δύο εὐθυγράμμων τμημάτων ν καὶ μ.

Ἡ κατασκευὴ τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ γίνεται, ὅπως ἐδείχθη εἰς τὸ πρόβλημα τῆς (§ 561).

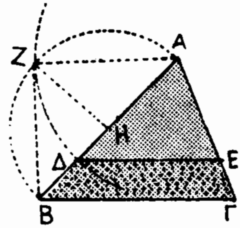
Γνωρίζοντες ἤδη τὴν πλευρὰν x, τὴν ὁμόλογον τῆς α, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἕνα πολύγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ δοθὲν πολύγωνον Π, ὅπως ἐδείχθη εἰς τὸ πρόβλημα τῆς § 464.

565. Πρόβλημα. ***Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν τρίγωνον εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη δι' εὐθείας παραλλήλου πρὸς μίαν πλευράν του.***

Ἀνάλυσις: Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ *(Σχ. 391)* καὶ ΔΕ ἡ ζητουμένη παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία διαιρεῖ τὸ τρίγωνον εἰς δύο μέρη ΑΔΕ καὶ ΔΒΓΕ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΔΕ καὶ ΑΒΓ εἶναι ὅμοια, ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν των θὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν τετραγώνων δύο ὁμολόγων πλευρῶν των· δηλ. θὰ εἶναι

$$\frac{\text{Ἐμβ. τριγ.}ΑΔΕ}{\text{Ἐμβ. τριγ }ΑΒΓ}=\frac{\overline{ΑΔ}^2}{\overline{ΑΒ}^2} \quad (1)$$



Σχ. 391.

Ἐπειδὴ τὰ μέρη ΑΔΕ καὶ ΔΒΓΕ εἶναι ἰσοδύναμα, τὸ τρίγωνον ΑΔΕ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ· δηλ. εἶναι

$$\frac{\text{ἐμβ. τριγ.}ΑΔΕ}{\text{ἐμβ. τριγ.}ΑΒΓ}=\frac{1}{2} \quad (2)$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι

$$\frac{\overline{ΑΔ}^2}{\overline{ΑΒ}^2}=\frac{1}{2} \quad ἢ \quad \overline{ΑΔ}^2=\frac{\overline{ΑΒ}^2}{2} \quad ἢ \quad \overline{ΑΔ}^2=ΑΒ\times\frac{ΑΒ}{2}.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ΑΒ καὶ $\frac{ΑΒ}{2}$.

Σύνθεσις: Μὲ διάμετρον τὴν ΑΒ γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν· ἀπὸ τὸ μέσον Η τῆς ΑΒ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΖ, ἡ ὁποία εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ΑΒ καὶ $ΑΗ=\frac{ΑΒ}{2}$. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ λαμβάνομεν τμῆμα ΑΔ=ΑΖ καὶ ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν παράλληλον ΔΕ πρὸς τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία εἶναι καὶ ἡ ζητουμένη παράλληλος.

Ἀσκήσεις: 1697, 1698, 1699, 1700.

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. **1679.** (1715). Ἡ βάσις ἑνὸς τριγώνου εἶναι 7,5 μ. καὶ τὸ ἐμβαδόν του 22,5 τ.μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἄλλου τριγώνου ὁμοίου πρὸς τὸ πρῶτον, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι 5 μ.

1680. (1716). Αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου εἶναι 8 μ., 10 μ., 12 μ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ πρῶτον καὶ ἔχει διπλασίαν ἐπιφάνειαν.

1681. (1717). Δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πρώτου εἶναι 48 τ.μ. καὶ τοῦ δευτέρου 108 τ.μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητός των.

1682. (1718). Ἡ περίμετρος ἑνὸς πολυγώνου εἶναι πενταπλασία τῆς περιμέτρου ἄλλου ὁμοίου πολυγώνου. Πόσας φορὰς εἶναι μεγαλυτέρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρώτου ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ δευτέρου.

1683. (1719). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγώνου, ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον εἶναι τὰ τρία τέταρτα τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ περιγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου.

1684. (1720). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς πλευρὰς τὰς διαμέσους ἑνὸς τριγώνου, εἶναι τὰ τρία τέταρτα τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου αὐτοῦ.

Β' Ὁμάς. **1685.** (1721). Δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ', τὰ ὁποῖα ἔχουν δύο γωνίας παραπληρωματικάς, Α+Α'=180 καὶ τὰς πλευράς, ποὺ περιέχουν τὰς γωνίας αὐτὰς ἴσας μίαν πρὸς μίαν, ΑΒ=Α'Β', ΑΓ=Α'Γ', εἶναι ἰσοδύναμα.

1686. (1722). Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Σ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς κύκλου Ο φέρομεν δύο καθέτους χορδὰς ΑΣΒ καὶ ΓΣΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΟΑΓ καὶ ΟΒΔ εἶναι ἰσοδύναμα.

1687. (1723). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ καὶ εἰς τὸ ἐσωτερικόν του ἕνα σημεῖον Ο. Ἀπὸ τὸ Ο φέρομεν κάθετον, ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ λαμβάνομεν τμῆμα ΟΑ'=ΒΓ. Ὁμοίως φέρομεν τὰς ΟΒ' καὶ ΟΓ' καθέτους ἐπὶ τὰς ΑΓ καὶ ΑΒ καὶ ἴσας ἀντιστοίχως μὲ τὰς ΑΓ καὶ ΑΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' εἶναι τριπλάσιον τοῦ ΑΒΓ.

1688. (1724). Δίδεται ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ ἕνα σημεῖον Ο εἰς τὸ ἐσωτερικόν του. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ ΓΔ, ΔΑ καὶ ἐπὶ τῶν καθέτων αὐτῶν λαμβάνομεν τμήματα ΟΚ=ΑΒ, ΟΛ=ΒΓ, ΟΜ=ΓΔ, ΟΝ=ΔΑ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΚΛΜΝ εἶναι διπλάσιον τοῦ ΑΒΓΔ.

1689. (1725). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν μίαν παράλληλον ΔΕ πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Δ καὶ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ε. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΕ εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΔΕ.

1690. (1726). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν του ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ λαμβάνομεν τὰ σημεῖα Α', Β', Γ' οὕτως, ὥστε τὰ τμήματα ΑΒ', ΒΓ', ΓΔ' νὰ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσα μὲ τὸ τρίτον τῶν πλευρῶν ΑΓ, ΑΒ, ΓΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου Α'Β'Γ' εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Γ' Ὁμάς. **1691.** (1727). Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι Ε. Προεκτείνομεν τὴν ΒΓ=α κατὰ ἕνα μῆκος ΓΔ=μα, τὴν ΓΑ=β κατὰ ἕνα μῆκος ΑΖ=νβ καὶ τὴν ΑΒ=γ κατὰ ἕνα μῆκος ΒΗ=λγ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΔΖΗ συναρτήσει τοῦ ἐμβαδοῦ Ε.

1692. (1728). Δίδεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ὁ κύκλος Ο ὁ ἐγγεγραμμένος εἰς αὐτό, ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται τῆς πλευρᾶς ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Δ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ γωνίαι ΒΟΔ καὶ ΑΟΓ εἶναι παραπληρωματικαί.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\dfrac{\overline{\text{ΟΔ}}^2}{\text{ΒΔ}\times\text{ΔΓ}} = \dfrac{\overline{\text{ΟΑ}}^2}{\text{ΑΒ}\times\text{ΑΓ}}$.

1693.(1729). Ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι περιγεγραμμένον περὶ κύκλον Ο-

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΑΒ+ΓΔ=ΒΓ+ΑΔ.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\widehat{\text{ΑΟΒ}}+\widehat{\text{ΓΟΔ}}=2$ ὀρθαί.

3ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\dfrac{\overline{\text{ΟΑ}}^2}{\overline{\text{ΟΓ}}^2} = \dfrac{\text{ΑΒ}\times\text{ΑΔ}}{\text{ΓΒ}\times\text{ΓΔ}}$.

1694. (1730). Ἐπὶ τυχούσης εὐθείας λαμβάνομεν τρία διαδοχικὰ σημεῖα Α, Β, Γ, τοιαῦτα, ὥστε ΑΒ=α καὶ ΒΓ=β. Μὲ πλευρὰς τὰς ΑΒ καὶ ΒΓ κατα-

σκευάζομεν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΓ τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΒΓΕ. Προεκτείνομεν τὰς ΑΔ καὶ ΓΕ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ζ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΔΒΓ εἶναι ἴσα.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία ω τῶν εὐθειῶν ΔΓ καὶ ΑΕ.

3ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων ΑΒΔ, ΕΒΓ, ΔΒΕ καὶ τοῦ τετραπλεύρου ΑΓΕΔ.

4ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΖΔΒΕ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδόν του.

Δ' Ὁμάς. **1695.** (1731). Νὰ ἐξηγηθοῦν γεωμετρικῶς αἱ ταυτότητες:

1ον. $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$.

2ον. $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$.

3ον. $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$.

1696. (1732). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράγωνον ἰσοδύναμον:

1ον. Πρὸς τὰ $^5/_8$ δοθέντος τετραγώνου.

2ον. Πρὸς τὰ $^5/_3$ δοθέντος τετραγώνου.

1697. Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν τρίγωνον εἰς δύο μέρη ἔχοντα λόγον μ : ν, δι' εὐθείας παραλλήλου πρὸς μίαν πλευράν του.

1698. (1734). Νὰ διαιρεθῇ ἕνα τρίγωνον εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, δι' εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν του (δύο περιπτώσεις).

1699. (1735). Νὰ διαιρεθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα διὰ μιᾶς εὐθείας παραλλήλου πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

1700. (1736). Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν τρίγωνον εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη δι' εὐθείας καθέτου ἐπὶ μίαν τῶν πλευρῶν του.

Ἀσκήσεις ἐπὶ Γ' Κεφαλαίου πρὸς γενικὴν ἐπανάληψιν

Α' Ὁμάς. **1701.** (1737). Ἀπὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ μιᾶς ἐκ τῶν πλευρῶν δοθέντος τριγώνου, νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα, ἡ ὁποία νὰ διαιρῇ τὸ τρίγωνον εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα ἢ ἔχοντα λόγον μ : ν.

1702. (1738). Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν τρίγωνον εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη δι' εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ δύο σημεῖα, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ τῶν πλευρῶν του.

1703. (1739). Ἀπὸ ἕνα σημεῖον μιᾶς τῶν ἴσων πλευρῶν ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ἀχθῇ μία εὐθεῖα ΔΕΖ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν βάσιν ΒΓ εἰς τὸ Ε καὶ τὴν προέκτασιν, τῆς ἄλλης ἴσης πλευρᾶς εἰς τὸ Ζ, εἰς τρόπον ὥστε τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΔΖ νὰ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ΑΒΓ.

1704. (1740). Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τρία μέρη ἀνάλογα πρὸς τρία δοθέντα μήκη, διὰ δύο παραλλήλων πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ.

1705. (1741). Νὰ εὑρεθῇ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ ἕνα σημεῖον Ο τοιοῦτον, ὥστε τὰ τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΑ νὰ εἶναι ἰσοδύναμα.

1706. (1742). Νὰ εὑρεθῇ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ ἕνα σημεῖον Ο τοιοῦτον, ὥστε τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΑ νὰ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τρία δοθέντα μήκη.

1707. (1743). Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν τετράγωνον εἰς τρία μέρη ἰσοδύναμα δι' εὐθειῶν παραλλήλων πρὸς μίαν τῶν διαγωνίων του.

1708. (1744). Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν παραλληλόγραμμον εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη δι' εὐθείας παραλλήλου πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

1709. (1745). Δοθὲν παραλληλόγραμμον νὰ διαιρεθῇ εἰς τρία μέρη ἰσοδύναμα δι' εὐθειῶν ἀγομένων ἔκ τινος τῶν κορυφῶν του.

1710. (1746). Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν τραπέζιον εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη δι' εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι συναντοῦν τὰς βάσεις του.

1711. (1747). Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν τραπέζιον, δι' εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις, εἰς δύο μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰς βάσεις του Β καὶ β.

1712 (1748). Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν τραπέζιον, δι' εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις, εἰς δύο μέρη ἔχοντα λόγον μ : ν.

1713. (1749). Νὰ διαιρεθῇ ἕνα τετράπλευρον εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη, δι' εὐθείας διερχομένης διὰ μιᾶς τῶν κορυφῶν του.

1714. (1750). Δοθὲν τετράπλευρον (ἢ δοθὲν πολύγωνον) νὰ διαιρεθῇ εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα δι' εὐθείας, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν του.

1715. (1751). Νὰ διαιρεθῇ δοθεὶς κύκλος, δι' ἀκτίνων, εἰς τέσσαρα μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 3, 4, 8, 9.

1716. (1752). Νὰ διαιρεθῇ δοθεὶς κύκλος, εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη δι' ἑνὸς ὁμοκέντρου κύκλου.

1717. (1753). Νὰ διαιρεθῇ δοθεὶς κύκλος δι' ἑνὸς ὁμοκέντρου κύκλου εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς δύο εὐθείας μ καὶ ν.

1718. (1754). Νὰ διαιρεθῇ δοθεὶς κύκλος εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον δι' ἑνὸς ὁμοκέντρου κύκλου.

1719. (1755). Νὰ διαιρεθῇ ἕνας κύκλος εἰς τρία μέρη ἀνάλογα τῶν μ, ν, ρ, διὰ δύο ὁμοκέντρων περιφερειῶν.

1720. (1756). Νὰ διαιρεθῇ ἕνας κύκλος εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη διὰ δύο περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται εἰς δοθὲν σημεῖον τοῦ δοθέντος κύκλου.

Β' Ὁμάς. **1721.** (1757). Δίδεται ἕνα παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς διαγωνίου ΑΓ ἕνα σημεῖον Ο τοιοῦτον ὥστε, ἂν φέρωμεν τὰς εὐθείας ΟΑ, ΟΒ, ΟΔ, νὰ διαιρῆται τὸ παραλληλόγραμμον εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη.

1722. (1758). Αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ΑΒ=8, ΑΓ=5, ΒΓ=7. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἕνα σημεῖον Δ μεταξὺ Α καὶ Β καὶ ἕνα σημεῖον Ε ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΓ μεταξὺ Α καὶ Γ καὶ τοιαῦτα, ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΔΕ καὶ τὸ τετράπλευρον ΔΕΓΒ νὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν περίμετρον καὶ τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν.

1723. (1759 Ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ δίδεται ἡ βάσις ΒΓ=12 μ. καὶ τὸ ὕψος ΑΔ=8 μέτρα. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς βάσεως ἕνα σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο τριγώνων ΑΒΜ καὶ ΑΜΓ νὰ εἶναι διπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου, τὸ ὁποῖον ἔχει διαστάσεις τὰ τμήματα ΒΜ καὶ ΜΓ.

1724. (1760). Δίδεται ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ ἀχθῇ ἀπὸ τὸ μέσον Ο τῆς ΒΓ, μία τέμνουσα, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν πλευρὰν ΑΒ εἰς τὸ ση-

μεῖον Μ, καί τὴν προέκτασιν τῆς ΑΓ εἰς τὸ σημεῖον Ν καὶ τοιαύτη, ὥστε νὰ εἶναι ἐμβ.ΟΜΒ+ἐμβ.ΟΝΓ=ἐμβ.ΑΒΓ.

1725. (1761) Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ πλευρᾶς α, λαμβάνομεν τὰ μήκη ΑΑ'=ΒΒ'=ΓΓ'=x κατὰ τὰς φορὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ἀντιστοίχως. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ x, ὥστε νὰ εἶναι

$$\frac{\text{ἐμβ. Α'Β'Γ'}}{\text{ἐμβ. ΑΒΓ}}=\frac{1}{2}.$$

1726. (1762). Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Μ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ μιᾶς πλευρᾶς δοθέντος παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, νὰ ἀχθῇ μία τέμνουσα ΕΜΖ, ἡ ὁποία νὰ ὁρίζῃ μὲ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΔ ἕνα τρίγωνον ἰσοδύναμον μὲ τὸ παραλληλόγραμμον.

1727. (1763). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Σ νὰ ἀχθῇ τέμνουσα τὰς πλευρὰς δοθείσης γωνίας οὕτως, ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον σχηματίζει ἡ τέμνουσα μὲ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας, νὰ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ δοθὲν τετράγωνον.

1728. (1764). Δίδεται κύκλος Ο ἀκτῖνος R. Νὰ ὁρισθῇ ἕνα σημεῖον Μ, ἐκτὸς τοῦ κύκλου, τοιοῦτον ὥστε, ἐὰν ἀχθοῦν αἱ ἐφαπτόμεναι ΜΑ καὶ ΜΒ εἰς τὸν κύκλον Ο, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΜΑΒ νὰ ἔχῃ λόγον k πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΟΑΒ.

1729. (1765). Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΑΒ δοθέντος κύκλου ἕνα σημεῖον τοιοῦτον, ὥστε αἱ ἡμιπεριφέρειαι, αἱ ὁποῖαι γράφονται ἑκατέρωθεν τῆς ΑΒ μὲ διαμέτρους τὰς ΑΓ καὶ ΓΒ, νὰ διαιροῦν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου εἰς δύο μέρη ἔχοντα λόγον μ : ν.

***Γ' Ὁμάς.* 1730.** (1766). Νὰ μετασχηματισθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον εἰς ἰσοδύναμον ἰσοσκελὲς τρίγωνον καὶ τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ μὲ αὐτὸ μίαν κοινὴν γωνίαν.

1731. (1767). Νὰ μετασχηματισθῇ δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ εἰς ἰσοσκελὲς τρίγωνον, ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν καὶ τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ μὲ αὐτὸ κοινὴν τὴν γωνίαν Α.

1732. (1768). Νὰ μετασχηματισθῇ τυχὸν τρίγωνον ΑΒΓ εἰς ἰσοδύναμον ἰσόπλευρον τρίγωνον.

1733. (1769). Νὰ μετασχηματισθῇ δοθὲν κανονικὸν πολύγωνον, εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον κανονικὸν πολύγωνον καὶ τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν.

1734. (1770). Νὰ μετασχηματισθῇ δοθὲν πολύγωνον μὲ 2ν πλευρὰς εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον πολύγωνον μὲ ν πλευράς.

***Δ' Ὁμάς.* 1735.** (1771). Εἰς δοθὲν τρίγωνον, νὰ ἐγγραφῇ ἕνα ὀρθογώνιον, ἰσοδύναμον μὲ δοθὲν τετράγωνον $λ^2$.

1736. (1772). Εἰς δοθὲν τρίγωνον νὰ ἐγγραφῇ ἕνα ὀρθογώνιον τοιοῦτον, ὥστε τὸ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἄνωθεν τοῦ ὀρθογωνίου νὰ ἔχῃ λόγον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ἴσον μὲ μ : ν.

1737. (1773). Εἰς ἕνα τετράγωνον πλευρᾶς α, νὰ ἐγγραφῇ ἕνα ἄλλο τετράγωνον, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν νὰ εἶναι $β^2$.

1738. (1774). Εἰς δοθὲν τετράγωνον, νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον, ὅμοιον πρὸς δοθὲν ὀρθογώνιον καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

1739. (1775). Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον, ἔχον ἐμβαδὸν ἴσον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν δοθέντος τετραγώνου. (Πανεπιστήμιον Θεσσαλονίκης).

1740. (1776). Εἰς δοθέντα κύκλον, νὰ ἐγγραφῇ ἕνα τετράπλευρον, ἂν γνωρίζωμεν τὰς διαγωνίους καὶ τὸ ἐμβαδόν του.

1741. (1777). Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθὲν τρίγωνον, ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ μέγιστον ἐμβαδόν.

1742. (1778). Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ ἐγγράψωμεν εἰς δοθὲν τετράγωνον.

1743. (1779). Εἰς δοθὲν τρίγωνον νὰ ἐγγραφῇ ἕνα τετράγωνον. Ποῖον εἶναι τὸ μεγαλύτερον ἐκ τῶν τριῶν τετραγώνων, τὰ ὁποῖα δυνάμεθα νὰ ἐγγράψωμεν εἰς τὸ τρίγωνον;

1744. (1780). Εἰς δοθὲν ἡμικύκλιον ἀκτῖνος ρ, νὰ ἐγγραφῇ τὸ μέγιστον τραπέζιον. Νὰ εὑρεθῇ ἡ περίμετρος αὐτοῦ καὶ τὸ ἐμβαδόν του. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸ οὕτω ἐγγραφὲν τραπέζιον, ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τραπεζίου. Διερεύνησις. (Σχολὴ Εὐελπίδων).

Ε' Ὁμάς. **1745.** (1781). Νὰ περιγραφῇ περὶ δοθὲν ὀρθογώνιον ἕνα ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν νὰ εἶναι μ^2.

1746. (1782). Νὰ περιγραφῇ περὶ κύκλον ἀκτῖνος R ρόμβος, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν νὰ εἶναι μ^2.

1747. (1783). Νὰ περιγραφῇ περὶ κύκλον ἀκτῖνος R ἕνα ἰσοσκελὲς τραπέζιον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ ἐμβαδὸν μ^2.

1748. (1784). Νὰ περιγραφῇ περὶ ἡμικύκλιον ἀκτῖνος R ἕνα ὀρθογώνιον τραπέζιον, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν νὰ εἶναι μ^2.

1749. (1785). Νὰ περιγραφῇ περὶ δοθέντα κύκλον, ἰσοσκελὲς τρίγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ τὸ ἐλάχιστον ἐμβαδόν.

ΣΤ' Ὁμάς. **1750.** (1786). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον, ἰσοδύναμον μὲ δοθὲν ὀρθογώνιον.

1751. (1787). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον, ἰσοδύναμον μὲ δοθὲν τρίγωνον.

1752. (1788). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὰς γωνίας του καὶ τὸ ἐμβαδόν του.

1753. (1789). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον, ὅμοιον πρὸς δοθὲν τρίγωνον καὶ ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν τετράγωνον.

1754. (1790). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν μίαν γωνίαν, τὴν διχοτόμον της καὶ τὸ ἐμβαδόν του.

1755. (1791). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ὕψος $υ_α$, τὸ ἄθροισμα $β+γ=λ$ καὶ τὸ ἐμβαδόν του Ε.

Ζ' Ὁμάς. **1756.** (1792). Μεταξὺ τῶν τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν κορυφῆς, ποῖον εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸ μεγαλύτερον ἐμβαδόν;

1757. (1793). Μεταξὺ ὅλων τῶν τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν, τὴν μικροτέραν περίμετρον ἔχει τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον.

1758. (1794(. Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Σ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς κύκλου Ο, νὰ ἀχθῇ μία τέμνουσα ΣΑΒ οὕτως, ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΟΑΒ νὰ εἶναι μέγιστον.

Η' Ὁμάς. 1759. (1795). Νὰ ὑπολογισθῇ, συναρτήσει τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τοὺς πόδας τῶν διχοτομουσῶν τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

1760. (1796). Ἂν α, β, γ εἶναι τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τριγώνου ΑΒΓ, καὶ Μ, Ν, Λ αἱ προβολαὶ τοῦ κέντρου βάρους Ζ αὐτοῦ ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΓ, ΒΓ, ΑΒ, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΜΝΛ, συναρτήσει τῶν α, β, γ.

1761. (1797). Ἀκολουθοῦντες τὴν περίμετρον δοθέντος τετραπλεύρου ΑΒΓΔ χωρίζομεν κάθε πλευράν του εἰς δύο μέρη, τὰ ὁποῖα ἔχουν λόγον μ : ν. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως, συναρτήσει τοῦ ἐμβαδοῦ Ε τοῦ ΑΒΓΔ.

1762. (1798). Αἱ πλευραὶ τριῶν κανονικῶν ὀκταγώνων εἶναι ἀντιστοίχως 12 μ. 16 μ. καὶ 48 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ:

1ον. ἡ πλευρὰ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ ὀκταγώνου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὰ τρία πρῶτα.

2ον. τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τελευταῖον αὐτὸ πολύγωνον.

Θ' Ὁμάς. 1763. (1799). Νὰ ἀποδειχθῇ διὰ τῶν ἐμβαδῶν ἡ ἄσκησις 270.

1764. (1800). Νὰ ἀποδειχθῇ διὰ τῶν ἐμβαδῶν ἡ ἄσκησις 271.

1765. (1801). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἑνὸς σημείου, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ἑνὸς ἰσοπλεύρου πολυγώνου, ἀπὸ τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου αὐτοῦ εἶναι σταθερόν, δηλ. ἀνεξάρτητον τῆς θέσεως τοῦ σημείου.

1766. (1802). Ἐὰν α καὶ β εἶναι αἱ πλευραὶ δύο τετραγώνων, τὰ ὁποῖα εἶναι ἰσοδύναμα μὲ τὰ τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν βάσεις ἀντιστοίχως τὰς βάσεις ἑνὸς τραπεζίου καὶ ὡς ἀπέναντι κορυφὰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τραπέζιον αὐτὸ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τετράγωνον πλευρᾶς α+β.

1767. (1803). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ καὶ μία εὐθεῖα xy, ἡ ὁποία δὲν τέμνει τὸ τρίγωνον· ἐὰν φέρωμεν τὰς καθέτους ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' ἐπὶ τὴν xy, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τρίγωνον Α''Β''Γ'', τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς κορυφὰς τὰ μέσα τῶν καθέτων αὐτῶν, εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΒΓ.

1768. (1804). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τραπεζίου εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς κορυφὰς τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του καὶ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του.

1769. (1805). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραπλεύρου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο γινομένων, τὰ ὁποῖα σχηματίζομεν, ἂν λάβωμεν τὰς δύο ἀπέναντι πλευράς του καὶ πολλαπλασιάσωμεν ἑκάστην ἐξ αὐτῶν ἐπὶ τὴν ἀπόστασίν της ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς ἄλλης.

1770. (1806). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραπλεύρου εἶναι τετραπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του καὶ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν του.

1771. (1807). Ἀπὸ τὸ μέσον ἑκάστης τῶν διαγωνίων ἑνὸς τετραπλεύρου φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ἄλλην διαγώνιον καὶ συνδέομεν τὴν τομὴν τῶν παραλλήλων αὐτῶν μὲ τὰ μέσα τῶν τεσσάρων πλευρῶν του. Νὰ ἀποδειχθῇ,

ὅτι τὸ τετράπλευρον διῃρέθη εἰς τέσσαρα ἰσοδύναμα μέρη.

1772. (1808). Δίδεται ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ ἀπὸ τὸ μέσον Ε τῆς διαγωνίου ΒΔ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ἄλλην διαγώνιον ΑΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν γραμμὴν ΔΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΓΖ διαιρεῖ τὸ τετράπλευρον εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

1773. (1809). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κανονικοῦ, ὀκταγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς ἕνα κύκλον εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς διαστάσεις τὰς πλευρὰς τῶν τετραγώνων, ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον.

1774. (1810). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἐξωτερικῶς αὐτοῦ ἕνα τόξον περιφερειας ΒΜΓ, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν χορδὴν ΒΓ. Φέρομεν τὴν ΑΜ, ἡ ὁποία συνδέει τὸ Α μὲ τὸ μέσον Μ τοῦ τόξου ΒΓΜ καὶ ἔπειτα ἀπὸ τὸ μέσον Α' τῆς ΒΓ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΜ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν γραμμὴν ΒΑΓ εἰς τὸ σημεῖον Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΜΔ διαιρεῖ τὴν ἐπιφάνειαν ΑΒΜΓΑ εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

1775. (1811). Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Α μιᾶς περιφερείας λαμβάνομεν ἕνα τόξον ΑΒ$=90^0$ καὶ πρὸς τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν ἕνα ἄλλο τόξον ΑΓ$=60^0$· φέρομεν τὴν ΓΒ καὶ τὴν ΑΔ παράλληλον πρὸς τὴν ΓΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΑΔΒΓ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ κύκλου.

1776. (1812). Δύο κύκλοι Ο καὶ Ο' ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς· ἀπὸ τὸ σημεῖον Α τῆς ἐπαφῆς των φέρομεν μίαν τέμνουσαν ΒΑΒ'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ ἐμβαδὰ τῶν δύο κυκλικῶν τμημάτων, τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ὑπὸ τῶν χορδῶν ΑΒ' καὶ ΑΒ καὶ τὰ ὁποῖα κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῶν, εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων τῶν κύκλων αὐτῶν.

Ἀσκήσεις ἐπὶ τοῦ Γ' καὶ Δ' βιβλίου πρὸς γενικὴν ἐπανάληψιν

Α' Ὁμάς. **1777.** (1813). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἕνα σημεῖον Δ ἐπὶ τῆς ΒΓ. Ἀπὸ τὰς κορυφὰς τοῦ τριγώνου φέρομεν παραλλήλους πρὸς μίαν δοθεῖσαν εὐθεῖαν xy. Ἡ παράλληλος, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ Α συναντᾷ τὴν ΒΓ εἰς τὸ Α' καὶ αἱ δύο ἄλλαι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὰς Β καὶ Γ συναντοῦν τὴν ΑΔ εἰς τὰ σημεῖα Β' καὶ Γ'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ΑΒΓ.

1778. (1814). Διαιροῦμεν τὴν πλευρὰν ΒΓ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ εἰς τρία ἴσα μέρη ΒΔ$=$ΔΕ$=$ΕΓ. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς ΔΕ φέρομεν τὴν ΑΜ καὶ ἀπὸ τὰ Δ καὶ Ε παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΜ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν ΑΒ εἰς τὸ Δ' καὶ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ε'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΜΔ' καὶ ΜΕ' διαιροῦν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη.

1779. (1815). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, Ο ἕνα σημεῖον ἐντὸς τοῦ τριγώνου καὶ τρία σημεῖα Α', Β', Γ', τὰ ὁποῖα κεῖνται ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ. Ἐὰν ΑΑ'', ΒΒ'', ΓΓ'' εἶναι αἱ παράλληλοι πρὸς τὰς ΟΑ', ΟΒ', ΟΓ' καὶ περατούμεναι εἰς τὰς πλευράς, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\frac{ΟΑ'}{ΑΑ''}+\frac{ΟΒ'}{ΒΒ''}+\frac{ΟΓ'}{ΓΓ''}=1.$$

1780. (1816). Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἐξωτερικῶς τοῦ τριγώνου κατασκευάζομεν παραλληλόγραμμα ΑΒΔΕ, ΑΓΖΘ. Ἐὰν Η εἶναι ἡ τομὴ τῶν εὐθειῶν ΔΕ καὶ ΖΘ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν παραλληλογράμμων αὐτῶν εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου ΒΓΚΛ, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς διαδοχικὰς πλευρὰς τὴν ΒΓ καὶ τὴν παράλληλον καὶ ἴσην πρὸς τὴν ΑΗ.

Β' Ὁμάς. **1781.** (1817). Ἕνας ἀγρὸς ἔχει σχῆμα τραπεζίου ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι ΑΒ=60 μ., ΓΔ=48 μ. καὶ τοῦ ὕψος υ=52 μ. Μία ὁδὸς πλάτους 8 μ. ἔχει χαραχθῇ ἐντὸς τοῦ ἀγροῦ παραλλήλως πρὸς τὰς βάσεις καὶ διαιρεῖ τὸν ἀγρὸν εἰς δύο μέρη, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑνὸς ἐκ τῶν δύο μερῶν.

1782. (1818). Ἑνὸς τραπεζίου ΑΒΓΔ δίδονται αἱ βάσεις ΑΒ=180 μ., ΓΔ=110 μ. τὸ ὕψος ΕΖ=60 μ. καὶ ἡ πλευρὰ ΒΔ=75 μ.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ ΔΓ.

2ον. Νὰ ἀχθῇ μία παράλληλος ΜΝ πρὸς τὰς βάσεις καὶ τοιαύτη, ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μέρους ΑΒΝΜ νὰ εἶναι ἴσον μὲ 4000 τ.μ.

3ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις ΕΗ τῆς ΜΝ ἀπὸ τὴν ΑΒ καὶ τὸ μῆκος τῆς ΜΝ.

1783. (1819). Εἰς ἕνα κύκλον Ο ἀκτῖνος R ἐγγράφομεν ἕνα ἰσοσκελὲς τραπέζιον ΑΒΓΔ. Ἡ διαγώνιος ΑΓ σχηματίζει μίαν γωνίαν 45° μὲ τὴν βάσιν ΑΒ καὶ μίαν γωνίαν 30° μὲ τὴν πλευρὰν ΑΔ. Νὰ ὑπολογισθοῦν:

1ον. τὰ μέτρα τῶν τόξων, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς πλευρὰς τοῦ τραπεζίου καὶ αἱ γωνίαι τῶν διαγωνίων του.

2ον. τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου. Ἐφαρμογή: R=1,40 μέτρα.

1784. (1820). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ δίδεται τὸ ὕψος ΑΔ=4 μ. καὶ τὰ τμήματα ΒΔ=3 μ. καὶ ΔΓ=7,5 μ., τὰ ὁποῖα ὁρίζει ἡ ΑΔ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ.

1ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ τὰ δύο ἄλλα ὕψη του ΒΕ καὶ ΓΖ.

2ον. Ἐγγράφομεν εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἕνα ὀρθογώνιον ΚΛΜΝ, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ΛΜ κεῖται ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου αὐτοῦ, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ὕψος ΜΝ εἶναι ἴσον μὲ 2 μέτρα.

1785. (1821). Εἰς ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΔΕ παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ καὶ ἐφαπτομένην τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ τρίγωνον αὐτό. Νὰ ὑπολογισθοῦν, συναρτήσει τοῦ ὕψους υ τοῦ τριγώνου καὶ τῆς ἀκτῖνος ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου:

1ον. ἡ περίμετρος τοῦ τραπεζίου ΔΒΓΕ.

2ον. τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου αὐτοῦ. Τί γίνονται οἱ τύποι τῆς περιμέτρου καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ, ὅταν τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσόπλευρον. Ἐφαρμογή: υ=150 μ. καὶ τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσόπλευρον.

1786. (1822). Εἰς ἕνα ἰσοσκελὲς τραπέζιον ΑΒΓΔ εἶναι: ΑΒ=30 μ., ΓΔ=20 μ., ΒΓ=ΑΔ=15 μ.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου.

2ον. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς βάσεως ΑΒ πρέπει νὰ φέρωμεν παράλληλον ΜΝ πρὸς τὴν ΑΒ οὕτως, ὥστε τὰ ἐμβαδὰ τῶν τραπεζίων ΔΜΝΓ καὶ ΜΑΒΝ νὰ ἔχουν λόγον 2 : 3.

1787. (1823). Εἰς ἕνα ἰσοσκελὲς τραπέζιον ΑΒΓΔ αἱ μὴ παράλληλοι πλευραί του ΑΔ καὶ ΒΓ εἶναι ἴσαι μὲ τὴν μικρὰν βάσιν του ΔΓ=12 ἐκ. Αἱ γωνίαι του Α καὶ Β εἶναι 60° ἑκάστη.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος ΔΗ, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου καὶ ἡ διαγώνιος ΒΔ.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΑΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ.

Γ' Ὁμάς. **1788.** (1824). Δίδεται ἡ βάσις ΒΓ=2α καὶ τὸ ὕψος ΑΗ=υ ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ. Νὰ ὁρισθῇ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἕνα σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε ἐὰν φέρωμεν τὴν ΜΝ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ καὶ τὴν ΜΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου τραπεζίου ΜΝΓΔ νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὰ $^2/_8$ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

1789. (1825) Δίδονται δύο εὐθεῖαι Χ καὶ Υ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ Ο. Δύο εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ σταθεροῦ μήκους ὀλισθαίνουν ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν Χ καὶ Υ, οὕτως ὥστε τὸ σημεῖον Ο νὰ μένῃ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ἑκάστου ἐξ αὐτῶν. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου ΑΓΒΔ μένει σταθερόν.

Δ' Ὁμάς. **1790.** (1826). Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β καὶ ζητεῖται ὁ τόπος τοῦ σημείου Μ, τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόστασις ΑΜ νὰ ἔχῃ δοθέντα λόγον πρὸς τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου Β ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν ΑΜ.

1791. (1827). Ἐξ ἑνὸς σημείου Α, κειμένου ἐκτὸς κύκλου Ο, φέρομεν μίαν τέμνουσαν αὐτοῦ ΑΒΓ. Εἰς τὰ δύο σημεῖα Β καὶ Γ τῆς τομῆς τῆς περιφερείας φέρομεν δύο ἐφαπτομένας αὐτῆς ΒΜ καὶ ΓΜ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τῆς τομῆς τῶν ἐφαπτομένων τούτων.

1792. (1828). Δίδεται ἕνα ὡρισμένον σημεῖον Ρ καὶ μία περιφέρεια Ο. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς περιφερείας Ο ἕνα τυχὸν σημεῖον Μ καὶ ἐπὶ τῆς ΡΜ ἕνα ἄλλο σημεῖον Μ' τοιοῦτον, ὥστε τὸ γινόμενον ΡΜ×ΡΜ' νὰ εἶναι σταθερόν. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ Μ', ὅταν τὸ Μ διαγράφῃ τὴν περιφέρειαν Ο.

1793. (1829). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεών των ἀπὸ τὰς κορυφὰς ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ἰσοῦται μὲ k^2.

1794. (1830). Δύο κύκλοι μεταβλητοὶ ἐφάπτονται μιᾶς σταθερᾶς εὐθείας, ὁ μὲν πρῶτος εἰς τὸ σταθερὸν σημεῖον Α, ὁ δὲ δεύτερος εἰς τὸ σταθερὸν σημεῖον Β. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν κοινῶν σημείων τῶν δύο κύκλων, ὅταν ὁ λόγος τῶν ἀκτίνων των εἶναι σταθερός.

1795. (1831). Δίδονται δύο ἀπέναντι πλευραὶ ΑΒ καὶ ΓΔ ἑνὸς τετραπλεύρου, αἱ ὁποῖαι προεκτεινόμεναι τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Ο. Μία ἐκ τῶν πλευρῶν ἡ ΑΒ εἶναι ὡρισμένη, ἡ δὲ ἄλλη ΓΔ στρέφεται περὶ τὸ Ο. Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τοῦ σημείου Μ εἰς τὸ ὁποῖον τέμνονται αἱ δύο ἄλλαι πλευραὶ ΑΓ καὶ ΒΔ καὶ ὁ τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς Μ' τῶν διαγωνίων ΑΔ καὶ ΒΓ.

1796. (1832). Δίδονται τρία σημεῖα Α, Β, Γ, κείμενα ἐπὶ μιᾶς εὐθείας (τὸ Γ εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν Α καὶ Β). Φέρομεν ἀπείρους περιφερείας διερχομένας διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β. Συνδέομεν τὸ σημεῖον Γ μὲ τὰ σημεῖα τομῆς Δ καὶ Δ' μιᾶς ἐκ τῶν περιφερειῶν τούτων Ο καὶ τῆς καθέτου ἐκ τοῦ μέσου Κ

τῆς ΑΒ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων Μ καὶ Μ', εἰς τὰ ὁποῖα αἱ εὐθεῖαι ΓΔ καὶ ΓΔ' συναντοῦν τὴν περιφέρειαν αὐτήν, ὅταν τὸ κέντρον τοῦ κύκλου Ο μετατίθεται.

Ε' ῾Ομάς. 1797. (1833). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς πλευρᾶς ΑΓ. ᾿Επὶ τῆς ΑΒ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΑ λαμβάνομεν μήκη ΑΕ=ΑΔ=ΑΓ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία ΒΔΓ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας ΒΑΓ.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\text{γων}.ΒΕΓ=\text{γων}.\frac{Α}{2}+1$ ὀρθ.

3ον. ᾿Εὰν ΑΓ=α καὶ γων.ΒΑΓ=120°, νὰ ὑπολογισθοῦν, συναρτήσει τοῦ α, ὁ λόγος $\frac{\overline{ΓΔ}^2}{\overline{ΓΕ}^2}$, αἱ εὐθεῖαι ΓΔ, ΓΕ, ἡ κάθετος ΓΗ ἐπὶ τὴν ΒΔ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΕΓΔ.

1798. (1834). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Θ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων του. Προεκτείνομεν τὴν διάμεσον ΑΔ κατὰ μῆκος ΔΖ=ΔΘ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΒΘΖ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν μὲ τὰς τρεῖς διαμέσους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

2ον. ᾿Εξ αὐτοῦ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον κατασκευάζεται μὲ πλευρὰς τὰς τρεῖς διαμέσους εἶναι ἴσον μὲ τὰ $^3/_4$ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

1799. (1835). Δίδεται ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ πλευρᾶς α. ᾿Εκ τοῦ σημείου Γ φέρομεν τὴν Γx κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ. ᾿Επὶ τοῦ ὕψους ΑΔ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν ἕνα σημεῖον Ο τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι ΑΟ=2·ΟΔ. Φέρομεν τὴν ΒΟ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Γx εἰς τὸ σημεῖον Ε.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΕΓ εἶναι ἰσοσκελές.

2ον. Νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΕ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

3ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ΒΕ καὶ ΓΕ συναρτήσει τῆς πλευρᾶς ΒΓ=α.

4ον. Νὰ προσδιορισθῇ τὸ κέντρον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΕ.

1800. (1836). Δίδεται τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ πλευρᾶς α. Φέρομεν τὴν διχοτόμον Γx τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Γ καὶ τὴν κάθετον ΑΔ ἐπὶ τὴν Γx.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ Γx εἶναι παράλληλοι.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ὀρθογώνιον.

3ον. ῎Εστω ΑΗ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΓΗ καὶ ΑΓΔ εἶναι ἴσα.

4ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν, συναρτήσει τοῦ α, τὰ μήκη ΓΔ, ΑΔ, ΒΔ

5ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΒΓΔ.

1801. (1837), ῞Ενα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ πλευρᾶς α εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον Ο. Λαμβάνομεν ἕνα σημεῖον Μ ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΓ καὶ φέρομεν τὰς ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ. ῾Η ΜΑ τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Δ καὶ ἔστω ὅτι ΜΔ=λ, ΜΒ=μ., ΜΓ=μ'. ῎Εστω Ε ἕνα σημεῖον τῆς ΜΑ τοιοῦτον, ὥστε γων.ΜΒΕ=60°.

1ον. Νὰ συγκριθῇ ἡ ΜΕ πρὸς τὸ μ, ἡ ΕΒ πρὸς τὸ μ'.

2ον. Νὰ συγκριθοῦν τὰ τρίγωνα ΒΜΑ καὶ ΔΜΓ· ἐξ αὐτοῦ νὰ ἐξαχθῇ μία σχέσις μεταξὺ τῶν μ, μ', λ.

3ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μ, μ', λ εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν μ=μ', συναρτήσει τοῦ α, καὶ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΒΜΓ.

1802. (1838). Ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον Ο ἀκτῖνος R. Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου αὐτοῦ τέμνουν τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε.

1ον. Ποία εἶναι ἡ θέσις τοῦ Δ καὶ ποία ἡ θέσις τοῦ Ε ἐπὶ τῶν τόξων ΑΓ καὶ ΑΒ; Ποῖον εἶναι τὸ μῆκος τῆς χορδῆς ΑΕ, συναρτήσει τοῦ R.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ διχοτόμοι ΒΔ καὶ ΓΕ τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ τέμνονται εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

3ον. Ποία εἶναι ἡ φύσις τοῦ τετραπλεύρου ΑΕΔΟ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδόν του.

4ον. Φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου Ο εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Σ. Ποία εἶναι ἡ φύσις τοῦ τριγώνου ΒΓΣ;

5ον. Ποῦ εὑρίσκεται τὸ σημεῖον τῆς τομῆς Θ τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν ΓΒΣ καὶ ΒΓΣ;

1803. (1839). Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὸ ὕψος ΑΗ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ. Ἀπὸ τὸ Η φέρομεν τὰς καθέτους ΗΜ καὶ ΗΝ ἐπὶ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως.

1ον. Ἐὰν ΗΒ=α καὶ ΗΒ=β, νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη ΑΗ, ΜΝ, ΑΒ, ΑΓ.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΒΜΗ, ΗΝΓ, ΑΜΝ εἶναι ὅμοια. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τοῦ ἐμβαδοῦ ἑκάστου τῶν τριῶν τελευταίων τριγώνων πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἐξ αὐτῶν συνάγομεν, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΜΑΝ εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῶν ἐμβαδῶν ΒΜΗ καὶ ΗΝΓ.

3ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ κύκλος, ὁ ὁποῖος γράφεται μὲ διάμετρον τὴν ΒΗ ἐφάπτεται τῆς ΜΝ εἰς τὸ Μ καὶ ὁ κύκλος, ὁ ὁποῖος γράφεται μὲ διάμετρον τὴν ΗΓ ἐφάπτεται τῆς ΜΝ εἰς τὸ Ν.

1804. (1840). Δίδεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου αἱ κάθετοι πλευραὶ εἶναι ΑΒ=γ καὶ ΑΓ=β. Φέρομεν τὴν διχοτόμον ΑΔ τῆς ὀρθῆς γωνίας Α, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν ὑποτείνουσαν εἰς τὸ Δ. Ἐκ τοῦ Γ φέρομεν τὴν ΓΕ παράλληλον πρὸς τὴν ΔΑ, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν προέκτασιν τῆς ΒΑ* εἰς τὸ Ε.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΑΕ=ΑΓ καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ΓΕ.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ΑΔ.

3ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ΑΔΓΕ.

1805. (1841). Μὲ ὑποτεινούσας τὰς καθέτους πλευρὰς ΑΒ=γ καὶ ΑΓ=β, ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζομεν, ἐξωτερικῶς τοῦ τριγώνου, τὰ ὀρθογώνια ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΕΓ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Ε, Α, Δ κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ΓΕΔΒ.

3ον. Ἐὰν Μ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΒΓ, φέρομεν τὰς ΜΔ καὶ ΜΕ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία ΕΜΔ εἶναι ὀρθή.

4ον. Προεκτείνομεν τὰς ΔΕ καὶ ΒΓ μέχρι τῆς συναντήσεώς των εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ λόγοι $\frac{ΖΓ}{ΖΒ}$ καὶ $\frac{ΖΓ}{ΒΓ}$.

1806. (1842). Δίδεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ. Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ. Κατασκευάζομεν, συμμετρικῶς ὡς πρὸς τὴν ΑΒ, τὸ τρίγωνον ΑΒΕ ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ΑΔΒ καὶ συμμετρικῶς πρὸς τὴν ΑΓ τὸ τρίγωνον ΑΓΖ ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ΑΓΔ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρία σημεῖα Ε, Α, Ζ κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΒΓΖ εἶναι ὀρθογώνιον τραπέζιον.

2ον. Ἐὰν εἶναι ΑΓ=β καὶ ΑΒ=γ, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου καὶ τὸ ὕψος του ΕΖ.

3ον. Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν μηκῶν β καὶ γ, ἵνα γων.ΖΓΒ=60°.

1807. (1843). Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (Α=90°) καὶ διαιροῦμεν τὴν ΑΒ εἰς ν ἴσα μέρη· ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΓ. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἐμβαδὰ τῶν ν μερῶν εἰς τὰ ὁποῖα διῃρέθη τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ νὰ ἐξαχθῇ ἐξ αὐτοῦ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων περιττῶν ἀριθμῶν εἶναι ἴσον μὲ $ν^2$. Ἐφαρμογή: Νὰ γίνῃ τὸ σχῆμα καὶ ἡ ἀπόδειξις διὰ ν=6.

1808. (1844). Δίδεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α. Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ καὶ μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα τὴν ΑΔ γράφομεν περιφέρειαν. Ἐκ τῶν κορυφῶν Β καὶ Γ φέρομεν ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας Α, αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται αὐτῆς εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι ΒΕ καὶ ΓΖ εἶναι παράλληλοι καὶ ὅτι ἡ ΕΖ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου Α.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $ΒΕ \times ΓΖ = \frac{1}{4}\overline{ΕΖ}^2$.

3ον. Φέρομεν τὴν ΔΕ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Μ καὶ τὴν ΔΖ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ν. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ ΜΝ καὶ ΑΔ εἶναι ἴσαι.

4ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΕΔΖ, ἐὰν εἶναι ΑΒ=6 ἑκ. καὶ ΑΓ=8 ἑκ.

1809. (1845). Δίδεται τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΒΓ λαμβάνομεν τμήματα $ΑΕ=ΒΖ=\frac{2}{3}α$.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΖ καὶ ΔΕ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Μ καθέτως.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΕΜ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΕΔ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητος καὶ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΕΜ.

3ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου ΔΜΖΓ, συναρτήσει τοῦ α.

1810. (1846). Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΔ καὶ ΔΓ ἑνὸς τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευρᾶς α λαμβάνομεν μήκη $ΑΕ=ΔΖ=\frac{α}{3}$.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΑΔΖ εἶναι ἴσα καὶ ὅτι ἡ ΑΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΕ.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ΒΕ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΕ, συναρτήσει τοῦ α.

3ον. Ἐὰν Η εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ΑΖ καὶ ΒΕ, νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων ΑΕΗ καὶ ΑΗΒ. Ἐφαρμογή: $\alpha=6$ μ.

1811. (1847). Δίδεται ἕνα τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α. Προεκτείνομεν τὰς πλευρὰς ΒΓ καὶ ΓΔ κατὰ τὰς φορὰς ΒΓx καὶ ΓΔy καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων αὐτῶν λαμβάνομεν τμήματα $ΒΜ=\beta$ καὶ $ΔΝ=\beta$, $(\beta>\alpha)$. Φέρομεν τὰς ΑΝ καὶ ΑΜ καὶ κατασκευάζομεν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΜΖΝ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον αὐτὸ εἶναι τετράγωνον.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ Ζ κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας yΓx καὶ ὅτι ἡ γωνία ΑΓΖ εἶναι ὀρθή. Ἀντιστρόφως, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ Ζ κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας yΓx, νὰ ὁρισθῇ ἡ θέσις τοῦ Μ καὶ νὰ κατασκευασθῇ τὸ τετράγωνον.

3ον. Ἔστω Ο τὸ μέσον τῆς ΑΖ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΒΟΖΓ εἶναι ἕνα τραπέζιον καὶ νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ βάσεις, τὸ ἐμβαδόν του καὶ ἡ διαγώνιος ΒΖ, συναρτήσει τῶν α καὶ β.

1812. (1848). Ἡ γωνία Α ἑνὸς ρόμβου ΑΒΓΔ εἶναι 120°. Συνδέομεν δι' εὐθείας τὰ μέσα Μ καὶ Ν τῶν πλευρῶν ΒΑ καὶ ΒΓ. Ἐπίσης συνδέομεν τὰ μέσα Ρ καὶ Σ τῶν πλευρῶν ΔΑ καὶ ΔΓ· τέλος συνδέομεν τὰ σημεῖα Α καὶ Ν.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἑξάγωνον ΑΡΣΓΝΜ εἶναι κανονικόν.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΑΝ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ.

3ον. Ὑποθέτομεν, ὅτι $ΑΒ=2\alpha$· νὰ ὑπολογισθῇ, συναρτήσει τοῦ α, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ρόμβου.

1813. (1849). Αἱ πλευραὶ ἑνὸς παραλληλογράμμου ἔχουν μήκη α καὶ β, ἡ δὲ μεγαλυτέρα διαγώνιός του ἔχει μῆκος γ.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς στεφάνης, ἡ ὁποία περιέχεται μεταξὺ τῶν δύο περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν διαμέτρους τὴν μεγαλυτέραν καὶ μικροτέραν διαγώνιον τοῦ παραλληλογράμμου.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῆς χορδῆς τοῦ μεγαλυτέρου κύκλου, ἡ ὁποία ἐφάπτεται τῆς περιφερείας τοῦ μικροτέρου κύκλου.

1814. (1850). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι κάθε παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ περιγεγραμμένον περὶ ἕνα κύκλον, εἶναι ρόμβος.

1ον. Μεταξὺ τῶν διαγωνίων ΑΓ καὶ ΒΔ τοῦ ρόμβου αὐτοῦ, νὰ ἀποδειχθῇ ἡ σχέσις $\frac{1}{ΑΓ^2}+\frac{1}{ΒΔ^2}=\frac{1}{4R^2}$, ὅπου R παριστάνει τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου.

2ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ ρόμβου εἶναι ἴση μὲ $\frac{4R\sqrt{3}}{3}$.

3ον. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Ε καὶ Ε' τὰ ἐμβαδὰ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ καὶ ἐκείνου, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ γινόμενον $Ε\times Ε'$ εἶναι σταθερόν.

4ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ τοῦ δευτέρου παραλληλογράμμου, ἐὰν ἡ πλευρὰ τοῦ ρόμβου εἶναι ἴση μὲ $\frac{4R\sqrt{3}}{3}$.

1815. (1851). Εἰς ἕνα τραπέζιον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι ΑΒ=α, ΓΔ=β φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΕΖ, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του. Ἡ ΕΖ τέμνει τὴν διαγώνιον ΑΓ εἰς τὸ Θ καὶ τὴν ΒΔ εἰς τὸ Η. Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. ὅτι $ΕΖ=\frac{α+β}{2}$.

2ον. ὅτι $ΘΗ=\frac{α-β}{2}$.

3ον. ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν ἐμβαδῶν τῶν τραπεζίων ΑΒΖΕ καὶ ΕΖΓΔ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΒΔΘ.

1816. (1852). Τραπεζίου ΑΒΓΔ δίδεται ἡ μεγάλη βάσις ΑΒ=4α, ἡ μὴ παράλληλος πλευρὰ ΑΔ=2α καὶ αἱ γωνίαι $Α=60^o$ καὶ $Β=45^o$.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ συναρτήσει τοῦ α, τὸ ὕψος, ἡ βάσις ΓΔ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου.

2ον. Ἐπὶ τῆς βάσεως ΑΒ λαμβάνομεν ἕνα σημεῖον Μ ἀπέχον τοῦ Α ἀπόστασιν $ΑΜ=\frac{3α}{2}$. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς βάσεως ΓΔ ἕνα σημεῖον Ν τοιοῦτον, ὥστε τὰ τραπέζια ΑΜΝΔ καὶ ΜΒΓΝ νὰ εἶναι ἰσοδύναμα.

1817. (1853). Ἕνας κῆπος ἔχει σχῆμα ἑνὸς τραπεζίου ΑΒΓΔ. Ἡ μεγάλη βάσις ΑΒ εἶναι ἴση μὲ 2α, ἡ μικρὰ βάσις ΓΔ εἶναι ἴση μὲ 2β. Αἱ γωνίαι Α καὶ Β εἶναι 60^o ἑκάστη.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ πλευραὶ ΑΔ καὶ ΒΓ εἶναι ἴσαι καὶ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος των.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κήπου.

3ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῆς παραλλήλου ΕΖ πρὸς τὰς βάσεις του, ἡ ὁποία διαιρεῖ τὸ τραπέζιον εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

4ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΟΑΒ, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν, ἐὰν προεκτείνωμεν τὰς μὴ παραλλήλους πλευράς του μέχρι τῆς συναντήσεώς των εἰς τὸ σημεῖον Ο. Ἐφαρμογή : 2α=82 μ., 2β=38 μ.

1818. (1854). Εἰς ἕνα ἰσοσκελὲς τραπέζιον ΑΒΓΔ συνδέομεν τὰ μέσα Ε, Ζ, Η, Θ τῶν πλευρῶν του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι ῥόμβος.

2ον. Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τοῦ ἰσοσκελοῦς τραπεζίου, ἵνα ὁ ἐγγεγραμμένος ῥόμβος εἶναι ἕνα τετράγωνον.

3ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α=3,45 μ. τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου. (Φυσικὸν τμ. Παν. Ἀθηνῶν).

1819. (1855). Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον τραπέζιον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι ΑΒ=α, ΓΔ=β καὶ τοῦ ὁποίου ἡ μὴ κάθετος πρὸς τὰς βάσεις πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ α+β.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς ΑΔ εἶναι μέσον ἀνάλογον πρὸς τὰς βάσεις.

2ον. Ἔστω Ε ἕνα σημεῖον τῆς ΒΓ καὶ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι ΒΕ=α. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΔΕΑ εἶναι ὀρθογώνιον.

3ον. Ἐὰν Ο εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΔ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΔΕ καὶ ΟΓ εἶναι κάθετοι ἀναμεταξύ των. Ὁμοίως καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΕ καὶ ΟΒ εἰ-

ναι κάθ ιοι ἀναμεταξύ των. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς γωνίας ΒΟΓ.

1820. (1856). Εἰς ἕνα δισορθογώνιον τραπέζιον ΑΒΓΔ ($Α=Δ=90^0$), τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶναι ἴσον μὲ α, αἱ βάσεις του εἶναι $ΑΒ=x_1$, $ΓΔ=x_2$, ὅπου x_1 καὶ x_2 εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2-4αx+2α^2=0$.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τραπέζιον αὐτὸ εἶναι περιγεγραμμένον περὶ κύκλον.

3ον. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΔ ἕνα σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε ἐὰν φέρωμεν τὰς εὐθείας ΜΒ καὶ ΜΓ, τὰ τρίγωνα ΑΜΒ καὶ ΔΜΓ νὰ εἶναι ἰσοδύναμα.

4ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΒΜΓ.

1821. (1857). Εἰς ἕνα τραπέζιον ΑΒΓΔ (ΑΒ ἡ μεγάλη βάσις) φέρομεν τὰς διαγωνίους ΑΓ καὶ ΒΔ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Ο καὶ γνωρίζομεν, ὅτι τὸ ἐμβ. τριγ.$ΟΑΒ=α^2$ καὶ ἐμβ. τριγ.$ΓΟΔ=β^2$. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. ὅτι τὰ τρίγωνα ΟΔΑ καὶ ΟΒΓ εἶναι ἰσοδύναμα.

2ον. ὅτι ἐμβ. τριγ.$ΟΔΑ=αβ$.

3ον. ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου εἶναι ἴσον μὲ $(α+β)^2$.

4ον. Προεκτείνομεν τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς ΑΔ καὶ ΒΓ μέχρι τῆς συναντήσεώς των εἰς ἕνα σημεῖον Σ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἐμβ. τριγ.$ΣΔΓ=β^2\frac{α+β}{α-β}$ καὶ ὅτι ἐμβ. τριγ.$ΣΑΒ=α^2\frac{α+β}{α-β}$. Ἐφαρμογή: $α^2=9$ τ.μ., $β^2=4$ τ.μ.

1822. (1858). Ἕνας ἀγρὸς σχήματος τραπεζίου ΑΒΓΔ πρόκειται νὰ μοιρασθῇ μεταξὺ τριῶν κληρονόμων εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν ἡλικιῶν των, διὰ παραλλήλων εὐθειῶν πρὸς τὰς βάσεις του ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ οὕτως, ὥστε τὸ μεγαλύτερον μέρος νὰ συνορεύῃ μὲ τὴν μεγάλην βάσιν καὶ τὸ μικρότερον μὲ τὴν μικρὰν βάσιν. Αἱ ἡλικίαι τῶν κληρονόμων εἶναι 6 ἔτη, 9 ἔτη 12 ἔτη.

1ον. Νὰ σημειωθοῦν αἱ γεωμετρικαὶ κατασκευαί, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ κάμωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ἀγροῦ διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς δύο γραμμὰς τοῦ διαχωρισμοῦ τοῦ ἀγροῦ.

2ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριῶν μερῶν, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν μὴ παράλληλον πλευρὰν ΒΓ=400 μ. καὶ τὴν ἀπόστασιν ΟΗ=45 μ. τοῦ μέσου Ο τῆς ΑΔ ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΒΓ.

ΣΤ' Ὁμάς. **1823.** (1859). Δίδεται μία εὐθεῖα xy καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς xy. Ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β φέρομεν τὰς καθέτους ΑΑ' καὶ ΒΒ' πρὸς τὴν xy.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ΑΒΒ'Α', ἂν γνωρίζωμεν ὅτι ΑΒ=10 ἑκ., ΒΒ'=10 ἑκ. καὶ ΑΑ'=5 ἑκ.

2ον. Νὰ εὑρεθῇ ἡ φύσις τοῦ τριγώνου ΑΒΒ'.

3ον. Ὁρίζομεν τὸ συμμετρικὸν Α'' τοῦ σημείου Α πρὸς τὴν xy καὶ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν Α''Β, ἡ ὁποία τέμνει τὴν xy εἰς τὸ Γ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι γων.ΑΓx=γων.ΒΓy.

1824. (1860). Ἑκατέρωθεν μιᾶς εὐθείας ΑΒ=α κατασκευάζομεν ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΔ, (ΒΑ=ΒΔ), τοῦ ὁποίου ἡ γων.$ΑΒΔ=30^0$. Φέρομεν τὴν ΔΗ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ, συναρτήσει τοῦ α, τὸ μῆκος ΔΗ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου ΓΑΔΒ.

2ον. Ἡ παράλληλος, ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ Δ πρὸς τὴν ΑΒ συναντᾷ τὴν προέκτασιν τῆς ΓΒ εἰς τὸ Μ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ΒΜ, ΓΜ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΓΑΜ συναρτήσει τοῦ α.

3ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΓΑΜ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ τετράπλευρον ΓΑΔΒ.

4ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ περιφέρεια διαμέτρου ΑΒ ἐφάπτεται τῆς ΔΜ καὶ διέρχεται διὰ τῶν μέσων τῶν ΒΓ, ΓΑ καὶ ΑΔ.

1825. (1861). Ἐπὶ εὐθείας λαμβάνομεν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, οὕτως ὥστε νὰ εἶναι ΑΒ=ΒΓ=ΓΔ=α. Μὲ πλευρὰν τὴν ΒΓ κατασκευάζομεν τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΒΓΕ. Φέρομεν τὴν ΑΕ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν κάθετον τὴν ἀγομένην ἐκ τοῦ Δ ἐπὶ τὴν ΑΔ εἰς τὸ σημεῖον Ζ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΑΕ=ΕΖ.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΒΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΖ.

3ον. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΓΔΖ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία Α εἶναι 30°.

4ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν, συναρτήσει τοῦ α, αἱ ΑΕ, ΑΖ, ΖΔ, ΖΓ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῶν τριγώνων ΑΒΕ, ΑΕΓ, ΑΖΓ, ΑΖΔ.

1826. (1862). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας xy λαμβάνομεν κατὰ σειρὰν τὰ σημεῖα Α, Λ, Μ, Ν, Β.

1ον. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΓΜ, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ ὑποτείνουσαν τὴν ΑΜ καὶ ὡς ὕψος τὸ ΓΔ.

2ον. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΔΜ, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ ὑποτείνουσαν τὴν ΒΜ καὶ τὴν ΔΝ ὡς διχοτόμον τῆς γωνίας Δ.

3ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΔΓ, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ΑΒ=16 μ. καὶ ὅτι τὰ τμήματα ΑΛ, ΛΜ, ΜΝ, ΝΒ σχηματίζουν ἀριθμητικὴν πρόοδον, τῆς ὁποίας ὁ λόγος εἶναι ἴσος μὲ 2 μέτρα.

1827. (1863). Δίδεται ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ μία εὐθεῖα ΧΥ. Ἀπὸ τὰς ἀπέναντι κορυφὰς Α καὶ Γ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν ΧΥ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν ΒΔ εἰς τὰ Α' καὶ Γ' καὶ ἀπὸ τὰς κορυφὰς Β καὶ Δ παραλλήλους πρὸς τὴν ΧΥ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν ΑΓ εἰς τὰ Β' καὶ Δ'. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. ὅτι τὰ ζεύγη τῶν τριγώνων ΟΒΓ καὶ ΟΒ'Γ', ΟΑΔ καὶ ΟΑ'Δ', ΟΑΒ καὶ ΟΑ'Β', ΟΓΔ καὶ ΟΓ'Δ' εἶναι ἰσοδύναμα.

2ον. ὅτι τὸ τετράπλευρον Α'Β'Γ'Δ' εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ΑΒΓΔ.

Ζ' Ὁμάς. **1828.** (1864). Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Α μιᾶς περιφερείας Ο ἀκτῖνος R φέρομεν δύο χορδὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἴσας μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου, τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Β φέρομεν τὴν χορδὴν ΒΔ ἴσην μὲ τὴν πλευρὰν κανονικοῦ ἑξαγώνου, ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον Ο καὶ προεκτείνομεν αὐτὴν κατὰ μῆκος ΔΖ=ΒΔ. Τέλος φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΓΖ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὸ σημεῖον Ε.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΒΓΖ εἶναι ἰσόπλευρον.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου ΒΓΕΔ.

1829. (1865). Δίδεται ἡμιπεριφέρεια Ο διαμέτρου ΑΒ=3α καὶ ἕνα σημεῖον Σ ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας.

1ον. Νὰ ἀχθῇ μία εὐθεῖα ΓΔ=α, παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ καὶ τεμνουσα

τὰς πλευρὰς ΣΑ καὶ ΣΒ τοῦ τριγώνου ΣΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ ἀντιστοίχως.

2ον. Ἔστω Μ τὸ μέσον τῆς ΓΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τμῆμα ΟΜ εἶναι σταθερόν, οἱαδήποτε καὶ ἐὰν εἶναι ἡ θέσις τοῦ Σ ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας. Κατόπιν τούτου νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ Μ, ὅταν τὸ Σ διαγράφῃ τὴν ἡμιπεριφέρειαν.

3ον. Ὑποθέτομεν, ὅτι γων.ΑΒΣ=30°· φέρομεν τὴν ΔΕ παράλληλον τῆς ΣΑ καὶ ΔΗ παράλληλον τῆς ΓΕ. α) Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΓΣΗΔ εἶναι ρόμβος. β) Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ περιφέρεια, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τῶν σημείων Δ, Ε, Β εἶναι ἐφαπτομένη τῆς ΔΑ. γ) Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΓΑΗΔ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται τῆς ΔΒ δ) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΣΓΔ.

1830. (1866). Εἰς κύκλον Ο ἀκτῖνος R φέρομεν δύο χορδὰς ΑΒ καὶ ΓΔ παραλλήλους καὶ κειμένας ἑκατέρωθεν τοῦ κέντρου Ο καὶ ἴσας ἀντιστοίχως μὲ τὰς πλευρὰς ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγώνου, ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν κύκλον Ο.

1ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ τοῦ τραπεζίου ΑΒΔΓ, τὸ ὕψος του καὶ τὸ ἐμβαδόν του.

2ον. Φέρομεν τὰς χορδὰς ΑΔ καὶ ΒΓ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ε. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ σημεῖον Ε κεῖται ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΘΚ, τῆς καθέτου ἐπὶ τὰς χορδὰς ΑΒ καὶ ΓΔ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΕΒ καὶ αἱ διαγώνιοι ΑΔ καὶ ΒΓ.

3ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων ΑΕΒ καὶ ΓΕΔ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν αὐτῶν.

4ον. Ἐκ τοῦ Ε φέρομεν τὴν ΕΛ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΕΓ, αἱ πλευραὶ του καὶ τὸ ὕψος του ΕΛ.

1831. (1867). Εἰς κύκλον Ο ἀκτῖνος R ἐγγράφομεν ἕνα κανονικὸν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ καὶ τὰ δύο ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΓΕ καὶ ΒΔΖ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ κοινὸν μέρος ΗΘΙΚΛΜ τῶν δύο ἰσοπλεύρων αὐτῶν τριγώνων εἶναι ἕνα κανονικὸν ἑξάγωνον.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδόν, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τοῦ δοθέντος κύκλου καὶ τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου ΗΘΙΚΛΜ.

1832. (1868). Δίδεται ἡμιπεριφέρεια διαμέτρου ΑΒ=2R. Φέρομεν τὴν χορδὴν ΓΔ=R, παράλληλον τῆς ΑΒ.

1ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι καὶ αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ τοῦ τραπεζίου ΑΒΔΓ.

2ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν, συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R, αἱ διαγώνιοι ΑΔ καὶ ΒΓ τοῦ τραπεζίου.

3ον. Αἱ διαγώνιοι τοῦ τραπεζίου τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ε, αἱ δὲ μὴ παράλληλοι πλευραί του τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Νὰ ὑπολογισθοῦν, συναρτήσει τῆς R, τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων ΓΖΔ, ΓΕΔ, ΑΕΒ.

1833. (1869). Ἡ περιφέρεια, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὸ ὕψος ΑΔ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τὴν πλευρὰν ΑΒ εἰς τὸ Β' καὶ τὴν πλευρὰν ΑΓ εἰς τὸ Γ'. Φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας αὐτῆς εἰς τὰ σημεῖα Β' καὶ Γ', οἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν ἀντιστοίχως.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΒ'ΔΓ' εἶναι ὀρθογώνιον.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒ'Γ' καὶ ΑΒΓ εἶναι ὅμοια.

3ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $ΜΝ = \frac{ΒΓ}{2}$.

4ον. Νὰ συγκριθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου Β'ΜΝΓ' πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

1834. (1870). Δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο' ἀκτίνων R καὶ R' ἀντιστοίχως τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β εἰς τρόπον, ὥστε ἡ γωνία ΟΑΟ' νὰ εἶναι ὀρθή.

1ον. Ἔστω Μ τὸ μέσον τῆς ΟΟ'. Φέρομεν τὴν ΑΜ καὶ ἐκ τοῦ Α κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΜ, ἡ ὁποία ὁρίζει ἐπὶ τῆς περιφερείας Ο τὴν χορδὴν ΑΓ καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας Ο' τὴν χορδὴν ΑΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΑΓ=ΑΔ.

2ον. Φέρομεν τὰς ΟΖ καὶ Ο'Η καθέτους ἐπὶ τὴν ΓΑΔ, τὴν ΑΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΟ' καὶ τὴν ΟΘ κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΖ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΕΜ καὶ Ο'ΘΟ εἶναι ὅμοια.

3ον. Ἐὰν R=6 ἑκ. καὶ R'=4,5 ἑκ. νὰ ὑπολογισθοῦν: ἡ διάκεντρος ΟΟ', ἡ ΑΜ, ἡ ΟΘ καὶ ἡ χορδὴ ΑΓ.

1835. (1871). Δίδεται ἡμιπεριφέρεια διαμέτρου ΑΒ=2R. Ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΑΒ λαμβάνομεν ἕνα σημεῖον Γ τοιοῦτον, ὥστε ΑΓ=x. Μὲ διαμέτρους τὰς ΑΓ καὶ ΓΒ γράφομεν ἡμιπεριφερείας, κειμένας ἐντὸς τῆς δοθείσης ἡμιπεριφερείας.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ, συναρτήσει τῶν R καὶ x, τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, ἡ ὁποία περιέχεται μεταξὺ τῶν τριῶν ἡμιπεριφερειῶν.

2ον. Ἐὰν 2R=5 ἑκμ. νὰ εὑρεθῇ διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ x τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς εἶναι ἴσον μὲ τὰ $\frac{8}{25}$ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ἡμικυκλίου διαμέτρου ΑΒ.

3ον. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, τῆς περιεχομένης μεταξὺ τῶν τριῶν ἡμιπεριφερειῶν, δύναται νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ἡμικυκλίου διαμέτρου ΑΒ; Ποία θὰ εἶναι τότε ἡ θέσις τοῦ Γ;

1836. (1872). Δύο κύκλοι Ο καὶ Ο' ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον Α. Φέρομεν τὴν κοινὴν ἐξωτερικὴν ἐφαπτομένην ΒΒ'.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΟ', ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ Α, διέρχεται ἐκ τοῦ μέσου Μ τῆς ΒΒ'.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΟΜΟ' εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Μ.

3ον. Ἐὰν ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου Ο εἶναι 3R, τοῦ δὲ κύκλου Ο' εἶναι R, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία $ΒΟΟ'=60^{\circ}$ καὶ γων.$ΟΟ'Β'=120^{\circ}$. Νὰ ὑπολογισθῇ· α) ἡ ΒΒ', β) τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΟΜΟ', γ) τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μέρους, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῆς κοινῆς ἐφαπτομένης ΒΒ' καὶ τῶν τόξων ΒΑ καὶ ΑΒ'.

1837. (1873). Δίδεται μία περιφέρεια Ο διαμέτρου ΑΒ=2R καὶ ἡ ἐφαπτομένη xy εἰς τὸ σημεῖον Α τῆς περιφερείας αὐτῆς.

1ον. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Β φέρομεν μίαν τυχοῦσαν τέμνουσαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Μ καὶ τὴν xy εἰς τὸ Ν. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $ΒΜ \times ΒΝ = \overline{ΒΑ}^2$.

2ον. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ περιφέρεια, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ Μ καὶ ἐφάπτεται τῆς xy εἰς τὸ Ν. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ περιφέρεια αὐτὴ ἐφάπτεται τῆς Ο.

3ον. Ἐὰν ΑΒ=ΑΝ=8 ἑκ. νὰ καθορισθοῦν αἱ λεπτομέρειαι τοῦ σχήματος, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν δύο περιφερειῶν καὶ τῆς κοινῆς ἐφαπτομένης xy.

1838. (1874). Δίδεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι ΒΓ=α, ΓΑ=β, ΑΒ=γ. Μὲ διάμετρον τὴν ΒΓ γράφομεν περιφέρειαν Ο. Μὲ διαμέτρους τὰς καθέτους πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ γράφομεν ἡμιπεριφερείας κειμένας ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ, συναρτήσει τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο μηνίσκων τῶν περιεχομένων μεταξὺ τῶν δύο ἡμιπεριφερειῶν καὶ τῆς περιφερείας Ο.

2ον. Νὰ συγκριθῇ τὸ ἐξαγόμενον αὐτὸ πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

3ον. Ἐὰν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑνὸς ἐκ τῶν ἡμικυκλίων εἶναι τριπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ἄλλου, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ β καὶ γ συναρτήσει τοῦ α.

4ον. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ὀξεῖαι γωνίαι Β καὶ Γ καὶ τὸ ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τοῦ σχήματος συναρτήσει τοῦ α.

1839. (1875). Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ ὑποτείνουσα ΒΓ=2α καὶ γων.Β=30°. Μὲ διαμέτρους τὰς ΒΓ καὶ ΑΓ γράφομεν ἡμιπεριφερείας κέντρων Δ καὶ Ε καὶ κειμένας ἐκτὸς τοῦ δοθέντος τριγώνου. Φέρομεν ἔπειτα τὰς ἐφαπτομένας ΖΘ καὶ ΗΘ τῶν ἡμιπεριφερειῶν Δ καὶ Ε, παραλλήλους ἀντιστοίχως πρὸς τὰς πλευρὰς ΒΓ καὶ ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Θ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΘΗΔΖ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

2ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου αὐτοῦ.

3ον. Νὰ ὑπολογισθῇ, συναρτήσει τοῦ α, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μικτογράμμου σχήματος, τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τῶν ἐφαπτομένων ΘΖ καὶ ΘΗ καὶ τῶν τόξων ΓΖ καὶ ΓΗ.

1840. (1876). Ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Ο, ἀκτῖνος R. Ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν πλευρὰν κανονικοῦ ἑξαγώνου, ἡ δὲ ΒΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν πλευρὰν ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον Ο.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τρίτη πλευρὰ τοῦ τριγώνου καὶ τὸ ἐμβαδόν του, συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R.

2ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τοῦ τριγώνου καὶ τοῦ κύκλου.

3ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον Ο.

4ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῶν κυκλικῶν τμημάτων, τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ὑπὸ τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

1841. (1877). Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΟΑΒ, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ΟΑ=ΟΒ=α. Γράφομεν ἕνα τόξον κύκλου ΑΜΒ, τὸ ὁποῖον ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας Ο εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Γράφομεν ἔπειτα ἕνα δεύτερον τόξον ΑΝΒ, τὸ ὁποῖον ἐφάπτεται τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Α καὶ Β εἰς τα σημεῖα Α καὶ Β. Ἔστω Γ τὸ κέντρον τοῦ δευτέρου κύκλου. Νὰ ὑπολογισθοῦν :

1ον. ἡ ἀπόστασις ΓΗ τοῦ Γ ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΑΒ.

2ον. ἡ ἀκτὶς τοῦ δευτέρου κύκλου.

3ον. τὸ ἐμβαδὸν ΑΜΒΝΑ, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν δύο τόξων ΑΜΒ καὶ ΑΝΒ.

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ

ΤΟΥ ΤΡΙΤΟΥ ΚΑΙ ΤΕΤΑΡΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

---

1. Μετρικαὶ σχέσεις εἰς τὸ τρίγωνον καὶ εἰς τὸ τετράπλευρον

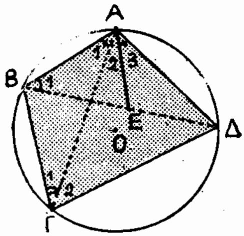
566. 1ον Θεώρημα *τοῦ Πτολεμαίου.* ***Εἰς ἕνα τετράπλευρον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, τὸ γινόμενον τῶν διαγωνίων του εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ (*Σχ. 392*), τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Ο καὶ ΑΓ, ΒΔ αἱ διαγώνιοί του.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι:

$$ΑΓ \times ΒΔ = ΑΒ \times ΓΔ + ΒΓ \times ΑΔ.$$

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α φέρομεν μίαν εὐθεῖαν ΑΕ, ἡ ὁποία νὰ σχηματίζῃ μὲ τὴν πλευρὰν ΑΔ μίαν γωνίαν $Α_3$ ἴσην μὲ τὴν γωνίαν $Α_1$. Ἡ ΑΕ τέμνει τὴν διαγώνιον ΒΔ εἰς τὸ σημεῖον Ε. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΕΔ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν $\widehat{Α}_1 = \widehat{Α}_3$, ἐκ κατασκευῆς καὶ $\widehat{Γ}_1 = \widehat{Δ}_1$, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΑΒ.



Σχ. 392.

Ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων αὐτῶν λαμβάνομεν

$$\frac{ΒΓ}{ΕΔ} = \frac{ΑΓ}{ΑΔ} \quad ἢ \quad ΒΓ \times ΑΔ = ΑΓ \times ΕΔ \qquad (1)$$

Ὁμοίως τὰ τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΑΓΔ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν: $\widehat{Β}_1 = \widehat{Γ}_2$, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸν κύκλον Ο καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΑΛ, καὶ $Β\widehat{Α}Ε = Γ\widehat{Α}Δ$, διότι καθεμία ἀπὸ αὐτὰς εἶναι ἄθροισμα τῆς κοινῆς γωνίας $Α_2$ καὶ τῶν ἴσων γωνιῶν $Α_1$ καὶ $Α_3$. Ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων αὐτῶν λαμβάνομεν

$$\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{ΒΕ}{ΓΛ} \quad ἢ \quad ΑΒ \times ΓΔ = ΑΓ \times ΒΕ \qquad (2)$$

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$ΒΓ\times ΑΔ+ΑΒ\times ΓΔ=ΑΓ\times ΕΔ+ΑΓ\times ΒΕ \quad ἢ$$

$$ΒΓ\times ΑΔ+ΑΒ\times ΓΔ=ΑΓ(ΕΔ+ΒΕ)$$

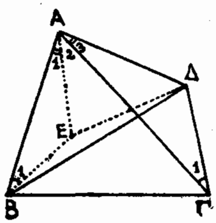
Ἐπειδὴ $ΕΔ+ΒΕ=ΒΔ$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται

$$\boxed{ΒΓ\times ΑΔ+ΑΒ\times ΓΔ=ΑΓ\times ΒΔ}.$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Εἰς ἕνα τετράπλευρον. . . .***

567. 2ον Θεώρημα *(Πτολεμαίου)*. ***Εἰς κάθε τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του εἶναι μεγαλύτερον τοῦ γινομένου τῶν διαγωνίων του.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ *(Σχ. 393)*, τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.



Σχ. 393.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$ΑΒ\times ΓΔ+ΒΓ\times ΔΑ>ΑΓ\times ΒΔ.$$

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΕ οὕτως, ὥστε ἡ γωνία $Α_1$ νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν $Α_3$. Ἐπίσης ἀπὸ τὴν κορυφὴν Β φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΒΕ οὕτως, ὥστε $\widehat{Β}_1=Γ_1$. Αἱ πλευραὶ ΑΕ καὶ ΒΕ τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Ε, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τῆς διαγωνίου ΒΔ, διότι τὸ τετράπλευρον δὲν εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον. Ἐὰν λοιπὸν φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν ΕΔ, θὰ εἶναι $ΒΔ<ΒΕ+ΕΔ$ (1)

Τὰ τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΑΓΔ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν γων.$Α_1$=γων.$Α_3$ καὶ γων.$Β_1$=γων.$Γ_1$· ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα αὐτῶν ἔχομεν

$$\frac{ΑΒ}{ΑΓ}=\frac{ΒΕ}{ΓΔ}=\frac{ΑΕ}{ΑΔ} \quad ἢ \quad \frac{ΑΒ}{ΑΓ}=\frac{ΒΕ}{ΓΔ} \ (2) \quad καὶ \quad \frac{ΑΒ}{ΑΓ}=\frac{ΑΕ}{ΑΔ} \quad (3)$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν (2) λαμβάνομεν $ΑΒ\times ΓΔ=ΑΓ\times ΒΕ$ (4)

Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΕΔ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν γων.ΒΑΓ= =γων.ΕΑΔ, διότι καθεμία ἀπὸ αὐτὰς εἶναι ἄθροισμα τῶν ἴσων γωνιῶν $Α_1$ καὶ $Α_3$ καὶ τῆς κοινῆς γωνίας $Α_2$, καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὰς πλευρὰς ἀναλόγους, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὴν σχέσιν (3). Ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων αὐτῶν λαμβάνομεν

$$\frac{ΒΓ}{ΔΕ}=\frac{ΑΓ}{ΑΔ} \quad ἢ \quad ΒΓ\times ΑΔ=ΑΓ\times ΔΕ \qquad (5)$$

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (4) καὶ (5) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$ΑΒ\times ΓΔ+ΒΓ\times ΑΔ=ΑΓ\times ΒΕ+ΑΓ\times ΔΕ$$

$$ἢ \quad ΑΒ\times ΓΔ+ΒΓ\times ΑΔ=ΑΓ(ΒΕ+ΔΕ) \qquad (6)$$

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν τελευταίαν ἰσότητα τὸ ἄθροισμα ΒΕ+ΔΕ μὲ τὸ μικρότερόν του ΒΔ, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὴν ἀνισότητα (1), ἡ ἰσότης (6) γίνεται ΑΒ×ΓΔ+ΒΓ×ΑΔ>ΑΓ×ΒΔ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Εἰς κάθε τετράπλευρον....***

568. Πόρισμα. ***Ἐὰν εἰς ἕνα τετράπλευρον τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν διαγωνίων του, τὸ τετράπλευρον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.***

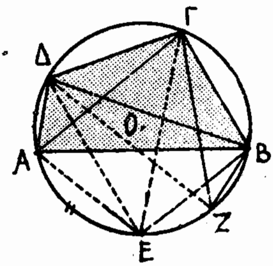
Διότι, ἐὰν τὸ τετράπλευρον δὲν ἦτο ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του θὰ ἦτο μεγαλύτερον τοῦ γινομένου τῶν διαγωνίων των, τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας.

569. 3ον Θεώρημα (*Πτολεμαίου*). ***Ὁ λόγος τῶν διαγωνίων ἑνὸς τετραπλεύρου, ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον, εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν ἀθροισμάτων τῶν γινομένων τῶν πλευρῶν, ποὺ καταλήγουν εἰς τὰ ἄκρα των.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Ο καὶ ΑΓ, ΒΔ αἱ διαγώνιοί του.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν ὅτι

$$\frac{ΑΓ}{ΒΔ}=\frac{ΑΒ\times ΑΔ+ΒΓ\times ΓΔ}{ΑΒ\times ΒΓ+ΑΔ\times ΓΔ}.$$



Σχ. 394.

Ἀπόδειξις: Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ τόξον ΑΒ εἶναι μεγαλύτερον τῶν τόξων ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ.

Ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΒ λαμβάνομεν τὰ τόξα ΑΕ καὶ ΒΖ, ἴσα ἀντιστοίχως πρὸς τὰ τόξα ΒΓ καὶ ΑΔ. Φέρομεν τὰς χορδὰς ΔΕ, ΔΖ, ΓΕ, ΓΖ καὶ ΑΕ, ΕΒ.

Ἀπὸ τὰ τετράπλευρα ΕΑΔΓ καὶ ΖΒΓΔ ἔχομεν κατὰ τὸ 1ον θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου

$$ΑΓ\times ΔΕ=ΑΔ\times ΓΕ+ΑΕ\times ΓΔ \qquad (1)$$
$$ΒΔ\times ΓΖ=ΒΓ\times ΔΖ+ΓΔ\times ΒΖ \qquad (2)$$

Διαιροῦμεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\frac{ΑΓ\times ΔΕ}{ΒΔ\times ΓΖ}=\frac{ΑΔ\times ΓΕ+ΑΕ\times ΓΔ}{ΒΓ\times ΔΖ+ΓΔ\times ΒΖ} \qquad (3)$$

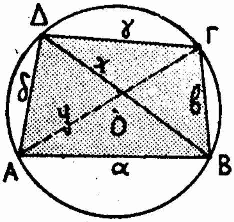
Ἐπειδὴ εἰς ἴσα τόξα ἀντιστοιχοῦν ἴσαι χορδαί, θὰ εἶναι

$$ΔΕ=ΓΖ,\quad ΑΕ=ΒΓ,\quad ΒΖ=ΑΔ,\quad ΓΕ=ΔΖ=ΑΒ \qquad (4)$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (3) τὰς βοηθητικὰς χορδὰς τοῦ κύκλου Ο, τὰς ἀσχέτους πρὸς τὰ στοιχεῖα τοῦ τετραπλεύρου, διὰ τῶν

ἴσων των, ποὺ δίδουν αἱ ἰσότητες (4) καὶ εἰς τὸ πρῶτον μέλος της τὸ ΓΖ μὲ τὸ ἴσον του ΔΕ καὶ μετὰ τὴν ἁπλοποίησιν λαμβάνομεν

$$\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΔ}}=\frac{\text{ΑΒ}\times\text{ΑΔ}+\text{ΒΓ}\times\text{ΓΔ}}{\text{ΑΒ}\times\text{ΒΓ}+\text{ΑΔ}\times\text{ΓΔ}}.$$



Σχ. 395.

Παρατήρησις : Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ α, β, γ, δ τὰς πλευρὰς τοῦ τετραπλεύρου καὶ μὲ x, y τὰς διαγωνίους του ΒΔ καὶ ΑΓ θὰ ἔχωμεν κατὰ τὰ θεωρήματα 566, 569,

$$\boxed{xy=\alpha\gamma+\beta\delta},\quad \boxed{\frac{x}{y}=\frac{\alpha\beta+\gamma\delta}{\alpha\delta+\beta\gamma}}$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη, θὰ εὕρωμεν

$$\boxed{x^2=\frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)(\alpha\beta+\gamma\delta)}{\alpha\delta+\beta\gamma}}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν $$\boxed{y^2=\frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)(\alpha\delta+\beta\gamma)}{\alpha\beta+\gamma\delta}}$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι : ***Ὁ λόγος τῶν διαγωνίων. . . .***

570. Ἐφαρμογή. *Πρόβλημα τῶν τριῶν χορδῶν.* ***Ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν ἀκτῖνα R ἑνὸς κύκλου καὶ τὰς χορδὰς α καὶ β δύο τόξων, νὰ ὑπολογισθῇ: 1ον ἡ χορδὴ x τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο αὐτῶν τόξων. 2ον ἡ χορδὴ y τῆς διαφορᾶς τῶν δύο αὐτῶν τόξων.***

1ον. Ἔστω ὁ κύκλος Ο ἀκτῖνος R καὶ ΑΒ=α, ΑΓ=β δύο χορδαὶ αὐτοῦ *(Σχ. 396α)*.

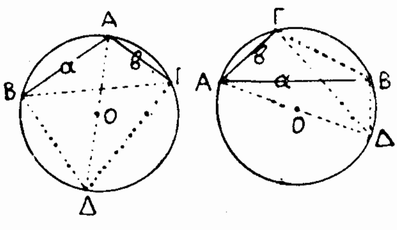
Φέρομεν τὴν χορδὴν ΒΓ, τῆς ὁποίας ζητεῖται τὸ μῆκος.

Φέρομεν τὴν διάμετρον ΑΔ καὶ τὰς χορδὰς ΒΔ καὶ ΔΓ.

Ἀπὸ τὸ τετράπλευρον ΑΒΔΓ ἔχομεν, κατὰ τὸ 1ον θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου·

ΒΓ×ΑΔ=ΑΒ×ΔΓ+ΑΓ×ΒΔ

ἢ ΒΓ×2R=α×ΔΓ+β×ΒΔ (1)



Σχ. 396.

Ὑπολογίζομεν τὰ ΔΓ καὶ ΒΔ.

Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΔ ἔχομεν

$\overline{\text{ΒΔ}}^2=\overline{\text{ΑΔ}}^2-\overline{\text{ΑΒ}}^2$ ἢ $\overline{\text{ΒΔ}}^2=4R^2-\alpha^2$, ἄρα $\text{ΒΔ}=\sqrt{4R^2-\alpha^2}$.

Ὁμοίως ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΓΔ ἔχομεν

$\overline{\text{ΔΓ}}^2=\overline{\text{ΑΔ}}^2-\overline{\text{ΑΓ}}^2$, $\overline{\text{ΔΓ}}^2=4R^2-\beta^2$, ἄρα $\text{ΔΓ}=\sqrt{4R^2-\beta^2}$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὰ ΔΓ καὶ ΒΔ μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν

$$ΒΓ\times 2R=\alpha\sqrt{4R^2-\beta^2}+\beta\sqrt{4R^2-\alpha^2},\ ἄρα\ ΒΓ=\frac{\alpha\sqrt{4R^2-\beta^2}+\beta\sqrt{4R^2-\alpha^2}}{2R}.$$

2ον. Ἔστωσαν δύο χορδαὶ ΑΒ=α καὶ ΑΓ=β, α>β τοῦ κύκλου Ο (*Σχ. 396β*). Φέρομεν τὴν χορδὴν ΒΓ, τῆς ὁποίας ζητεῖται τὸ μῆκος. Φέρομεν τὴν διάμετρον ΑΔ καὶ τὰς χορδὰς ΓΔ καὶ ΒΔ.

Ἀπὸ τὸ τετράπλευρον ΑΔΒΓ ἔχομεν, κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου, ΑΒ×ΓΔ=ΒΓ×ΑΔ+ΑΓ×ΒΔ ἢ α×ΓΔ=ΒΓ×2R+β×ΒΔ ἢ ΒΓ×2R=α×ΓΔ−β×ΒΔ (2)

Ἀπὸ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΓΔ εὑρίσκομεν

$$ΓΔ=\sqrt{4R^2-\beta^2},\quad ΒΔ=\sqrt{4R^2-\alpha^2}.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (2) τὰ ΓΔ καὶ ΒΔ μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν

$$ΒΓ\times 2R=\alpha\sqrt{4R^2-\beta^2}-\beta\sqrt{4R^2-\alpha^2},\ ἄρα\ ΒΓ=\frac{\alpha\sqrt{4R^2-\beta^2}-\beta\sqrt{4R^2-\alpha^2}}{2R}.$$

Ἀσκήσεις: 1842, 1843, 1844, 1845.

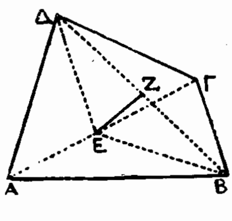
571. Θεώρημα *τοῦ Euler.* ***Εἰς κάθε τετράπλευρον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων πλευρῶν του εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων του, ηὐξημένον κατὰ τὸ τετραπλάσιον τετράγωνον τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω ΑΒΓΔ (*Σχ. 397*) ἕνα τετράπλευρον, Ε καὶ Ζ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του ΑΓ καὶ ΒΔ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΕΖ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν ὅτι

$$\overline{ΑΒ}^2+\overline{ΒΓ}^2+\overline{ΓΔ}^2+\overline{ΔΑ}^2=\overline{ΑΓ}^2+\overline{ΒΔ}^2+4\overline{ΕΖ}^2.$$

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὰς εὐθείας ΒΕ καὶ ΔΕ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἡ ΒΕ εἶναι διάμεσός του καὶ κατὰ τὸ θεώρημα τῶν διαμέσων τριγώνου θὰ εἶναι



Σχ. 397.

$$\overline{ΑΒ}^2+\overline{ΒΓ}^2=2\overline{ΒΕ}^2+2\overline{ΑΕ}^2 \quad (1)$$

Ὁμοίως εἰς τὸ τρίγωνον ΑΔΓ, ἡ ΔΕ εἶναι διάμεσός του καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι $\overline{ΓΔ}^2+\overline{ΔΑ}^2=2\overline{ΔΕ}^2+2\overline{ΑΕ}^2$ (2)

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\overline{ΑΒ}^2+\overline{ΒΓ}^2+\overline{ΓΔ}^2+\overline{ΔΑ}^2=2\overline{ΒΕ}^2+2\overline{ΔΕ}^2+4\overline{ΑΕ}^2 \quad (3)$$

Εἰς τὸ τρίγωνον ΔΕΒ, ἡ ΕΖ εἶναι διάμεσός του καὶ ἐπομένως θὰ

ἔχωμεν $\overline{BE}^2+\overline{\Delta E}^2=2\overline{EZ}^2+2\overline{ZB}^2$ ἢ $2\overline{BE}^2+2\overline{E\Delta}^2=4\overline{EZ}^2+4\overline{ZB}^2$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος (3) τὸ ἄθροισμα $2\overline{BE}^2+2\overline{\Delta E}^2$ μὲ τὸ ἴσον του $4\overline{EZ}^2+4\overline{ZB}^2$ καὶ ἔχομεν

$$\overline{AB}^2+\overline{B\Gamma}^2+\overline{\Gamma\Delta}^2+\overline{\Delta A}^2=4\overline{EZ}^2+4\overline{ZB}^2+4\overline{AE}^2 \quad (4)$$

Ἐπειδὴ $4\overline{ZB}^2=(2\times ZB)^2=\overline{B\Delta}^2$ καὶ $4\overline{AE}^2=(2\times AE)^2=\overline{A\Gamma}^2$ ἡ ἰσότης (4) γράφεται

$$\boxed{\overline{AB}^2+\overline{B\Gamma}^2+\overline{\Gamma\Delta}^2+\overline{\Delta A}^2=\overline{A\Gamma}^2+\overline{B\Delta}^2+4\overline{EZ}^2}$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Εἰς κάθε τετράπλευρον. . . .***

572. Πόρισμα I. ***Εἰς κάθε παραλληλόγραμμον, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων πλευρῶν του εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων του.***

Διότι εἰς τὸ παραλληλόγραμμον τὰ μέσα Ε καὶ Ζ τῶν διαγωνίων του συμπίπτουν καὶ ἑπομένως ἡ εὐθεῖα ΕΖ μηδενίζεται. Ὥστε, ἂν ἔχωμεν ἕνα παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ θὰ εἶναι

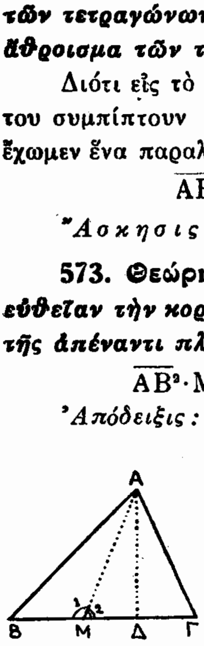
$$\overline{AB}^2+\overline{B\Gamma}^2+\overline{\Gamma\Delta}^2+\overline{\Delta A}^2=\overline{A\Gamma}^2+\overline{B\Delta}^2.$$

Ἄσκησις: 1846.

573. Θεώρημα *τοῦ Stewart (Στιούαρτ).* ***Ἐὰν συνδέσωμεν μὲ εὐθεῖαν τὴν κορυφὴν Α ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ μὲ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς ΒΓ, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν :***

$$\overline{AB}^2\cdot M\Gamma+\overline{A\Gamma}^2\cdot BM-\overline{AM}^2\cdot B\Gamma=BM\cdot M\Gamma\cdot B\Gamma.$$

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν τὴν κάθετον ΑΔ ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ.



Σχ. 398.

Ἡ ΑΜ σχηματίζει μὲ τὴν ΒΓ δύο γωνίας ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία εἶναι ὀξεῖα καὶ ἡ ἄλλη ἀμβλεῖα.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΜ, ἡ πλευρὰ ΑΒ κεῖται ἀπέναντι τῆς ἀμβλείας γωνίας M_1 καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι (§ 432) $\overline{AB}^2=\overline{AM}^2+\overline{BM}^2+2BM\cdot M\Delta$.

Πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος αὐτῆς ἐπὶ ΜΓ καὶ ἔχομεν

$$\overline{AB}^2\cdot M\Gamma=\overline{AM}^2\cdot M\Gamma+\overline{BM}^2\cdot M\Gamma+2BM\cdot M\Delta\cdot M\Gamma \quad (1)$$

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΜΓ, ἡ πλευρὰ ΑΓ κεῖται ἀπέναντι τῆς ὀξείας γωνίας M_2 καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι (§ 431)

$$\overline{A\Gamma}^2=\overline{AM}^2+\overline{M\Gamma}^2-2M\Gamma\cdot M\Delta.$$

Πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος αὐτῆς ἐπὶ ΒΜ

καὶ ἔχομεν $\overline{\text{ΑΓ}}^2\cdot\text{ΒΜ}=\overline{\text{ΑΜ}}^2\cdot\text{ΒΜ}+\overline{\text{ΜΓ}}^2\cdot\text{ΒΜ}-2\text{ΜΓ}\cdot\text{ΜΔ}\cdot\text{ΒΜ}$ (2)

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\begin{aligned}\overline{\text{ΑΒ}}^2\cdot\text{ΜΓ}+\overline{\text{ΑΓ}}^2\cdot\text{ΒΜ}&=\overline{\text{ΑΜ}}^2\cdot\text{ΜΓ}+\overline{\text{ΑΜ}}^2\cdot\text{ΒΜ}+\overline{\text{ΒΜ}}^2\cdot\text{ΜΓ}+\overline{\text{ΜΓ}}^2\cdot\text{ΒΜ}\\&=\overline{\text{ΑΜ}}^2(\text{ΜΓ}+\text{ΒΜ})+\text{ΒΜ}\cdot\text{ΜΓ}(\text{ΒΜ}+\text{ΜΓ})\\&=\overline{\text{ΑΜ}}^2\cdot\text{ΒΓ}+\text{ΒΜ}\cdot\text{ΜΓ}\cdot\text{ΒΓ}.\end{aligned}$$

Μεταφέρομεν τὸν ὅρον $\overline{\text{ΑΜ}}^2\cdot\text{ΒΓ}$ εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$\boxed{\overline{\text{ΑΒ}}^2\cdot\text{ΜΓ}+\overline{\text{ΑΓ}}^2\cdot\text{ΜΒ}-\overline{\text{ΑΜ}}^2\cdot\text{ΒΓ}=\text{ΒΜ}\cdot\text{ΜΓ}\cdot\text{ΒΓ}}$$

ἡ ὁποία λέγεται ***σχέσις τοῦ** Stewart.*

Ἀσκήσεις: 1847, 1848.

Ἀσκήσεις

1842. (1878). Δίδεται ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἕνα σημεῖον Ο τοῦ ἐπιπέδου του. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ μεγαλυτέρα τῶν τριῶν ἀποστάσεων ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ εἶναι μικροτέρα ἢ ἴση τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.

1843 (1879). Ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον Ο. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως σημείου Μ τοῦ τόξου ΑΓ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Β ὑπερβαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τοῦ Μ ἀπὸ τὰς κορυφὰς Α καὶ Γ κατὰ τὸ τετραπλάσιον γινόμενον τῆς ἀκτῖνος R τοῦ κύκλου ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν ΜΕ τοῦ Μ ἀπὸ τὴν ΑΓ.

1844. (1880). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Ο.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διχοτόμος ΑΔ τῆς γωνίας Α σχηματίζει μὲ τὴν πλευρὰν ΒΓ δύο γωνίας, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ ἰσοῦται μὲ $\widehat{\text{Γ}}-\widehat{\text{Β}}$.

2ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι Β καὶ Γ, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι $\widehat{\text{Α}}=60^\circ$ καὶ ὅτι $\widehat{\text{Γ}}-\widehat{\text{Β}}=17^\circ$.

3ον. Ἐὰν $\widehat{\text{Α}}=60^\circ$ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς Α ἀπὸ τοῦ μέσου Μ τοῦ τόξου ΒΑΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν διαφορὰν ΑΒ—ΑΓ τῶν δύο πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

1845. (1881). Δίδεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α. Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΗ καὶ τὴν διχοτόμον ΑΔ τῆς γωνίας Α. Ἀπὸ τὸ μέσον Μ τῆς ΑΔ φέρομεν κάθετον ἐπ' αὐτήν, ἡ ὁποία τέμνει τὰς καθέτους πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Α, Ε, Η, Δ, Ζ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ λόγος $\dfrac{\text{ΕΗ}+\text{ΗΖ}}{\text{ΑΗ}}$ εἶναι σταθερὸς δι' ὅλα τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα.

1846. (1882). Εἰς κάθε τραπέζιον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν μὴ

παραλλήλων πλευρῶν του, ηὐξημένον κατὰ τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν βάσεών του, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων του.

1847. (1883). Δίδεται ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ. Ἀπὸ τὸ ἄκρον Γ τῆς βάσεώς του φέρομεν εὐθεῖαν ΓΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν πλευρὰν ΑΓ ἢ τὴν προέκτασίν της εἰς τὸ Δ. Νὰ δειχθῇ, ὅτι $\overline{\Gamma\Delta}^2=\overline{B\Delta}^2+\frac{B\Gamma^2\cdot\Delta A}{AB}$.

1848. (1884). ***Θεώρημα τοῦ*** *Compagnon*. Διαιροῦμεν τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ εἰς τρία ἴσα μέρη ΒΔ=ΔΕ=ΕΓ καὶ φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΔ καὶ ΑΕ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\overline{A\Delta}^2+\overline{\Delta E}^2+\overline{AE}^2=\frac{2}{3}\overline{B\Gamma}^2$.

1849. (1885). ***Θεώρημα τοῦ*** *Salmon*. Ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Ο. Φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, αἱ ὁποῖαι τεμνόμεναι, σχηματίζουν τὸ τρίγωνον ΔΕΖ (ἐφαπτομενικὸν τρίγωνον). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων τοῦ κέντρου Ο ἀπὸ μιᾶς κορυφῆς τοῦ ἐφαπτομενικοῦ τριγώνου ΔΕΖ καὶ μιᾶς κορυφῆς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ κειμένης ἀπέναντι τῆς πρώτης κορυφῆς, εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν ἀποστάσεων τῶν αὐτῶν κορυφῶν ἀπὸ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ἑκάστου τῶν τριγώνων αὐτῶν.

1850. (1886). Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ α, β, γ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, μὲ α′, β′, γ′ τὰς ἀποστάσεις τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ ἀπὸ τὸ ὀρθόκεντρόν του Η καὶ μὲ R τὴν ἀκτῖνα τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\alpha^2+\alpha'^2=\beta^2+\beta'^2=\gamma^2+\gamma'^2=4R^2.$$

1851. (1887). ***Θεώρημα τοῦ*** *Euler*. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ΑΒΓ τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου ἀκτῖνος R ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἀκτῖνος ρ εἶναι ἴσον μὲ $R^2-2R\rho$.

1852. (1888). ***Θεώρημα τοῦ*** *Euler*. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ΑΒΓ τὰ τετράγωνα τῶν ἀποστάσεων τοῦ κέντρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου ἀκτῖνος R ἀπὸ τῶν κέντρων τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων ἀκτίνων ρ_α, ρ_β, ρ_γ εἶναι ἴσα, ἀντιστοίχως μὲ $R^2+2R\rho_\alpha$, $R^2+2R\rho_\beta$, $R^2+2R\rho_\gamma$.

1853. (1889). ***Θεώρημα τοῦ*** *Euler*. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ΑΒΓ, τὰ τετράγωνα τῶν ἀποστάσεων τοῦ κέντρου τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἀκτῖνος ρ ἀπὸ τῶν κέντρων τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων ἀκτίνων ρ_α, ρ_β, ρ_γ εἶναι ἴσα ἀντιστοίχως μὲ $4R(\rho_\alpha-\rho)$, $4R(\rho_\beta-\rho)$, $4R(\rho_\gamma-\rho)$.

1854. (1890). Δίδεται ἕνας κύκλος Ο ἀκτῖνος R καὶ ἕνα σημεῖον Α ἐντὸς αὐτοῦ καὶ εἰς ἀπόστασιν α ἀπὸ τὸ κέντρον Ο. Ἐπὶ τῆς εὐθείας ΟΑ ὁρίζομεν ἕνα σημεῖον Β τοιοῦτον, ὥστε $OA\times OB=R^2$. Νὰ ἀχθῇ ἀπὸ τὸ Β μία τέμνουσα ΒΓΔ τοιαύτη, ὥστε τὸ ἐσωτερικὸν μέρος της ΔΓ νὰ εἶναι ἴσον μὲ ΔΑ.

1855. (1891). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Σ νὰ ἀχθῇ μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ τὰς πλευρὰς γωνίας xOy εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ τοιαύτη, ὥστε

1ον. $OA\times OB=\overline{AB}^2$.

2ον. $\overline{OA}^2+\overline{OA}^2=2\overline{AB}^2$.

1856. (1892). Δίδονται δύο ὁμόκεντροι περιφέρειαι καὶ ἕνα σημεῖον Σ ἐπὶ

τῆς μικροτέρας. Ἀπὸ τὸ Σ φέρομεν δύο τυχούσας ὀρθογωνίους χορδάς, ΣΑ εἰς τὴν μικρὰν καὶ ΒΣΓ εἰς τὴν μεγάλην.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\overline{ΣΑ}^2+\overline{ΣΒ}^2+\overline{ΣΓ}^2$=σταθερόν.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\overline{ΑΒ}^2+\overline{ΑΓ}^2+\overline{ΒΓ}^2$=σταθερόν.

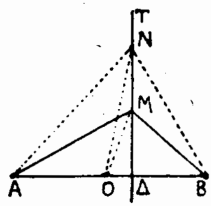
3ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ὡρισμένον.

4ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν μέσων τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

2. Ριζικὸς ἄξων δύο περιφερειῶν

574. Θεώρημα. ***Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεών των ἀπὸ δύο ὡρισμένα σημεῖα Α καὶ Β εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση μὲ k^2, εἶναι μία εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία συνδέει τὰ δύο σημεῖα Α καὶ Β.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν Α καὶ Β *(Σχ. 399)* τὰ δοθέντα σημεῖα καὶ Μ ἕνα σημεῖον τοῦ τόπου καὶ τοιοῦτον ὥστε, ἂν φέρωμεν τὰς εὐθείας ΜΑ καὶ ΜΒ νὰ εἶναι $\overline{ΜΑ}^2-\overline{ΜΒ}^2=k^2$ (1)



Σχ. 399.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ Μ κεῖται ἐπὶ εὐθείας, καθέτου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ ἔστω Ο τὸ μέσον της. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΜΟ, ἡ ὁποία εἶναι διάμεσος τοῦ τριγώνου ΜΑΒ καὶ ἔστω ΟΔ ἡ προβολὴ τῆς ΜΟ ἐπὶ τὴν ΑΒ.

Κατὰ τὸ δεύτερον θεώρημα τῶν διαμέσων ἑνὸς τριγώνου (§ 435) θὰ εἶναι $$\overline{ΜΑ}^2-\overline{ΜΒ}^2=2ΑΒ\cdot ΟΔ \quad (2)$$

Ἀλλὰ ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν καὶ τὴν ἰσότητα (1).

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι $k^2=2ΑΒ\cdot ΟΔ$.

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτὴν λαμβάνομεν $ΟΔ=\frac{k^2}{2ΑΒ}$ = σταθερόν.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ἀπόστασις ΟΔ τῆς προβολῆς Δ, τοῦ τυχόντος σημείου Μ τοῦ τόπου, ἐπὶ τὴν ΑΒ ἀπὸ τὸ μέσον Ο τῆς ΑΒ, εἶναι σταθερά. Ἑπομένως κάθε σημεῖον Μ τοῦ τόπου κεῖται ἐπὶ εὐθείας ΔΤ καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ ἕνα σημεῖον Δ τῆς ΑΒ καὶ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $ΟΔ=\frac{k^2}{2ΑΒ}$.

Ἀντιστρόφως. Ὑπόθεσις: Ἔστω Ν ἕνα τυχὸν σημεῖον τῆς καθέτου ΔΤ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι κάθε σημεῖον Ν, τῆς καθέτου ΔΤ ἐπὶ τὴν ΑΒ, εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου˙ δηλ. ἐὰν φέρωμεν τὰς εὐθείας ΝΑ καὶ ΝΒ, θὰ δείξωμεν, ὅτι $\overline{NA}^2-\overline{NB}^2=k^2$.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΝΟ˙ ἡ ΝΟ εἶναι διάμεσος τοῦ τριγώνου ΝΑΒ καὶ ἑπομένως κατὰ τὸ 2ον θεώρημα τῶν διαμέσων ἑνὸς τριγώνου θὰ εἶναι $\overline{NA}^2-\overline{NB}^2=2AB\cdot O\Delta$ (3)

Ἐπειδὴ $O\Delta=\frac{k^2}{2AB}$, ἡ ἰσότης (3) γράφεται

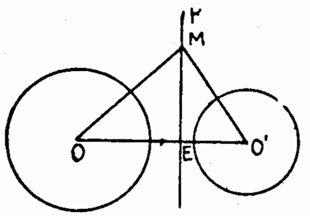
$$\overline{NA}^2-\overline{NB}^2=2AB\cdot\frac{k^2}{2AB} \quad ἢ \quad \overline{NA}^2-\overline{NB}^2=k^2.$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἰσότητα συνάγομεν, ὅτι τὸ τυχὸν σημεῖον Ν, τῆς καθέτου ΔΤ ἐπὶ τὴν ΑΒ, εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν....***

575. Θεώρημα. ***Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν δύναμιν πρὸς δύο κύκλους, εἶναι μία εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον τῶν κύκλων.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν Ο καὶ Ο′ *(Σχ. 400)* δύο κύκλοι, ἀκτίνων R καὶ R′ ἀντιστοίχως καὶ Μ ἕνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν δύναμιν πρὸς τοὺς κύκλους Ο καὶ Ο′.



Σχ. 400.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ σημεῖον Μ κεῖται ἐπὶ εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὴν διάκεντρον ΟΟ′.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὰς εὐθείας ΜΟ, ΜΟ′ καὶ ΟΟ′.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Δ τὴν δύναμιν τοῦ σημείου Μ πρὸς τὸν κύκλον Ο καὶ μὲ Δ′ τὴν δύναμιν τοῦ σημείου Μ πρὸς τὸν κύκλον Ο′, θὰ ἔχωμεν (§ 442)

$$\Delta=\overline{MO}^2-R^2 \quad καὶ \quad \Delta'=\overline{MO'}^2-R'^2$$

Ἐπειδὴ αἱ δυνάμεις Δ καὶ Δ′ εἶναι ἴσαι, ἐξ ὑποθέσεως, θὰ εἶναι

$$\overline{MO}^2-R^2=\overline{MO'}^2-R'^2 \quad ἢ \quad \overline{MO}^2-\overline{MO'}^2=R^2-R'^2.$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἰσότητα παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τοῦ τυχόντος σημείου Μ ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Ο καὶ Ο′ εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση μὲ $R^2-R'^2$˙ ἄρα (§ 574) τὸ σημεῖον Μ κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου ΡΕ ἐπὶ τὴν ΟΟ′ καὶ ἡ

ὁποία ἄγεται ἀπὸ ἕνα σημεῖον Ε τῆς ΟΟ', τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ τὸ μέσον τῆς ΟΟ' ἀπόστασιν ἴσην μὲ $\frac{R^2-R'^2}{2\cdot OO'}$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι : ***Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν. . . .***

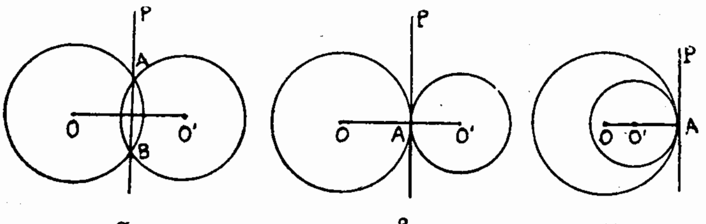
576. Ριζικὸς ἄξων. *Ἡ εὐθεῖα Ρ, τῆς ὁποίας κάθε σημεῖον ἔχει τὴν αὐτὴν δύναμιν πρὸς τοὺς κύκλους Ο καὶ Ο', λέγεται* ***ριζικὸς ἄξων*** *αὐτῶν.*

577. Παρατηρήσεις : I. *Ἐὰν οἱ δύο δοθέντες κύκλοι εἶναι ὁμόκεντροι, δὲν ὑπάρχουν σημεῖα, τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν δύναμιν πρὸς τοὺς δύο αὐτοὺς κύκλους καὶ ἑπομένως δὲν ὑπάρχει ριζικὸς ἄξων αὐτῶν.*

II. *Ἐὰν οἱ δύο κύκλοι τέμνωνται (Σχ. 401α), ὁ ριζικὸς ἄξων αὐτῶν εἶναι ἡ κοινὴ χορδή των.*

Πράγματι· ἔστω ΑΒ ἡ κοινὴ χορδὴ τῶν δύο τεμνομένων κύκλων Ο καὶ Ο'. Ἐπειδὴ τὸ Α κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας Ο καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας Ο', ἡ δύναμις τοῦ Α πρὸς τοὺς κύκλους Ο καὶ Ο' θὰ εἶναι ἴση μὲ μηδέν. Ἐπειδὴ αἱ δυνάμεις τοῦ σημείου Α πρὸς τοὺς κύκλους Ο καὶ Ο' εἶναι ἴσαι, τὸ Α κεῖται ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος Ρ αὐτῶν. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ τὸ σημεῖον Β κεῖται ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν κύκλων Ο καὶ Ο'. Ἡ χορδὴ λοιπὸν ΑΒ, ὡς συνδέουσα δύο σημεῖα Α καὶ Β τοῦ ριζικοῦ ἄξονος, συμπίπτει μὲ τὸν ριζικὸν ἄξονα τῶν δύο κύκλων.

III. *Ἐὰν οἱ δύο κύκλοι ἐφάπτωνται (Σχ. 401 β, γ), ὁ ριζικὸς*



Σχ. 401.

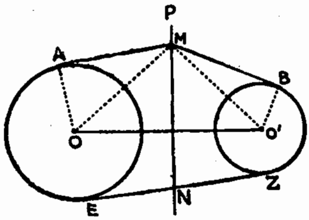
ἄξων εἶναι ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη των εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς των.

Πράγματι· ἐὰν ἀχθῇ ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν κύκλων Ο καὶ Ο' εἰς τὸ σημεῖον Α τῆς ἐπαφῆς, αὕτη θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον ΟΟ' εἰς τὸ σημεῖον Α. Ἐπειδὴ τὸ Α κεῖται ἐπὶ τῶν περιφερειῶν Ο καὶ Ο', ἔχει δύναμιν μηδὲν καὶ πρὸς τὸν κύκλον Ο καὶ πρὸς τὸν κύκλον Ο', δηλ. ἔχει τὴν αὐτὴν δύναμιν πρὸς τοὺς κύκλους αὐτούς. Ἐπο-

μένως τὸ σημεῖον Α κεῖται ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος ΡΑ τῶν δύο κύκλων Ο καὶ Ο'.

578. Θεώρημα. ***Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἄγονται ἴσαι ἐφαπτόμεναι πρὸς δύο κύκλους, εἶναι ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν κύκλων αὐτῶν.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν οἱ κύκλοι Ο καὶ Ο' καὶ Μ ἕνα τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου.



Σχ. 402.

Ἀπὸ τὸ Μ φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ΜΑ καὶ ΜΒ πρὸς τοὺς κύκλους Ο καὶ Ο' καὶ ἔστω ὅτι εἶναι

$$MA = MB \text{ ἢ } \overline{MA}^2 = \overline{MB}^2 \quad (1).$$

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ σημεῖον Μ κεῖται ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν κύκλων Ο καὶ Ο'

Ἀπόδειξις: Γνωρίζομεν (§ 444), ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ἐφαπτομένης ἑνὸς κύκλου, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον, παριστάνει τὴν δύναμιν τοῦ σημείου αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα (1) συνάγομεν, ὅτι τὸ σημεῖον Μ ἔχει ἴσας δυνάμεις πρὸς τοὺς κύκλους Ο καὶ Ο' καὶ ἑπομένως κεῖται ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος αὐτῶν.

Τὸ τυχὸν λοιπὸν σημεῖον Μ τοῦ τόπου κεῖται ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν κύκλων Ο καὶ Ο' καὶ ἑπομένως ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν κύκλων αὐτῶν.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ὁ γεωμετρικὸς τόπος....***

579. Πόρισμα. ***Ὁ ριζικὸς ἄξων δύο κύκλων διχοτομεῖ τὰς κοινὰς ἐφαπτομένας αὐτῶν.***

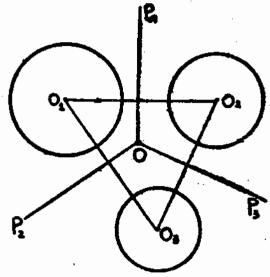
Πράγματι· ἔστω Ν *(Σχ. 402)* τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ὁ ριζικὸς ἄξων Ρ τῶν κύκλων Ο καὶ Ο' τέμνει τὴν κοινὴν ἐφαπτομένην ΕΖ αὐτῶν· τότε ἡ ΝΕ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου Ο καὶ ἡ ΝΖ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου Ο', αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ ἕνα σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἄξονός των καὶ ἑπομένως κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, θὰ εἶναι ΝΕ=ΝΖ.

580. Θεώρημα. ***Οἱ ριζικοὶ ἄξονες τριῶν κύκλων, λαμβανομένων ἀνὰ δύο, τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν O_1, O_2, O_3 τὰ κέντρα τριῶν κύκλων, P_1 ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν κύκλων O_1 καὶ O_2, P_2 ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν κύκλων O_1 καὶ O_3 καὶ P_3 ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν κύκλων O_2 καὶ O_3.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι οἱ ριζικοὶ αὐτοὶ ἄξονες τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Ἀπόδειξις: Οἱ ριζικοὶ ἄξονες P_1 καὶ P_2 τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Ο, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὰς τεμνομένας διακέντρους O_1O_2 καὶ O_1O_3. Τὸ Ο, ὡς σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἄξονος P_1 ἔχει ἴσας δυνάμεις πρὸς τοὺς κύκλους O_1 καὶ O_2. Ὁμοίως τὸ Ο, ὡς σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἄξονος P_2 ἔχει ἴσας δυνάμεις πρὸς τοὺς κύκλους O_1 καὶ O_3.



Σχ. 403.

Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ τὰς δυνάμεις τοῦ σημείου Ο πρὸς τοὺς κύκλους O_1, O_2, O_3 θὰ εἶναι κατὰ τὰ ἀνωτέρω, $\Delta_1=\Delta_2$ καὶ $\Delta_1=\Delta_3$. Ἀπὸ τὰς ἰσότητας αὐτὰς λαμβάνομεν $\Delta_2=\Delta_3$. Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἰσότητα συνάγομεν, ὅτι τὸ σημεῖον Ο ἔχει ἴσας δυνάμεις πρὸς τοὺς κύκλους O_2 καὶ O_3 καὶ ἑπομένως εἶναι σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἄξονος P_3.

Ὥστε οἱ ριζικοὶ ἄξονες P_1, P_2, P_3 διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Οἱ ριζικοὶ ἄξονες τριῶν. . . .***

581. Ριζικὸν κέντρον τριῶν κύκλων. *Τὸ κοινὸν σημεῖον Ο τῶν ριζικῶν ἀξόνων τριῶν κύκλων, λαμβανομένων ἀνὰ δύο, λέγεται* ***ριζικὸν κέντρον*** *τῶν τριῶν αὐτῶν κύκλων.*

582. Πόρισμα I. ***Ὅταν τρεῖς κύκλοι τέμνωνται ἀνὰ δύο, αἱ τρεῖς κοιναὶ χορδαί των τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.***

Πράγματι· ἐπειδὴ οἱ κύκλοι τέμνονται ἀνὰ δύο, αἱ κοιναὶ χορδαί των ἀνὰ δύο εἶναι ριζικοὶ ἄξονες (§ 577 II), ἑπομένως κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα θὰ τέμνωνται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

583. Πόρισμα II. ***Ὅταν τρεῖς κύκλοι ἐφάπτωνται ἀνὰ δύο, αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ τρία σημεῖα ἐπαφῆς τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.***

Πράγματι· ἐπειδὴ οἱ κύκλοι ἐφάπτονται ἀνὰ δύο, ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη αὐτῶν, ἀνὰ δύο εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς, εἶναι ριζικὸς ἄξων (§ 577 III)· ὥστε αἱ τρεῖς αὐταὶ ἐφαπτόμεναι εἶναι ριζικοὶ ἄξονες καὶ ἑπομένως τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

584. Παρατηρήσεις: I. Ἐὰν τὰ τρία κέντρα τῶν κύκλων O_1, O_2, O_3 κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς, οἱ τρεῖς ριζικοὶ ἄξονες, εἶναι, γενικῶς παράλληλοι καὶ διάφοροι.

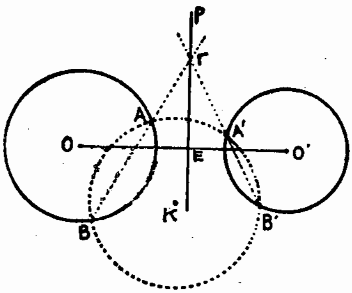
Ἀλλά, ἐὰν δύο ἐξ αὐτῶν συμπίπτουν, ὅλα τὰ σημεῖα των ἔχουν τὴν αὐτὴν δύναμιν καὶ πρὸς τοὺς τρεῖς κύκλους καὶ ἑπομένως εἶναι σημεῖα καὶ τοῦ τρίτου ριζικοῦ ἄξονος.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν οἱ τρεῖς ριζικοὶ ἄξονες συμπίπτουν. Τοῦτο συμβαίνει π.χ. ὅταν οἱ τρεῖς κύκλοι ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα.

II. Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω παρατήρησιν συνάγομεν, ὅτι, *ἐὰν δύο σημεῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν δύναμιν πρὸς τρεῖς κύκλους, οἱ τρεῖς αὐτοὶ κύκλοι ἔχουν τὸν αὐτὸν ριζικὸν ἄξονα καὶ ἑπομένως τὰ κέντρα των κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς.*

585. Πρόβλημα. ***Νὰ κατασκευασθῇ ὁ ριζικὸς ἄξων δύο κύκλων.***

Κατασκευή: Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὸν ριζικὸν ἄξονα δύο κύκλων Ο καὶ Ο' ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:



Σχ. 404.

Γράφομεν ἕνα τρίτον κύκλον Κ, τοῦ ὁποίου ἡ περιφέρεια νὰ τέμνῃ τὰς περιφερείας τῶν κύκλων Ο καὶ Ο', ἔστω εἰς τὰ σημεῖα Α, Β καὶ Α', Β'· φέρομεν τὰς χορδὰς ΑΒ καὶ Α'Β', αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Γ· ἀπὸ τὸ Γ φέρομεν τὴν κάθετον ΡΓΕ ἐπὶ τὴν διάκεντρον ΟΟ'· ἡ ΡΓΕ εἶναι ὁ ζητούμενος ριζικὸς ἄξων.

Ἀπόδειξις: Ἡ κοινὴ χορδὴ ΑΒ τῶν δύο κύκλων Ο καὶ Κ εἶναι ριζικὸς ἄξων αὐτῶν· ὁμοίως ἡ κοινὴ χορδὴ Α'Β' τῶν δύο κύκλων Ο' καὶ Κ εἶναι ριζικὸς ἄξων αὐτῶν.

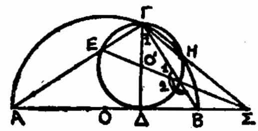
Ἑπομένως ἡ τομὴ Γ τῶν ριζικῶν αὐτῶν ἀξόνων εἶναι τὸ ριζικὸν κέντρον τῶν τριῶν κύκλων Ο, Ο', Κ. Ἡ καθετος λοιπὸν ΡΓΕ ἐπὶ τὴν ΟΟ', ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ ριζικὸν κέντρον Γ τῶν τριῶν κύκλων εἶναι ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν δύο κύκλων.

586. Ἐφαρμογή. ***Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Γ μιᾶς ἡμιπεριφερείας Ο διαμέτρου ΑΒ φέρομεν τὴν κάθετον ΓΔ ἐπὶ τὴν ΑΒ. Μὲ διάμετρον τὴν ΓΔ κατασκευάζομεν περιφέρειαν Ο', ἡ ὁποία τέμνει τὴν χορδὴν ΑΓ εἰς τὸ Ε, τὴν ΓΒ εἰς τὸ Ζ καὶ τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὸ Η. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΕΖ καὶ ΓΗ τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.***

Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΕΖ, ΓΗ *(Σχ. 405)* εἶναι ριζικοὶ ἄξονες τριῶν περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι τέμνονται ἀνὰ δύο.

Ἡ εὐθεῖα ΓΗ εἶναι κοινὴ χορδὴ τῶν κύκλων Ο καὶ Ο′ καὶ ἐπομένως εἶναι ριζικὸς ἄξων αὐτῶν.

Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΕΖΒ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ γωνίαι Α καὶ Ζ, εἶναι ἴσαι.



Σχ. 405.

Πράγματι· ἡ γωνία ΑΓΒ εἶναι ὀρθή, ὡς ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ ἡμικύκλιον Ο· ἄρα καὶ ἡ ΕΓΖ εἶναι ὀρθή· ἐπομένως ἡ ΕΖ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου Ο′ καὶ διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον Ο′. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν Ο′ΓΖ εἶναι ἰσοσκελές, διότι Ο′Γ=Ο′Ζ, ὡς ἀκτῖνες τοῦ κύκλου Ο′ καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι $\widehat{\Gamma}_1=\widehat{Z}_1$. Ἀλλὰ $\widehat{\Gamma}_1=\widehat{A}$, διότι ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους μίαν πρὸς μίαν· ἄρα καὶ ἡ γωνία Z_1 θὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν Α. Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΑΕΖΒ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον καὶ ἐπομένως ἡ ΕΖ εἶναι κοινὴ χορδὴ τοῦ κύκλου Ο′ καὶ τοῦ κύκλου ΑΕΖΒ. Ἡ ΕΖ, ὡς κοινὴ χορδὴ δύο κύκλων εἶναι ριζικὸς ἄξων αὐτῶν.

Ὁμοίως ἡ ΑΒ εἶναι κοινὴ χορδὴ τῶν κύκλων Ο καὶ ΑΕΖΒ καὶ ἐπομένως εἶναι ριζικὸς ἄξων αὐτῶν.

Ὥστε αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΕΖ, ΓΗ εἶναι ριζικοὶ ἄξονες τριῶν κύκλων Ο, Ο′, ΑΕΖΒ, οἱ ὁποῖοι τέμνονται ἀνὰ δύο καὶ ἐπομένως (§ 583), τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Ἀσκήσεις

Α′ Ὁμάς. **1857.** (1893). Δίδονται τρεῖς κύκλοι Α, Β, Γ ἀκτίνων ἀντιστοίχως α, β, γ, οἱ ὁποῖοι ἔχουν κοινὸν ριζικὸν ἄξονα, τὴν κοινὴν χορδήν των ΕΕ′, τὸ δὲ Γ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δυνάμεων τυχόντος σημείου Ρ πρὸς τοὺς κύκλους Α καὶ Β εἶναι διπλάσιον τῆς δυνάμεως τοῦ Ρ πρὸς τὸν κύκλον Γ.

1858. (1894). Ἐὰν αἱ περιφέρειαι δύο κύκλων Κ καὶ Λ τέμνωνται, ἡ δύναμις τυχόντος σημείου Μ τῆς μιᾶς πρὸς τὸν ἄλλου κύκλον εἶναι ἴση μὲ τὸ διπλάσιον γινόμενον τῆς ἀποστάσεως τῶν κέντρων Κ καὶ Λ τῶν κύκλων ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου αὐτοῦ ἀπὸ τὸν ριζικὸν ἄξονα τῶν κύκλων αὐτῶν.

1859 (1895). Ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον Ο. Ἐὰν Μ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τόξου ΒΑΓ, καὶ ἀχθοῦν αἱ χορδαὶ ΜΒ καὶ ΜΑ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $AB \times A\Gamma = \overline{MB}^2 - \overline{MA}^2$.

1860. (1896). Εἰς τυχὸν σημεῖον Μ μιᾶς περιφερείας (Κ, R) φέρομεν ἐφαπτομένην ΜΝ=δ καὶ εἰς ἕνα σημεῖον Μ′ μιᾶς ἄλλης περιφερείας (Λ, ρ) φέρομεν ἐφαπτομένην Μ′Ν′=δ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι οἱ κύκλοι (Κ, ΚΝ) καὶ (Λ, ΛΝ′) ἔχουν κοινὸν ριζικὸν ἄξονα πρὸς τοὺς κύκλους (Κ R) καὶ (Λ, ρ).

1861. (1897). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν δυνάμεων πρὸς δύο κύκλους σημείου κειμένου ἐκτὸς τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν κύκλων τούτων, ἰσοῦται πρὸς τὸ διπλάσιον τῆς διακέντρου των ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου ἀπὸ τοῦ ριζικοῦ ἄξονός των.

1862. (1898). Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ θεωροῦμεν δύο σημεῖα Α′, Β′ κινούμενα ἐπ' αὐτῆς καὶ φέρομεν τὰς ΓΑ′ καὶ ΔΒ′, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ Ε. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν κύκλων Κ καὶ Λ, ἐξ ὧν ὁ πρῶτος διέρχεται διὰ Α, Α′, Ε, ὁ δὲ δεύτερος διὰ τῶν Β, Β′, Ε, κινεῖται παραλλήλως πρὸς ἑαυτόν.

1863. (1899). Δίδονται τρεῖς κύκλοι Κ, Λ, Μ τεμνόμενοι εἰς τὰ σημεῖα Α, Β καὶ κινητὸν σημεῖον Ν, κινούμενον ἐπὶ τῆς περιφερείας Μ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ λόγος τῶν δυνάμεων τοῦ Ν πρὸς τοὺς κύκλους Κ, Λ εἶναι σταθερός.

Β′ Ὁμάς. **1864.** (1900). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι τέμνουν εἰς δύο ἴσα μέρη τὰς περιφερείας δύο κύκλων.

1865. (1901). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Β καὶ τέμνουν κατὰ διάμετρον δοθεῖσαν περιφέρειαν Α.

1866. (1902). Δίδεται μία περιφέρεια Ο καὶ ἕνα σημεῖον Γ ἐντὸς τῆς περιφερείας. Ἀπὸ τὸ Γ φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ Α καὶ Β. Μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα ΑΓ γράφομεν περιφέρειαν· ἐπίσης μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα ΒΓ γράφομεν ἄλλην περιφέρειαν. Φέρομεν τὰς κοινὰς ἐξωτερικὰς ἐφαπτομένας ΔΕ καὶ ΖΗ πρὸς τὰς δύο αὐτὰς περιφερείας. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ μέσου Μ τῆς κοινῆς ἐφαπτομένης ΔΕ, ὅταν ἡ τέμνουσα ΑΒ μεταβάλλεται.

1867. (1903). Δύο περιφέρειαι Κ καὶ Λ τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ $Α_1$. Ἀπὸ τὸ Α φέρομεν τέμνουσαν ΑΓΓ′, ἡ ὁποία τέμνει τὰς περιφερείας Κ καὶ Λ εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Γ′. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ μέσου Μ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΓΓ′, ὅταν ἡ τέμνουσα ΑΓΓ′ στρέφεται περὶ τὸ Α.

1868. (1904). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν ΑΜΝ δοθέντος κύκλου (Κ, α), ἡ ὁποία στρέφεται περὶ τὴν Α καὶ μὲ διαμέτρους τὰς ΑΜ καὶ ΑΝ γράφομεν περιφερείας, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν Κ εἰς τὰ σημεῖα Μ′ καὶ Ν′. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου Ρ τῆς τομῆς τῶν χορδῶν ΜΜ′ καὶ ΝΝ′.

1869. (1905). Δίδονται κύκλος Κ καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐκτὸς τοῦ κύκλου· ἀπὸ τὸ Α φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν ΑΜΝ τοῦ κύκλου Κ, ἡ ὁποία στρέφεται περὶ τὸ Α. Εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν τῆς τεμνούσης ΑΜΝ καὶ τῆς περιφερείας Κ φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὰς εὐθείας ΒΜ καὶ ΒΝ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ρ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου Ρ.

1870. (1906). Ἀπὸ σταθερὸν σημεῖον Γ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ΓΔ καὶ ΓΔ′ πρὸς δύο κύκλους, οἱ ὁποῖοι διέρχονται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων ἐπαφῆς Δ καὶ Δ′ καὶ τοῦ μέσου τῆς ΔΔ′.

1871. (1907). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν κύκλων, οἱ ὁποῖοι τέμνουν εἰς δύο ἴσα μέρη τὰς περιφερείας δύο δοθέντων κύκλων (Κ, R) καὶ (Λ′, R′).

1872. (1908). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον P ἄγεται τέμνουσα PAA′ δοθέντος κύκλου (K, R), ἡ ὁποία στρέφεται περὶ τὸ P. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου M κατὰ τὸ ὁποῖον ἡ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου εἰς τὸ A, τέμνει τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ἐφαπτομένην αὐτοῦ εἰς τὸ A′, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ P.

Γ′ Ὁμάς. **1873.** (1909). Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα A καὶ B καὶ νὰ τέμνῃ κατὰ διάμετρον δοθεῖσαν περιφέρειαν K.

1874. (1910). Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ κατὰ διάμετρον τρεῖς δοθείσας περιφερείας.

1875. (1911). Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον A καὶ νὰ τέμνῃ κατὰ διάμετρον δύο δοθέντας κύκλους.

1876. (1912). Δίδονται οἱ κύκλοι K, Λ καὶ τὰ σημεῖα A, B, M καὶ ζητεῖται νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ τοῦ M καὶ τοιαύτη, ὥστε ὁ ριζικὸς ἄξων τῆς ζητουμένης καὶ τῆς K νὰ διέρχεται διὰ τοῦ A, ὁ δὲ ριζικὸς ἄξων τῆς ἰδίας καὶ τῆς Λ νὰ διέρχεται διὰ τοῦ B.

1877. (1913). Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ κέντρον δοθὲν σημεῖον A καὶ ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ δύο τεμνομένας περιφερείας K καὶ Λ οὕτως, ὥστε τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ σημεῖα B τῆς τομῆς τῶν K καὶ Λ καὶ τὰ σημεῖα Δ καὶ E τῆς τομῆς τῶν K καὶ Λ καὶ τῆς ζητουμένης περιφερείας νὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Δ′ Ὁμάς. **1878.** (1914). Δίδονται δύο κύκλοι O καὶ O′, οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ ἄξονός των ἕνα σημεῖον A τοιοῦτον, ὥστε αἱ ἐφαπτόμεναι AB καὶ AB′, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ σημεῖον αὐτὸ πρὸς τοὺς δύο κύκλους, νὰ σχηματίζουν ὀρθὴν γωνίαν.

1879. (1915). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Γ τῆς προεκτάσεως τῆς διακέντρου KΛ δύο κύκλων K καὶ Λ νὰ ἀχθῇ τέμνουσα αὐτῶν τοιαύτη, ὥστε αἱ χορδαὶ AB καὶ ΔE τῶν κύκλων K καὶ Λ νὰ εἶναι ἴσαι.

1880. (1916). Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγραφῇ τρίγωνον ABΓ, τοῦ ὁποίου μία πλευρὰ νὰ διέρχεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον M, ἡ ἄλλη ἀπὸ δοθὲν σημεῖον N καὶ ἡ τρίτη νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν MN.

1881. (1917). Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου ABΓ κατασκευάζομεν ἐξωτερικῶς τρίγωνα ABΔ, BΓE, καὶ ΓAZ τοιαῦτα, ὥστε AZ=AΔ, BΔ=BE, ΓE=ΓZ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι:

1ον. Αἱ κάθετοι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὰς κορυφὰς A, B καὶ Γ ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰς ZΔ, ΔE, καὶ EZ τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

2ον. Αἱ κάθετοι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὰ Δ, E καὶ Z ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰς AB, BΓ καὶ ΓA τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

1882. (1918). Δίδονται δύο κύκλοι Z καὶ Λ ἀκτίνων R καὶ R′ καὶ σημεῖον O, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς αὐτῶν. Νὰ ἀχθῇ ἀπὸ τὸ O μία τέμνουσα τοιαύτη, ὥστε αἱ χορδαί, αἱ ἀποτεμνόμεναι ὑπὸ τῶν περιφερειῶν, νὰ εἶναι ἴσαι.

3. Περιφέρειαι τεμνόμεναι ὀρθογωνίως

587. Ὁρισμός. Ἔστωσαν δύο περιφέρειαι O καὶ O′ (*Σχ. 406*), αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B. Εἰς τὸ σημεῖον A τῆς

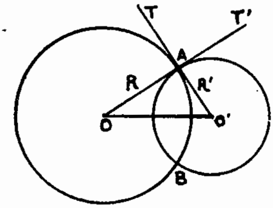
τομῆς των φέρομεν τὴν ΑΤ ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου Ο καὶ τὴν ΑΤ′ ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου Ο′.

Ἐὰν ἡ γωνία ΤΑΤ′ εἶναι ὀρθή, λέγομεν, ὅτι αἱ περιφέρειαι τῶν κύκλων Ο καὶ Ο′ ***τέμνονται ὀρθογωνίως*** *ἢ ὅτι εἶναι* ***ὀρθογωνικαί·*** ὥστε:

Λέγομεν, ὅτι: ***Δύο περιφέρειαι τέμνονται ὀρθογωνίως ἢ ὅτι εἶναι ὀρθογωνικαί,*** *ἐὰν αἱ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν εἰς ἕνα ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς τομῆς των σχηματίζουν ὀρθὴν γωνίαν.*

588. Θεώρημα. ***Ἐὰν δύο περιφέρειαι τέμνωνται ὀρθογωνίως, αἱ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν εἰς ἕνα ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς τομῆς των, διέρχονται ἀπὸ τὰ κέντρα τῶν περιφερειῶν αὐτῶν καὶ ἀντιστρόφως.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν αἱ περιφέρειαι Ο καὶ Ο′ *(Σχ. 406)*, αἱ ὁποῖαι τέμνονται ὀρθογωνίως.



Σχ. 406.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν ΑΤ καὶ ΑΤ′ εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς των Α, διέρχονται ἀπὸ τὰ κέντρα Ο′ καὶ Ο τῶν περιφερειῶν αὐτῶν.

Ἀπόδειξις: Ἐξ ὑποθέσεως ἡ γωνία ΤΑΤ′ εἶναι ὀρθή. Ἐπίσης ἡ γωνία ΟΑΤ εἶναι ὀρθή, διότι ἡ ἐφαπτομένη ΑΤ εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος ΟΑ. Αἱ γωνίαι λοιπὸν ΟΑΤ καὶ ΤΑΤ′ εἶναι ἐφεξῆς παραπληρωματικαὶ καὶ ἑπομένως αἱ μὴ κοιναὶ πλευραί των ΟΑ καὶ ΑΤ′ κεῖνται ἐπ' εὐθείας· ὥστε ἡ ΟΑΤ′ εἶναι εὐθεῖα. Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι ἡ ἐφαπτομένη ΑΤ′ διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον Ο.

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἡ ΑΤ διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον Ο′ τῆς περιφερείας Ο′.

Ἀντιστρόφως. Ὑπόθεσις: Ἔστω, ὅτι αἱ περιφέρειαι Ο καὶ Ο′ τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι ΑΤ καὶ ΑΤ′ εἰς τὸ σημεῖον Α, διέρχονται ἀπὸ τὰ κέντρα Ο καὶ Ο′.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ περιφέρειαι Ο καὶ Ο′ τέμνονται ὀρθογωνίως, δηλ. θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ γωνία ΤΑΤ′ εἶναι ὀρθή.

Ἀπόδειξις: Ἡ ἐφαπτομένη Ο′ΑΤ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΑ καὶ ἑπομένως ἡ γωνία ΤΑΤ′ εἶναι ὀρθή.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν δύο περιφέρειαι. . . .***

589. Πόρισμα I ***Διὰ νὰ τέμνωνται ὀρθογωνίως δύο περιφέρειαι πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως τῶν***

κέντρων των νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀκτίνων των.

Ἐὰν φέρωμεν τὴν διάκεντρον ΟΟ′ *(Σχ. 406)* τῶν κύκλων Ο καὶ Ο′, ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΑΟ′ ἔχομεν

$$\overline{OO'}^2=\overline{OA}^2+\overline{O'A}^2 \qquad (1)$$

Ἐὰν καλέσωμεν R, R′ τὰς ἀκτῖνας τῶν κύκλων Ο καὶ Ο′ καὶ δ τὴν ἀπόστασιν ΟΟ′ τῶν κέντρων των, ἡ (1) γράφεται

$$\delta^2=R^2+R'^2.$$

590. Πόρισμα ΙΙ. Ἀπὸ τὴν σχέσιν $\delta^2=R^2+R'^2$, τὴν ὁποίαν εὕρήκαμεν εἰς τὸ προηγούμενον πόρισμα λαμβάνομεν

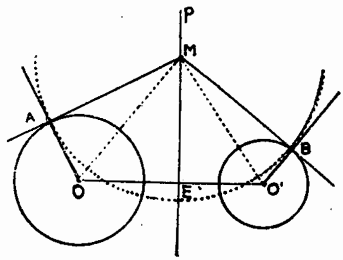
$$R^2=\delta^2-R'^2 \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad R'^2=\delta^2-R^2 \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ ἡ ἰσότης (1) παριστάνει τὴν δύναμιν τοῦ σημείου Ο πρὸς τὴν περιφέρειαν Ο′, συνάγομεν, ὅτι:

Διὰ νὰ τέμνωνται ὀρθογωνίως δύο περιφέρειαι πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τῆς μιᾶς νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὴν δύναμιν τοῦ κέντρου πρὸς τὴν ἄλλην περιφέρειαν.

591. Θεώρημα. ***Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, ἑκάστη τῶν ὁποίων τέμνει ὀρθογωνίως δύο δοθείσας περιφερείας, εἶναι ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν δύο αὐτῶν περιφερειῶν.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω Μ *(Σχ. 407)* τὸ κέντρον μιᾶς περιφερείας, ἡ ὁποία τέμνει ὀρθογωνίως δύο δοθείσας περιφερείας (Ο, R) καὶ (Ο′, R′) εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀντιστοίχως.



Σχ. 407.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ σημεῖον Μ κεῖται ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν περιφερειῶν Ο καὶ Ο′.

Ἀπόδειξις: Τὸ Μ εἶναι προφανῶς σημεῖον τοῦ τόπου.

Ἐπειδὴ ἡ περιφέρεια Μ τέμνει ὀρθογωνίως τὰς περιφερείας Ο καὶ Ο′, αἱ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν ΑΜ καὶ ΒΜ, εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀντιστοίχως, διέρχονται ἀπὸ τὸ κέντρον Μ. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι ΜΑ=ΜΒ, ὡς ἀκτῖνες τῆς περιφερείας Μ, θὰ εἶναι καὶ $\overline{MA}^2=\overline{MB}^2$. Ἀλλὰ $\overline{MA}^2$ παριστᾷ τὴν δύναμιν τοῦ σημείου Μ πρὸς τὸν κύκλον Ο καὶ $\overline{MB}^2$ τὴν δύναμιν τοῦ σημείου Μ πρὸς τὸν κύκλον Ο′. Ἐπειδὴ αἱ δυνάμεις τοῦ σημείου Μ πρὸς τοὺς κύκλους Ο καὶ Ο′ εἶναι ἴσαι, ἕπεται (§ 578) ὅτι τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος ΡΜΕ.

Ἀντιστρόφως. *Ὑπόθεσις*: Ἔστω M τυχὸν σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἄξονος PE τῶν κύκλων O καὶ O′.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ M εἶναι κέντρον περιφερείας, ἡ ὁποία τέμνει ὀρθογωνίως τὰς περιφερείας O καὶ O′.

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὸ M φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας MA καὶ MB πρὸς τὰς περιφερείας O καὶ O′. Ἐπειδὴ τὸ M εἶναι σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἄξονος PE τῶν κύκλων O καὶ O′, αἱ ἐφαπτόμεναι MA καὶ MB αὐτῶν εἶναι ἴσαι; ἤτοι εἶναι MA=MB.

Ἡ περιφέρεια λοιπόν, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τὸ M καὶ ἀκτῖνα MA διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα A καὶ B.

Ἐὰν φέρωμεν τὰς ἀκτῖνας OA καὶ O′B, αὗται θὰ εἶναι κάθετοι ἀντιστοίχως, ἐπὶ τὰς ἐφαπτομένας MA καὶ MB καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ἐφαπτόμεναι τῆς περιφερείας M.

Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι OA καὶ AM τῶν περιφερειῶν M καὶ O εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς A, ὡς καὶ αἱ ἐφαπτόμεναι O′B καὶ BM τῶν περιφερειῶν M καὶ O′ εἰς τὸ σημεῖον B σχηματίζουν ὀρθὴν γωνίαν· ἄρα ἡ περιφέρεια M τέμνει ὀρθογωνίως τὰς περιφερείας O καὶ O′.

Ἀφοῦ λοιπὸν τὸ τυχὸν σημεῖον M τοῦ ριζικοῦ ἄξονος PE τῶν περιφερειῶν O καὶ O′ εἶναι κέντρον περιφερείας, ἡ ὁποία τέμνει ὀρθογωνίως τὰς δοθείσας περιφερείας O καὶ O′ ἕπεται, ὅτι ὁ ζητούμενος γεωμετρικὸς τόπος εἶναι ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν περιφερειῶν O καὶ O′.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ὁ γεωμετρικὸς τόπος. . . .***

Παρατήρησις. Ἐὰν αἱ περιφέρειαι O καὶ O′ τέμνωνται, ὁ ζητούμενος γεωμετρικὸς τόπος εἶναι τὸ μέρος τοῦ ριζικοῦ ἄξονος, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τῶν δύο τεμνομένων κύκλων.

592. Πόρισμα. ***Τὸ ριζικὸν κέντρον τριῶν κύκλων, ὅταν τοῦτο κεῖται ἐκτὸς τῶν κύκλων, εἶναι κέντρον περιφερείας, ἡ ὁποία τέμνει ὀρθογωνίως τὰς περιφερείας αὐτῶν.***

Ἔστω O τὸ ριζικὸν κέντρον τῶν τριῶν κύκλων O_1, O_2, O_3 *(Σχ.403)*. Λέγομεν, ὅτι τὸ O εἶναι κέντρον περιφερείας, ἡ ὁποία τέμνει ὀρθογωνίως τὰς περιφερείας O_1, O_2, O_3.

Τὸ O, ὡς σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἄξονος P_1 τῶν κύκλων O_1 καὶ O_2 εἶναι κέντρον περιφερείας O, ἡ ὁποία τέμνει ὀρθογωνίως τὰς περιφερείας O_1 καὶ O_2.

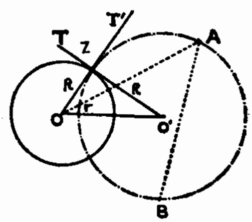
Ἡ περιφέρεια O, ὡς ἔχουσα τὸ κέντρον της O ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος P_3 τῶν κύκλων O_2 καὶ O_3 θὰ τέμνῃ ὀρθογωνίως τὰς περιφε-

ρείας O_2 καὶ O_3 ἄρα ἡ περιφέρεια O τέμνει ὀρθογωνίως καὶ τὰς τρεῖς περιφερείας O_1, O_2, O_3.

593. Πρόβλημα I. ***Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β καὶ νὰ τέμνῃ δοθεῖσαν περιφέρειαν Ο ὀρθογωνίως.***

Ἀνάλυσις: Ἔστω (O′, R′) *(Σχ. 408)* ἡ ζητουμένη περιφέρεια, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β καὶ τέμνει τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν (O, R) ὀρθογωνίως εἰς τὸ σημεῖον Z.

Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας OZ καὶ O′Z. Ἐπειδὴ αἱ περιφέρειαι O καὶ O′ τέμνονται ὀρθογωνίως τὸ τρίγωνον ZOO′ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Z καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος R παριστάνει τὴν δύναμιν τοῦ σημείου O πρὸς τὸν κύκλον O′. Ἐὰν λοιπὸν φέρωμεν τὴν τέμνουσαν OΓA θὰ εἶναι



Σχ. 408.

$$R^2 = O\Gamma \times OA \quad \text{ἢ} \quad \frac{OA}{R} = \frac{R}{O\Gamma} \qquad (1)$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν (1) συνάγομεν, ὅτι ἡ OΓ δύναται νὰ κατασκευασθῇ, ὡς τετάρτη ἀνάλογος τῶν γνωστῶν τμημάτων OA, R, R καὶ ἑπομένως νὰ προσδιορισθῇ καὶ τὸ σημεῖον Γ ἐπὶ τῆς OA. Ἡ ζητουμένη λοιπὸν περιφέρεια θὰ διέρχεται ἀπὸ τὰ τρία σημεῖα A, B, Γ καὶ ἑπομένως δύναται νὰ κατασκευασθῇ.

Σύνθεσις: Κατασκευάζομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον τῶν γνωστῶν τμημάτων OA, R, R. Ἐπὶ τῆς εὐθείας OA λαμβάνομεν τμῆμα OΓ ἴσον μὲ τὴν τετάρτην ἀνάλογον τῶν OA, R, R. Ἔπειτα γράφομεν περιφέρειαν O′, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα A, B, Γ καὶ ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη περιφέρεια.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὴν διάκεντρον OO′. Ἡ δύναμις Δ τοῦ σημείου O πρὸς τὸν κύκλον O′ εἶναι $\Delta = \overline{OO'}^2 - R'^2$.

Ἀλλὰ ἡ δύναμις Δ τοῦ σημείου O πρὸς κύκλον O′ εἶναι ἴση καὶ μὲ OΓ×OA· ἄρα θὰ εἶναι $\overline{OO'}^2 - R'^2 = O\Gamma \times OA$ (2)

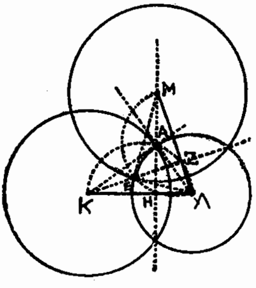
Ἀλλὰ ἐκ κατασκευῆς, εἶναι $\dfrac{OA}{R} = \dfrac{R}{O\Gamma}$ ἢ $O\Gamma = \dfrac{R^2}{OA}$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (2) τὸ OΓ μὲ τὸ ἴσον του καὶ ἔχομεν $\overline{OO'}^2 - R'^2 = R$ ἢ $\overline{OO'}^2 = R^2 + R'^2$.

Ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον τῆς διακέντρου τῶν περιφερειῶν O καὶ O′ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀκτίνων των, αἱ περιφέρειαι αὗται τέμνονται ὀρθογωνίως (§ 589).

594. Πρόβλημα II. ***Νὰ γραφοῦν τρεῖς κύκλοι, οἱ ὁποῖοι νὰ ἔχουν ὡς κέντρα, ἀντιστοίχως, τὰ δοθέντα σημεῖα Κ, Λ, Μ καὶ οἱ ὁποῖοι νὰ τέμνωνται, ἀνὰ δύο, ὀρθογωνίως.***

Τὸ κέντρον Μ *(Σχ. 409)* τοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος τέμνει ὀρθογωνίως τοὺς κύκλους Κ καὶ Λ κεῖται ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος αὐτῶν. Ἐπειδὴ δὲ ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν κύκλων Κ καὶ Λ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον αὐτῶν ΚΛ ἕπεται, ὅτι οὗτος εἶναι ἕνα ἀπὸ τὰ ὕψη ΜΗ τοῦ τριγώνου ΜΚΛ.



Σχ. 409.

Ἔστω Α τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν τεμνομένων περιφερειῶν Κ καὶ Λ.

Ἐπειδὴ οἱ κύκλοι Κ καὶ Λ τέμνονται ὀρθογωνίως, αἱ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν εἰς τὸ Α σχηματίζουν ὀρθὴν γωνίαν καὶ διέρχονται ἀπὸ τὰ κέντρα Κ καὶ Λ.

Ἐπειδὴ ἡ γωνία ΚΑΛ εἶναι ὀρθή, ἡ κορυφή της κεῖται ἐπὶ ἡμιπεριφερείας, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὴν ΚΛ. Τὸ σημεῖον Α ὁρίζεται λοιπόν, ὡς τομὴ τῆς ἡμιπεριφερείας αὐτῆς καὶ τῆς καθέτου ΜΗ, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ Μ ἐπὶ τὴν ΚΛ. Μὲ κέντρα λοιπὸν τὰ Κ καὶ Λ καὶ ἀκτῖνας ἀντιστοίχως τὰς ΚΑ καὶ ΛΑ γράφομεν περιφερείας, αἱ ὁποῖαι τέμνονται ὀρθογωνίως.

Ἐπειδὴ ὁ κύκλος Κ τέμνει ὀρθογωνίως τοὺς κύκλους Λ καὶ Μ, τὸ κέντρον του Κ κεῖται ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν κύκλων Λ καὶ Μ. Ἀλλὰ ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν κύκλων Λ καὶ Μ εἶναι τὸ ὕψος ΚΖ τοῦ τριγώνου ΚΛΜ.

Μὲ διάμετρον τὴν ΛΜ γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΚΖ εἰς τὸ σημεῖον Ε, ὁπότε ἡ γωνία ΜΕΛ εἶναι ὀρθή, ὡς ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον. Ὁ κύκλος λοιπόν, ὁ ὁποῖος ἔχει κέντρον τὸ Μ καὶ ἀκτῖνα ΜΕ τέμνει ὀρθογωνίως τοὺς κύκλους Κ καὶ Λ. Ὥστε αἱ ζητούμεναι περιφέρειαι εἶναι αἱ (Κ, ΚΑ), (Λ, ΛΑ) καὶ (Μ, ΜΕ).

Ἀσκήσεις

***Α' Ὁμάς.* 1883.** (1919). Νὰ εὑρεθῇ τὸ ριζικὸν κέντρον τριῶν κύκλων Κ, Λ, Μ, ἕκαστος τῶν ὁποίων τέμνει ὀρθογωνίως τοὺς δύο ἄλλους.

1884. (1920). Ἐὰν δύο περιφέρειαι τέμνωνται ὀρθογωνίως, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τυχοῦσα διάμετρος τῆς μιᾶς διαιρεῖται ἁρμονικῶς ὑπὸ τῆς ἄλλης.

1885. (1921). Ἐὰν Δ καὶ Ε εἶναι ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα τομῆς τῆς πλευ-

ρᾶς ΒΓ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ ὑπὸ τῶν διχοτόμων τῆς ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς γωνίας του Α, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ περιφέρειαι, αἱ περιγεγραμμέναι περὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΕ τέμνονται ὀρθογωνίως.

1886. (1922). Εἰς περιφέρειαν Κ ἄγεται ἡ χορδὴ ΑΒ καὶ ἡ κάθετος ἐπ' αὐτὴν διάμετρος ΓΔ· ἐπὶ τῆς περιφερείας Κ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Μ καὶ φέρομεν τὰς ΜΑ καὶ ΜΒ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν ἀντιστοίχως τὴν ΓΔ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ· νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ, περὶ τὸ τρίγωνον ΕΜΖ, περιγραφομένη περιφέρεια τέμνει τὴν Κ ὀρθογωνίως.

Β' Ὁμάς. **1887.** (1923). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, αἱ ὁποιαι τέμνουν τὴν περιφέρειαν Β κατὰ διάμετρον καὶ τὴν περιφέρειαν Α ὀρθογωνίως.

1888. (1924). Μὲ κέντρον δοθὲν σημεῖον Α, νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ ὀρθογωνίως δοθεῖσαν περιφέρειαν Ο.

1889. (1925). Νὰ γραφῇ περιφέρεια τοιαύτη, ὥστε αἱ ἐφαπτόμεναι, αἱ ἀγόμεναι ἀπὸ τὰς τρεῖς κορυφὰς ἑνὸς τριγώνου νὰ εἶναι ἴσαι μεταξύ των, ἢ νὰ εἶναι ἴσαι μὲ δοθέντα μήκη.

1890. (1926). Νὰ γραφῇ περιφέρεια, διερχομένη διὰ δύο σημείων Α καὶ Β καὶ τέμνουσα ὀρθογωνίως δοθεῖσαν περιφέρειαν.

1891. (1927). Νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα ρ, ἐφαπτομένη δοθείσης περιφερείας Α καὶ τέμνουσα ὀρθογωνίως ἄλλην περιφέρειαν Β.

1892. (1928). Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἔχουσα τὸ κέντρον της ἐπὶ δοθείσης εὐθείας xy καὶ τέμνουσα δύο περιφερείας, τὴν μίαν ὀρθογωνίως καὶ τὴν ἄλλην κατὰ διάμετρον.

1893. (1929). Νὰ γραφῇ περιφέρεια τέμνουσα ὀρθογωνίως δύο δοθείσας περιφερείας Α καὶ Β καὶ κατὰ διάμετρον τρίτην περιφέρειαν Γ.

1894. (1930). Νὰ γραφῇ περιφέρεια, διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου Α, τέμνουσα ὀρθογωνίως δοθεῖσαν περιφέρειαν Β καὶ κατὰ διάμετρον ἄλλην περιφέρειαν Γ.

1895. (1931). Νὰ γραφῇ περιφέρεια τέμνουσα ὀρθογωνίως δοθεῖσαν περιφέρειαν Α καὶ κατὰ διάμετρον δύο δοθείσας περιφερείας Β καὶ Γ.

1896. (1932). Ἐπὶ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ δίδεται σημεῖον Γ. Μὲ κέντρα τὰ Α καὶ Β καὶ ἀκτῖνας ΑΒ καὶ ΒΓ γράφομεν ἀντιστοίχως περιφερείας. Νὰ γραφῇ περιφέρεια τέμνουσα ὀρθογωνίως τὰς δύο προηγουμένας περιφερείας καὶ τοιαύτη, ὥστε τὰ τμήματα ΑΓ καὶ ΒΓ νὰ φαίνωνται ἀπὸ τὸ κέντρον της ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν. (Πολυτεχνεῖον).

1897. (1933). Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ τὸ κέντρον της ἐπὶ δοθείσης εὐθείας xy καὶ ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ δύο δοθείσας περιφερείας κατὰ διάμετρον. (Πολυτεχνεῖον).

1898. (1934). Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β καὶ νὰ τέμνῃ ὀρθογωνίως δοθεῖσαν περιφέρειαν (Κ, ρ).

1899. (1935). Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν ἀκτῖνα ρ, νὰ διέρχεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α καὶ νὰ τέμνῃ ὀρθογωνίως ἄλλην δοθεῖσαν περιφέρειαν Κ.

1900. (1936). Νὰ γραφοῦν τρεῖς κύκλοι, οἱ ὁποῖοι νὰ τέμνωνται ἀνὰ δύο

ὀρθογωνίως καὶ νὰ ἔχουν ἀκτῖνας ἀντιστοίχως δοθέντα εὐθύγραμμα τμήματα α, β, γ.

1901. (1937). Δίδεται κύκλος (K, R), ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται δοθείσης εὐθείας X εἰς τὸ σημεῖον A καὶ ζητεῖται νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτεται τῆς X εἰς δοθὲν σημεῖον της M καὶ ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ ὀρθογωνίως τὸν κύκλον (K, R).

1902. (1938). Νὰ γραφῇ περιφέρεια, τῆς ὁποίας αἱ ἐφαπτόμεναι, αἱ ἀγόμεναι ἀπὸ τῶν κορυφῶν δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ νὰ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς ἀπέναντι τούτων πλευρὰς α, β, γ τοῦ τριγώνου.

1903. (1939). Νὰ γραφῇ περιφέρεια τέμνουσα ὀρθογωνίως δοθεῖσαν περιφέρειαν (K, ρ) καὶ διερχομένη διὰ δύο δοθέντων σημείων A, B.

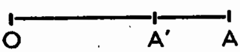
Γ' Ὁμάς. **1904.** (1940). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν κύκλων, οἱ ὁποῖοι τέμνουν δοθεῖσαν περιφέρειαν κατὰ διάμετρον καὶ ἄλλην δοθεῖσαν περιφέρειαν ὀρθογωνίως.

1905. (1941). Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἡ ὁποία τέμνει ὀρθογωνίως δύο δοθείσας περιφερείας (K, α), (Λ, β) καὶ εἰς δύο ἴσα μέρη τρίτην δοθεῖσαν περιφέρειαν (M, γ)

4. Ὁμοιοθεσία

595. Πρόβλημα. ***Ἐπὶ μιᾶς ἡμιευθείας ΟΑ νὰ εὑρεθῇ ἕνα σημεῖον Α' τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι*** $\frac{OA'}{OA} = \frac{\mu}{\nu}$ ***(1), ὅπου μ καὶ ν εἶναι δοθέντα μήκη ἢ δοθέντες ἀριθμοί.***

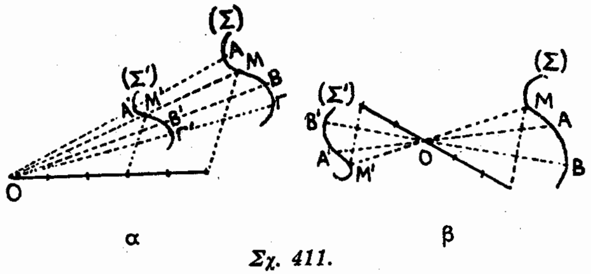
Ἂν ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν ἄκρων ὅρων τῆς δοθείσης ἀναλογίας (1) λαμβάνομεν $\frac{\nu}{OA} = \frac{\mu}{OA'}$.



Σχ. 410.

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν συνάγομεν, ὅτι ἡ ΟΑ' εἶναι *ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν γνωστῶν τμημάτων ν, ΟΑ, μ,* τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν (§ 430).

596. Ὁμοιόθετα σχήματα. Ἔστω Ο (*Σχ. 411*) ἕνα ὡρισμένον σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, k ἕνας δοθεὶς ἀριθμὸς $\left(\pi.\chi.\ k = \frac{3}{5}\right)$ καὶ Α ἕνα τυχὸν σημεῖον ἑνὸς ἐπιπέδου σχήματος Σ.



Σχ. 411.

Φέρομεν τὴν ἡμιευθεῖαν ΟΑ καὶ ὁρίζομεν ἐπ' αὐτῆς (§ 595) ἕνα σημεῖον Α τοιοῦτον, ὥστε $\frac{OA'}{OA} = k$.

Τὸ σημεῖον Α' λέγεται ***εὐθέως ὁμοιόθετον*** *τοῦ σημείου Α.*

Ἐὰν προεκτείνωμεν τὴν ἡμιευθεῖαν ΟΑ, κατ' ἀντίθετον φορὰν *(Σχ. 411 β)* καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λάβωμεν ἕνα σημεῖον Α' τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{OA'}{OA} = k$, *τὸ σημεῖον Α' ὀνομάζεται* ***ἀντιθέτως ὁμοιόθετον τοῦ σημείου Α.***

Τὸ ὡρισμένον σημεῖον Ο λέγεται ***κέντρον ὁμοιοθεσίας,*** *ὁ δὲ ἀριθμὸς k* ***λόγον ὁμοιοθεσίας.***

Ἐὰν ἑνώσωμεν μὲ εὐθείας τὸ σημεῖον Ο *(Σχ. 411 α)* μὲ ὅλα τὰ σημεῖα Α, Β, Γ,.... τοῦ σχήματος (Σ) καὶ ἐπὶ τῶν ἡμιευθειῶν ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ,.... λάβωμεν τμήματα ΟΑ', ΟΒ', ΟΓ',...., τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{O\Gamma'}{O\Gamma} = \cdots = k$$

τὸ σύνολον τῶν σημείων Α', Β', Γ'.... ἀποτελεῖ ἕνα σχῆμα (Σ'), τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται ***εὐθέως ὁμοιόθετον*** *τοῦ σχήματος (Σ) πρὸς* ***κέντρον ὁμοιοθεσίας*** *τὸ Ο καὶ* ***λόγον ὁμοιοθεσίας*** *k.*

Ἐὰν προεκτείνωμεν τὰς ἡμιευθείας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ,.... *(Σχ. 411 β)* κατ' ἀντίθετον φορὰν καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων λάβωμεν τμήματα ΟΑ', ΟΒ', ΟΓ'.... τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{O\Gamma'}{O\Gamma} = \cdots = k$$

τὸ σύνολον τῶν σημείων Α', Β', Γ',.... ἀποτελεῖ ἕνα ἄλλο σχῆμα (Σ''), τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται ***ἀντιθέτως ὁμοιόθετον*** *τοῦ σχήματος (Σ)* ***πρὸς κέντρον ὁμοιοθεσίας*** *τὸ Ο καὶ* ***λόγον ὁμοιοθεσίας k.***

Τὰ σημεῖα Α καὶ Α' λέγονται ***ὁμόλογα σημεῖα*** *καὶ αἱ εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΑ' λέγονται* ***ὁμόλογοι ἀκτῖνες ὁμοιοθεσίας.*** *Αἱ εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΒ,.... ΟΑ', ΟΒ',.... λέγονται, ἁπλῶς* ***ἀκτῖνες ὁμοιοθεσίας.***

Ἐὰν $k > 0$, ἡ ὁμοιοθεσία λέγεται *εὐθεῖα* ἢ *θετικὴ ὁμοιοθεσία* $\left(\text{Σχ. 411α: } k = \frac{3}{5}\right)$.

Ἐὰν $k < 0$, ἡ ὁμοιοθεσία λέγεται *ἀντίθετος* ἢ *ἀρνητικὴ ὁμοιοθεσία* $\left(\text{Σχ. 411β: } k = -\frac{2}{3}\right)$.

597. Θεώρημα. ***Τὰ ὁμοιόθετα σχήματα Σ' καὶ Σ'' ἑνὸς σχήματος Σ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὸ κέντρον ὁμοιοθεσίας καὶ ἑπομένως ἴσα μεταξύ των.***

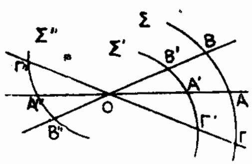
Ἔστω Α ἕνα τυχὸν σημεῖον τοῦ σχήματος Σ *(Σχ. 412)*. Εἰς τὸ σημεῖον Α ἀντιστοιχοῦν τὰ ὁμόλογα σημεῖα Α′ καὶ Α″ τῶν ὁμοιοθέτων σχημάτων Σ′ καὶ Σ″ μὲ λόγον ὁμοιοθεσίας k (ἀπόλυτος τιμή). Ἐξ ὑποθέσεως λοιπὸν εἶναι $\frac{OA'}{OA}=k$ καὶ $\frac{OA''}{OA}=k$.

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας αὐτὰς λαμβάνομεν

$$OA'=k.OA \quad \text{καὶ} \quad OA''=k.OA \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἰσοτήτων (1) εἶναι ἴσα, θὰ εἶναι ἴσα καὶ τὰ πρῶτα μέλη των· δηλ. θὰ εἶναι

$$OA'=OA''.$$



Σχ. 412.

Παρατηροῦμεν, ὅτι το Ο εἶναι τὸ μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος Α′Α″ καὶ ἑπομένως τὰ σημεῖα Α′ καὶ Α″ καὶ συνεπῶς καὶ τὰ σχήματα Σ′ καὶ Σ″ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς κέντρον συμμετρίας τὸ Ο.

Τὰ σχήματα Σ′ καὶ Σ″, ὡς συμμετρικὰ πρὸς κέντρον συμμετρίας, εἶναι ἴσα.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι : ***Τὰ ὁμοιόθετα σχήματα. . . .***

Παρατήρησις. Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα μᾶς εὐκολύνει εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ σχήματος, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀντιθέτως ὁμοιόθετον ἑνὸς δοθέντος σχήματος.

Πράγματι· ὅταν κατασκευάσωμεν τὸ εὐθέως ὁμοιόθετον ἑνὸς σχήματος Σ, στρέφομεν τὸ σχῆμα αὐτὸ περὶ τὸ Ο, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου του, κατὰ 180° καὶ οὕτω ἔχομεν τὸ ἀντιθέτως ὁμοιόθετον σχῆμα τοῦ δοθέντος σχήματος μὲ τὸν αὐτὸν λόγον ὁμοιοθεσίας.

598. Θεώρημα. ***Τὸ ὁμοιόθετον μιᾶς εὐθείας πρὸς κέντρον ὁμοιοθεσίας, τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἐπ' αὐτῆς, εἶναι μία εὐθεῖα παράλληλος πρὸς αὐτήν.***

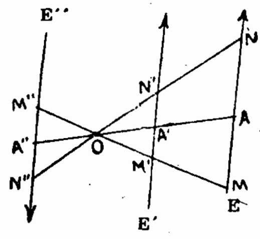
Ἔστω Ε μία εὐθεῖα *(Σχ. 413)*, Ο τὸ κέντρον ὁμοιοθεσίας καὶ k ὁ λόγος τῆς ὁμοιοθεσίας. Εἰς τυχὸν σημεῖον Μ τῆς εὐθείας Ε ἀντιστοιχεῖ ἕνα σημεῖον Μ′ τοιοῦτον, ὥστε $\frac{OM'}{OM}=k$ (1).

Ὁμοίως εἰς ἕνα ἄλλο σημεῖον Ν τῆς Ε ἀντιστοιχεῖ ἕνα σημεῖον Ν′ τοιοῦτον, ὥστε $\frac{ON'}{ON}=k$ (2)

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι $\frac{OM'}{OM}=\frac{ON'}{ON}$.

Ἡ τελευταία ἰσότης δεικνύει, κατὰ τὸ ἀντίστροφον θεώρημα τοῦ Θαλῆ, ὅτι ἡ Μ′Ν′ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΜΝ.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ σημεῖον Μ εἶναι ὡρισμένον καὶ τὸ σημεῖον Ν κινεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας Ε, τότε τὸ ὁμόλογον σημεῖον Ν′ τοῦ Ν, θὰ κινῆται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας Ε′ παραλλήλου πρὸς τὴν Ε, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Μ′, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁμόλογον τοῦ Μ. Ὥστε τὸ εὐθέως ὁμοιόθετον τῆς εὐθείας Ε εἶναι μία εὐθεῖα Ε′ παράλληλος πρὸς τὴν Ε.



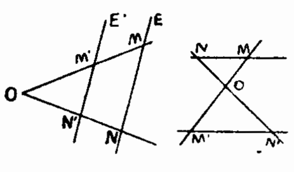
Σχ. 413.

Τὸ ἀντιθέτως ὁμοιόθετον τῆς εὐθείας Ε, μὲ λόγον ὁμοιοθεσίας τὸν αὐτόν, θὰ εἶναι ἐπίσης μία εὐθεῖα παράλληλος Ε″ πρὸς τὴν Ε καὶ συμμετρικὴ πρὸς τὴν Ε′ πρὸς κέντρον τὸ Ο. Ἀλλὰ ἡ κίνησις τοῦ Ν″ κινουμένου ἐπὶ τῆς Ε″ εἶναι ἀντίθετος τῆς κινήσεως τοῦ σημείου Ν, τὸ ὁποῖον κινεῖται ἐπὶ τῆς Ε.

Παρατήρησις. Ἐὰν ἀντὶ μιᾶς εὐθείας, λάβωμεν μίαν ἡμιευθεῖαν ΑΕ, τὸ εὐθέως ὁμοιόθετον αὐτῆς εἶναι μία ἡμιευθεῖα Α′Ε′ *παράλληλος πρὸς τὴν ΑΕ καὶ μὲ τὴν αὐτὴν φοράν*, ἐνῷ τὸ ἀντιθέτως ὁμοιόθετον αὐτῆς εἶναι μία εὐθεῖα Α″Ε″ *παράλληλος πρὸς τὴν ΑΕ καὶ μὲ ἀντίθετον φοράν*.

599. Θεώρημα. (*Ἀντίστροφον*). ***Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι εἶναι ὁμοιόθετοι πρὸς κέντρον τυχὸν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τῶν δύο αὐτῶν εὐθειῶν.***

Ἔστωσαν Ε καὶ Ε′ δύο εὐθεῖαι παράλληλοι (*Σχ. 414*). Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς αὐτῶν, φέρομεν δύο τυχούσας τεμνούσας ΟΜ′Μ καὶ ΟΝ′Ν, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν Ε′ εἰς τὰ σημεῖα Μ′ καὶ Ν′ καὶ τὴν Ε εἰς τὰ Μ καὶ Ν.



α β

Σχ. 414.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΟΜΝ, ἡ Μ′Ν′ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως, παράλληλος πρὸς τὴν ΜΝ, ἑπομένως, κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Θαλῆ, θὰ εἶναι $\frac{OM'}{OM}=\frac{ON'}{ON}$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ λόγος $\frac{OM'}{OM}$ τῶν τμημάτων, τὰ ὁποῖα περιέχονται μεταξὺ τοῦ Ο καὶ τῶν σημείων εἰς τὰ ὁποῖα αἱ τέμνουσαι τέμνουν τὰς δύο παραλλήλους, μένει πάντοτε ὁ αὐτός, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ τέμνουσα, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ Ο.

Ὥστε αἱ εὐθεῖαι Ε καὶ Ε′ εἶναι ὁμοιόθετοι.

Ἡ ὁμοιοθεσία εἶναι θετική, ἐὰν τὸ σημεῖον Ο κεῖται ἐκτὸς τοῦ

μέρους τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον ὁρίζουν αἱ παράλληλοι *(Σχ. 414α)* καὶ ἀρνητική, ἐὰν τὸ O κεῖται μεταξὺ αὐτῶν *(Σχ. 414β)*.

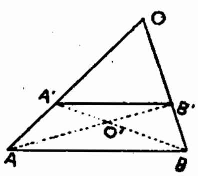
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι....***

600. Πόρισμα I. ***Τὸ ὁμοιόθετον σχῆμα μιᾶς γωνίας εἶναι μία γωνία ἴση μὲ τὴν δοθεῖσαν.***

Πράγματι· ἡ προκύπτουσα γωνία ἔχει τὰς πλευράς της παραλλήλους μίαν πρὸς μίαν καὶ μὲ τὴν αὐτὴν φοράν, εἰς τὴν θετικὴν ὁμοιοθεσίαν ἢ μὲ ἀντίθετον φορὰν εἰς τὴν ἀρνητικὴν ὁμοιοθεσίαν.

601. Πόρισμα II. ***Τὸ ὁμοιόθετον σχῆμα ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος AB, εἶναι ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα A′B′ παράλληλον καὶ τοιοῦτον, ὥστε*** $\frac{A'B'}{AB} = k$, ***ὅπου k εἶναι ὁ λόγος τῆς ὁμοιοθεσίας.***

Πράγματι· ἐὰν λάβωμεν τυχὸν σημεῖον O ἐκτὸς τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AB καὶ φέρομεν τὰς εὐθείας OA καὶ OB, εὑρίσκομεν, κατὰ τὸ θεώρημα τῆς § 598, ὅτι εἰς τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα AB μιᾶς εὐθείας ἀντιστοιχεῖ ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα A′B′ παράλληλον πρὸς τὸ AB.



Σχ. 415.

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα OAB καὶ OA′B′ εἶναι ὅμοια, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA} = k \quad \text{(διὰ τὴν θετικὴν ὁμοιοθεσίαν)}$$

καὶ

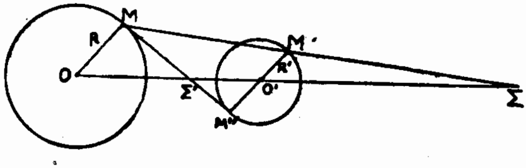
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{O'A'}{O'A} = k \quad \text{(διὰ τὴν ἀρνητικὴν ὁμοιοθεσίαν).}$$

602. Πόρισμα III. ***Τὸ ὁμοιόθετον σχῆμα ἑνὸς πολυγώνου εἶναι πολύγωνον ὅμοιον πρὸς αὐτό.***

Πράγματι· ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα εἶναι ὁμοιόθετα, δύο ὁμόλογοι πλευραί των εἶναι εὐθύγραμμα τμήματα ὁμοιόθετα καὶ δύο ὁμόλογοι γωνίαι των εἶναι ὁμοιόθετοι γωνίαι. Ὥστε τὰ πολύγωνα αὐτὰ ἔχουν τὰς πλευράς των ἀναλόγους, μὲ λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῆς ὁμοιοθεσίας καὶ τὰς ὁμολόγους γωνίας των ἴσας.

603. Θεώρημα. ***Τὸ ὁμοιόθετον σχῆμα μιᾶς περιφερείας κύκλου, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τὸ O καὶ ἀκτῖνα R, πρὸς κέντρον ὁμοιοθεσίας ἕνα σημεῖον Σ καὶ λόγον ὁμοιοθεσίας k, εἶναι μία περιφέρεια κύκλου, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον, τὸ ὁμοιοθέτως ὁμόλογον τοῦ κέντρου O καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ R.k.***

Ἔστω ὁ κύκλος Ο ἀκτῖνος R, Σ τὸ κέντρον τῆς ὁμοιοθεσίας καὶ k ὁ δοθεὶς λόγος ὁμοιοθεσίας. Φέρομεν μίαν τυχοῦσαν ἀκτῖνα ΟΜ τοῦ κύκλου Ο καὶ τὰς εὐθείας ΣΜ καὶ ΣΟ. Ἐπὶ τῆς ΣΜ εὑρίσκομεν ἕνα σημεῖον Μ′ τοιοῦτον, ὥστε $\frac{ΣΜ'}{ΣΜ}=k$ (1). Ἐπίσης ἐπὶ τῆς εὐθείας ΣΟ λαμβάνομεν ἕνα σημεῖον Ο′ τοιοῦτον, ὥστε $\frac{ΣΟ'}{ΣΟ}=k$ (2). Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν Ο′Μ′.



Σχ. 416.

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι

$$\frac{ΣΜ'}{ΣΜ}=\frac{ΣΟ'}{ΣΟ}=k \qquad (3)$$

Ἡ σχέσις (3) δεικνύει, ὅτι ἡ εὐθεῖα Ο′Μ′ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΟΜ καὶ ἑπομένως τὰ τρίγωνα ΣΟ′Μ′ καὶ ΣΟΜ εἶναι ὅμοια. Ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων αὐτῶν λαμβάνομεν $\frac{O'M'}{OM}=\frac{ΣΟ'}{ΣΟ}$ (4)

Ἐπειδὴ ΟΜ=R καὶ $\frac{ΣΟ'}{ΣΟ}=k$, ἐκ κατασκευῆς, ἡ σχέσις (4) γράφεται $\frac{O'M'}{R}=k$ ἢ Ο′Μ′=Rk.

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ σημεῖον Μ′, τὸ ὁμοιόθετον τοῦ τυχόντος σημείου Μ τῆς περιφερείας Ο, ἀπέχει ἀπὸ τὸ σταθερὸν σημεῖον Ο′, ἀπόστασιν σταθερὰν καὶ ἴσην μὲ R.k· ἄρα τὸ Μ′ κεῖται ἐπὶ περιφερείας κύκλου, ἡ ὁποία γράφεται μὲ κέντρον τὸ Ο′ καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσην μὲ R.k.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Τὸ ὁμοιόθετον σχῆμα. . . .***

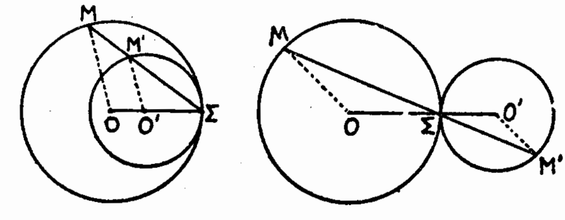
604. Παρατηρήσεις. Εἰς τὴν θετικὴν ὁμοιοθεσίαν, αἱ ἀκτῖνες ΟΜ′ καὶ ΟΜ εἶναι παράλληλοι καὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν. Εἰς τὴν ἀρνητικὴν ὁμοιοθεσίαν, μὲ κέντρον ὁμοιοθεσίας τὸ σημεῖον Σ′, αἱ ὁμόλογοι ἀκτῖνες ΟΜ καὶ ΟΜ″ εἶναι παράλληλοι καὶ ἔχουν ἀντίθετον φοράν.

Τὸ σημεῖον Σ λέγεται ***ἐξωτερικὸν κέντρον ὁμοιοθεσίας*** *καὶ τὸ Σ′* ***ἐσωτερικὸν κέντρον ὁμοιοθεσίας.***

I. *Ἐὰν τὸ κέντρον Σ τῆς ὁμοιοθεσίας συμπίπτει μὲ τὸ κέντρον Ο (Σχ. 417α),* τότε θὰ συμπίπτῃ καὶ μὲ τὸ Ο′ καὶ αἱ δύο περιφέρειαι εἶναι ὁμόκεντροι, οἱοσδήποτε καὶ ἂν εἶναι ὁ λόγος τῆς ὁμοιοθεσίας (±k).

II. *Ἐὰν τὸ κέντρον Σ τῆς ὁμοιοθεσίας κεῖται ἐπὶ τῆς περιφε-*

ρείας Ο (*Σχ. 417 β*), τότε τὸ Σ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας Ο'. Αἱ δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο', ἔχουν τότε ἕνα κοινὸν σημεῖον Σ ἐπὶ τῆς διακέντρου. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ περιφέρειαι *ἐφάπτονται*

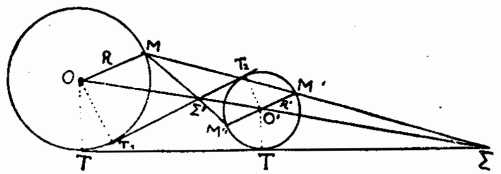


Σχ. 417.

ἐξωτερικῶς, ἐὰν ἡ ὁμοιοθεσία εἶναι θετικὴ (*Σχ. 417α*) καὶ *ἐξωτερικῶς*, ἐὰν ἡ ὁμοιοθεσία εἶναι ἀρνητικὴ (*Σχ. 417β*).

605. Θεώρημα. (*Ἀντίστροφον*). ***Δύο τυχοῦσαι περιφέρειαι κύκλων δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς σχήματα εὐθέως ἢ ἀντιθέτως ὁμοιόθετα.***

Ἔστωσαν Ο καὶ Ο' δύο περιφέρειαι (*Σχ. 418*) ἀκτίνων R καὶ R'. Ἐπὶ τῆς περιφερείας Ο λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Μ καὶ φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΜ. Ἐπίσης φέρομεν τὴν ἀκτῖνα Ο'Μ' παράλληλον πρὸς τὴν ΟΜ καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς.



Σχ. 418.

Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΜΜ', ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς διακέντρου ΟΟ' εἰς τὸ σημεῖον Σ.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΣΟΜ, ἡ Ο'Μ' εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΟΜ καὶ ἑπομένως τὰ τρίγωνα ΣΟ'Μ' καὶ ΣΟΜ εἶναι ὅμοια· ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων αὐτῶν ἔχομεν

$$\frac{\Sigma M'}{\Sigma M}=\frac{\Sigma O'}{\Sigma O}=\frac{O'M'}{OM}=\frac{R'}{R} \qquad (1).$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ σημεῖον Σ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς διακέντρου ΟΟ', εἶναι τοιοῦτον, ὥστε ὁ λόγος $\frac{\Sigma O'}{\Sigma O}$ τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ τὰ ὡρισμένα σημεῖα Ο' καὶ Ο, εἶναι σταθερὸς καὶ ἴσος μὲ $\frac{R'}{R}$· ἄρα (§ 383) τὸ Σ εἶναι τελείως ὡρισμένον. Ἐπίσης ἀπὸ

τὴν σχέσιν (1) συνάγομεν, ὅτι ἡ ΣΜ, ἡ ὁποία εἶναι τυχοῦσα τέμνουσα τῶν περιφερειῶν O καὶ O′ καὶ ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ ὡρισμένον σημεῖον Σ, συναντᾷ τὰς περιφερείας τῶν δύο κύκλων εἰς σημεῖα M καὶ M′ τοιαῦτα, ὥστε $\frac{\Sigma M'}{\Sigma M} = \frac{R'}{R}$.

Συνεπῶς, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν εὐθέως ὁμοιοθέτων σχημάτων, αἱ περιφέρειαι O καὶ O′ εἶναι εὐθέως ὁμοιόθετοι μὲ κέντρον ὁμοιοθεσίας τὸ σημεῖον Σ καὶ λόγον ὁμοιοθεσίας $\frac{R'}{R} = k$.

2ον. Ἐὰν φέρωμεν τὴν ἀκτῖνα O′M″ παράλληλον πρὸς τὴν OM καὶ μὲ ἀντίθετον φορὰν καὶ φέρομεν τὴν MM″, αὐτὴ θὰ συναντήσῃ τὴν OO′ εἰς ἕνα σημεῖον Σ′. Ἐὰν ἐργασθῶμεν, ὡς ἀνωτέρω, θὰ εὕρωμεν τὴν σχέσιν $\frac{\Sigma' M''}{\Sigma' M} = \frac{\Sigma' O'}{\Sigma' O} = \frac{O' M''}{OM} = \frac{R'}{R}$.

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν συνάγομεν, ὅτι τὸ σημεῖον Σ′ εἶναι ὡρισμένον ἐπὶ τῆς OO′ καὶ ὅτι ἡ Σ′M, ἡ ὁποία εἶναι τυχοῦσα τέμνουσα ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ Σ′, συναντᾷ τὰς περιφερείας τῶν δύο κύκλων εἰς δύο σημεῖα M καὶ M″ τοιαῦτα, ὥστε $\frac{\Sigma' M''}{\Sigma' M} = \frac{R'}{R}$. Συνεπῶς αἱ δύο περιφέρειαι O καὶ O′ εἶναι ἀντιθέτως ὁμοιόθετοι μὲ κέντρον ὁμοιοθεσίας τὸ Σ′ καὶ λόγον ὁμοιοθεσίας $\frac{R'}{R}$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι : ***Δύο τυχοῦσαι περιφέρειαι. . . .***

606. Παρατήρησις. Ἔστω TT′ *(Σχ. 418)* ἡ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη τῶν περιφερειῶν O καὶ O′. Ἐὰν φέρωμεν τὰς ἀκτῖνας OT καὶ O′T′ εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς, αἱ ἀκτῖνες αὐταὶ θὰ εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν TT′. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ $\frac{O'T'}{OT} = \frac{R'}{R}$, ἡ εὐθεῖα TT′ διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Σ.

Ὁμοίως, ἐὰν φέρωμεν τὴν ἐσωτερικὴν ἐφαπτομένην T_1T_2 καὶ τὰς ἀκτῖνας OT_1 καὶ $O'T_2$ εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς, αἱ OT_1 καὶ $O'T_2$ εἶναι παράλληλοι καὶ ἔχουν ἀντίθετον φορὰν καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\frac{O'T_2}{OT_1} = \frac{R'}{R}$, ἡ εὐθεῖα T_1T_2 διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Σ′.

Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Σ καὶ Σ′ δύνανται νὰ κατασκευασθοῦν εὐκόλως (§ 596) δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὰς κοινὰς ἐξωτερικὰς καὶ ἐσωτερικὰς ἐφαπτομένας δύο περιφερειῶν, ὅπως κατασκευάζομεν τὴν ἐφαπτομένην μιᾶς περιφερείας ἀπὸ δοθὲν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου.

607. Ἐφαρμογαί. Πρόβλημα Ι. ***Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς γωνίας xOy, νὰ ἀχθῇ μία τέμνουσα ΑΒΓ τὰς πλευρὰς Oy καὶ Ox τῆς γωνίας εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ καὶ τοιαύτη, ὥστε ΒΓ=2ΑΒ (Σχ. 419).***

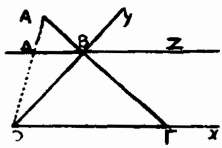
Ἀνάλυσις: Ἀπὸ τὴν δοθεῖσαν σχέσιν λαμβάνομεν

$$\frac{AB}{B\Gamma}=\frac{1}{2} \qquad (1).$$

Κατὰ γνωστὴν ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν ἡ σχέσις (1) γράφεται

$$\frac{AB}{AB+B\Gamma}=\frac{1}{1+2} \quad \text{ἢ} \quad \frac{AB}{A\Gamma}=\frac{1}{3}.$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν συνάγομεν, ὅτι τὰ σημεῖα Β καὶ Γ εἶναι ὁμοιόθετα, μὲ κέντρον ὁμοιοθεσίας τὸ Α καὶ λόγον ὁμοιοθεσίας $^1/_3$.



Σχ. 419.

Ἐπειδὴ τὸ Γ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας Ox, τὸ ὁμοιόθετόν του Β θὰ κεῖται (§ 598) ἐπὶ εὐθείας Ζ παραλλήλου πρὸς τὴν Ox, ἡ ὁποία θὰ εἶναι ὁμοιόθετος τῆς Ox μὲ κέντρον ὁμοιοθεσίας τὸ Α καὶ λόγον $^1/_3$.

Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΟ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Ζ εἰς τὸ σημεῖον Δ. Τὰ σημεῖα Δ καὶ Ο εἶναι ὁμοιόθετα, διότι κεῖνται ἐπὶ ὁμοιοθέτων σχημάτων καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι $\frac{A\Delta}{AO}=\frac{1}{3}$. Τὸ Δ λοιπὸν ὁρίζεται ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν καὶ ἑπομένως καὶ ἡ παράλληλος ΔΖ, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ Δ.

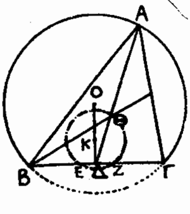
Σύνθεσις: Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΟ καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς σημεῖον Δ τοιοῦτον, ὥστε $\frac{A\Delta}{AO}=\frac{1}{3}$. Ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν Ox, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Oy εἰς τὸ σημεῖον Β· φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν Ox εἰς τὸ Γ. Λέγομεν, ὅτι ἡ ΑΒΓ εἶναι ἡ ζητουμένη τέμνουσα.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι Ox καὶ ΔΖ εἶναι παράλληλοι, εἶναι ὁμοιόθετοι (§ 599) πρὸς κέντρον Α καὶ λόγον ὁμοιοθεσίας $^1/_3$, διότι ἐκ κατασκευῆς εἶναι $\frac{A\Delta}{AO}=\frac{1}{3}$. Τὰ σημεῖα λοιπὸν Β καὶ Γ, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπ' αὐτῶν καὶ ἐπὶ ὁμολόγων ἀκτίνων ΑΒ, ΑΓ εἶναι ὁμοιόθετα καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι $\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{1}{3}$. Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν λαμβάνομεν, κατὰ γνωστὴν ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν

$$\frac{AB}{A\Gamma-AB}=\frac{1}{3-1} \quad \text{ἢ} \quad \frac{AB}{B\Gamma}=\frac{1}{2} \quad \text{ἢ} \quad B\Gamma=2AB.$$

608. Πρόβλημα II. ***Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις καὶ ἡ ἀπέναντι αὐτῆς γωνία εἶναι σταθεραί.***

'Ανάλυσις: Ἔστω ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ *(Σχ. 420)*, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ΒΓ εἶναι σταθερὰ καὶ ἡ γωνία Α εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση μὲ ω. 'Επειδὴ ἡ ΒΓ φαίνεται ἀπὸ τὸ Α ὑπὸ γωνίαν σταθεράν, ἡ κορυφὴ Α κεῖται ἐπὶ τόξου κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ χορδὴν τὴν ΒΓ καὶ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω. Ἔστω Ο τὸ κέντρον τοῦ κυκλικοῦ αὐτοῦ τμήματος καὶ R ἡ ἀκτίς του. Φέρομεν τὴν διάμεσον ΑΔ καὶ ἔστω Θ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων. Τὸ Θ εἶναι σημεῖον τοῦ ζητουμένου τόπου. 'Επειδὴ τὸ Θ



Σχ. 420.

εἶναι σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τριγώνου, θὰ εἶναι $\frac{ΔΘ}{ΔΑ}=\frac{1}{3}$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ σημεῖα Θ καὶ Α εἶναι ὁμοιόθετα μὲ κέντρον ὁμοιοθεσίας τὸ Δ καὶ λόγον ὁμοιοθεσίας $\frac{1}{3}$.

'Επειδὴ τὸ σημεῖον Α κεῖται ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΑΓ τοῦ κύκλου Ο καὶ τὸ ὁμοιόθετόν του Θ θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ σχήματος, τὸ ὁποῖον εἶναι εὐθέως ὁμοιόθετον τῆς περιφερείας Ο μὲ κέντρον ὁμοιοθεσίας τὸ Δ καὶ μὲ λόγον ὁμοιοθεσίας $^1/_3$ καὶ τὸ ὁποῖον εἶναι (§ 603) τόξον περιφερείας, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τὸ σημεῖον Κ, τὸ ὁμοιόθετον τοῦ Δ καὶ ἀκτῖνα ἴσην $R.\frac{1}{3}$.

'Εκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι κατασκευήν:

Σύνθεσις: Μὲ χορδὴν τὴν ΒΓ κατασκευάζομεν ἕνα τόξον κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον νὰ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω. Ἔστω Ο τὸ κέντρον τοῦ τόξου αὐτοῦ καὶ R ἡ ἀκτίς του. Ἔπειτα κατασκευάζομεν τὸ ὁμοιόθετον σχῆμα τοῦ τόξου ΒΑΓ μὲ κέντρον ὁμοιοθεσίας τὸ Δ καὶ λόγον $\frac{1}{3}$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἕνα τόξον ΕΘΖ κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει τὸ κέντρον του Κ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΟΔ καὶ τοιοῦτον ὥστε $\frac{ΔΚ}{ΔΟ}=\frac{1}{3}$ καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ $R.\frac{1}{3}$.

Λέγομεν, ὅτι τὸ τόξον ΕΘΖ εἶναι ὁ ζητούμενος γεωμετρικὸς τόπος.

'Απόδειξις: Τὸ τυχὸν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει βάσιν τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία ἐλήφθη σταθερὰ καὶ τὴν ἀπέναντι γωνίαν Α σταθεράν, διότι ἡ κορυφή της Α κεῖται ἐπὶ τόξου κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ χορ-

δὴν τὴν ΒΓ καὶ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ ω. Φέρομεν τὴν διάμεσον ΑΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὸ τόξον ΕΘΖ εἰς τὸ σημεῖον Θ. Τὰ σημεῖα Θ καὶ Α, ὡς κείμενα ἐπὶ ὁμοιοθέτων τόξων καὶ ἐπὶ ὁμολόγων ἀκτίνων ὁμοιοθεσίας, εἶναι ὁμοιόθετα καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι $\frac{\Delta\Theta}{\Delta A} = \frac{1}{3}$. Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν συνάγομεν, ὅτι τὸ Θ εἶναι σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. **1906.** (1942). Ἐὰν δύο κανονικὰ πολύγωνα εἶναι εὐθέως ὁμοιόθετα, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ κέντρα των καὶ τὸ κέντρον ὁμοιοθεσίας των κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

1907. (1943). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι δύο εὐθέως ὁμοιόθετα κανονικὰ πολύγωνα, μὲ ἄρτιον πλῆθος πλευρῶν, ἔχουν ἕνα ἐσωτερικὸν καὶ ἕνα ἐξωτερικὸν κέντρον ὁμοιοθεσίας.

1908. (1944). Ἑνὸς κύκλου Ο δίδεται μία διάμετρός του ΑΒ καὶ μία χορδὴ ΓΔ. Ἔστωσαν Ε καὶ Ζ τὰ συμμετρικὰ σημεῖα τοῦ Α, ὡς πρὸς κέντρα συμμετρίας τὰ Γ καὶ Δ. Φέρομεν τὴν κάθετον ΒΜ ἐπὶ τὴν ΓΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν εὐθεῖαν ΕΖ εἰς τὸ Μ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Α, Μ καὶ τὸ μέσον Ν τῆς ΓΔ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

1909. (1945). Ἕνα τρίγωνον ΟΑΒ κινεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ του μένον πάντοτε ὅμοιον πρὸς δοθὲν τρίγωνον. Ἡ κορυφὴ Ο εἶναι ὡρισμένη, ἡ δὲ κορυφὴ Α γράφει μίαν δοθεῖσαν γραμμὴν (α). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ κορυφὴ Β γράφει μίαν γραμμὴν (β) ὁμοιόθετον τῆς (α).

1910. (1946). Δίδονται δύο περιφέρειαι Κ καὶ Κ'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου, τῆς εὐθείας ὁμοιοθεσίας των, ἀπὸ μίαν κοινὴν ἐσωτερικὴν ἐφαπτομένην εἶναι ἀνεξάρτητος τῶν κέντρων τῶν κύκλων. Ὁμοίως καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου των, τῆς ἀντιστρόφου ὁμοιοθεσίας, ἀπὸ μίαν ἐξωτερικὴν ἐφαπτομένην.

1911. (1947). Δίδεται ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Κ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν, τῶν σχηματιζομένων ὑπὸ τῶν μὴ διαδοχικῶν πλευρῶν καὶ ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα τῶν διαγωνίων τοῦ τετραπλεύρου, τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

1912. (1948). Ἔστωσαν Α', Β', Γ' τὰ συμμετρικὰ σημεῖα ἑνὸς σημείου Ο τοῦ ἐπιπέδου, ὡς πρὸς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι:

1ον. Αἱ εὐθεῖαι ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ρ.

2ον. Ὅταν τὸ σημεῖον Ο γράφῃ ἕνα σχῆμα, τὸ Ρ γράφει ἕνα σχῆμα ὁμοιόθετον τοῦ σχήματος αὐτοῦ.

1913. (1949). Εἰς δύο περιφερείας Λ καὶ Ν, τεμνομένας ὑπὸ τῆς διακέντρου των κατὰ σειρὰν εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Α', Β', φέρομεν τυχούσας ἀκτῖνας ΛΜ, ΝΜ' ὁμορρόπους. Φέρομεν τὰς ΑΜ καὶ Β'Μ', αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ρ· ἐπίσης καὶ τὰς ΜΒ καὶ Μ'Α', αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ Κ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΡΚ στρέφεται περὶ σταθερὸν σημεῖον.

Β' Ὁμάς. 1914. (1950). Ἐπὶ μιᾶς περιφερείας Ο λαμβάνομεν ἕνα σταθερὸν σημεῖον Α καί ἕνα μεταβλητὸν σημεῖον Β. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῆς τομῆς τῆς χορδῆς ΑΒ καὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας ΑΟΒ.

1915. (1951). Δίδεται περιφέρεια Κ καὶ διάμετρος ΑΒ· ἀπὸ τὸ Α φέρομεν τυχοῦσαν χορδὴν ΑΓ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς της λαμβάνομεν τμῆμα ΓΔ=ΑΓ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν ΚΔ καὶ ΒΓ, ὅταν ἡ ΑΔ στρέφεται περὶ τὸ Α.

1916. (1952). Εἰς ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἡ πλευρὰ ΑΒ=α μένει ἀκίνητος, αἱ δὲ ΒΓ, ΓΔ, ΑΓ ἔχουν ἀντιστοίχως μήκη β, δ, γ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος:

1ον. τοῦ μέσου τῆς διαγωνίου ΒΔ.

2ον. τοῦ μέσου τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα τῶν διαγωνίων τοῦ τετραπλεύρου, ὅταν ἡ ΔΓ στρέφεται περὶ τὸ Γ.

1917. (1953). Δύο κύκλοι διαμέτρων ΑΒ καὶ ΑΓ ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς εἰς τὸ Α. Διὰ τοῦ Α φέρομεν μεταβλητὴν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία τέμνει τὸν πρῶτον κύκλον εἰς τὸ Β' καὶ τὸν δεύτερον εἰς τὸ Γ'. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς Μ τῶν ΒΓ' καὶ ΓΒ'.

1918. (1954). Δίδεται περιφέρεια Ο. Σένδέομεν δι' εὐθείας ὡρισμένον σημεῖον Α μὲ ἕνα ἄλλο σημεῖον Β, τὸ ὁποῖον γράφει τὴν περιφέρειαν Ο. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῆς ΑΒ καὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας ΑΟΒ.

1919. (1955). Ἀπὸ τὸ κοινὸν σημεῖον Α, δύο τεμνομένων περιφερειῶν, φέρομεν μίαν μεταβλητὴν τέμνουσαν, ἡ ὁποία τέμνει τὰς περιφερείας εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου Ρ, τὸ ὁποῖον διαιρεῖ τὴν ΜΝ κατὰ δοθέντα λόγον.

1920. (1956). Δύο περιφέρειαι, τῶν ὁποίων τὰ κέντρα εἶναι σταθερά, μεταβάλλονται οὕτως, ὥστε ὁ λόγος τῶν ἀκτίνων των νὰ εἶναι σταθερός. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος ἑκάστου τῶν σημείων ἐπαφῆς τῆς κοινῆς ἐφαπτομένης των.

1921. (1957). Δίδονται δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι Οx, Οy. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς y φέρομεν κάθετον ΜΑ ἐπὶ τὴν Οx καὶ ἐπὶ τῆς παραλλήλου πρὸς τὴν Οx, τῆς ἀγομένης ἐκ τοῦ Μ, λαμβάνομεν τμῆμα ΜΒ=ΜΑ· νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου Β.

1922. (1958). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῆς πλευρᾶς ΑΓ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ ὑπὸ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Β, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ βάσις ΒΓ εἶναι ὡρισμένη κατὰ τὴν θέσιν, ἡ δὲ πλευρὰ ΑΒ εἶναι σταθερὰ κατὰ τὸ μέγεθος.

1923. (1959). Δίδονται δύο κύκλοι, οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον Α. Ἀπὸ τὸ Α φέρομεν μίαν τέμνουσαν ΜΑΝ, ἡ ὁποία στρέφεται περὶ τὸ Α καὶ ἡ ὁποία τέμνει τὰς περιφερείας τοῦ κύκλου εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κορυφῶν Β καὶ Γ τῶν δύο ἰσοπλεύρων τριγώνων, τὰ ὁποῖα κατασκευάζονται μὲ πλευρὰν τὴν ΜΝ.

1924. (1960). Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν τομῶν τῶν διαμέσων τῶν τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡρισμένην βάσιν κατὰ τὴν θέσιν καὶ τὸ μέγεθος καὶ τῶν ὁποίων ἡ ἀπέναντι κορυφὴ ἑκάστου προβάλλεται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς βάσεως·

1925. (1961). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν

διαμέσων ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ΒΓ εἶναι ὡρισμένη κατὰ τὴν θέσιν, ἡ δὲ πλευρὰ ΑΒ εἶναι σταθερὰ κατὰ τὸ μῆκος.

1926. (1962). Ποῖος ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τῶν τριγώνων, τῶν ἐχόντων βάσιν δοθὲν τμῆμα ΑΒ καὶ ἐμβαδὸν k^2.

1927. (1963). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κορυφῶν Α τῶν τριγώνων ΑΒΓ, τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὴν τὴν πλευρὰν ΒΓ κατὰ τὴν θέσιν καὶ τὸ μέγεθος καὶ τὴν διάμεσον ΒΜ ἴσην πρὸς δοθὲν μῆκος μ.

1928. (1964). Ἑνὸς μεταβλητοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ αἱ βάσεις του ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι σταθεραὶ κατὰ τὸ μέγεθος ἡ δὲ πλευρὰ ΑΔ εἶναι ὡρισμένη κατὰ τὴν θέσιν. Νὰ εὑρεθῇ:

1ον. ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του.

2ον. ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ μέσου Ν τῆς πλευρᾶς του ΒΓ.

1929. (1965). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων τραπεζίου, τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις ἔχουν ἀντιστοίχως μήκη Β, β ἐκ τῶν ὁποίων ἡ Β μένει ἀκίνητος, τὸ δὲ μῆκος τῆς μιᾶς ἐκ τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν εἶναι α.

1930. (1966). Ἑνὸς μεταβλητοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ, ἡ βάσις ΑΒ εἶναι ὡρισμένη κατὰ τὸ μέγεθος καὶ τὴν θέσιν, ἡ βάσις ΓΔ εἶναι σταθερὰ κατὰ τὸ μῆκος καὶ ἡ κορυφή του Δ γράφει δοθεῖσαν περιφέρειαν μὲ κέντρον Ο.

1ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του ΒΔ καὶ ΑΓ.

2ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῆς τομῆς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του.

1931. (1967). Ἑνὸς τραπεζίου ΑΒΓΔ δίδονται αἱ βάσεις ΑΒ=α, ΓΔ=β καὶ ὁ λόγος $\frac{\mu}{\nu}$ τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν των. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του.

1932. (1968). Ἑνὸς τραπεζίου ΑΒΓΔ ἡ βάσις ΑΒ=α εἶναι σταθερὰ κατὰ τὴν θέσιν καὶ τὸ μέγεθος, ἐνῷ ἡ ἄλλη βάσις ΓΔ=β καὶ ἡ πλευρὰ ΑΔ=γ ἔχουν σταθερὰ μήκη.

1ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του.

2ον Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του.

1933. (1969). Αἱ προσκείμεναι πλευραὶ ἑνὸς τετραπλεύρου εἶναι ἴσαι ἀνὰ δύο καὶ μία πλευρά του εἶναι ὡρισμένη. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τετράπλευρον αὐτὸ ἐφάπτεται σταθερῶς δύο περιφερειῶν καὶ νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν αὐτῶν.

1934. (1970). Δίδεται περιφέρεια Ο καὶ μία διάμετρός της ΑΒ ὡρισμένη κατὰ τὴν θέσιν. Φέρομεν μίαν τυχοῦσαν ἀκτῖνα ΟΓ κινητὴν καὶ ἀπὸ τὸ Γ κάθετον ΓΔ ἐπὶ τὴν ΑΒ. Ἐπὶ τῆς ΟΓ λαμβάνομεν μῆκος ΟΜ τοιοῦτον, ὥστε $\frac{ΟΜ}{ΓΔ}=\frac{\mu}{\nu}$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ Μ.

1935. (1971). Δίδεται ἕνας κύκλος Ο καὶ Η ἕνα σημεῖον ἐντὸς αὐτοῦ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὑπάρχει ἀπειρία τριγώνων ἐγγεγραμμένων, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸ Η ὡς σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ὕψων.

2ον. Νά εὑρεθοῦν οἱ τόποι τῶν μέσων τῶν πλευρῶν καὶ τῶν ποδῶν τῶν ὑψῶν τῶν τριγώνων αὐτῶν.

1936. (1972). Δίδεται κύκλος Ο καὶ μία χορδή του ΑΒ ὡρισμένη κατὰ τὴν θέσιν καὶ τὸ μέγεθος καὶ ὑποθέτομεν, ὅτι ἕνα σημεῖον Μ κινεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας του. Μὲ πλευρὰς τὰς ΑΒ καὶ ΑΜ κατασκευάζομεν παραλληλόγραμμα.

1ον. Νά εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῆς τετάρτης κορυφῆς Ν τῶν παραλληλογράμμων αὐτῶν.

2ον. Νά εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου ΝΜΒ.

3ον. Νά εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ κέντρου τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας περὶ τὸ τρίγωνον ΝΜΒ.

1937. (1973). Δίδεται περιφέρεια κύκλου Ο, ἕνα σημεῖον Α ἐντὸς αὐτῆς καὶ ἔστω Β ἕνα τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας. Φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΒΤ τῆς περιφερείας καὶ κατασκευάζομεν ἕνα ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ πλευρὰν τὴν ΑΒ καὶ μία διαγώνιός του νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης ΒΤ. Νά εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῆς τετάρτης κορυφῆς Μ τοῦ ὀρθογωνίου, ὅταν τὸ Β κινῆται ἐπὶ τῆς περιφερείας Ο.

1938. (1974). Δίδεται κύκλος Ο καὶ ἕνα σημεῖον Σ ἐκτὸς αὐτοῦ. Φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΣΑ καὶ μίαν μεταβλητὴν τέμνουσαν ΣΒΓ. Νά εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ κέντρου βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

1939. (1975). Δίδεται ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ὁ κύκλος Ο, ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. Συνδέομεν μὲ εὐθεῖαν τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ τόξου, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ τριγώνου μὲ τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. Αἱ εὐθεῖαι ΒΜ καὶ ΓΜ τέμνουν τὰς ΑΓ καὶ ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε ἀντιστοίχως.

1ον. Νά ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα ΒΕ+ΑΔ εἶναι σταθερόν.

2ον. Νά εὑρεθοῦν οἱ τόποι τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν ὑψῶν, τῶν διαμέσων, τοῦ κέντρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τὸ τρίγωνον ΑΕΓ.

1940. (1976). Δίδεται κύκλος Κ καὶ ἡ χορδὴ ΑΒ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τεταρτημόριον· ἀπὸ τὸ Α φέρομεν ἄλλην χορδὴν ΑΖ στρεφομένην περὶ τὸ Α· νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῆς τετάρτης κορυφῆς Η τοῦ παραλληλογράμμου, τοῦ κατασκευαζομένου ἐπὶ τῶν ΑΒ καὶ ΑΖ.

1941. (1977). Νά εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν ἐφαπτομένων ὅλων τῶν κύκλων, τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς δοθεῖσαν γωνίαν Α καὶ αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν Σ.

1942. (1978). Δύο κύκλοι Κ καὶ Λ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ Α· φέρομεν τυχοῦσαν χορδὴν ΑΒ τοῦ κύκλου Λ καὶ ἐπὶ τὴν ΑΒ τὴν κάθετον χορδὴν ΑΓ τοῦ κύκλου Κ. Νά εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῆς προβολῆς τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΓ.

Γ' Ὁμάς. **1943.** (1979). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Ρ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς περιφερείας νὰ ἀχθῇ τέμνουσα ΡΑΒ αὐτῆς τοιαύτη, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{PA}{PB}=\frac{3}{4}$.

1944. (1980). Δίδεται ἕνα σημεῖον Ρ καὶ τρεῖς ἡμιευθεῖαι ΟΧ, ΟΥ, ΟΖ· Νά ἀχθῇ ἀπὸ τὸ Ρ μία τέμνουσα ΡΑΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΟΧ εἰς τὸ Α,

τὴν ΟΥ εἰς τὸ Β καὶ τὴν ΟΖ εἰς τὸ Γ καὶ τοιαύτη, ὥστε $\frac{ΑΒ}{ΒΓ}=\frac{2}{3}$.

1945. (1981). Ἀπὸ τὸ κοινὸν σημεῖον δύο τεμνομένων περιφερειῶν, νὰ ἀχθῇ μία τέμνουσα τὰς περιφερείας εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Β καὶ τοιαύτη, ὥστε ΑΒ=2ΑΓ.

1946. (1982). Δίδεται μία εὐθεῖα Χ καὶ ἑκατέρωθεν αὐτῆς ἕνα σημεῖον Λ καὶ μία περιφέρεια Κ, ἡ ὁποία δὲν τέμνει τὴν Χ. Νὰ ἀχθῇ ἀπὸ τὸ Λ μία εὐθεῖα, ὁ ὁποία νὰ τέμνῃ τὴν Χ εἰς τὸ Μ καὶ τὴν περιφέρειαν Κ εἰς τὸ Ν καὶ τοιαύτη, ὥστε $\frac{ΛΜ}{ΛΝ}=\frac{1}{3}$.

1947. (1983). Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι Χ, Υ, Ζ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται ἀνὰ δύο καὶ ζητεῖται νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν Ε, ἡ ὁποία νὰ διχοτομῆται ὑπὸ τῶν Χ, Υ, Ζ.

1948. (1984). Δίδονται δύο ὁμόκεντροι περιφέρειαι καὶ ζητεῖται νὰ ἀχθῇ ἀπὸ δοθὲν σημεῖον τῆς μιᾶς ἐξ αὐτῶν ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα, τὸ ὁποῖον νὰ τριχοτομεῖται ὑπ' αὐτῶν.

1949. (1985). Εἰς δοθέντα κύκλον Κ νὰ ἀχθῇ χορδή, τριχοτομουμένη ὑπὸ δύο διδομένων ἀκτίνων ΚΑ, ΚΒ αὐτοῦ.

1950. (1986). Ἀπὸ τὰς κορυφὰς δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ νὰ ἀχθοῦν τρεῖς παράλληλοι μεταξύ των εὐθεῖαι, ἔχουσαι δεδομένα μήκη μ, ν, ρ, ὅπου $μ>ν>ρ$ καὶ τῶν ὁποίων τὰ ἄκρα νὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

Δ' Ὁμάς. **1951.** (1987). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν ΒΓ=α, τὴν γωνίαν Α=ω καὶ τὴν διάμεσον ΒΜ=μ.

1952. (1988). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν πλευρὰν ΒΓ=α, τὸ ἄθροισμα β+γ=λ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν καὶ τὴν διχοτόμον ΑΔ=δ.

1953. (1989). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν θέσιν τῆς κορυφῆς Α, τὸ σημεῖον Ζ τῆς τομῆς τῶν διαμέσων του καὶ ὅτι αἱ δύο ἄλλαι κορυφαί του κεῖνται ἐπὶ δύο εὐθειῶν Χ καὶ Υ.

1954. (1990). Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὰς διαμέσους του $μ_β$ καὶ $μ_γ$.

1955. (1991). Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν ΒΓ=α τὴν γωνίαν Β=φ καὶ τὴν γωνίαν ΒΜΓ=ω, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ διάμεσος ΒΜ μὲ τὴν πλευρὰν ΑΓ.

1956. (1992). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράπλευρον, ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν Α=ω, τὴν διαγώνιον ΒΔ=δ, τὴν γωνίαν ΑΒΔ=φ καὶ τὸν λόγον $\frac{μ}{ν}$ τῶν τμημάτων εἰς τὰ ὁποῖα ἡ διαγώνιος ΑΓ διαιρεῖται ὑπὸ τῆς ΒΔ.

1957. (1993). Εἰς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἐγγραφῇ ἕνα τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ μία κορυφὴ νὰ εἶναι δοθὲν σημεῖον Δ τῆς πλευρᾶς ΒΓ, ἡ ἀπέναντι τῆς κορυφῆς αὐτῆς πλευρὰ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν Χ καὶ νὰ φαίνεται ἀπὸ τὸ Δ ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν ω.

1958. (1994). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὰς πλευράς του ΑΒ=γ, ΑΓ=β καὶ τὴν διχοτόμον ΑΔ=δ τῆς γωνίας Α.

1959. (1995). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν Α=ω καὶ τὰς διαμέσους του ΒΔ=μ καὶ ΓΕ=ν.

1960. (1996). Νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον εἰς τὸ κοινὸν μέρος δύο ἴσων κύκλων Κ καὶ Λ ἀκτίνων R, τῶν ὁποίων ἡ περιφέρεια ἑκάστου διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ἄλλου.

1961. (1997). Εἰς δοθὲν τετράπλευρον ΑΒΓΔ νὰ ἐγγραφῇ παραλληλόγραμμον, ἔχον κέντρον δοθὲν σημεῖον Κ.

1962. (1998). Εἰς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἐγγραφῇ ἄλλο τρίγωνον ΔΕΖ, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι μία τῶν κορυφῶν του εἶναι δοθὲν σημεῖον Δ τῆς ΒΓ, ἡ ἀπέναντι αὐτῆς πλευρὰ εἶναι παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν Χ καὶ ὅτι ὁ λόγος τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν ΔΕ καὶ ΔΖ εἶναι ἴσος πρὸς $\frac{2}{3}$.

Ε' Ὁμάς. **1963.** (1999). Ἐπὶ δοθείσης περιφερείας Κ νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε αἱ χορδαὶ ΜΒ καὶ ΜΑ, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὸ Μ μὲ δύο δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β τῆς περιφερείας, νὰ τέμνουν δοθεῖσαν διάμετρον ΓΔ εἰς δύο σημεῖα Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως καὶ τοιαῦτα, ὥστε $\frac{KE}{KZ}=\frac{2}{3}$.

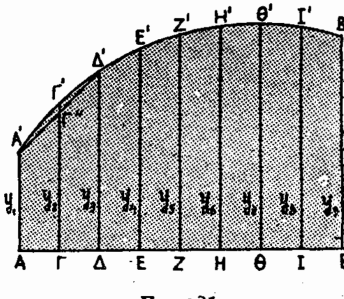
1964. (2000). Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι ΟΧ, ΟΥ, ΟΖ, ἀγόμεναι ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο. Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη τῆς ΟΧ, ἔχουσα τὸ κέντρον της ἐπὶ τῆς ΟΥ, καὶ ἀποτέμνουσα ἀπὸ τῆς ΟΖ χορδὴν ἴσην μὲ δοθὲν μῆκος λ.

1965. (2001). Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη δοθείσης εὐθείας Χ καὶ δοθείσης περιφερείας Κ καὶ διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου Ρ.

4. Ὑπολογισμὸς τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς μεικτογράμμου σχήματος

609. Τύπος τοῦ Simpson. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεικτογράμμου σχήματος ΑΒΒ'Α'.

Χωρίζομεν τὴν ΑΒ εἰς ἄρτιον πλῆθος ἴσων εὐθυγράμμων τμημάτων, ἔστω εἰς ὀκτώ. Ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως Γ, Δ, Ε,.... φέρομεν τὰς καθέτους ΓΓ', ΔΔ',.... πρὸς τὴν ΑΒ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν καμπύλην Α'Β' εἰς τὰ σημεῖα Γ', Δ',.... Παριστάνομεν μὲ y_1, y_2, y_3.... τὰς καθέτους (τεταγμένας) ΑΑ', ΓΓ', ΔΔ'.... καὶ μὲ δ τὰ ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα, ΑΓ, ΓΔ,....



Σχ. 421.

Ὑπολογίζομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεικτογράμμου τραπεζίου ΑΔΔ'Α'. Τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι ἴσον μὲ

$$\frac{y_1+y_3}{2}\cdot 2\delta=(y_1+y_3)\delta=\frac{\delta}{3}(3y_1+3y_3)=$$
$$=\frac{\delta}{3}(y_1+y_3+2y_1+2y_3)=\frac{\delta}{3}(y_1+y_3+4\Gamma\Gamma'').$$

Ἐὰν τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως τῆς ΑΒ ἦσαν τὸ ἕνα πλησίον τοῦ ἄλλου, θὰ ἠδυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν τὰ μέρη τῆς καμπύλης Α'Δ', Δ'Ζ',.... ὡς εὐθύγραμμα τμήματα καὶ νὰ λάβωμεν ΓΓ''$=y_2$. Θὰ εἶναι τότε

$$\text{ἐμβ } ΑΔΔ'Α'=\frac{\delta}{3}(y_1+y_3+4y_2) \qquad (1)$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι

$$\text{ἐμβ.}ΔΖΖ'Δ'=\frac{\delta}{3}(y_3+y_5+4y_4) \qquad (2)$$

$$\text{ἐμβ.}ΖΘΘ'Ζ'=\frac{\delta}{3}(y_5+y_7+4y_6) \qquad (3)$$

$$\text{ἐμβ } ΘΒΒ'Θ'=\frac{\delta}{3}(y_7+y_9+4y_8) \qquad (4)$$

Προσθέτοντες τὰν ἰσότητας (1), (2), (3), (4) κατὰ μέλη καὶ παριστάνοντες μὲ Ε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεικτογράμμου μέρους, εὑρίσκομεν

$$Ε=\frac{\delta}{3}(y_1+y_9+2y_3+2y_5+2y_7+4y_2+4y_4+4y_6+4y_8).$$

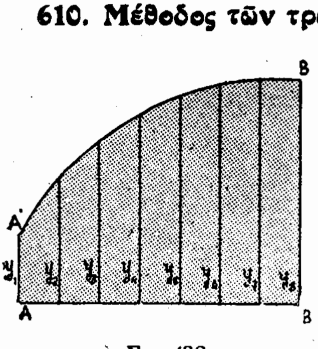
Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ k τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων τεταγμένων y_1 καὶ y_9, μὲ Λ τὸ ἄθροισμα τῶν τεταγμένων τῆς περιττῆς τάξεως καὶ μὲ Μ τὸ ἄθροσμα τῶν τεταγμένων τῆς ἀρτίας τάξεως θὰ εἶναι

$$Ε=\frac{\delta}{3}(k+2Λ+4Μ).$$

Αὐτὸς εἶναι *ὁ τύπος τοῦ Simpson.*

Ἐὰν αἱ δύο ἀκραῖαι τεταγμέναι εἶναι μηδέν, ὁ τύπος τοῦ Simpson γίνεται $\quad Ε=\frac{2}{3}\delta(Λ+2Μ),\quad$ διότι $\quad k=0.$

610. Μέθοδος τῶν τραπεζίων. Ὅταν δὲν θέλωμεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς μεικτογράμμου σχήματος μὲ μεγάλην ἀκρίβειαν, χρησιμοποιοῦμεν τὴν ἀκόλουθον μέθοδον, ἡ ὁποία λέγεται ***μέθοδος τῶν τραπεζίων***.



Σχ. 422.

Πρὸς τοῦτο διαιροῦμεν τὴν ΑΒ εἰς ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα, ἔστω εἰς 7 καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὴν ΑΒ.

Ἂν θεωρήσωμεν, ὡς εὐθύγραμμα

τμήματα τὰς καμπύλας πλευρὰς τῶν τραπεζίων, ποὺ σχηματίζονται, θὰ εἶναι

$$E=\frac{\delta}{2}[(y_1+y_2)+(y_2+y_3)+(y_3+y_4)+(y_4+y_5)+(y_5+y_6)+(y_6+y_7)+(y_7+y_8)]$$

ἢ $$E=\delta\left(\frac{y_1}{2}+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7+\frac{y_8}{2}\right).$$

Σημ. 'Εὰν $y_1=y_8=0$ τότε θὰ εἶναι

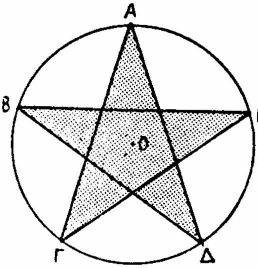
$$E=\delta(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7).$$

Δηλ.: *Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεικτογράμμου μέρους εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τεταγμένων ἐπὶ τὴν κοινὴν ἀπόστασίν των.*

5. 'Αστεροειδῆ κανονικὰ πολύγωνα

611. 'Αστεροειδῆ κανονικὰ πολύγωνα. 'Εὰν διαιρέσωμεν μίαν περιφέρειαν εἰς ν ἴσα μέρη καὶ συνδέσωμεν μὲ εὐθείας τὰ διαδοχικὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως, θὰ σχηματισθῇ ἕνα κυρτὸν κανονικὸν πολύγωνον. 'Εὰν ὅμως συνδέσωμεν τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως ἀνὰ 2, ἢ ἀνὰ 3, ἢ ἀνὰ 4...., οὕτως ὥστε κάθε χορδὴ νὰ ἀντιστοιχῇ εἰς 2, ἢ 3, ἢ 4 διαιρέσεις καὶ ἐπανέλθωμεν εἰς τὸ σημεῖον ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἀνεχωρήσαμεν, δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν μίαν κανονικὴν ***κλειστὴν*** τεθλασμένην γραμμὴν μὲ ν πλευράς, ἡ ὁποία ὀνομάζεται ***ἀστεροειδὴς κανονικὴ τεθλασμένη γραμμή***, ἡ δὲ ἐπιφάνεια τὴν ὁποίαν περικλείει ὀνομάζεται ***ἀστεροειδὲς κανονικὸν πολύγωνον.***

Π.χ. ἂν διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν Ο *(Σχ. 423)* εἰς 5 ἴσα μέρη ΑΒ, ΒΓ,.... καὶ συνδέσωμεν μὲ εὐθείας τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, ... τῆς διαιρέσεως ἀνὰ 2 μέχρις, ὅτου ἐπανέλθωμεν εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἀναχωρήσεως, λαμβάνομεν ***τὸ κανονικὸν ἀστεροειδὲς πεντάγωνον ΑΓΕΒΔΑ.***



Σχ. 423.

Τὰ ἀστεροειδῆ πολύγωνα, τὰ ὁποῖα σχηματίζονται κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, εἶναι κανονικά, διότι αἱ πλευραί των εἶναι ἴσαι, ὡς χορδαὶ ἴσων τόξων καὶ αἱ γωνίαι των εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι καὶ βαίνουν ἐπὶ ἴσων τόξων.

Παρατήρησις. Εἰς τὸ ἀστεροειδὲς πεντάγωνον ΑΓΕΒΔΑ *(Σχ. 423)* ἡ χορδὴ ΑΓ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ τόξον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ 2 διαιρέσεις καὶ εἰς τὸ τόξον ΓΔΕΑ, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ 3, δηλ. (5—2) διαιρέσεις. "Αν λοιπὸν συνδέσωμεν τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως, εἴτε ἀνὰ 2, εἴτε ἀνὰ 5—2, λαμβάνομεν τὸ αὐτὸ πολύγωνον.

Ὁμοίως, ἂν διαιρέσωμεν μίαν περιφέρειαν εἰς 10 ἴσα μέρη καὶ συνδέσωμεν μὲ εὐθείας τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως, εἴτε ἀνὰ 3, εἴτε ἀνὰ 10—3, δηλ. ἀνὰ 7, λαμβάνομεν τὸ αὐτὸ κανονικὸν ἀστεροειδὲς δεκάγωνον *(Σχ. 424)*.

Γενικῶς, ἂν διαιρέσωμεν την περιφέρειαν εἰς ν ἴσα μέρη καὶ συνδέσωμεν μὲ εὐθείας τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως εἴτε ἀνὰ μ, εἴτε ἀνὰ ν—μ λαμβάνομεν τὸ αὐτὸ κανονικὸν ἀστεροειδὲς πολύγωνον· διότι ἡ χορδή, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς μ διαιρέσεις ἀπὸ τὸ ἕνα μέρος, ἀντιστοιχεῖ εἰς ν—μ διαιρέσεις ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος.

612. Θεώρημα. ***Ἐὰν μία περιφέρεια διαιρεθῇ εἰς ν ἴσα μέρη καὶ συνδέσωμεν τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως ἀνὰ μ, θὰ σχηματισθῇ ἕνα ἀστεροειδὲς κανονικὸν πολύγωνον μὲ ν πλευράς, ὅταν ὁ ἀριθμὸς μ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸ ν.***

Ἐὰν συνδέσωμεν μὲ εὐθείας τὰ ν διαδοχικὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως, κάθε χορδὴ ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕνα τόξον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ τὸ $\frac{1}{\nu}$ τῆς περιφερείας. Ἐὰν συνδέσωμεν τὰ ν σημεῖα τῆς διαιρέσεως ἀνὰ 2, κάθε χορδὴ ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕνα τόξον ἴσον μὲ τὰ $\frac{2}{\nu}$ τῆς περιφερείας καὶ γενικῶς, ἂν συνδέσωμεν τὰ ν σημεῖα τῆς διαιρέσεως ἀνὰ μ, κάθε χορδὴ θὰ ἀντιστοιχῇ εἰς ἕνα τόξον ἴσον μὲ τὰ $\frac{\mu}{\nu}$ τῆς περιφερείας.

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρέπει νὰ φέρωμεν x χορδὰς διὰ νὰ ἐπανέλθωμεν εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἀναχωρήσεως. Ἐπειδὴ εἰς κάθε χορδὴν ἀντιστοιχοῦν τὰ $\frac{\mu}{\nu}$ τῆς περιφερείας, εἰς τὰς x χορδὰς θὰ ἀντιστοιχοῦν τὰ $\frac{\mu}{\nu}\times x$ τῆς περιφερείας. Ἀλλὰ τὸ γινόμενον $\frac{\mu\times x}{\nu}$ πρέπει νὰ εἶναι ἴσον μὲ ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν k περιφερειῶν· δηλ. πρέπει νὰ εἶναι

$$\frac{\mu x}{\nu} = k. \qquad (1)$$

Διὰ νὰ εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{\mu x}{\nu}$ ἴσον μὲ ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν k, πρέπει ὁ παρονομαστής του ν νὰ διαιρῇ ἀκριβῶς τὸν ἀριθμητήν του μx.

Ἐδῶ διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

1ον. ***Οἱ ἀριθμοὶ μ καὶ ν εἶναι πρῶτοι μεταξύ των.***

Ἐπειδὴ ὁ ν διαιρεῖ τὸ γινόμενον μ.x δύο παραγόντων καὶ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν μ, πρέπει νὰ διαιρῇ τὸν ἄλλον παράγοντα x· ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι x=πολ.ν. Ἡ μικροτέρα λοιπὸν τιμή, τὴν ὁποίαν δύναται νὰ λάβῃ ὁ x εἶναι ν.

Διὰ $x=\nu$ (2), ἡ ἰσότης (1) δίδει $\mu=k$ (3).

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (2) καὶ (3) συνάγομεν, ὅτι τὸ πολύγωνον θὰ ἔχῃ ν πλευρὰς καὶ ὅτι διὰ νὰ κατασκευασθῇ τὸ πολύγωνον αὐτὸ πρέπει νὰ διατρέξωμεν τὴν περιφέρειαν μ φοράς.

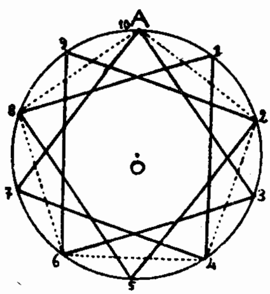
2ον. ***Οἱ ἀριθμοὶ ν καὶ μ δὲν εἶναι πρῶτοι μεταξύ των.***

Ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ ν καὶ μ δὲν εἶναι πρῶτοι μεταξύ των, θὰ ἔχουν ἕνα μ.κ.δ. ἔστω τὸν δ. Τὰ πηλίκα ὅμως τῶν ἀριθμῶν ν καὶ μ διὰ τοῦ δ, δηλ. τὰ $\frac{\nu}{\delta}$ καὶ $\frac{\mu}{\delta}$ θὰ ἦσαν πρῶτα μεταξύ των.

Ἂν θέσωμεν $\frac{\nu}{\delta}=\nu'$ καὶ $\frac{\mu}{\delta}=\mu'$ καὶ ἐργασθῶμεν, ὅπως εἰς τὴν 1ην περίπτωσιν θὰ εὕρωμεν, ὅτι $x=\nu'=\frac{\nu}{\delta}$ καὶ $k=\mu'=\frac{\mu}{\delta}$, δηλ. τὸ πολύγωνον θὰ ἔχῃ $\frac{\nu}{\delta}$ πλευράς,

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι διὰ νὰ ἔχῃ τὸ πολύγωνον ν πλευράς, πρέπει οἱ ἀριθμοὶ ν καὶ μ νὰ εἶναι πρῶτοι μεταξύ των.

Παράδειγμα. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν Ο εἰς $\nu=10$ ἴσα μέρη καὶ συνδέσωμεν τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως ἀνὰ $\mu=3$, λαμβάνομεν ἕνα κανονικὸν ἀστεροειδὲς δεκάγωνον. Ἐδῶ εἶναι $\nu=10$, $\mu=3$ καὶ οἱ ἀριθμοὶ 10 καὶ 3 εἶναι πρῶτοι μεταξύ των.



Σχ. 424.

Ἐὰν ὅμως συνδέσωμεν τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως ἀνὰ 2 λαμβάνομεν ἕνα κυρτὸν καὶ ὄχι ἀστεροειδὲς κανονικὸν πεντάγωνον. Ἐδῶ οἱ ἀριθμο ὶ $\nu=10$ καὶ $\mu=2$ δὲν εἶναι πρῶτοι μεταξύ των.

Ἐὰν συνδέσωμεν τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως ἀνὰ 4 λαμβάνομεν ἕνα κανονικὸν ἀστεροειδὲς πεντάγωνον καὶ ὄχι δεκάγωνον. Ἐδῶ οἱ ἀριθμοὶ $\nu=10$, $\mu=4$ δὲν εἶναι πρῶτοι μεταξύ των.

Παρατήρησις. Ἀπὸ τὸ προηγούμενον θεώρημα συνάγομεν, ὅτι δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τόσα ἀστεροειδῆ κανονικὰ πολύγωνα μὲ ν πλευράς, ὅσοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ τῆς σειρᾶς

$$1, 2, 3, 4, \ldots . \nu-1.$$

οἱ ὁποῖοι εἶναι πρῶτοι πρὸς τὸν ν.

Ἀλλά, ὅπως ἀνεφέραμεν εἰς τὴν παρατήρησιν τῆς § 611 λαμβάνομεν τὸ αὐτὸ κανονικὸν πολύγωνον μὲ ν πλευράς, εἴτε συνδέοντες τὰ

σημεῖα τῆς διαιρέσεως ἀνὰ μ, εἴτε ἀνὰ ν—μ. Ἑπομένως ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς τῶν ἀστεροειδῶν κανονικῶν πολυγώνων μὲ ν πλευρὰς εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀκεραίων, οἱ ὁποῖοι περιέχονται εἰς τὴν σειρὰν $1, 2, 3, \ldots . \frac{\nu-1}{2}$ καὶ οἱ ὁποῖοι εἶναι πρῶτοι πρὸς τὸν ν.

Ὁ κάτωθι πίναξ μᾶς δεικνύει τὰ σπουδαιότερα κανονικὰ πολύγωνα, κυρτὰ ἢ ἀστεροειδῆ, τὰ ὁποῖα σχηματίζονται, ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν εἰς ν ἴσα μέρη καὶ συνδέσωμεν τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως ἀνὰ μ.

Τιμαὶ τοῦ ν	*Τιμαὶ τοῦ* μ	*Σχηματιζόμενα κανονικὰ πολύγωνα*
3	1	Ἰσόπλευρον τρίγωνον
4	1	Τετράγωνον
5	1	Κανονικὸν πεντάγωνον κυρτὸν
	2	» » ἀστεροειδὲς
6	1	Κανονικὸν ἑξάγωνον
8	1	Κανονικὸν ὀκτάγωνον κυρτὸν
	3	» » ἀστεροειδὲς
10	1	Κανονικὸν δεκάγωνον κυρτὸν
	3	» » ἀστεροειδὲς
12	1	Κανονικὸν δωδεκάγωνον κυρτὸν
	5	» » ἀστεροειδὲς
15	1	Κανονικὸν δεκαπεντάγωνον κυρτὸν
	2, 4, 7	Τρία κανονικὰ δεκαπεντάγωνα ἀστεροειδῆ

Ἄσκησις. 1966. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ τοῦ ἀστεροειδοῦς κανονικοῦ ὀκταγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον, συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος του R.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟΣ ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΛΥΣΕΩΝ ΤΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Εἰς τὰς σελίδας 152—154 τοῦ Α' βιβλίου ἔχομεν ἀναγράψει τὰς κυριωτέρας μεθόδους ἀποδείξεως, τὰς ὁποίας ἐχρησιμοποιήσαμεν κατὰ τὴν ἀπόδειξιν θεωρημάτων ἢ τὴν λύσιν γεωμετρικῶν προβλημάτων. Κατωτέρω θὰ συμπληρώσωμεν τὸν πίνακα ἐκεῖνον, διὰ τῆς προσθήκης καὶ νέων προτάσεων, τὰς ὁποίας ἐχρησιμοποιήσαμεν εἰς τὸ Β', Γ' καὶ Δ' βιβλίον τῆς Γεωμετρίας.

Γωνίαι ἴσαι:

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι δύο γωνίαι εἶναι ἴσαι, πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν:

1ον. Ὅτι εἶναι ἄθροισμα ἢ διαφορὰ γωνιῶν ἀντιστοίχως ἴσων.

2ον. Ὅτι εἶναι συμπληρωματικαὶ ἢ παραπληρωματικαὶ ἴσων γωνιῶν.

3ον. Ὅτι εἶναι κατὰ κορυφὴν γωνίαι.

4ον. Ὅτι εἶναι παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι ἰσοσκελοῦς τριγώνου.

5ον. Ὅτι εἶναι ὁμόλογοι γωνίαι ἴσων τριγώνων.

6ον. Ὅτι εἶναι ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι, ἐκτὸς ἐναλλὰξ γωνίαι, ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι, ποὺ σχηματίζονται ὑπὸ δύο παραλλήλων καὶ μιᾶς τεμνούσης.

7ον. Ὅτι εἶναι γωνίαι, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι παράλληλοι καὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν φορὰν ἢ ἀντίθετον φοράν.

8ον. Ὅτι εἶναι ὀξεῖαι ἢ ἀμβλεῖαι γωνίαι, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι κάθετοι.

9ον. Ὅτι εἶναι συμμετρικαὶ γωνίαι ὡς πρὸς κέντρον ἢ πρὸς ἄξονα.

10ον. Ὅτι, κατὰ ἕνα γενικὸν τρόπον, εἶναι τὰ ἄκρα μιᾶς σειρᾶς ἴσων γωνιῶν.

11ον. Ὅτι εἶναι ἐγγεγραμμέναι γωνίαι, αἱ ὁποῖαι βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου.

12ον. Ὅτι ἡ μία εἶναι γωνία σχηματιζομένη ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένηςκαὶ ἡ ἄλλη εἶναι ἐγγεγραμμένη, ἡ ὁποία βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς πρώτης.

13ον. Ὅτι ἡ μία εἶναι γωνία ἑνὸς τετραπλεύρου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον καὶ ἡ ἄλλη εἶναι ἡ ἐξωτερικὴ γωνία τῆς ἀπέναντι κορυφῆς.

14ον. Ὅτι ἡ μία εἶναι μία γωνία, σχηματιζομένη ὑπὸ μιᾶς πλευρᾶς καὶ μιᾶς διαγωνίου ἑνὸς τετραπλεύρου ἐγγραψίμου εἰς κύκλον καὶ ἡ ἄλλη εἶναι ἡ γωνία, ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς καὶ τῆς ἄλλης διαγωνίου.

15ον. Εἶναι αἱ ὁμόλογοι γωνίαι δύο ὁμοίων τριγώνων, ἢ γενικῶς δύο ὁμοίων εὐθυγράμμων σχημάτων.

Ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα:

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι δύο εὐθύγραμμα τμήματα εἶναι ἴσα, πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν:

1ον. Ὅτι εἶναι ἄθροισμα ἢ διαφορὰ εὐθυγράμμων τμημάτων ἀντιστοίχως ἴσων.

2ον. Ὅτι εἶναι δύο ὁμόλογοι πλευραὶ δύο ἴσων τριγώνων.

3ον. Ὅτι εἶναι αἱ ἀπέναντι πλευραὶ παραλληλογράμμου.

4ον. Ὅτι εἶναι αἱ διαγώνιοι ἑνὸς ὀρθογωνίου.

5ον. Ὅτι εἶναι τμήματα παραλλήλων, περιεχομένων μεταξὺ παραλλήλων εὐθειῶν.

6ον. Ὅτι εἶναι δύο εὐθύγραμμα τμήματα συμμετρικὰ πρὸς ἄξονα ἢ πρὸς κέντρον.

7ον. Ὅτι εἶναι αἱ δύο πλευραὶ ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου.

8ον. Ὅτι εἶναι τὰ δύο τμήματα τῆς βάσεως ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται ἡ βάσις ἀπὸ τὸ ὕψος τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἢ ἀπὸ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς του.

9ον. Ὅτι, κατὰ ἕνα γενικὸν τρόπον, εἶναι τὰ ἄκρα μιᾶς σειρᾶς ἴσων εὐθυγράμμων τμημάτων.

10ον. Ὅτι εἶναι δύο ἀκτῖνες ἢ δύο διάμετροι τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἢ δύο ἴσων κύκλων.

11ον. Ὅτι εἶναι χορδαὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἢ ἴσων κύκλου, αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν ἀπὸ τὸ κέντρον ἀποστάσεις ἴσας.

12ον. Ὅτι εἶναι χορδαὶ ἴσων τόξων.

13ον. Ὅτι εἶναι ἐφαπτόμεναι τῆς αὐτῆς περιφερείας, ἀγόμεναι ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Ἰσοσκελὲς τρίγωνον:

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι ἕνα τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελὲς πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν:

1ον. Ὅτι ἔχει δύο πλευρὰς ἢ δύο γωνίας ἴσας.

2ον. Ὅτι ἔχει ἕνα ἄξονα συμμετρίας.

3ον. Ὅτι ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας του εἶναι συγχρόνως καὶ ὕψος αὐτοῦ.

Ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας του εἶναι καὶ διάμεσός του.

Ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας του εἶναι καὶ μεσοκάθετος τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς.

Ἕνα ὕψος του εἶναι καὶ διάμεσός του, αἱ ὁποῖαι ἀπὸ τὴν αὐτὴν κορυφήν.

Ἕνα ὕψος του εἶναι καὶ μεσοκάθετος τῆς ἀντιστοίχου πλευρᾶς.

Μία διάμεσός του εἶναι καὶ μεσοκάθετος τῆς πλευρᾶς.

Ὀρθογώνιον τρίγωνον:

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι ἕνα τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν:

1ον. Ὅτι ἔχει μίαν γωνίαν ὀρθήν.

2ον. Ὅτι αἱ δύο γωνίαι του εἶναι συμπληρωματικαί.

3ον. Ὅτι ἡ διάμεσος ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ μίαν κορυφὴν εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἀντιστοίχου πλευρᾶς.

4ον. Ὅτι εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα ἡμικύκλιον.

5ον. Ὅτι ἔχει μίαν γωνίαν 60^0 καὶ αἱ πλευραί, ποὺ περιέχουν τὴν γωνίαν αὐτὴν εἶναι τοιαῦται, ὥστε ἡ μία εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης.

6ον. Ὅτι τὸ τετράγωνον μιᾶς πλευρᾶς του εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του.

7ον. Ὅτι τὸ ὕψος, τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς μίαν πλευράν του, εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν δύο τμημάτων, τὰ ὁποῖα ὁρίζει ἐπὶ τῆς πλευρᾶς αὐτῆς (τὸ ἐξεταζόμενον τρίγωνον εἶναι ὀξυγώνιον).

8ον. Ὅτι ἡ μία πλευρά του εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ μιᾶς ἄλλης πλευρᾶς καὶ τῆς προβολῆς τῆς πρώτης ἐπὶ τὴν δευτέραν (τὸ ἐξεταζόμενον τρίγωνον εἶναι ὀξυγώνιον).

9ον. Τὸ ἐμβαδόν του εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου δύο πλευρῶν του.

Εὐθεῖαι κάθετοι:

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι δύο εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι μεταξύ των, πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν:

1ον. Ὅτι ἡ μία τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουν εἶναι ὀρθή,

(πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι εἶναι 90° ἢ ὅτι εἶναι ἴση μὲ μίαν ἄλλην ὀρθὴν γωνίαν τοῦ σχήματος ἢ ὅτι εἶναι ἡ τρίτη γωνία ἑνὸς τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι εἶναι συμπληρωματικαί).

2ον. Ὅτι εἶναι διχοτόμοι δύο ἐφεξῆς παραπληρωματικῶν γωνιῶν.

3ον. Ὅτι ἡ μία εὐθεῖα εἶναι ἡ βάσις ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου καὶ ἡ ἄλλη εἶναι ἡ μεσοκάθετος τῆς βάσεως ἢ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς του.

4ον. Ὅτι ἡ μία εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς μίαν κάθετον πρὸς τὴν ἄλλην εὐθεῖαν.

5ον. Ὅτι εἶναι δύο πλευραὶ ἴσων γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς δύο ἄλλας πλευράς των ἀντιστοίχως καθέτους καὶ αἱ γωνίαι ἔχουν τὴν αὐτὴν φορὰν πρὸς τὰς τελευταίας πλευράς.

6ον. Ὅτι ἡ μία εὐθεῖα συνδέει δύο συμμετρικὰ σημεῖα πρὸς τὴν ἄλλην εὐθεῖαν.

7ον. Ὅτι εἶναι διαγώνιοι ἑνὸς ρόμβου ἢ τετραγώνου.

8ον. Ὅτι ἡ μία εἶναι μία πλευρὰ ἑνὸς τριγώνου, ἡ ἄλλη εἶναι ἡ εὐθεῖα, ποὺ συνδέει τὴν ἀπέναντι κορυφὴν μὲ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ὑψῶν, ποὺ ἄγονται ἀπὸ τὰς ἄλλας κορυφὰς τοῦ τριγώνου.

9ον. Ὅτι ἡ μία εἶναι ἐφαπτομένη μιᾶς περιφερείας καὶ ἡ ἄλλη εἶναι ἀκτίς, ἡ ὁποία καταλήγει εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς.

10ον. Ὅτι ἡ μία εἶναι μία χορδὴ ἑνὸς κύκλου καὶ ἡ ἄλλη εἶναι:

α) εἴτε ἡ διάμετρος, ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς χορδῆς·

β) εἴτε ἡ διάμετρος, ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τοῦ ἀντιστοίχου τόξου.

γ) εἴτε ἡ εὐθεῖα, ποὺ συνδέει τὰ μέσα τῶν δύο τόξων, ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν χορδὴν αὐτήν·

δ) εἴτε ἡ εὐθεῖα, ποὺ συνδέει τό μέσον τῆς χορδῆς μὲ τὸ μέσον ἑνὸς ἐκ τῶν δύο τόξων, ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν χορδὴν αὐτήν.

11ον. Ὅτι ἡ μία εἶναι ἡ εὐθεῖα, ποὺ συνδέει ἕνα σημεῖον, κείμενον ἐκτὸς κύκλου, μὲ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου καὶ ἡ ἄλλη εἶναι ἡ εὐθεῖα, ποὺ συνδέει τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν ἐφαπτομένων, ποὺ ἄγονται ἀπὸ τὸ σημεῖον πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου.

12ον. Ὅτι ἡ μία εἶναι ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα καὶ ἡ ἄλλη ἡ εὐθεῖα, ποὺ συνδέει δύο σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἰσάκις ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος.

13ον. Ὅτι ἡ μία εἶναι ἡ διάκεντρος δύο περιφερειῶν καὶ ἡ ἄλλη ὁ ριζικὸς ἄξων των.

Εὐθεῖαι παράλληλοι:

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι μεταξύ των, πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν:

1ον. Ὅτι εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

2ον. Ὅτι εἶναι κάθετοι πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

3ον. Ὅτι σχηματίζουν μὲ μίαν τέμνουσαν:

δύο ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας·

ἢ δύο ἐκτὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας·

ἢ δύο ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας ἴσας·

ἢ δύο ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας παραπληρωματικάς·

ἢ δύο ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας παραπληρωματικάς.

4ον. Ὅτι εἶναι δύο πλευραὶ δύο ἴσων γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους καὶ αἱ γωνίαι ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν, ὡς πρὸς τὰς τελευταίας πλευράς.

5ον. Ὅτι ἡ μία εἶναι ἡ βάσις ἑνὸς τριγώνου καὶ ἡ ἄλλη εἶναι ἡ εὐθεῖα, ποὺ συνδέει τὰ μέσα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

6ον. Ὅτι εἶναι εὐθεῖα, συνδέουσα ἀντιστοίχως δύο ζεύγη σημείων συμμετρικῶν πρὸς τὸν αὐτὸν ἄξονα.
7ον. Ὅτι δύο σημεῖα τῆς μιᾶς ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὴν ἄλλην εὐθεῖαν.
8ον. Ὅτι ὁρίζουν ἐπὶ δύο τεμνομένων εὐθειῶν μὲ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς των τμήματα ἀνάλογα, κείμενα κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον.

Παραλληλόγραμμα:

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι ἕνα τετράπλευρον εἶναι παραλληλόγραμμον πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι:

1ον. Αἱ ἀπέναντι πλευραί του εἶναι παράλληλοι ἀνὰ δύο.
2ον. Αἱ ἀπέναντι γωνίαι του εἶναι ἴσαι ἀνὰ δύο.
3ον. Αἱ ἀπέναντι πλευραί του εἶναι ἴσαι ἀνὰ δύο.
4ον. Δύο ἀπέναντι πλευραί του εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.
5ον. Αἱ διαγώνιοί του διχοτομοῦνται.

Ὀρθογώνιον:

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι ἕνα τετράπλευρον εἶναι ὀρθογώνιον, πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι εἶναι παραλληλόγραμμον καί:

1ον. Ὅτι ἔχει μίαν γωνίαν ὀρθήν.
2ον. Ὅτι ἔχει τὰς δύο διαγωνίους του ἴσας.
3ον. Ὅτι εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον.
Δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι εἶναι ἕνα τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει τρεῖς ὀρθὰς γωνίας.

Ρόμβος:

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι ἕνα τετράπλευρον εἶναι ρόμβος πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι εἶναι παραλληλόγραμμον καί:

1ον. Ὅτι ἔχει δύο διαδοχικὰς πλευρὰς ἴσας.
2ον. Ὅτι ἔχει δύο διαγωνίους καθέτους.
3ον. Ὅτι ἡ μία διαγώνιός του εἶναι διχοτόμος μιᾶς τῶν γωνιῶν του.
Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι εἶναι ἕνα τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει καὶ τὰς τέσσαρας πλευράς του ἴσας.

Τετράγωνον:

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἕνα τετράπλευρον εἶναι τετράγωνον, πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι εἶναι καὶ ὀρθογώνιον καὶ ρόμβος.

Διχοτόμος τῆς γωνίας:

Α'. Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι μία ἡμιευθεῖα εἶναι διχοτόμος μιᾶς γωνίας, πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν:

1ον. Ὅτι αὕτη σχηματίζει δύο γωνίας ἴσας μὲ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας.
2ον. Ὅτι ἕνα ἀπὸ τὰ σημεῖα της ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας.

Β'. Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι μία ἡμιευθεῖα εἶναι διχοτόμος μιᾶς γωνίας ἑνὸς τριγώνου, πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν:

1ον. Ὅτι συνδέει τὴν κορυφὴν μιᾶς γωνίας μὲ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν.
2ον. Ὅτι συνδέει τὴν κορυφὴν μιᾶς γωνίας μὲ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ἐξωτερικῶν διχοτόμων τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν.
3ον. Ὅτι χωρίζει τὴν ἀπέναντι πλευρὰν εἰς δύο μέρη ἀνάλογα τῶν πλευρῶν, ποὺ περιέχουν τὴν ἡμιευθεῖαν αὐτήν.

Σημεῖα κείμενα ἐπὶ εὐθείας:

Α΄. Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι τρία σημεῖα Α, Β, Γ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

1ον. Δυνάμεθα νὰ συνδέσωμεν τὰ σημεῖα Β καὶ Γ μὲ τὸ σημεῖον Α καὶ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΑΓ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

α) Ἐὰν τὰ σημεῖα Β καὶ Γ κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ Α δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι πεπλατυσμένη ἢ ὅτι, ἐὰν ΧΨ εἶναι μία εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ Α, αἱ γωνίαι ΒΑΧ καὶ ΓΑΨ εἶναι ἴσαι.

β) Ἐὰν τὰ σημεῖα Β καὶ Γ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ Α δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι, ἐὰν ΑΧ εἶναι μία ἡμιευθεῖα, ὀγομένη ἀπὸ τὸ Α, αἱ γωνίαι ΒΑΧ καὶ ΓΑΧ εἶναι ἴσαι.

γ) Δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι τὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΑΓ εἶναι παράλληλα ἢ κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

2ον. Δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι καὶ τὰ τρία σημεῖα κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ γεωμετρικοῦ τόπου, ὅταν ὁ τόπος αὐτὸς εἶναι μία εὐθεῖα.

3ον. Ἐὰν τὸ σημεῖον Γ κεῖται ἐπὶ μιᾶς γραμμῆς Ε, δυνάμεθα νὰ φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ. Ἡ εὐθεῖα αὐτὴ τέμνει τὴν γραμμὴν Ε εἰς ἕνα σημεῖον Γ΄. Ἐὰν τὰ σημεῖα Γ καὶ Γ΄ συμπίπτουν, τότε τὰ σημεῖα Α, Β, Γ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

4ον. Δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι δύο ἀπὸ τὰ σημεῖα εἶναι συμμετρικὰ μιᾶς συμμετρίας, τῆς ὁποίας τὸ τρίτον σημεῖον εἶναι κέντρον συμμετρίας.

5ον. Δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι δύο ἀπὸ τὰ σημεῖα αὐτὰ εἶναι ὁμοιόθετα μιᾶς ὁμοιοθεσίας, τῆς ὁποίας τὸ τρίτον σημεῖον εἶναι τὸ κέντρον ὁμοιοθεσίας.

6ον. Διὰ νὰ δείξωμεν ὅτι δύο σημεῖα μιᾶς περιφερείας καὶ τὸ κέντρον αὐτῆς κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς, πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι τὰ δύο σημεῖα εἶναι τὰ μέσα δύο τόξων, ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς μίαν χορδήν, ἢ ὅτι αἱ χορδαί, ποὺ συνδέουν τὰ σημεῖα αὐτὰ μὲ τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας σχηματίζουν ὀρθὴν γωνίαν,

Β΄. Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι τὰ τρία ἀπὸ τὰ σημεῖα αὐτὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς καὶ ἔπειτα τὸ τέταρτον σημεῖον καὶ δύο ἐκ τῶν τριῶν πρώτων κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς.

Σημεῖα κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας:

Α΄. Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ κεῖνται ἐπὶ περιφερείας δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν:

1ον. Ὅτι αἱ ἀπέναντι γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ εἶναι παραπληρωματικαί.

2ον. Ὅτι μία γωνία τοῦ τετραπλεύρου εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν τῆς ἀπέναντι κορυφῆς.

3ον. Ὅτι μία γωνία, σχηματιζομένη ἀπὸ μίαν πλευρὰν καὶ μίαν διαγώνιον τοῦ τετραπλεύρου εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν, ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν καὶ τὴν ἄλλην διαγώνιον.

4ον. Ὅτι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς δύο ἀπέναντι πλευρῶν, π.χ. τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ, ὁρίζει τμήματα τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι ΣΑ×ΣΒ=ΣΓ×ΣΔ.

5ον. Ὅτι τὸ σημεῖον Σ τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του ΑΓ καὶ ΒΔ διαιρεῖ τὰς διαγωνίους εἰς τμήματα τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι

$$ΣΑ \times ΣΓ = ΣΒ \times ΣΔ.$$

6ον. Τὰ τέσσαρα σημεῖα ἀπέχουν ἰσάκις ἀπὸ ἕνα ἄλλο σημεῖον.

7ον. Ὅτι τὰ τέσσαρα σημεῖα ἀνήκουν εἰς ἕνα τόπον, ὁ ὁποῖος εἶναι μία περιφέρεια κύκλου.

Β'. Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι πέντε σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι τέσσαρα ἀπὸ τὰ σημεῖα αὐτὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας καὶ ὅτι τὸ πέμπτον καὶ τρία ἀπὸ τὰ τέσσαρα πρῶτα σημεῖα κεῖνται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας, ἡ ὁποία συμπίπτει μὲ τὴν πρώτην, διότι ἔχουν τρία κοινὰ σημεῖα μὲ αὐτήν.

Εὐθεῖαι τεμνόμεναι:

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι τρεῖς εὐθεῖαι τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον δυνάμεθα νὰ ἀπαδείξωμεν:

1ον. Ὅτι δύο ἐκ τῶν εὐθειῶν αὐτῶν τέμνουν τὴν τρίτην εὐθεῖαν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

2ον. Ὅτι δύο σημεῖα τῆς μιᾶς καὶ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν δύο ἄλλων εὐθειῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς.

3ον. Ὅτι αἱ τρεῖς αὗται εὐθεῖαι εἶναι αἱ τρεῖς διάμεσοι ἑνὸς τριγώνου, εἴτε αἱ τρεῖς μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν, εἴτε αἱ τρεῖς διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του, εἴτε τὰ τρία ὕψη του.

Περιφέρειαι ἐφαπτόμεναι:

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι δύο περιφέρειαι ἐφάπτονται, δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν:

1ον. Ὅτι ἡ διάκεντρός των εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων των.

2ον. Ὅτι ἔχουν ἕνα κοινὸν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖνται ἐπὶ τῆς διακέντρου των.

3ον. Ὅτι ἔχουν εἰς ἕνα σημεῖον κοινὴν ἐφαπτομένην.

Περιφέρειαι τεμνόμεναι:

Διὰ νὰ δείξωμεν, ὅτι δύο περιφέρειαι τέμνονται, δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν:

1ον. Ὅτι ἡ διάκεντρός των εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων των καὶ μικροτέρα τῆς διαφορᾶς των.

2ον. Ὅτι ἔχουν ἕνα κοινὸν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τῆς διακέντρου των.

Ἐφαπτομένη μιᾶς περιφερείας:

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι μία εὐθεῖα εἶναι ἐφαπτομένη μιᾶς περιφερείας, δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν:

1ον. Ὅτι εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἄκρον μιᾶς ἀκτῖνος.

2ον. Ὅτι σχηματίζει μὲ μίαν χορδὴν μίαν γωνίαν, ἡ ὁποία ἔχει μέτρον ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ μέτρου τοῦ τόξου, ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν χορδήν.

3ον. Ὅτι εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ μιᾶς ὁλοκλήρου τεμνούσης, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ ἕνα σημεῖον τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τῆς περιφερείας καὶ τοῦ ἐκτὸς μέρους τῆς τεμνούσης αὐτῆς.

ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ

ΕΥΘΕΙΑΙ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'

ΤΟΜΗ ΕΥΘΕΙΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΩΝ

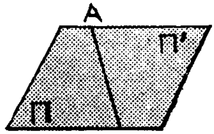
---

1. Ὁρισμοὶ

613. Ἐπίπεδον. Σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμόν, τὸν ὁποῖον ἐδώσαμεν εἰς τὴν § 18, ***ἐπίπεδον*** *καλεῖται μία ἀπεριόριστος ἐπιφάνεια ἐπὶ τῆς ὁποίας ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει δύο τυχόντα σημεῖα τῆς ἐπιφανείας, κεῖται ὁλόκληρος ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας.*

Παραδεχόμεθα χωρὶς ἀπόδειξιν τὴν ὕπαρξιν μιᾶς τοιαύτης ἐπιφανείας.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν αὐτόν, τὸ ἐπίπεδον εἶναι μία ἀπεριόριστος ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία ἐκτείνεται πρὸς ὅλα τὰ μέρη· δὲν δυνάμεθα λοιπὸν νὰ παραστήσωμεν ἐπὶ ἑνὸς φύλλου χάρτου ἢ ἐπὶ τοῦ πίνακος, παρὰ ἕνα μέρος τοῦ ἐπιπέδου· συνήθως παριστάνομεν ἕνα ἐπίπεδον μὲ ἕνα παραλληλόγραμμον καὶ τὸ ὀνομάζομεν μὲ ἕνα γράμμα, τὸ ὁποῖον θέτομεν εἰς μίαν γωνίαν τοῦ παραλληλογράμμου. Π.χ. λέγομεν τὸ ἐπίπεδον Π *(Σχ. 425).*



Σχ. 425.

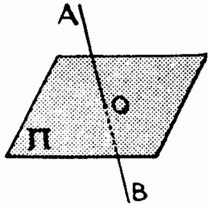
Κάθε ἐπίπεδον χωρίζει τὸ διάστημα, τὸ ὁποῖον μᾶς περιβάλλει, εἰς δύο μέρη· εἶναι φανερόν, ὅτι δὲν δυνάμεθα νὰ μεταβῶμεν ἀπὸ τὸ ἕνα μέρος εἰς τὸ ἄλλο, χωρὶς νὰ διαπεράσωμεν τὸ ἐπίπεδον.

614. Ἡμιεπίπεδον. *Μία ἀπεριόριστος εὐθεῖα ΑΒ (Σχ. 425), ἡ ὁποία κεῖται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου Π, χωρίζει αὐτὸ εἰς δύο μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται* ***ἡμιεπίπεδα.***

Π.χ. ἡ εὐθεῖα ΑΒ χωρίζει τὸ ἐπίπεδον Π εἰς τὰ ἡμιεπίπεδα ΑΒΠ καὶ ΑΒΠ'. Ἡ εὐθεῖα ΑΒ λέγεται *ἀρχικὴ εὐθεῖα* τῶν δύο ἡμιεπιπέδων.

615. Σχετικαὶ θέσεις εὐθείας καὶ ἐπιπέδου. Αἱ ἀμοιβαῖαι θέσεις μιᾶς εὐθείας καὶ ἑνὸς ἐπιπέδου εἶναι αἱ ἑξῆς:

1ον. Ἡ εὐθεῖα δύναται νὰ κεῖται ὁλόκληρος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Σχ. 425).



Σχ. 426.

2ον. Ἡ εὐθεῖα καὶ τὸ ἐπίπεδον ἔχουν ἕνα μόνον κοινὸν σημεῖον.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν *(Σχ. 426)* ἡ εὐθεῖα ΑΒ λέγεται ***τέμνουσα*** τοῦ ἐπιπέδου, τὸ δὲ κοινὸν σημεῖον Ο τῆς εὐθείας καὶ τοῦ ἐπιπέδου λέγεται ***ἴχνος*** ἢ ***πούς*** τῆς εὐθείας.

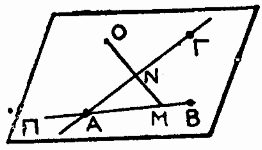
3ον. Ἡ εὐθεῖα καὶ τὸ ἐπίπεδον δὲν ἔχουν κανένα κοινὸν σημεῖον. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ εὐθεῖα λέγεται ***παράλληλος*** πρὸς τὸ ἐπίπεδον.

2. Προσδιορισμὸς ἑνὸς ἐπιπέδου

616. Θεώρημα. ***Τρία σημεῖα, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ὁρίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς καὶ μόνον ἐπιπέδου.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν τρία σημεῖα Α, Β, Γ *(Σχ. 427)*, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ σημεῖα Α, Β, Γ ὁρίζουν, πρῶτον, τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου.



Σχ. 427.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ. Ἂς φαντασθῶμεν ἕνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ ἂς περιστρέψωμεν τὸ ἐπέπεδον αὐτὸ περὶ τὴν ΑΒ, ὅπως περιστρέφομεν μίαν θύραν περὶ τοὺς στρόφιγγάς της. Εἶναι φανερόν, ὅτι κατὰ τὴν περιστροφήν του τὸ ἐπίπεδον αὐτό, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀπεριόριστον, θὰ συναντήσῃ διαδοχικῶς ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ διαστήματος· θὰ ἔλθῃ λοιπὸν στιγμὴ κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ θὰ συναντήσῃ καὶ τὸ σημεῖον Γ. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ ἐπίπεδον αὐτό, θὰ διέρχεται καὶ ἀπὸ τὰ τρία σημεῖα Α, Β, Γ.

Ὥστε ὑπάρχει ἕνα ἐπίπεδον, ἔστω τὸ Π, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὰ τρία σημεῖα Α, Β, Γ.

2ον Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι δὲν ὑπάρχει ἄλλο ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον νὰ διέρχεται ἀπὸ τὰ τρία αὐτὰ σημεῖα Α, Β, Γ.

Ἀπόδειξις: Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ὑπάρχει καὶ ἕνα ἄλλο ἐπίπεδον Π′,

τὸ ὁποῖον νὰ διέρχεται ἀπὸ τὰ τρία αὐτὰ σημεῖα Α, Β, Γ. Λέγομεν, ὅτι τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Π′ ταυτίζονται καὶ ἀποτελοῦν ἕνα μόνον ἐπίπεδον.

Διὰ νὰ τὸ ἀποδείξωμεν, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι κάθε τυχὸν σημεῖον τοῦ ἑνὸς ἐπιπέδου εἶναι σημεῖον καὶ τοῦ ἄλλου ἐπιπέδου.

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ κεῖνται καὶ ἐπὶ τῶν δύο ἐπιπέδων Π καὶ Π′, διότι ἐξ ὑποθέσεως τὰ σημεῖα Α, Β, Γ κεῖνται καὶ ἐπὶ τῶν δύο ἐπιπέδων.

Ἔστω τώρα Ο ἕνα τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου Π. Συνδέομεν μὲ εὐθεῖαν τὸ Ο μὲ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς εὐθείας ΑΒ· ἡ εὐθεῖα ΟΜ εἶναι φανερόν, ὅτι θὰ κεῖται ὁλόκληρος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π καὶ συνεπῶς θὰ συναντήσῃ τὴν εὐθεῖαν ΑΓ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ εἰς ἕνα σημεῖον Ν.

Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν εἶναι σημεῖα τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΓ, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π′, ἡ εὐθεῖα ΜΝ κεῖται ὁλόκληρος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π′ καὶ ἑπομένως καὶ τὸ σημεῖον της Ο κεῖται ἐπὶ τοῦ Π′.

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ τυχὸν σημεῖον Ο τοῦ ἐπιπέδου Π εἶναι καὶ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου Π′. Τὰ ἐπίπεδα λοιπὸν Π καὶ Π′ ἔχουν ὅλα τὰ σημεῖα των κοινὰ καὶ ἑπομένως ταυτίζονται καὶ ἀποτελοῦν ἕνα καὶ μόνον ἐπίπεδον.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Τρία σημεῖα, τὰ ὁποῖα. . . .***

Παρατήρησις. Κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ προηγουμένου θεωρήματος παρεδέχθημεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΟΜ συναντᾷ τὴν ΑΓ, ἐπειδὴ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου Π. Θὰ ἠδύναντο ὅμως, ἐξαιρετικῶς, νὰ ἦσαν παράλληλοι. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ ἔπρεπε νὰ λάβωμεν ἕνα ἄλλο σημεῖον τῆς ΑΒ καὶ ἡ ἀπόδειξις θὰ ὑφίστατο.

617. Πόρισμα Ι. ***Μία εὐθεῖα καὶ ἕνα σημεῖον ἐκτὸς αὐτῆς, ὁρίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς καὶ μόνον ἐπιπέδου.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω μία εὐθεῖα ΑΒ *(Σχ. 427)* καὶ ἕνα σημεῖον Γ ἐκτὸς τῆς ΑΒ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ ΑΒ καὶ τὸ σημεῖον Γ ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδον.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν λάβωμεν δύο τυχόντα σημεῖα Α καὶ Β τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ τὸ σημεῖον Γ, θὰ ἔχωμεν τρία σημεῖα Α, Β, Γ, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καὶ τὰ ὁποῖα, ὅπως ἐδείξαμεν (§ 616) ὁρίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου.

Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ τὸ σημεῖον Γ ὁρίζουν ἕνα καὶ μόνον ἐπίπεδον.

Πράγματι κάθε ἄλλο ἐπίπεδον Ρ, τὸ ὁποῖον θὰ εἶχε τὴν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ τὸ σημεῖον Γ, θὰ περιεῖχε τὰ τρία σημεῖα Α, Β, Γ καὶ συνεπῶς θὰ συνέπιπτε μὲ τὸ ἐπίπεδον Π (§ 616).

Σημ. Τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ὁρίζουν μία εὐθεῖα ΑΒ καὶ ἕνα σημεῖον Γ παρίσταται μὲ τὸν συμβολισμὸν (ΑΒ, Γ).

618. Πόρισμα ΙΙ. ***Δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι ὁρίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς καὶ μόνον ἐπιπέδου.***

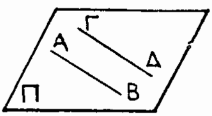
Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΓ *(Σχ. 427)*, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Α.

Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ ἕνα τυχὸν σημεῖον Β καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΓ ἕνα τυχὸν σημεῖον Γ. Ἀπὸ τὰ τρία σημεῖα Α, Β, Γ διέρχεται ἕνα ἐπίπεδον Π. Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ κεῖνται αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ ἐπομένως αἱ εὐθεῖαι αὐταὶ ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδον.

Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι αἱ εὐθεῖαι αὐταὶ ὁρίζουν ἕνα καὶ μόνον ἐπίπεδον. Πράγματι· κάθε ἄλλο ἐπίπεδον Ρ ἐπὶ τοῦ ὁποίου θὰ ἔκειντο αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΓ θὰ περιεῖχε τὰ τρία σημεῖα Α, Β, Γ καὶ συνεπῶς θὰ συνέπιπτε μὲ τὸ ἐπίπεδον Π.

619. Πόρισμα ΙΙΙ. ***Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι ὁρίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς καὶ μόνον ἐπιπέδου.***

Ἔστωσαν αἱ δύο παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν παραλλήλων εὐθειῶν, αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· ὥστε διὰ τῶν παραλλήλων αὐτῶν διέρχεται ἕνα ἐπίπεδον Π.



Σχ. 428.

Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ ὁρίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς μόνον ἐπιπέδου.

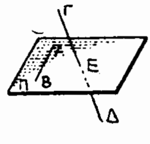
Διότι, ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ δύο τυχόντα σημεῖα Α καὶ Β καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΔ ἕνα τυχὸν σημεῖον Γ, κάθε ἄλλο ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον θὰ περιεῖχε τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ, θὰ περιεῖχε καὶ τὰ τρία σημεῖα Α, Β, Γ καὶ συνεπῶς θὰ συνέπιπτε μὲ τὸ ἐπίπεδον Π, τὸ ὁποῖον ὁρίζουν αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ.

620. Σχετικαὶ θέσεις δύο εὐθειῶν τοῦ διαστήματος. Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ *(Σχ. 429)*. Ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ τυχὸν σημεῖον Ε τῆς ΓΔ ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδον Π. Δύο περιπτώσεις δύνανται νὰ παρουσιασθοῦν:

1ον. ***Ἡ ΓΔ κεῖται ἐπὶ τοῦ Π.*** Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν *αἱ*

ΑΒ καὶ ΓΔ, ὡς κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, εἶναι παράλληλοι ἢ τέμνονται.

2ον. ***Ἡ ΓΔ δὲν κεῖται ἐπὶ τοῦ Π.*** Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν *δὲν ὑπάρχει κανένα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον νὰ περιέχῃ τὰς ΑΒ καὶ ΓΔ.*



Σχ. 429.

Ἐὰν ὑπῆρχε ἕνα τοιοῦτον ἐπίπεδον, ὡς περιέχον τὴν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ τὸ σημεῖον Ε, θὰ συνέπιπτε μὲ τὸ ἐπίπεδον Π. Ἀλλὰ τοῦτο ἀντίκειται πρὸς τὴν ὑπόθεσίν μας.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι δύο εὐθεῖαι δύνανται νὰ καταλάβουν μεταξύ των τὰς κάτωθι τρεῖς θέσεις:

1ον. Νὰ εἶναι παράλληλοι.

2ον. Νὰ τέμνωνται.

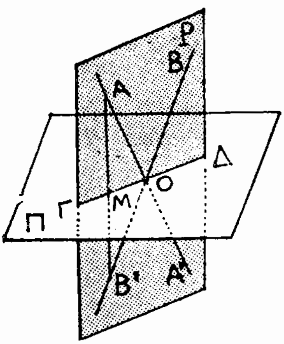
3ον. Νὰ μὴ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (νὰ εἶναι ἀσύμβατοι).

3. Τομὴ δύο ἐπιπέδων

621. Τομὴ δύο ἐπιπέδων. *Τὸ σύνολον τῶν κοινῶν σημείων δύο ἐπιπέδων λέγεται **τομὴ** τῶν ἐπιπέδων.*

622. Θεώρημα. ***Ἐὰν δύο διάφορα ἐπίπεδα ἔχουν ἕνα κοινὸν σημεῖον, ἔχουν καὶ ἄλλα κοινὰ σημεῖα καὶ ἡ τομή των εἶναι εὐθεῖα γραμμή.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἕνα κοινὸν σημεῖον Ο.



Σχ. 430.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ ἐπίπεδα αὐτὰ ἔχουν καὶ ἄλλα κοινὰ σημεῖα καὶ ὅτι ἡ τομή των εἶναι εὐθεῖα γραμμή.

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὸ κοινὸν σημεῖον Ο φέρομεν δύο τυχούσας εὐθείας ΑΟΑ' καὶ ΒΟΒ', αἱ ὁποῖαι νὰ κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ρ. Ἔστωσαν ΟΑ, ΟΒ τὰ μέρη τῶν εὐθειῶν αὐτῶν, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἄνωθεν τοῦ ἐπιπέδου Π καὶ ΟΑ', ΟΒ' τὰ μέρη αὐτῶν, τὰ ὁποῖα κεῖνται κάτωθι τοῦ ἐπιπέδου Π. Συνδέομεν μὲ εὐθεῖαν ἕνα τυχὸν σημεῖον Α τῆς ἡμιευθείας ΟΑ μὲ τυχὸν σημεῖον Β' τῆς ἡμιευθείας ΟΒ'. Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Α κεῖται ἄνωθεν τοῦ ἐπιπέδου Π καὶ τὸ σημεῖον Β' κεῖται κά-

τωθι τοῦ ἐπιπέδου Π, ἡ εὐθεῖα ΑΒ′ θὰ διαπεράση, ἀναγκαστικῶς, τὸ ἐπίπεδον Π εἰς ἕνα σημεῖον του, ἔστω τὸ Μ. Τὸ σημεῖον Μ εἶναι προφανῶς κοινὸν σημεῖον τῶν ἐπιπέδων Π καὶ Ρ (τοῦ μὲν Π ἐξ ὑποθέσεως, τοῦ δὲ Ρ, διότι εἶναι σημεῖον τῆς εὐθείας ΑΒ′ τοῦ ἐπιπέδου Ρ). Ὥστε τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ ἔχουν καὶ ἕνα ἄλλο κοινὸν σημεῖον Μ, ἐκτὸς τοῦ Ο, καὶ ἑπομένως θὰ ἔχουν κοινὰ καὶ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας ΓΔ, ἡ ὁποία συνδέει τὰ σημεῖα Ο καὶ Μ.

Τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ δὲν δύνανται νὰ ἔχουν ἄλλο κοινὸν σημεῖον, τὸ ὁποῖον νὰ κεῖται ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΓΔ, διότι τότε θὰ συνέπιπτον (§ 617).

Ἀσκήσεις

Α′ Ὁμάς. **1967**. (2003). Πῶς δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν, ἂν ἕνα σημεῖον κεῖται ἢ ὄχι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου δύο τεμνομένων εὐθειῶν;

1968. (2004). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τρεῖς εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι τέμνονται ἀνὰ δύο, κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ἢ διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον.

1969. (2005). Ἐὰν ν εὐθεῖαι τέμνωνται ἀνὰ δύο, χωρὶς νὰ διέρχωνται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον, αἱ εὐθεῖαι αὐταὶ ὁρίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς μόνον ἐπιπέδου.

1970. (2006). Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἐπίπεδον καὶ περιφέρεια κύκλου δύναται νὰ ἔχουν δύο τὸ πολὺ κοινὰ σημεῖα.

1971. (2007). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι δύο ἴσοι κύκλοι καὶ οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον, ἀλλὰ δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα.

Β′ Ὁμάς. **1972**. (2008). Δίδονται τέσσαρες εὐθεῖαι Α, Β, Γ, Δ. Αἱ εὐθεῖαι Α καὶ Β εἶναι παράλληλοι. Νὰ κατασκευασθῇ μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία νὰ συναντᾷ καὶ τὰς τέσσαρας εὐθείας.

1973. (2009). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα ἐὰν αἱ εὐθεῖαι Α καὶ Β τέμνωνται.

1974. (2010). Νὰ ἀχθῇ ἀπὸ ἕνα σημεῖον Μ μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία νὰ συναντᾷ δοθεῖσαν Ε καὶ ἕνα δοθέντα κύκλον Ο.

1975. (2011). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν τρία ἐπίπεδα τέμνωνται ἀνὰ δύο, αἱ τομαί των διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον ἢ εἶναι παράλληλοι ἀνὰ δύο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

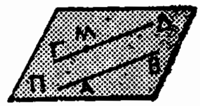
ΕΥΘΕΙΑΙ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΙ

623. Ὁρισμός. ***Δύο εὐθεῖαι τοῦ διαστήματος εἶναι παράλληλοι,*** *ἐὰν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ δὲν ἔχουν κανένα κοινὸν σημεῖον, ὅσον καὶ ἂν προεκταθοῦν.*

624. Θεώρημα. ***Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς εὐθείας δυνάμεθα νὰ φέρωμεν μίαν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν καὶ μίαν μόνον.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω μία εὐθεῖα ΑΒ *(Σχ. 431)* καὶ ἕνα σημεῖον Μ ἐκτὸς αὐτῆς.

1ον Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἀπὸ τὸ Μ δυνάμεθα νὰ φέρωμεν μίαν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ καὶ μίαν μόνον.



Σχ. 431.

Ἀπόδειξις: Ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ τὸ σημεῖον Μ ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδον Π. Εἰς τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ δυνάμεθα φέρωμεν μίαν εὐθεῖαν ΜΔ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ καὶ μίαν μόνον (Εὐκλείδειον αἴτημα).

Ὥστε δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἀπὸ τὸ σημεῖον Μ μίαν εὐθεῖαν ΜΔ παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ.

2ον Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι ἀπὸ τὸ Μ δὲν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἄλλην εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ.

Ἀπόδειξις: Διότι κάθε ἄλλη εὐθεῖα, ἡ ὁποία θὰ ἦτο παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ καὶ θὰ ἤγετο ἀπὸ τὸ Μ εἰς τὸ διάστημα, θὰ ὥριζε μὲ τὴν ΑΒ ἕνα ἐπίπεδον Ρ. Τὸ ἐπίπεδον Ρ, ὡς περιέχον τὴν ΑΒ καὶ τὸ σημεῖον Μ, θὰ συνέπιπτε μὲ τὸ ἐπίπεδον Π. Συνεπῶς μία τοιαύτη παράλληλος θὰ συνέπιπτε μὲ τὴν ΜΔ.

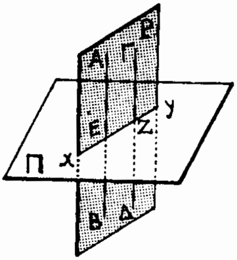
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον. . . .***

625. Θεώρημα. ***Ὅταν δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, κάθε ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν, θὰ τέμνῃ καὶ τὴν ἄλλην.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ *(Σχ.432)* καὶ ἕνα ἐπίπεδον Π, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ΑΒ εἰς ἕνα σημεῖον Ε.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ Π τέμνει καὶ τὴν ΓΔ.

Ἀπόδειξις: Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ, ὡς παράλληλοι, ὁρίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου Ρ, τὸ ὁποῖον εἶναι διάφορον τοῦ Π, ἐπειδὴ τὸ Π δὲν περιέχει τὴν ΑΒ. Τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ, ὡς ἔχοντα ἕνα κοινὸν σημεῖον Ε, θὰ τέμνωνται κατὰ μίαν εὐθεῖαν, ἔστω τὴν ΕΖ. Εἰς τὸ ἐπίπεδον Ρ, ἡ εὐθεῖα ΕΖ, ὡς τέμνουσα τὴν ΑΒ, θὰ τέμνῃ καὶ τὴν παράλληλόν της ΓΔ (§ 125) εἰς ἕνα ὡρισμένον σημεῖον Ζ. Ὥστε τὸ σημεῖον Ζ εἶναι κοινὸν τοῦ ἐπιπέδου Π καὶ τῆς εὐθείας ΓΔ.



Σχ. 432.

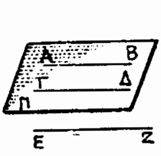
Ὑπόθ.	ΑΒ//ΓΔ Π τέμνει τὴν ΑΒ
Συμπ.	Π τέμνει τὴν ΓΔ

Ἐξ ἄλλου ἡ ΓΔ δὲν δύναται νὰ κεῖται ὁλόκληρος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π, διότι τότε τὸ ἐπίπεδον Π, ὡς περιέχον τὴν εὐθεῖαν ΓΔ καὶ τὸ σημεῖον Ε, θὰ συνέπιπτε μὲ τὸ ἐπίπεδον Ρ καὶ συνεπῶς, θὰ περιεῖχε τὴν εὐθεῖαν ΑΒ ὁλόκληρον, τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν δύο εὐθεῖαι....***

626. Θεώρημα. *Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τρίτην εἶναι καὶ μεταξύ των παράλληλοι.*

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ *(Σχ. 433)*, αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν ΕΖ.



Σχ. 433.

Ὑπόθ.	ΑΒ//ΕΖ ΓΔ//ΕΖ
Συμπ.	ΑΒ//ΓΔ

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι.

Ἀπόδειξις: Ἐν πρώτοις αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ δὲν δύνανται νὰ συναντῶνται, διότι, ἐὰν εἶχον ἕνα κοινὸν σημεῖον Ο, τότε θὰ εἴχομεν δύο παραλλήλους ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΕΖ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον (§ 624).

2ον Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Ἀπόδειξις: Ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ ἕνα σημεῖον Γ τῆς ΓΔ ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδον Π· λέγομεν, ὅτι ὁλόκληρος ἡ εὐθεῖα ΓΔ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ. Διότι, ἐὰν ἡ ΓΔ δὲν ἔκειτο ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π, τὸ

ἐπίπεδον Π θὰ ἔτεμνε τὴν ΓΔ εἰς ἕνα σημεῖον. Τὸ ἐπίπεδον Π ὡς τέμνον τὴν ΓΔ, θὰ ἔτεμνε καὶ τὴν παράλληλόν της ΕΖ. Ἀλλὰ τὸ Π, ὡς τέμνον τὴν ΕΖ, θὰ ἔτεμνε καὶ τὴν παράλληλόν της ΑΒ, πρᾶγμα ἀδύνατον, διότι ἐξ ὑποθέσεως ἡ ΑΒ κεῖται ὁλόκληρος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π. Ὥστε αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ δὲν συναντῶνται· ἄρα εἶναι παράλληλοι.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι. . . .***

Εὐθεῖα καὶ ἐπίπεδον παράλληλα

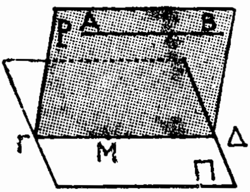
627. Ὁρισμός. ***Μία εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς ἕνα ἐπίπεδον,*** *ἐὰν ἡ εὐθεῖα δὲν ἔχῃ κανένα κοινὸν σημεῖον μὲ τὸ ἐπίπεδον.*

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν καὶ τὸ ἐπίπεδον λέγεται ***παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν.***

Τὸ κάτωθι θεώρημα ἀποδεικνύει τὴν ὕπαρξιν παραλλήλων εὐθειῶν πρὸς ἕνα ἐπίπεδον.

628. Θεώρημα. ***Ἐὰν μία εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς μίαν εὐθεῖαν ἑνὸς ἐπιπέδου, εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον αὐτό.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ, ἡ ὁποία εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΓΔ τοῦ ἐπιπέδου Π *(Σχ. 434).*



Σχ. 434.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π.

Ὑπόθ.	ΑΒ//ΓΔ ΓΔ εὐθ.ἐπιπ.Π
Συμπ.	ΑΒ//Π

Ἀπόδειξις: Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ, ὡς παράλληλοι, ὁρίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου Ρ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ ἐπίπεδον Π κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΓΔ. Ἐὰν ἡ ΑΒ ἔτεμνε τὸ ἐπίπεδον Π, θὰ ἔτεμνε αὐτὸ εἰς ἕνα σημεῖον τῆς εὐθείας ΓΔ. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον, διότι ἡ ΑΒ ὑπετέθη παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ.

Ὥστε ἡ ΑΒ δὲν συναντᾷ τὸ ἐπίπεδον Π καὶ ἑπομένως εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτό.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν μία εὐθεῖα. . . .***

629. Θεώρημα. *(Ἀντίστροφον).* ***Ἐὰν μία εὐθεῖα ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς ἕνα ἐπίπεδον Π*** *(Σχ. 434)* ***κάθε ἐπίπεδον Ρ, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὴν ΑΒ καὶ τέμνει τὸ ἐπίπεδον Π, θὰ τέμνῃ αὐτὸ κατὰ μίαν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω ΓΔ ἡ τομὴ τῶν ἐπιπέδων Π καὶ Ρ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ ΓΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ.

Ὑπόθ.	ΑΒ//Π Ἐπίπ. Ρ διέρχ. διὰ ΑΒ ΓΔ τομὴ τῶν Π καὶ Ρ
Συμπ.	ΑΒ//ΓΔ

Ἀπόδειξις: Ἐν πρώτοις αἱ εὐθεῖαι ΓΔ καὶ ΑΒ κεῖνται ἐξ ὑποθέσεως ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου Ρ. Ἔπειτα αἱ εὐθεῖαι αὗται δὲν δύνανται νὰ συναντῶνται. Διότι, ἐὰν εἶχον ἕνα κοινὸν σημεῖον, τὸ σημεῖον αὐτὸ θὰ ἀνῆκε καὶ εἰς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον Π. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΑΒ ὑπετέθη παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π. Ὥστε ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν μία εὐθεῖα ΑΒ. . . .***

630. Θεώρημα. ***Ἐὰν μία εὐθεῖα ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς ἕνα ἐπίπεδον Π (Σχ. 434), ἡ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου Π, κεῖται ὁλόκληρος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω Μ ἕνα τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου Π· ἀπὸ τὸ σημεῖον Μ φέρομεν μίαν εὐθεῖαν ΜΔ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ.

Ὑπόθ.	ΑΒ//Π Μ σημεῖον τοῦ Π ΓΜΔ//ΑΒ
Συμπ.	ΓΜΔ κεῖται ἐπὶ Π

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ ΜΔ κεῖται ὁλόκληρος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π.

Ἀπόδειξις: Ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ τὸ σημεῖον Μ ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδον Ρ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ ἐπίπεδον Π κατὰ μίαν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ (§ 629)· ἡ εὐθεῖα αὐτὴ πρέπει, ἀναγκαστικῶς, νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν ΜΔ, διότι (§ 624) ἀπὸ ἕνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς εὐθείας μία καὶ μόνον παράλληλος ἄγεται πρὸς τὴν εὐθεῖαν αὐτήν· ὥστε ἡ ΜΔ κεῖται ὁλόκληρος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π.

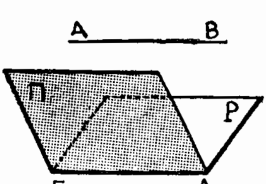
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν μία εὐθεῖα. . . .***

631. Πόρισμα. ***Ἐὰν δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα, εἶναι παράλληλα πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, ἡ τομή των εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν αὐτήν.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΒ *(Σχ. 435)*

Ὑπόθ.	ΓΔ τομὴ ἐπιπ. Π καὶ Ρ Π//ΑΒ Ρ//ΑΒ
Συμπ.	ΓΔ//ΑΒ

εἶναι παράλληλος πρὸς τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ, τὰ ὁποῖα τέμνονται κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΓΔ.



Σχ. 435.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν ἀπὸ ἕνα σημεῖον Γ τῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων Π καὶ Ρ φέρωμεν μίαν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, αὐτὴ ἡ παράλληλος (§ 630) θὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ρ καὶ ἑπομένως θὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν τομήν των ΓΔ.

Ὥστε ἡ ΓΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν δύο τεμνόμενα. . . .***

Ἀσκήσεις

***Α' Ὁμάς.* 1976.** (2012). Ἂν εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τομὴν δύο ἐπιπέδων, εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὰ ἐπίπεδα αὐτὰ ἢ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν *(Σχ. 435).*

1977. (2013). Ἐὰν δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα Π καὶ Ρ διέρχωνται ἀντιστοίχως ἀπὸ δύο παραλλήλους εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ, ἡ τομή των ΕΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς ΑΒ καὶ ΓΔ.

1978. (2014). Αἱ τομαὶ ἐπιπέδων, τὰ ὁποῖα διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ὑπὸ ἄλλου ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν αὐτήν, εἶναι εὐθεῖαι παράλληλοι.

1979. (2015). Δίδεται ἕνα σημεῖον Ο καὶ αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι $Ε_1$, $Ε_2$, $Ε_3$.... Τὰ ἐπίπεδα $ΟΕ_1$, $ΟΕ_2$.... τέμνουν ἕνα δοθὲν ἐπίπεδον Π. Νὰ εὑρεθῇ ποίαν λεπτομέρειαν παρουσιάζουν αἱ τομαὶ τῶν ἐπιπέδων αὐτῶν;

***Β' Ὁμάς.* 1980.** (2016). Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Ο νὰ ἀχθῇ ἕνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς μίαν δοθεῖσαν εὐθεῖαν Ε. Πόσας λύσεις ἔχει τὸ πρόβλημα;

1981. (2017). Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ. Νὰ ἀχθῇ διὰ τῆς ΑΒ ἕνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν ΓΔ.

1982. (2018). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς δύο δοθείσας εὐθείας.

1983. (2019). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Ο νὰ ἀχθῇ μία εὐθεῖα παράλληλος πρὸς δύο δοθέντα ἐπίπεδα.

1984. (2020). Δίδονται τρεῖς τυχοῦσαι εὐθεῖαι $Ε_1$, $Ε_2$, $Ε_3$. Νὰ ἀχθῇ διὰ τῆς $Ε_1$ ἕνα ἐπίπεδον $Π_1$ καὶ διὰ τῆς $Ε_2$ ἕνα ἐπίπεδον $Π_2$, εἰς τρόπον ὥστε τὰ ἐπίπεδα $Π_1$ καὶ $Π_2$ νὰ τέμνωνται κατὰ μίαν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν $Ε_3$.

1985. (2021). Δίδονται δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα Π καὶ Ρ καὶ ἕνα σημεῖον Ο τοῦ ἐπιπέδου Π. Νὰ ἀχθῇ ἀπὸ τὸ Ο μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία νὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ Π καὶ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ Ρ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

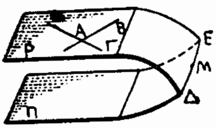
ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ ΕΠΙΠΕΔΑ

632. Ὁρισμός. *Λέγομεν, **ὅτι δύο ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα,** ὅταν δὲν ἔχουν κανένα κοινὸν σημεῖον, ὅσον καὶ ἂν προεκταθοῦν.*

Τὸ κάτωθι θεώρημα δεικνύει τὴν ὕπαρξιν παραλλήλων ἐπιπέδων.

633. Θεώρημα. *Δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΓ (Σχ. 436) **παράλληλοι πρὸς ἕνα ἐπίπεδον Π, ὁρίζουν ἕνα δεύτερον ἐπίπεδον Ρ, παράλληλον πρὸς τὸ Π.***

Ἀπόδειξις: Ἐὰν τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ εἶχον ἕνα κοινὸν σημεῖον Δ, θὰ ἐτέμνοντο κατὰ μίαν εὐθεῖαν ΔΕ (§ 622).



Σχ. 436.

Ὑπόθ.	ΑΒ//Π ΑΓ//Π ΑΒ τέμν. ΓΔ
Συμπ.	Ἐπίπ. εὐθ. (ΑΒ, ΓΔ)//Π

Ἡ εὐθεῖα αὐτὴ θὰ συνήντα τὴν μίαν τοὐλάχιστον ἐκ τῶν εὐθειῶν, ἔστω τὴν ΑΒ, εἰς ἕνα σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον θὰ ἦτο κοινὸν σημεῖον τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ τοῦ ἐπιπέδου Π. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον, διότι ἡ ΑΒ ὑπετέθη παράλληλος πρὸς τὸ Π.

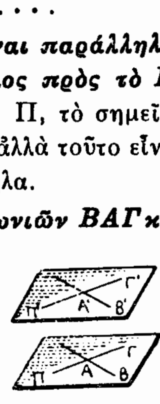
Ὥστε τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ δὲν ἔχουν κανένα κοινὸν σημεῖον καὶ ἑπομένως εἶναι παράλληλα.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι. . . .***

634. Πόρισμα. *Ἐὰν δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ εἶναι παράλληλα, κάθε εὐθεῖα ΑΒ τοῦ ἐπιπέδου Ρ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ Π.*

Ἀπόδειξις: Διότι, ἐὰν ἡ ΑΒ ἔτεμνε τὸ ἐπίπεδον Π, τὸ σημεῖον τῆς τομῆς θὰ ἀνῆκε καὶ εἰς τὰ δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ· ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον, διότι τὰ ἐπίπεδα αὐτὰ ὑπετέθησαν παράλληλα.

635. Θεώρημα. *Τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Π' δύο γωνιῶν ΒΑΓ καὶ Β'Α'Γ', τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι, εἶναι παράλληλα.*



Σχ. 437.

Ἀπόδειξις: Ἡ εὐθεῖα Α'Β' (*Σχ. 437*), ὡς παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ, εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π (§ 628). Ὁμοίως ἡ εὐθεῖα Α'Γ', ὡς παράλληλος πρὸ τὴν ΑΓ, εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς

τὸ ἐπίπεδον Π. Τὸ ἐπίπεδον λοιπὸν Π', τῶν τεμνομένων εὐθειῶν Α'Β' καὶ Α'Γ', εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π, διότι αἱ τεμνόμεναι εὐθεῖαι Α'Β' καὶ Α'Γ' εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π (§ 633).

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Π' δύο γωνιῶν....***

636. Παρατήρησις. ***Διὰ νὰ εἶναι δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ παράλληλα, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ ἕνα ἐξ αὐτῶν (π.χ. τὸ Ρ) νὰ περιέχῃ δύο εὐθείας παραλλήλους πρὸς τὸ ἄλλο.***

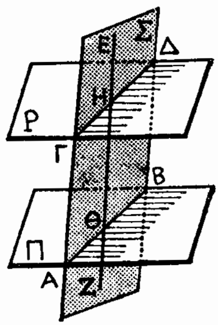
Ἀπόδειξις: Ἐὰν δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ εἶναι παράλληλα, δύο εὐθεῖαι τοῦ ἐπιπέδου Ρ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸ Π (§ 634) καὶ ἀντιστρόφως. Ἐὰν ἕνα ἐπίπεδον Ρ περιέχῃ δύο εὐθείας παραλλήλους πρὸς ἕνα ἐπίπεδον Π, τὸ ἐπίπεδον Ρ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π (§ 633).

637. Θεώρημα. ***Αἱ τομαὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τρίτου εἶναι παράλληλοι.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν Π καὶ Ρ δύο παράλληλα ἐπίπεδα καὶ ΑΒ, καὶ ΓΔ αἱ τομαὶ αὐτῶν ὑπὸ ἑνὸς τρίτου ἐπιπέδου Σ *(Σχ. 438)*.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι.

Ἀπόδειξις: Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Σ καὶ ἑπομένως ἢ θὰ τέμνωνται ἢ θὰ εἶναι παράλληλοι.



Σχ. 438.

Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ ἐτέμνοντο εἰς ἕνα σημεῖον Ο, τὸ σημεῖον αὐτό, ὡς σημεῖον τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ, θὰ ἦτο καὶ σημεῖον τῶν ἐπιπέδων Π καὶ Ρ, ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ εὐθεῖαι αὗται. Ἀλλὰ τότε τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ, ὡς ἔχοντα κοινὸν τὸ σημεῖον Ο, θὰ ἐτέμνοντο. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον, διότι ἐξ ὑποθέσεως τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ εἶναι παράλληλα.

Ὥστε αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ δὲν τέμνονται καὶ ἑπομένως εἶναι παράλληλοι.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Αἱ τομαὶ δύο παραλλήλων....***

638. Θεώρημα. ***Παράλληλοι εὐθεῖαι, περιεχόμεναι μεταξὺ παραλλήλων ἐπιπέδων, εἶναι ἴσαι.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΓ καὶ ΒΔ *(Σχ. 438)* αἱ ὁποῖαι περιέχονται μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων Π καὶ Ρ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΑΓ=ΒΔ.

Ἀπόδειξις: Αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΓ καὶ ΒΔ ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδον Σ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ κατὰ τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ, αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι, ὡς τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τρίτου (§ 637). Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΑΒΔΓ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευράς του παραλλήλους. Ἄρα θὰ εἶναι ΑΓ=ΒΔ, ὡς ἀπέναντι πλευραὶ παραλληλογράμμου.

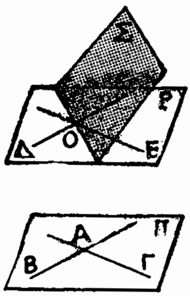
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Παράλληλοι εὐθεῖαι. . . .***

639. Θεώρημα. ***Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Ο** (Σχ. 439), **τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς ἐπιπέδου Π, δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἐπίπεδον Ρ παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π καὶ ἕνα μόνον.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω Ο ἕνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου Π.

1ον Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἀπὸ τὸ Ο διέρχεται ἕνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ Π.

Ἀπόδειξις: Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π φέρομεν δύο τεμνομένας εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο φέρομεν τὰς εὐθείας ΟΔ καὶ ΟΕ παραλλήλους ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ. Αἱ εὐθεῖαι ΟΔ καὶ ΟΕ, ὡς τεμνόμεναι, ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδον Ρ, τὸ ὁποῖον εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ Π(§ 633).



Σχ. 439.

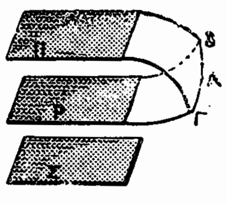
2ον Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο δὲν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἄλλο ἐπίπεδον ἐκτὸς τοῦ Ρ, παράλληλον πρὸς τὸ Π.

Ἀπόδειξις: Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἀπὸ τὸ Ο διέρχεται καὶ ἕνα δεύτερον ἐπίπεδον Σ, παράλληλον πρὸς τὸ Π. Ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδον Π εἶναι παράλληλον πρὸς τὰ ἐπίπεδα Ρ καὶ Σ, αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΓ τοῦ Π θὰ ἦσαν παράλληλοι πρὸς τὰ ἐπίπεδα Ρ καὶ Σ (§ 635).

Ἀλλὰ τότε αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ΟΔ καὶ ΟΕ πρὸς τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ, θὰ ἔκειντο καὶ εἰς τὰ δύο ἐπίπεδα Ρ καὶ Σ (§ 630). Τὰ ἐπίπεδα λοιπὸν Ρ καὶ Σ θὰ συμπίπτουν, διότι καὶ τὰ δύο περιέχουν τὰς τεμνομένας εὐθείας ΟΔ καὶ ΟΕ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον. . . .***

640. Πόρισμα Ι. ***Δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ, παράλληλα πρὸς τρίτον ἐπίπεδον Σ, εἶναι παράλληλα μεταξύ των.***



Σχ. 440.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ (Σχ. 440) εἶχον ἕνα κοινὸν σημεῖον Α, θὰ ἤγοντο

ἀπὸ τὸ σημεῖον Α δύο ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τὸ Σ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον (§ 639).

641. Πόρισμα II. ***Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα, κάθε ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ ἕνα θὰ τέμνῃ καὶ τὸ ἄλλο·***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν τὰ παράλληλα ἐπίπεδα Π καὶ Ρ *(Σχ. 439)* καὶ ἔστω, ὅτι ἕνα τρίτον ἐπίπεδον Σ τέμνει τὸ Ρ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ Σ τέμνει καὶ τὸ Π.

Ἀπόδειξις: Ἔστω Ο ἕνα κοινὸν σημεῖον τῶν ἐπιπέδων Ρ καὶ Σ.

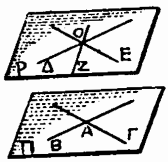
Ἐὰν τὸ Σ δὲν ἔτεμνε τὸ Π, θὰ ἦτο παράλληλον πρὸς αὐτὸ καὶ θὰ ἤγοντο ἀπὸ τὸ Ο δύο ἐπίπεδα, τὰ Ρ καὶ Σ, παράλληλα πρὸς τὸ Π, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον (§ 639).

642. Θεώρημα. ***Ἐὰν ἀπὸ ἕνα σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς ἑνὸς ἐπιπέδου Π, φέρωμεν παραλλήλους πρὸς τὸ ἐπίπεδον αὐτό, ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν παραλλήλων αὐτῶν εἶναι ἕνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ἄγεται ἀπὸ τὸ Ο καὶ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ Π.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω Ο ἕνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου Π. Ἀπὸ τὸ Ο φέρομεν εὐθείας ΟΔ, ΟΕ, . . . , παραλλήλους πρὸς τὸ Π.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΟΔ, ΟΕ, ... , κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου, παραλλήλου πρὸς τὸ Π.

Ἀπόδειξις: Ἐδείξαμεν (§ 639), ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΟΔ καὶ ΟΕ *(Σχ. 441)*, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο, παραλλήλως πρὸς δύο τυχούσας εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ τοῦ ἐπιπέδου Π, ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδον Ρ, παράλληλον πρὸς τὸ Π.



Σχ. 441.

Κάθε ἄλλη εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ Ο παραλλήλως πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π, πρέπει νὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ρ.

Διότι, ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι μία ἀπὸ τὰς εὐθείας αὐτὰς ἔστω ἡ ΟΖ δὲν ἔκειτο ἐπὶ τοῦ Ρ, τότε ἡ εὐθεῖα ΟΖ καὶ μία ἄλλη εὐθεῖα, παράλληλος πρὸς τὸ Π, ἔστω ἡ ΟΕ, θὰ ὥριζον ἕνα ἄλλο ἐπίπεδον Σ παράλληλον πρὸς τὸ Π. Τὰ ἐπίπεδα ὅμως Ρ καὶ Σ θὰ συνέπιπτον, διότι ἀπὸ ἕνα σημεῖον Ο δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἕνα καὶ μόνον ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ Π § 639).

Ὥστε ἡ εὐθεῖα ΟΖ καὶ γενικῶς κάθε ἄλλη εὐθεῖα, ποὺ ἄγεται ἀπὸ τὸ Ο καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π, κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ρ, παραλλήλου πρὸς τὸ Π.

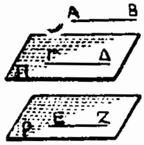
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν ἀπὸ ἕνα σημεῖον. . . .***

643. Πόρισμα I. ***Ἐὰν δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ εἶναι παράλληλα, κάθε εὐθεῖα ΑΒ παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π, εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἄλλο ἐπίπεδον Ρ.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν τὰ παράλληλα ἐπίπεδα Π καὶ Ρ καὶ ὅτι μία εὐθεῖα ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ Π.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ Ρ.

Ἀπόδειξις: Ἡ ΑΒ *(Σχ. 442)*, ὡς παράλληλος πρὸς τὸ Π, θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς μίαν εὐθεῖαν ΓΔ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ. Ἐπίσης ἡ ΑΒ θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς μίαν εὐθεῖαν ΕΖ, ἡ ὁποία κεῖται ἐπὶ τοῦ Ρ καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ. Ἀλλὰ τότε ἡ ΑΒ ὡς παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ θὰ εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον Ρ.



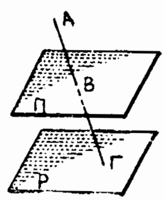
Σχ. 442.

644. Πόρισμα II. ***Ἐὰν δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ εἶναι παράλληλα, κάθε εὐθεῖα ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὸ ἕνα ἐπίπεδον π.χ. τὸ Π, τέμνει καὶ τὸ ἄλλο ἐπίπεδον Ρ.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν τὰ παράλληλα ἐπίπεδα Π καὶ Ρ καὶ ὅτι μία εὐθεῖα ΑΒ τέμνει τὸ Π.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ ΑΒ τέμνει καὶ τὸ ἐπίπεδον Ρ.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν ἡ ΑΒ *(Σχ. 443)* δὲν ἔτεμνε τὸ Ρ θὰ ἦτο παράλληλος πρὸς τὸ Ρ καὶ ἑπομένως θὰ ἔκειτο ἐπὶ τοῦ Π, ὡς διερχομένη διὰ τοῦ σημείου Β τοῦ ἐπιπέδου Π. Ἀλλὰ τοῦτο ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας.



Σχ. 443.

Ὥστε ἡ ΑΒ τέμνει καὶ τὸ Ρ.

Ἀσκήσεις: *1986, 1987, 1988, 1989, 1990, 1991, 1992.*

645. Θεώρημα. ***Δύο γωνίαι, αἱ ὁποῖαι δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους μίαν πρὸς μίαν καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς, εἶναι ἴσαι.***

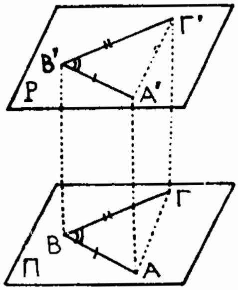
Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ *(Σχ. 444)*, αἱ ὁποῖαι δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ ἔχουν τὰς πλευρὰς ΒΑ καὶ ΒΓ παραλλήλους καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς, ἀντιστοίχως πρὸς τὰς πλευρὰς Β′Α′ καὶ Β′Γ′.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι γων.ΑΒΓ=γων.Α′Β′Γ′.

Ἀπόδειξις: Ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῶν δύο γωνιῶν λαμβάνομεν μήκη ΒΑ=Β′Α′ καὶ ΒΓ=Β′Γ′ καὶ φέρομεν τὰς εὐθείας ΒΒ′, ΑΑ′, ΓΓ′, ΑΓ

καὶ Α'Γ'. Τὸ τετράπλευρον ΒΑΑ'Β' εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ δύο ἀπέναντι πλευραί του ΒΑ καὶ Β'Α' εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι. Ἄρα καὶ αἱ πλευραὶ ΒΒ' καὶ ΑΑ' θὰ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.

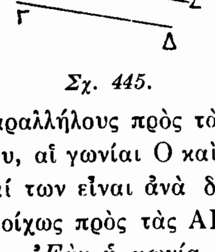
Ὁμοίως καὶ τὸ τετράπλευρον ΒΓΓ'Β' εἶναι παραλληλόγραμμον διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἑπομένως αἱ πλευραὶ ΒΒ' καὶ ΓΓ' θὰ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι. Ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΑΑ' καὶ ΓΓ' εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι πρὸς τὴν ΒΒ', θὰ εἶναι καὶ μεταξύ των ἴσαι καὶ παράλληλοι. Ἀλλὰ τότε τὸ τετράπλευρον ΑΓΓ'Α' εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ΑΓ=Α'Γ'. Παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' ἔχουν καὶ τὰς τρεῖς πλευράς των ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσα. Ἄρα θὰ εἶναι καὶ γων.ΑΒΓ=γων.Α'Β'Γ'.



Σχ. 444.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Δύο γωνίαι, αἱ . . . .***

646. Γωνίαι δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν. *Ὀνομάζομεν* ***γωνίαν δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν,*** *τὴν γωνίαν, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ παράλληλοι πρὸς τὰς εὐθείας αὐτάς, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τυχὸν σημεῖον τοῦ χώρου.*



Σχ. 445.

Π.χ. ἡ γωνία τῶν ἀσυμβάτων εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ *(Σχ. 445)* εἶναι ἡ γωνία ΕΟΖ, ἐὰν αἱ ΟΕ καὶ ΟΖ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς ΑΒ καὶ ΓΔ ἀντιστοίχως.

Ἡ γωνία τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι ἡ αὐτή, οἱονδήποτε καὶ ἂν εἶναι τὸ σημεῖον τοῦ χώρου, ἀπὸ τὸ ὁποῖον φέρομεν τὰς παραλλήλους πρὸς τὰς ΑΒ καὶ ΓΔ.

Πράγματι· ἐὰν φέρωμεν τὰς Ο'Ε' καὶ Ο'Ζ' παραλλήλους πρὸς τὰς ΑΒ καὶ ΓΔ ἀπὸ ἕνα ἄλλο σημεῖον Ο' τοῦ χώρου, αἱ γωνίαι Ο καὶ Ο' τοῦ χώρου, εἶναι ἴσαι (§ 645), διότι αἱ πλευραί των εἶναι ἀνὰ δύο παράλληλοι μεταξύ των, ὡς παράλληλοι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ΑΒ καὶ ΓΔ.

Ἐὰν ἡ γωνία ΕΟΖ (Σχ. 445) εἶναι ὀρθή, τότε αἱ ἀσύμβατοι εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ λέγονται ***κάθετοι μεταξύ των*** ἢ ***ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι.***

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι: *Δύο εὐθεῖαι κάθετοι μεταξύ των δὲν κεῖνται γενικῶς ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.*

Ἐὰν δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι εἶναι ὀρθογώνιοι, εἶναι φανερόν, ὅτι κάθε παράλληλος εὐθεῖα πρὸς τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ἄλλην ἢ πρὸς κάθε παράλληλον τῆς ἄλλης.

Σημ. Εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ γωνία δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν δὲν ἀλλάσσει καὶ ὅταν τὸ σημεῖον Ο κεῖται ἐπὶ μιᾶς τῶν εὐθειῶν αὐτῶν.

647. Θεώρημα. ***Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων, τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα.***

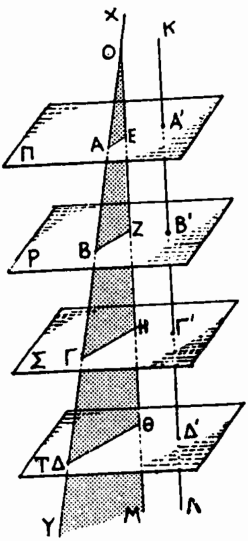
Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΧΥ καὶ ΚΛ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰ παράλληλα ἐπίπεδα Π, Ρ, Σ, Τ, εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ ἡ ΧΥ καὶ εἰς τὰ σημεῖα Α′, Β′, Γ′, Δ′ ἡ ΚΔ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}$.

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Ο τῆς ΧΥ φέρομεν εὐθεῖαν ΟΜ παράλληλον πρὸς τὴν ΚΛ, ἡ ὁποία τέμνει τὰ ἐπίπεδα Π, Ρ, Σ, Τ εἰς τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ ἀντιστοίχως. Αἱ εὐθεῖαι ΟΥ καὶ ΟΜ, ὡς τεμνόμεναι, ὁρίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου (ΟΥ, Μ), τὸ ὁποῖον τέμνει τὰ ἐπίπεδα Π, Ρ, Σ, Τ κατὰ τὰς παραλλήλους (§ 637) ΑΕ, ΒΖ, ΓΗ, ΔΘ. Εἰς τὸ ἐπίπεδον (ΟΥ, Μ) αἱ εὐθεῖαι ΟΥ καὶ ΟΜ τέμνονται ὑπὸ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν ΑΕ, ΒΖ, ΓΗ, ΔΘ, ἄρα θὰ τέμνωνται εἰς μέρη ἀνάλογα· δηλ. θὰ εἶναι

$$\frac{AB}{EZ} = \frac{B\Gamma}{ZH} = \frac{\Gamma\Delta}{H\Theta} \qquad (1)$$

Ἀλλὰ ΕΖ=Α′Β′, ΖΗ=Β′Γ′, ΗΘ=Γ′Δ′ ὡς παράλληλοι περιεχόμεναι μεταξὺ παραλλήλων ἐπιπέδων (§ 638). Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὰ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν $\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}$.



Σχ. 446.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται. . . .***

Ἀσκήσεις: 1993, 1994.

Ἀσκήσεις

1986. (2022). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἕνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς δύο ἀσυμβάτους εὐθείας.

1987. (2023). Νὰ ἀχθοῦν δύο ἐπίπεδα παράλληλα, τὰ ὁποῖα νὰ διέρχωνται, ἀνὰ ἕνα, ἀπὸ δύο δοθείσας ἀσυμβάτους εὐθείας.

1988. (2024). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς δοθέντος ἐπι-

πέδου Π, νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π καὶ ἡ ὁποία νὰ συναντᾷ δοθεῖσαν εὐθεῖαν Ε.

1989. (2025). Νὰ ἀχθῇ μία εὐθεῖα παράλληλος πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον καὶ τέμνουσα δύο δοθείσας εὐθείας.

1990. (2026). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Ο νὰ ἀχθῇ μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία νὰ συναντᾷ δύο εὐθείας Χ καὶ Υ, αἱ ὁποῖαι δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

1991. (2027). Δίδονται μία περιφέρεια καὶ δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι. Νὰ ἀχθῇ μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία νὰ συναντᾷ τὰς τρεῖς αὐτὰς γραμμάς.

1992. (2028). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν ἄκρων ἴσων παραλλήλων εὐθυγράμμων τμημάτων, τῶν ἀγομένων ἀπὸ τὰ διάφορα σημεῖα ἑνὸς ἐπιπέδου πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου.

1993. (2029). Δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ εἶναι παράλληλα καὶ ἀπέχουν μεταξύ των 15 ἑκ. Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ τὸ Π 8 ἑκ. φέρομεν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία τέμνει τὸ Π εἰς τὸ σημεῖον Γ καὶ τὸ Ρ εἰς τὸ Β. Ἐὰν εἶναι ΑΒ=30 ἑκ. τὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ΑΓ καὶ ΓΒ.

1994. (2030). Μία εὐθεῖα τέμνει τρία παράλληλα ἐπίπεδα εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ καὶ μία ἄλλη εἰς τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η. Ἐὰν εἶναι ΑΒ=6 ἑκ., ΒΓ=10 ἑκ. καὶ ΕΖ=14 ἑκ., νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη τῶν ΕΗ καὶ ΖΗ.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν

Α' Ὁμάς. **1995.** (2031). Δίδονται εἰς τὸν χῶρον δύο σημεῖα Ο καὶ Ο' καὶ δύο εὐθεῖαι Ε καὶ Ε'. Νὰ ἀχθοῦν δύο εὐθεῖαι ΟΑ καὶ Ο'Α', αἱ ὁποῖαι νὰ εἶναι παράλληλοι μεταξύ των, ὅπου Α καὶ Α' εἶναι σημεῖα τῶν εὐθειῶν Ε καὶ Ε' ἀντιστοίχως.

1996. (2032). Διὰ δοθείσης εὐθείας νὰ ἀχθῇ ἕνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον νὰ τέμνῃ δύο δοθέντα ἐπίπεδα κατὰ δύο παραλλήλους εὐθείας.

1997. (2033). Δίδεται ἕνα σημεῖον Μ, ἕνα ἐπίπεδον Π καὶ μία εὐθεῖα Ε παράλληλος πρὸς τὸ Π καὶ ζητεῖται νὰ ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου Μ μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία νὰ συναντᾷ τὴν Ε καὶ τὸ ἐπίπεδον εἰς δύο σημεῖα, τὰ ὁποῖα νὰ ἀπέχουν ἀπόστασιν δοθεῖσαν λ.

1998. (2034). Δίδεται ἕνα ἐπίπεδον Π καὶ ἐκτὸς αὐτοῦ ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ. Νὰ ἀχθοῦν διὰ τῶν Α καὶ Β δύο παράλληλοι εὐθεῖαι τοιαῦται, ὥστε τὰ ἴχνη των Α' καὶ Β' ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π, νὰ ὁρίζουν ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα Α'Β' ἴσον, παράλληλον καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς μὲ δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα αβ τοῦ ἐπιπέδου Π.

Β' Ὁμάς. **1999.** (2035), Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ τὸ ἕνα ἄκρον του Α ἐπὶ δοθείσης εὐθείας Ε, τὸ ἄλλο ἄκρον Β ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου Π καὶ τοῦ ὁποίου τὸ μέσον νὰ εἶναι δοθὲν σημεῖον Ο.

2000. (2036). Νὰ κατασκευασθῇ μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία νὰ συναντᾷ δύο ἄλλας εὐθείας $Ε_1, Ε_2$, αἱ ὁποῖαι δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τρίτην δοθεῖσαν εὐθεῖαν Δ, ἡ ὁποία δὲν εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς $Ε_1$ καὶ $Ε_2$.

2001. (2037). Δίδονται ἕνα ἐπίπεδον Π, δύο εὐθεῖαι του Ε καὶ Ε', αἱ ὁποῖαι τέμνονται ἐκτὸς τοῦ φύλλου σχεδιάσεως καὶ ἕνα σημεῖον Ο ἐκτὸς τοῦ

ἐπιπέδου Π. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ Ο καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν Ε καὶ Ε′.

2002. (2038). Δίδονται δύο παράλληλα ἐπίπεδα Π καὶ Ρ. Ἐπὶ τοῦ Π λαμβάνομεν τρία σημεῖα Α, Β, Γ καὶ ἐπὶ τοῦ Ρ ἄλλα τρία σημεῖα Α′, Β′, Γ′. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ΑΑ′Γ′ καὶ ΒΒ′Γ′.

2003. (2039). Νὰ κατασκευασθῇ μία εὐθεῖα, παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν Ε καὶ ἡ ὁποία νὰ συναντᾷ δύο περιφερείας Ο καὶ Ο′ κειμένας ἐπὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων Π καὶ Π′.

2004. (2040). Δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι Χ καὶ Ψ τέμνουν δοθὲν ἐπίπεδον Π εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ΜΝ δοθέντος μήκους λ, παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π καὶ ἔχον τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν Χ καὶ Ψ.

Γ′ Ὁμάς. **2005.** (2041). Δίδονται δύο εὐθεῖαι Χ, Υ αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Ο καὶ μία τρίτη εὐθεῖα Ζ, ἡ ὁποία τέμνει τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο εὐθειῶν εἰς ἕνα σημεῖον Σ. Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι συναντοῦν τὰς τρεῖς αὐτὰς εὐθείας.

2006. (2042). Δίδονται δύο εὐθεῖαι Οx καὶ Οy καὶ μία τρίτη εὐθεῖα Ζ, ἡ ὁποία δὲν τέμνει τὰς δύο πρώτας. Ἐπὶ τῆς Ζ λαμβάνομεν ἕνα μεταβλητὸν σημεῖον Μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων (Οx, Μ) καὶ (Οy, Μ), ὅταν τὸ Μ γράφῃ τὴν εὐθεῖαν Ζ.

2007. (2043). Δίδεται ἕνα ἐπίπεδον Π, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ δύο σημεῖα Α καὶ Β καὶ ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου ἕνα σημεῖον Ο. Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τῆς τομῆς ΟΔ δύο ἐπιπέδων, τὰ ὁποῖα διέρχονται ἀντιστοίχως ἀπὸ τὰς εὐθείας ΟΑ καὶ ΟΒ καὶ τέμνουν τὸ ἐπίπεδον Π κατὰ δύο παραλλήλους εὐθείας πρὸς τὴν ΟΔ.

2008. (2044). Δίδονται, ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου Π, δύο εὐθεῖαι Ε καὶ Ε′, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ο, καὶ ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου δύο σημεῖα Α καὶ Α′ (ἡ ΑΑ′ δὲν εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ Π). Διὰ τῆς εὐθείας ΑΑ′ φέρομεν τυχὸν ἐπίπεδον Ρ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν Ε εἰς τὸ Β καὶ τὴν Ε′ εἰς τὸ Β′.

1ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῆς τομῆς Μ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ Α′Β′ καὶ ὁ τόπος τῆς τομῆς Ν τῶν ΑΒ′ καὶ Α′Β.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΜΝ διέρχεται ἀπὸ ἕνα ὡρισμένον σημεῖον.

2009. (2045). Ἐὰν διαιρέσωμεν κατὰ δοθέντα λόγον μ : ν, ὅλας τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι περιέχονται μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων Π καὶ Ρ, ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως εἶναι ἕνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὰ Π καὶ Ρ.

2010. (2046). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν μέσων εὐθυγράμμων τμημάτων, τὰ ὁποῖα εἶναι παράλληλα πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν καὶ περατοῦνται εἰς δύο δοθέντα ἐπίπεδα

2011. (2047). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα χωρίζουν κατὰ τὸν δοθέντα λόγον τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, τὰ ὁποῖα περιλαμβάνονται μεταξὺ ἑνὸς σημείου Ο καὶ ἑνὸς δοθέντος ἐπιπέδου Π.

2012. (2048). Δίδεται μία περιφέρεια Ο καὶ ἕνα σημεῖον Σ ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου της. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα χωρίζουν κατὰ τὸν δοθέντα λόγον τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ὑπὸ τοῦ σημείου Σ καὶ ὅλων τῶν σημείων τῆς περιφερείας.

2013. (2049). Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι x′x καὶ y′y. Συνδέομεν μὲ

εὐθεῖαν τυχὸν σημεῖον Α τῆς x'x μὲ τυχὸν σημεῖον Β τῆς y'y. Ποῖος εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα διαιροῦν τὴν ΑΒ κατὰ δοθέντα λόγον μ : ν.

2014. (2050). Τὰ σημεῖα Α καὶ Β γράφουν ἀντιστοίχως δύο δοθείσας εὐθείας Χ καὶ Ψ εἰς τρόπον, ὥστε ἡ εὐθεῖα ΑΒ νὰ μένῃ παράλληλος πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα χωρίζουν τὴν ΑΒ κατὰ δοθέντα λόγον μ : ν.

2015. (2051). Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι Χ, Υ, Ζ, αἱ ὁποῖαι δὲν κεῖνται ἀνὰ δύο ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Ἕνα ἐπίπεδον Π τέμνει αὐτὰς εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ὅταν τὸ Π μετατίθεται, μένον παράλληλον πρὸς τὴν ἀρχικήν του θέσιν.

2016. (2052). Δίδονται δύο παράλληλα ἐπίπεδα Π καὶ Π', ἐπὶ τοῦ Π ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ΟΑ=α καὶ ἐπὶ τοῦ Π' ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα Ο'Α'=α'. Τὰ τμήματα αὐτὰ εἶναι ὀρθογώνια καὶ στρέφονται ἀντιστοίχως ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου των περὶ τὰ σταθερὰ ἄκρα των Ο καὶ Ο', μένοντα ὀρθογώνια. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ μέσου Μ τῆς ΑΑ'.

2017. (2053). Δίδονται δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα Π καὶ Ρ καὶ ἕνα σημεῖον Ο. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὸ Ο καὶ εἶναι τοιαῦται, ὥστε τὸ Ο νὰ εἶναι τὸ μέσον τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων, τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ἐπὶ τῶν εὐθειῶν αὐτῶν ὑπὸ τῶν δύο ἐπιπέδων.

Δ' Ὁμάς. **2018.** (2054). Τρεῖς εὐθεῖαι ΟΧ, ΟΥ, ΟΖ διαπεροῦν δύο παράλληλα ἐπίπεδα Π καὶ Π' εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ καὶ Α', Β', Γ', ἀντιστοίχως. Νὰ συγκριθοῦν τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ'.

2019. (2055). Ἀπὸ τὰς κυρυφὰς ἑνὸς παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου Ρ, φέρομεν εὐθείας παραλλήλους, ἴσας καὶ κειμένας πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου. Ποῖον σχῆμα ὁρίζουν τὰ ἄκρα τῶν εὐθειῶν αὐτῶν καὶ ποίαν σχέσιν ἔχει τὸ σχῆμα αὐτὸ πρὸς τὸ δοθὲν παραλληλόγραμμον ;

2020. (2056). Ἐὰν δύο τυχοῦσαι εὐθεῖαι ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι τοιαῦται ὥστε νὰ εἶναι $\frac{ΑΒ}{ΒΓ}=\frac{Α'Β'}{Β'Γ'}$, αἱ εὐθεῖαι ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

2021. (2057). Εἰς ἕνα στρεβλὸν* τετράπλευρον αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ μέσα τῶν μὴ διαδοχικῶν πλευρῶν του καὶ ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ μέσον ἑκάστης ἐξ αὐτῶν.

2022. (2058). Δίδονται τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ ἓξ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα διέρχοντα ἀπὸ δύο τυχόντα ἐκ τῶν σημείων αὐτῶν καὶ τὸ μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος, τὸ ὁποῖον ὁρίζουν τὰ δύο ἄλλα σημεῖα τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουν καθένα ἀπὸ τὰ σημεῖα αὐτὰ μὲ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου, ποὺ

---

* Ἕνα πολύγωνον λέγεται ***στρεβλόν***, ὅταν αἱ κορυφαί του δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

σχηματίζουν τὰ τρία ἄλλα σημεῖα, τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Ε' Ὁμάς. **2023**. (2059). Ἐὰν δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ', τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου εἶναι τοιοῦτα, ὥστε αἱ ΒΓ, Β'Γ' νὰ τέμνωνται, ὅπως ἐπίσης καὶ αἱ εὐθεῖαι ΓΑ, Γ'Α' καὶ ΑΒ, Α'Β', νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. ὅτι αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον ἢ εἶναι παράλληλοι ἀνὰ δύο.

2ον. ὅτι τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῶν ΒΓ καὶ Β'Γ', τῶν ΓΑ καὶ Γ'Α' καὶ τῶν ΑΒ καὶ Α'Β' κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

2024. (2060). Ἐὰν δύο τρίγωνα, ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ', τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους μίαν πρὸς μίαν, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ', αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰς κορυφὰς τῶν παραλλήλων πλευρῶν τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον ἢ ἐξαιρετικῶς εἶναι παράλληλοι.

2025. (2061). Ἐπὶ τριῶν εὐθειῶν Ox, Oy, Oz τοῦ χώρου λαμβάνομεν τρία εὐθύγραμμα τμήματα ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' κείμενα ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν Ox, Oy, Oz. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ Α'Β', ΒΓ καὶ Β'Γ', ΓΑ καὶ Γ'Α' κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

2026. (2062). Δίδονται εἰς τὸν χῶρον δύο εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ ὑποθέτομεν, ὅτι δὲν δυνάμεθα νὰ τὰ προεκτείνωμεν καὶ ὅτι δὲν γνωρίζομεν, ἄν, προεκτεινόμενα, τέμνωνται. Πῶς δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν, ἐὰν τὰ τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ κεῖνται ἢ ὄχι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου;

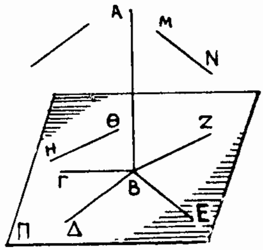
2027. (2063). Δίδονται ἕνα ἐπίπεδον Π, ἕνα σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τοῦ Π καὶ δύο παράλληλοι εὐθεῖαι $Ε_1$ καὶ $Ε_2$. Νὰ ἐξετασθῇ, ἐὰν αἱ τομαὶ τοῦ ἐπιπέδου Π καὶ τῶν ἐπιπέδων $ΟΕ_1$ καὶ $ΟΕ_2$ εἶναι παράλληλοι ἢ τέμνωνται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄.

ΕΥΘΕΙΑ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΟΝ ΚΑΘΕΤΑ

648. Εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον. *Λέγομεν, ὅτι μία εὐθεῖα, εἶναι* ***κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον*** *ὅταν εἶναι κάθετος ἐπὶ ὅλας τὰς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὸν πόδα της.*

Π.χ. ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΑΒ *(Σχ.447)* εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς εὐθείας ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ, τοῦ ἐπιπέδου Π, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π.



Σχ. 447.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ἐπίσης, *ὅτι καὶ τὸ ἐπίπεδον Π εἶναι* ***κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν*** *ΑΒ καὶ ἀκόμη, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ τὸ ἐπίπεδον Π εἶναι* ***κάθετα μεταξύ των.***

649. Παρατήρησις. *Ὅταν μία εὐθεῖα ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ ἕνα ἐπίπεδον Π, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ κάθε εὐθεῖαν ΗΘ τοῦ ἐπιπέδου Π ἢ ἐπὶ κάθε εὐθεῖαν ΜΝ παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π.*

Πράγματι· ἐὰν ἀπὸ τὸ Β φέρωμεν τὴν ΒΖ παράλληλον πρὸς τὴν ΗΘ, ἡ ΒΖ θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ Π (§ 630) καὶ ἡ γωνία ΑΒΖ θὰ εἶναι ἡ γωνία τῶν ἀσυμβάτων εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΗΘ. Ἀλλὰ ἡ ΑΒ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ Π, ἐξ ὑποθέσεως, θὰ εἶναι κάθετος, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς καθέτου εὐθείας ἐπὶ ἐπίπεδον, καὶ ἐπὶ τὴν ΒΖ. Ἡ γωνία λοιπὸν ΑΒΖ εἶναι ὀρθή, ἄρα καὶ ἡ ἴση της (§ 646) γωνία τῶν ἀσυμβάτων εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΗΘ εἶναι ὀρθή. Ἑπομένως ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΗΘ τοῦ ἐπιπέδου Π.

Ὥστε ἡ εὐθεῖα ΑΒ, ἡ κάθετος ἐπὶ τὸ Π, εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς ὅλας τὰς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ.

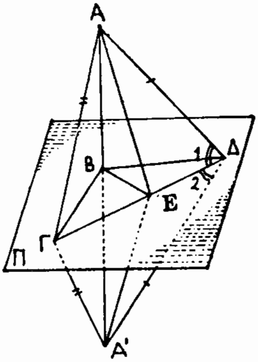
Ἐπίσης, ἐὰν ἀπὸ τὸ Β φέρωμεν τὴν ΒΕ παράλληλον πρὸς τὴν ΜΝ, ἡ ΒΕ θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π (§ 630) καὶ ἀποδεικνύομεν ὁμοίως, ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΜΝ.

650. Εὐθεῖα πλαγία πρὸς ἐπίπεδον. *Κάθε εὐθεῖα, ἡ ὁποία συναντᾷ ἕνα ἐπίπεδον καὶ δὲν εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτό, λέγεται* ***πλαγία πρὸς ἐπίπεδον.***

651. Θεώρημα. ***Κάθε εὐθεῖα, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ δύο τεμνομένας εὐθείας εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς των, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ὁρίζουν αἱ τεμνόμεναι αὗται εὐθεῖαι.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΒ *(Σχ. 448)* εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς εὐθείας ΒΓ καὶ ΒΔ εἰς τὸ σημεῖον Β τῆς τομῆς των.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π τῶν εὐθειῶν αὐτῶν.



Σχ. 448.

Ἀπόδειξις: Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τυχοῦσαν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου Π, διερχομένην διὰ τοῦ Β, ἔστω ἐπὶ τὴν ΒΕ.

Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΓΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΒΕ, ἔστω εἰς τὸ σημεῖον Ε. Προεκτείνομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμῆμα ΒΑ′=ΑΒ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΓ, ΑΕ, ΑΔ καὶ τὰς Α′Γ, Α′Ε, Α′Δ.

Ἐπειδὴ ἡ ΓΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΑ′ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς θὰ εἶναι ΓΑ=ΓΑ′. Ὁμοίως θὰ εἶναι καὶ ΔΑ=ΔΑ′. Τὰ τρίγωνα ΑΓΔ καὶ Α′ΓΔ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν καὶ τὰς τρεῖς πλευράς των ἴσας μίαν πρὸς μίαν· τὴν ΓΔ κοινήν, ΓΑ=ΓΑ′ καὶ ΔΑ=ΔΑ′, ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ γων.$Δ_1$=γων.$Δ_2$.

Τὰ τρίγωνα ΑΕΔ καὶ Α′ΕΔ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς πλευρὰς ΔΑ=ΔΑ′, ὡς ἐδείχθη, τὴν πλευρὰν ΔΕ κοινὴν καὶ γων.$Δ_1$=γων.$Δ_2$. Ἄρα θὰ εἶναι καὶ ΕΑ=ΕΑ′.

Ἐπειδὴ ΕΑ=ΕΑ′, τὸ τρίγωνον ΑΕΑ′ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως ἡ διάμεσός του ΕΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΑΑ′ εἰς τὸ μέσον της. Ὥστε ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΕ.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ *τυχοῦσαν* εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου Π, διερχομένην διὰ τοῦ Β. Ἄρα θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Κάθε εὐθεῖα....***

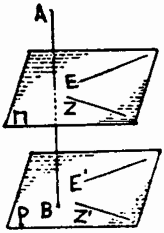
652. Σπουδαία παρατήρησις. Ἔχοντες ὑπ᾿ ὄψει τὸ ἀνωτέρω θεώρημα καὶ τὴν § 649 συνάγομεν, ὅτι:

Διὰ νὰ εἶναι μία εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ ἕνα ἐπίπεδον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ δύο εὐθείας, μὴ παραλλήλους,

αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ ἢ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸ ἐπίπεδον αὐτό.

653. Θεώρημα. ***Ἐὰν δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ** (Σχ. 449), **εἶναι παράλληλα, κάθε εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὸ ἕνα εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἄλλο.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν τὰ παράλληλα ἐπίπεδα Π καὶ Ρ καὶ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ Π.



Σχ. 449.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ Ρ.

Ὑπόθ.	Π//Ρ ΑΒ ⊥ Π
Συμπ.	ΑΒ ⊥ Ρ

Ἀπόδειξις: Ἡ εὐθεῖα ΑΒ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ Π, θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ δύο εὐθείας του, τὰς Ε καὶ Ζ. Εἰς τὸ ἐπίπεδον Ρ φέρομεν τὰς εὐθείας Ε′ καὶ Ζ′, παραλλήλους ἀντιστοίχως πρὸς τὰς Ε καὶ Ζ. Ἡ ΑΒ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὰς Ε καὶ Ζ, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὰς παραλλήλους των Ε′ καὶ Ζ′ καὶ ἑπομένως κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ρ, ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ Ε′ καὶ Ζ′.

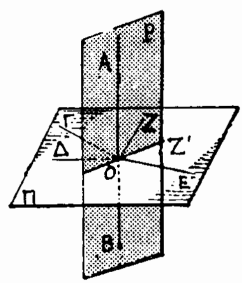
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν δύο ἐπίπεδα....***

654. Θεώρημα. ***Ὅλαι αἱ κάθετοι εὐθεῖαι ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν, εἰς δοθὲν σημεῖον αὐτῆς, κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω μία εὐθεῖα ΑΒ καὶ Ο ἕνα σημεῖον της. Ἀπὸ τὸ Ο φέρομεν τὰς καθέτους ΟΓ, ΟΔ, ΟΕ, ... ἐπὶ τὴν ΑΒ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ΟΓ, ΟΔ, ΟΕ, ... κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ.

Ἀπόδειξις: Αἱ εὐθεῖαι ΟΓ καὶ ΟΔ, ὡς τεμνόμεναι, ὁρίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου Π. Ἐπειδὴ ἡ ΑΟ εἶναι κάθετος, ἐξ ὑποθέσεως, ἐπὶ τὰς εὐθείας ΟΓ, ΟΔ εἰς τὴν τομήν των Ο, θὰ εἶναι (§ 651) κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδόν των Π.



Σχ. 450.

2ον Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι ὅλαι αἱ ἄλλαι εὐθεῖαι, ΟΕ, ΟΖ, ... κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π.

Ἀπόδειξις: Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι μία ἀπὸ αὐτὰς τὰς εὐθείας, ἔστω ἡ ΟΖ, δὲν κεῖται ἐπὶ τοῦ Π. Φέρομεν τὸ ἐπίπεδον Ρ τῶν εὐ-

θειῶν ΑΟ καὶ ΟΖ. Τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ τέμνει τὸ ἐπίπεδον Π *κατὰ μίαν* εὐθεῖαν, ἔστω κατὰ τὴν ΟΖ'. Ἐπειδὴ ἡ ΑΟ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π, ὡς ἐδείχθη, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΟΖ'· ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως καὶ ἡ ΟΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΟ εἰς τὸ σημεῖον Ο. Θὰ εἴχομεν λοιπὸν δύο καθέτους, τὰς ΟΖ καὶ ΟΖ' ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΟ εἰς ἕνα σημεῖον της Ο, καὶ κειμένας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου Ρ. Ἀλλὰ αὐτὸ εἶναι ἄτοπον. Εἰς τὸ ἄτοπον αὐτὸ ἐπέσαμεν, διότι ὑπεθέσαμεν, ὅτι ἡ ΟΖ δὲν κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π.

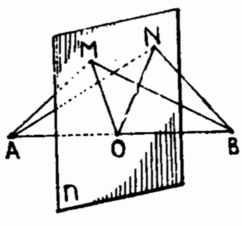
Ὥστε ἡ ΟΖ κεῖται ἐπὶ τοῦ Π.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ὅλαι αἱ κάθετοι εὐθεῖαι....***

655. Συμπέρασμα. Ἀπὸ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα συνάγομεν, ὅτι: ***Μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία στρέφεται περὶ ἕνα σημεῖον Ο καὶ μένει κάθετος ἐπὶ μίαν εὐθεῖαν ΟΑ, παράγει ἕνα ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν αὐτήν.***

656. Πρόβλημα. ***Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα.***

Ἔστωσαν Α καὶ Β τὰ δοθέντα σημεῖα καὶ Μ ἕνα τυχὸν σημεῖον τοῦ ζητουμένου τόπου. Ἐὰν φέρωμεν τὰς εὐθείας ΜΑ καὶ ΜΒ, θὰ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως, ΜΑ=ΜΒ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ. Ἐπειδὴ ΜΑ=ΜΒ, τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου ΜΟ εἰς τὸ μέσον Ο τῆς ΑΒ.



Σχ. 451.

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ τόπου κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς. Ἐπειδὴ αἱ κάθετοι ἐπὶ μίαν εὐθεῖαν εἰς ἕνα σημεῖον της ὁρίζουν (§ 655) ἕνα ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν, ἕπεται ὅτι τὸ Μ κεῖται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου Π, τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς.

Ἀντιστρόφως: Θὰ δείξωμεν, ὅτι κάθε σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου Π ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β.

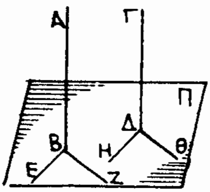
Ἔστω Ν ἕνα τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου Π. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΝΑ, ΝΒ καὶ ΝΟ. Ἐπειδὴ ἡ ΑΟ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΟΝ. Ὥστε ἡ ΟΝ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ εἰς τὸ μέσον της καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι ΝΑ=ΝΒ. Ὥστε τὸ τυχὸν σημεῖον Ν τοῦ ἐπιπέδου Π ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ ἐπομένως εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.

Ὁ ζητούμενος λοιπὸν τόπος εἶναι ἕνα ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, ἡ ὁποία συνδέει τὰ δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β καὶ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς.

Ἀσκήσεις: 2028, 2029.

657. Θεώρημα. ***Ἐὰν ἕνα ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ μίαν ἐκ δύο παραλλήλων εὐθειῶν, εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν ἄλλην εὐθεῖαν.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ *(Σχ.452)* καὶ ὅτι τὸ ἐπίπεδον Π εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ.



Σχ. 452.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ Π εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν ΓΔ.

Ὑπόθ.	ΑΒ//ΓΔ Π ⊥ ΑΒ
Συμπ.	Π ⊥ ΓΔ

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ ἡ ΑΒ συναντᾷ τὸ ἐπίπεδον Π καὶ ἡ παράλληλός της ΓΔ θὰ συναντᾷ τὸ Π, ἔστω εἰς τὸ σημεῖον Δ (§ 625). Ἀπὸ τὸν πόδα Β τῆς ΑΒ φέρομεν δύο τυχούσας εὐθείας ΒΕ, ΒΖ τοῦ ἐπιπέδου Π καὶ ἀπὸ τὸν πόδα Δ τῆς ΓΔ φέρομεν τὰς ΔΗ καὶ ΔΘ παραλλήλους ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ΒΕ καὶ ΒΖ, αἱ ὁποῖαι θὰ κεῖνται ἐπὶ τοῦ Π.

Ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ Π, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὰς εὐθείας ΒΕ καὶ ΒΖ· αἱ γωνίαι λοιπὸν ΑΒΕ καὶ ΑΒΖ εἶναι ὀρθαί· ἄρα καὶ αἱ ἴσαι πρὸς αὐτὰς (§ 645) γωνίαι ΓΔΗ καὶ ΓΔΘ εἶναι ὀρθαί. Ἡ εὐθεῖα λοιπὸν ΓΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς εὐθείας ΔΗ καὶ ΔΘ καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π αὐτῶν. Τὸ ἐπίπεδον λοιπὸν Π εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν ΓΔ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν ἕνα ἐπίπεδον. . . .***

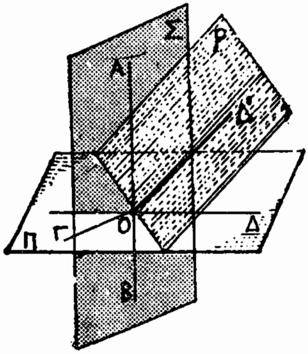
658. Πρόβλημα. ***Ἀπὸ ἕνα τυχὸν σημεῖον Ο, νὰ ἀχθῇ ἕνα ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ.***

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

Ι. *Τὸ σημεῖον Ο κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ.* Ἀπὸ τὸ Ο φέρομεν τὰς καθέτους ΟΓ καὶ ΟΔ *(Σχ. 453)* ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ. Ἐπειδὴ ἡ ΑΟ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς ΟΓ καὶ ΟΔ ἐκ κατασκευῆς, εἰς τὸ σημεῖον Ο τῆς τομῆς των, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδόν των Π. Ὥστε ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π. Ἄρα καὶ τὸ ἐπίπεδον Π εἶναι κάθετον ἐπί τὴν ΑΒ, εἰς τὸ σημεῖον Ο.

Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο δὲν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἄλλο ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ.

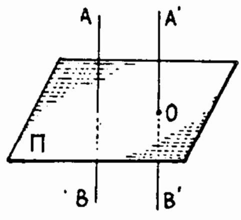
Πράγματι· ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ὑπάρχει καὶ ἕνα ἄλλο ἐπίπεδον Ρ, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο καὶ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ. Ἂν φέρωμεν τὸ ἐπίπεδον Σ, τὸ ὁποῖον ὁρίζουν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΟΔ, αὐτὸ θὰ τέμνῃ τὸ ἐπίπεδον Π κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΟΔ καὶ τὸ ἐπίπεδον Ρ κατὰ μίαν εὐθεῖαν, ἔστω κατὰ τὴν ΟΔ'. Ἐπειδὴ ἡ ΑΟ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ρ, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΟΔ'. Ἀλλὰ ἐξ ὑποθέσεως καὶ ἡ ΟΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΟ. Παρατηροῦμεν, λοιπόν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΟΔ καὶ ΟΔ' κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου Σ καὶ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΟ, εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον της Ο. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον· ἄρα δὲν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν καὶ ἄλλο ἐπίπεδον, ἐκτὸς τοῦ Π, κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ.



Σχ. 453.

ΙΙ. *Τὸ σημεῖον Ο κεῖται ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΑΒ (Σχ. 454).* Ἀπὸ τὸ δοθὲν σημεῖον Ο φέρομεν μίαν εὐθεῖαν Α'ΟΒ' παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ καὶ ἕνα ἐπίπεδον Π κάθετον ἐπὶ τὴν Α'ΟΒ' εἰς τὸ Ο (Ι περίπτωσις). Τὸ ἐπίπεδον Π, ὡς κάθετον ἐπὶ τὴν Α'ΟΒ' ἐκ κατασκευῆς, εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν της ΑΒ (§ 657).

Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἀπὸ τὸ Ο δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἕνα μόνον ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ



Σχ. 454.

Πράγματι, κάθε ἄλλο ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ἀγόμενον ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο θὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν Α'ΟΒ' καὶ ἑπομένως θὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ Π.

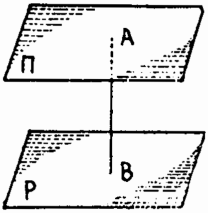
659. Θεώρημα. ***Δύο ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶναι παράλληλα.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω, ὅτι τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ *(Σχ. 455)* εἶναι κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΒ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ ἐπίπεδα αὐτὰ εἶναι παράλληλα.

Ἀπόδειξις: Τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ δὲν δύνανται νὰ τέμνωνται διότι, ἐὰν ἐτέμνοντο, θὰ εἴχομεν ἀπὸ ἕνα σημεῖον τῆς τομῆς των δύο ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΒ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον (§ 658, II). Ὥστε τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ εἶναι παράλληλα.

Ὑπόθ.	Π ⊥ ΑΒ Ρ ⊥ ΑΒ
Συμπ.	Π//Ρ

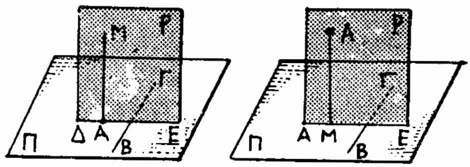


Σχ. 455.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Δύο ἐπίπεδα κάθετα. . . .***

660. Πρόβλημα. ***Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α νὰ ἀχθῇ μία εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ ἕνα ἐπίπεδον Π.***

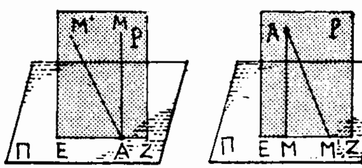
Ἔστω, ὅτι τὸ σημεῖον Α κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π *(Σχ. 456 α)* ἢ ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου Π *(Σχ. 456 β)*. Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π φέρομεν μίαν τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΒΓ καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον Α ἕνα ἐπίπεδον Ρ κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΓ (§ 658 II), τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ ἐπίπεδον Π κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΔΕ. Ἔπειτα, εἰς τὸ ἐπίπεδον Ρ καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον Α, φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΜ κάθετον ἐπὶ τὴν τομὴν ΔΕ τῶν δύο ἐπιπέδων Π καὶ Ρ.



α β
Σχ. 456.

Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΜ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π.

Ἀπόδειξις: Ἡ εὐθεῖα ΒΓ ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ρ, ἐκ κατασκευῆς, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΜ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ. Ὥστε ἡ ΑΜ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ· ἀλλὰ ἡ ΑΜ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΔΕ ἐκ κατασκευῆς. Ἐπομένως ἡ ΑΜ, ὡς κάθετος ἐπὶ δύο εὐθείας ΒΓ καὶ ΔΕ, μὴ παραλλήλους, τοῦ ἐπιπέδου Π εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ (§ 652).



Σχ. 457.

Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι δὲν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἄλλην κάθετον ΑΜ′ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π, ἐκτὸς τῆς ΑΜ.

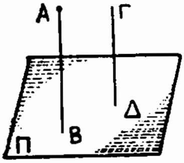
Ἀπόδειξις: Τὸ ἐπίπεδον Ρ τῶν εὐθειῶν ΑΜ καὶ ΑΜ′ *(Σχ. 457)*, τέμνει τὸ ἐπίπεδον Π κατὰ μίαν εὐθεῖαν, ἔστω τὴν ΕΖ. Ἐὰν αἱ ΑΜ καὶ ΑΜ′ ἦσαν

κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π, θὰ ἦσαν κάθετοι καὶ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν του ΕΖ. Ἀλλὰ εἰς τὸ ἐπίπεδον Ρ μίαν μόνον κάθετον δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἀπὸ τὸ σημεῖον Α ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΕΖ.

Ὥστε ἡ ΑΜ′ δὲν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΖ καὶ ἑπομένως δὲν θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π.

661. Θεώρημα. ***Δύο εὐθεῖαι κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον εἶναι παράλληλοι.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ *(Σχ. 458)*, αἱ ὁποῖαι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον Π.



Σχ. 458.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι.

Ὑπόθ.	ΑΒ ⊥ Π ΓΔ ⊥ Π
Συμπ.	ΑΒ//ΓΔ

Ἀπόδειξις: Ἐὰν ἀπὸ ἕνα σημεῖον Α τῆς εὐθείας ΑΒ φέρωμεν μίαν παράλληλον πρὸς τὴν ΓΔ, αὐτὴ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π (§ 657), διότι καὶ ἡ παράλληλός της ΓΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ Π.

Ἡ παράλληλος ὅμως αὐτὴ συμπίπτει μὲ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, διότι ἀπὸ τὸ σημεῖον Α δὲν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν παρὰ μίαν μόνον καθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π (§ 660). Ὥστε αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι.

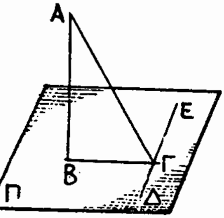
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Δύο εὐθεῖαι κάθετοι:...***

Ἀσκήσεις: 2030, 2031, 2032.

Θεωρήματα τῶν τριῶν καθέτων

662. Θεώρημα I. ***Ἐὰν ἀπὸ τὸν πόδα Β μιᾶς εὐθείας ΑΒ καθέτου ἐπὶ ἐπίπεδον Π, φέρωμεν μίαν κάθετον ΒΓ ἐπὶ μίαν τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΔΕ τοῦ ἐπιπέδου Π, ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὸ σημεῖον Γ μὲ τυχὸν σημεῖον τῆς εὐθείας ΑΒ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ.***

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ.



Σχ. 459.

Ὑπόθ.	ΑΒ ⊥ Π ΔΕ κεῖται ἐπὶ Π ΒΓ ⊥ ΔΕ
Συμπ.	ΑΓ ⊥ ΔΕ

Ἀπόδειξις: Ἡ εὐθεῖα ΔΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἐξ ὑποθέσεως καὶ ἐπὶ τὴν ΑΒ, διότι ἡ ΑΒ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π εἶναι κάθετος (§ 649) καὶ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΔΕ τοῦ ἐπιπέδου Π.

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΔΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ δύο εὐθείας ΒΓ καὶ ΑΒ, μὴ παραλλήλους, εἶναι κάθετος καί ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν ΑΒΓ (§ 652). Ἡ ΔΕ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ κάθε εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ καὶ ἑπομένως καὶ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΓΑ, ἡ ὁποία συνδέει τὸ σημεῖον Γ μὲ τυχὸν σημεῖον τῆς ΑΒ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν ἀπὸ τὸν πόδα....***

663. Θεώρημα ΙΙ. (*Ἀντίστροφον*). ***Ἐὰν ἀπὸ ἕνα σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς ἐπιπέδου Π φέρωμεν τὴν κάθετον ΑΒ πρὸς τὸ ἐπίπεδον καὶ τὴν κάθετον ΑΓ πρὸς μίαν εὐθεῖαν ΔΕ τοῦ ἐπιπέδου Π, ἡ εὐθεῖα ΒΓ, ἡ ὁποία συνδέει τοὺς πόδας τῶν δύο αὐτῶν καθέτων, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ.***

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ΒΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΔΕ.

Ὑπόθ.	Α κεῖται ἐκτὸς ἐπιπ. Π ΑΒ ⊥ Π ΔΕ εὐθεῖα τοῦ Π ΑΓ ⊥ ΔΕ
Συμπ.	ΒΓ ⊥ ΔΕ

Ὥστε αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΔΕ εἶναι κάθετοι μεταξύ των (§ 649). Ἐκτὸς αὐτοῦ ἡ ΔΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ ἐξ ὑποθέσεως· ἄρα ἡ ΔΕ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν ΑΒΓ καὶ ἑπομένως καὶ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΓ, ἡ ὁποία κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν ἀπὸ ἕνα σημεῖον....***

Ἀσκήσεις: 2035, 2036, 2037, 2038.

Κάθετος καὶ πλάγιαι πρὸς ἐπίπεδον.

664. Θεώρημα. ***Ἐὰν ἀπὸ ἕνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς ἐπιπέδου, φέρωμεν τὴν κάθετον πρὸς τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ καὶ διαφόρους πλαγίας πρὸς τὸ ἐπίπεδον αὐτό:***

1ον. Ἡ κάθετος εἶναι μικροτέρα ἀπὸ κάθε πλαγίαν.

2ον. Δύο πλάγιαι, τῶν ὁποίων οἱ πόδες ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου εἶναι ἴσαι.

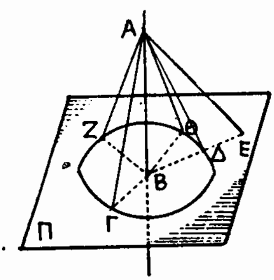
3ον. Δύο πλάγιαι, τῶν ὁποίων οἱ πόδες ἀπέχουν ἄνισον ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου, εἶναι ἄνισοι καὶ μεγαλυτέρα εἶναι ἐκείνη, τῆς ὁποίας ὁ ποὺς ἀπέχει περισσότερον ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου.

Ἔστω ἕνα ἐπίπεδον Π καὶ ἕνα σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τοῦ Π.

1η Ὑπόθεσις: Ἀπὸ τὸ Α φέρομεν τὴν κάθετον ΑΒ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π καὶ τὴν πλαγίαν ΑΓ πρὸς αὐτό.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΑΒ<ΑΓ.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν ΒΓ εἰς τὸ ἐπίπεδον Π, ἡ ΑΒ ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ Π, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΓ τοῦ ἐπιπέδου. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἑπομένως ἡ κάθετος πλευρά του ΑΒ εἶναι μικροτέρα τῆς ὑποτεινούσης του ΑΓ.



Σ.χ 460.

Ὥστε εἶναι ΑΒ<ΑΓ.

Ὑπόθεσις 2α: Ἀπὸ τὸ σημεῖον Α φέρομεν τὴν κάθετον ΑΒ καὶ τὰς πλαγίας ΑΓ καὶ ΑΖ καὶ ἔστω ὅτι εἶναι ΒΓ=ΒΖ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΑΓ=ΑΖ.

Ἀπόδειξις: Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒΖ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς καθέτους πλευράς των ἴσας, τὴν ΑΒ κοινὴν καὶ ΒΓ=ΒΖ, ἐξ ὑποθέσεως· ἄρα θὰ εἶναι καὶ ΑΓ=ΑΖ

Ὑπόθεσις 3η: Ἀπὸ τὸ σημεῖον Α φέρομεν τὴν κάθετον ΑΒ καὶ τὰς πλάγιας ΑΓ καὶ ΑΕ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π. Ἔστω ὅτι εἶναι ΒΕ>ΒΓ

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΑΕ>ΑΓ.

Ἀπόδειξις: Ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΕ λαμβάνομεν ἕνα τμῆμα ΒΔ=ΒΓ καὶ φέρομεν τὴν ΑΔ· αἱ πλάγιαι ΑΔ καὶ ΑΓ εἶναι ἴσαι, διότι ΒΔ=ΒΓ. Εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒΕ, ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΕ καὶ αἱ ΑΔ καὶ ΑΕ πλάγιαι πρὸς αὐτήν. Ἐπειδὴ ΒΕ>ΒΔ θὰ εἶναι ΑΕ>ΑΔ (§ 99). Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἀνισότητα αὐτὴν τὸ ΑΔ μὲ τὸν ἴσον του ΑΓ καὶ ἔχομεν ΑΕ>ΑΓ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν ἀπὸ ἕνα σημεῖον. . . .***

665. Θεώρημα. *(Ἀντίστροφον). 1ον.* ***Ἐὰν μία εὐθεῖα ΑΒ εἶναι ἡ μικροτέρα ἀπὸ ὅλας τὰς εὐθείας, τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἀπὸ ἕνα σημεῖον Α τοῦ χώρου εἰς ἕνα ἐπίπεδον Π, ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π.***

2ον. ***Ἐὰν δύο πλάγιαι πρὸς ἐπίπεδον, ἀγόμεναι ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου, εἶναι ἴσαι, οἱ πόδες των ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου.***

3ον ***Ἐὰν δύο πλάγιαι πρὸς ἐπίπεδον, ἀγόμεναι ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου, εἶναι ἄνισοι, οἱ πόδες των ἀπέχουν ἄνισον ἀπὸ τὸν***

πόδα τῆς καθέτου καὶ περισσότερον ἀπέχει ὁ πούς τῆς μεγαλυτέρας πλαγίας.

Αἱ ἀντίστροφοι αὐταὶ προτάσεις ἀποδεικνύονται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὅπως ἀπεδείχθησαν αἱ ἀνάλογοι ἀντίστροφοι προτάσεις εἰς τὴν Ἐπίπεδον Γεωμετρίαν (§ 100).

666. Πόρισμα. ***Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν ποδῶν ὅλων τῶν ἴσων πλαγίων, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ ἕνα σημεῖον Α πρὸς ἕνα ἐπίπεδον Π, εἶναι μία περιφέρεια κύκλου, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τὸν πόδα τῆς καθέτου, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Α ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π.***

Ἀπόδειξις: Οἱ πόδες τῶν ἴσων πλαγίων ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου (§ 664. 2ον) καὶ ἑπομένως κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τὸν πόδα τῆς καθέτου *(Σχ. 460).*

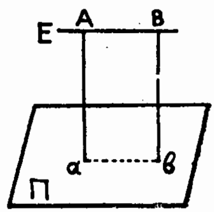
667. Ὁρισμός. ***Ἄξων ἑνὸς κύκλου,*** *λέγεται ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου καὶ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδόν αὐτοῦ.*

668. Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ ἐπίπεδον. ***Ἀπόστασιν σημείου ἀπὸ ἐπίπεδον*** *ὀνομάζομεν τὸ μῆκος τῆς καθέτου, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.*

Π.χ. ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου Α *(Σχ. 460)* ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον Π εἶναι τὸ μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

669. Θεώρημα. ***Ἐὰν μία εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον, ὅλα τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας αὐτῆς ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω Ε μία εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π *(Σχ. 461).* Λαμβάνομεν δύο τυχόντα σημεῖα Α καὶ Β τῆς εὐθείας Ε καὶ φέρομεν τὰς καθέτους Αα καὶ Ββ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π.



Σχ. 461.

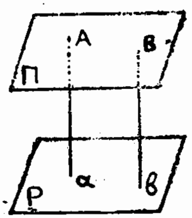
Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι Αα=Ββ.

Ἀπόδειξις: Αἱ εὐθεῖαι Αα καὶ Ββ εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον Π (§ 661). Αἱ Αα καὶ Ββ, ὡς παράλληλοι, ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ ἐπίπεδον Π κατὰ εὐθεῖαν αβ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ (§ 629). Αἱ εὐθεῖαι Αα καὶ Ββ εἶναι λοιπὸν ἴσαι, ὡς περιεχόμεναι μεταξὺ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν ΑΒ καὶ αβ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν μία εὐθεῖα....***

670. Ἀπόστασις εὐθείας ἀπὸ ἕνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς αὐτήν. Ὅταν μία εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς ἕνα ἐπίπεδον, ὀνομάζομεν ***ἀπόστασιν** αὐτῆς τῆς εὐθείας ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον*, *τὴν ἀπόστασιν τυχόντος σημείου τῆς εὐθείας αὐτῆς ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον.*

671. Θεώρημα. ***Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα, ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ ἑνὸς ἐπιπέδου ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ ἄλλο ἐπίπεδον.***



Σχ. 462.

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν δύο παράλληλα ἐπίπεδα Π καὶ Ρ *(Σχ. 462)* καὶ Αα, Ββ αἱ ἀποστάσεις δύο τυχόντων σημείων Α καὶ Β τοῦ ἐπιπέδου Π ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον Ρ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι Αα=Ββ.

Ἀπόδειξις: Αἱ εὐθεῖαι Αα καὶ Ββ εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον Π. Εἶναι δὲ καὶ ἴσαι, ὡς παράλληλοι περιεχόμεναι μεταξὺ παραλλήλων ἐπιπέδων (§ 638).

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν δύο ἐπίπεδα....***

672. Ἀπόστασις παραλλήλων ἐπιπέδων. ***Ἀπόστασιν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων** ὀνομάζομεν τὴν ἀπόστασιν τυχόντος σημείου τοῦ ἑνὸς ἐπιπέδου ἀπὸ τὸ ἄλλο ἐπίπεδον.*

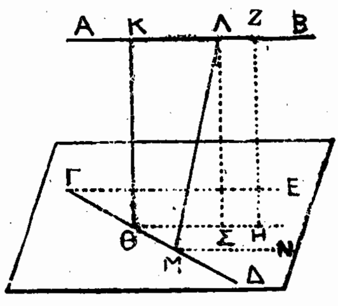
Ἀσκήσεις: 2039, 2040, 2041, 2042, 2043.

Κοινὴ κάθετος δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν

673. Θεώρημα. ***Ἐὰν δύο εὐθεῖαι εἶναι ἀσύμβατοι:***

1ον. Ὑπάρχει μία εὐθεῖα καὶ μία μόνη, ἡ ὁποία συναντᾷ τὰς δύο αὐτὰς εὐθείας καὶ εἶναι κάθετος ἐπὶ αὐτάς.

2ον. Αὐτὴ ἡ κοινὴ κάθετος εἶναι ἡ μικροτέρα ἀπόστασις τῶν δύο αὐτῶν εὐθειῶν.



Σχ. 463.

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν αἱ δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ *(Σχ. 463).*

Συμπέρασμα 1ον: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ὑπάρχει κοινὴ κάθετος τῶν εὐθειῶν αὐτῶν.

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Γ τῆς ΓΔ φέρομεν μίαν εὐθεῖαν ΓΕ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ.

Αἱ ΓΔ καὶ ΓΕ ὁρίζουν ἕνα ἐπί-

πεδον Π, τὸ ὁποῖον εἶναι παράλληλονπρὸς τὴν ΑΒ, διότι ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΕ, ἐκ κατασκευῆς. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Ζ τῆς ΑΒ φέρομεν τὴν κάθετον ΖΗ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π καὶ ἀπὸ τὸ Η φέρομεν τὴν παράλληλον ΗΘ πρὸς τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία θὰ κεῖται ὁλόκληρος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π (§ 630) καὶ συνεπῶς θὰ τέμνῃ τὴν ΓΔ εἰς ἕνα σημεῖον Θ.

Αἱ ΑΒ καὶ ΘΗ, ὡς παράλληλοι, ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδον ΑΖΗΘ ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖται καὶ ἡ εὐθεῖα ΖΗ, ὡς συνδέουσα δύο σημεῖα του Ζ καὶ Η. Τέλος ἀπὸ τὸ σημεῖον Θ φέρομεν τὴν ΘΚ παράλληλον πρὸς τὴν ΗΖ, ἡ ὁποία θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΖΗΘ καὶ συνεπῶς θὰ συναντᾷ τὴν ΑΒ εἰς ἕνα ὡρισμένον σημεῖον, ἔστω τὸ Κ.

Λέγομεν, ὅτι ἡ ΚΘ εἶναι ἡ ζητουμένη κοινὴ κάθετος τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ.

Πράγματι· ἡ ΖΗ εἶναι, ἐκ κατασκευῆς, κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π· ἄρα καὶ ἡ παράλληλός της ΚΘ, θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ Π (§ 657). Ἡ ΚΘ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π, θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς εὐθείας ΘΔ καὶ ΘΗ. Ἐπειδὴ ἡ ΚΘ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΘΗ θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν της ΑΒ. Ὥστε ἡ ΚΘ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς ΑΒ καὶ ΓΔ.

Συμπέρασμα 2ον: Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι δὲν ὑπάρχει ἄλλη κοινὴ κάθετος τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ.

Ἀπόδειξις: Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ὑπάρχει καὶ ἄλλη μία κοινὴ κάθετος τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ ἔστω, ὅτι αὕτη εἶναι ἡ ΛΜ· ἀπὸ τὸ Μ φέρομεν τὴν ΜΝ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π (§ 630). Ἐπειδὴ ἡ ΛΜ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν της ΜΝ· ἀλλὰ ἡ ΛΜ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΔΓ, ἐξ ὑποθέσεως· ἄρα ἡ ΛΜ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὰς ΓΔ καὶ ΜΝ, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π καὶ ἑπομένως παράλληλος πρὸς τὴν ΚΘ. Αἱ ΚΘ καὶ ΛΜ, ὡς παράλληλοι θὰ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ΚΘΜΛ. Ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ περιέχει τὰ σημεῖα Κ, Λ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ τὰ Θ, Μ τῆς εὐθείας ΓΔ, θὰ περιέχῃ καὶ τὰς εὐθείας αὐτὰς ΑΒ καὶ ΓΔ· τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον, διότι ἐξ ὑποθέσεως αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι ἀσύμβατοι. Ὥστε ἡ ΛΜ δὲν δύναται νὰ εἶναι κοινὴ κάθετος τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι δὲν ὑπάρχει ἄλλη κοινὴ κάθετος τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ ἐκτὸς τῆς ΚΘ.

Συμπέρασμα 3ον: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ κοινὴ κάθετος ΚΘ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι μικροτέρα ἀπὸ κάθε ἄλλην εὐθεῖαν, ἔστω

τὴν ΛΜ, ἡ ὁποία συνδέει ἕνα τυχὸν σημεῖον Λ τῆς ΑΒ μὲ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς ΓΔ· δηλ. θὰ δείξωμεν, ὅτι ΚΘ<ΛΜ.

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὸ Λ φέρομεν τὴν ΛΣ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π· ἡ ΛΣ θὰ εἶναι διάφορος τῆς ΛΜ· διότι ἡ ΛΜ δὲν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π, ὅπως ἐδείχθη ἀνωτέρω. Ἐπειδὴ ἡ ΛΣ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ Π καὶ ἡ ΛΜ πλαγία πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π, θὰ εἶναι (§ 664)

ΛΣ<ΛΜ (1)

Ἀλλὰ ἐπειδὴ ΛΣ=ΚΘ, ὡς ἀποστάσεις τῆς εὐθείας ΑΒ ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον Π, ἡ ἰσότης (1) γράφεται ΚΘ<ΛΜ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν δύο εὐθεῖαι εἶναι....***

674. Ἀπόστασις δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν. *Τὸ μῆκος τῆς κοινῆς καθέτου δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν ὀνομάζεται* ***ἀπόστασις δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν***

Οὕτω ἡ ἀπόστασις τῶν ἀσυμβάτων εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ *(Σχ. 463)* εἶναι τὸ μῆκος τῆς κοινῆς καθέτου ΚΘ αὐτῶν. Ἐπειδὴ ΚΘ=ΖΗ συνάγομεν, ὅτι διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἀπόστασιν δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὴν ἀπόστασιν τυχόντος σημείου Ζ τῆς ΑΒ ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον Π, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὴν ἄλλην εὐθεῖαν ΓΔ καὶ εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν πρώτην εὐθεῖαν ΑΒ.

Ἀσκήσεις

2028. (2064). Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων ἑνὸς ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα, ἀπέχουν ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου.

2029. (2065). Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β καὶ μία εὐθεῖα Ε, ἡ ὁποία κεῖται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖνται τὰ Α καὶ Β. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς Ε ἕνα σημεῖον Γ τοιοῦτον, ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ νὰ εἶναι ἰσοσκελές.

2030. (2066). Ἂν εὐθεῖα εἶναι πλαγία πρὸς ἐπίπεδον, εἶναι κάθετος ἐπὶ μίαν καὶ μόνον μίαν, εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου.

2031. (2067). Ὅταν μία εὐθεῖα καὶ ἕνα ἐπίπεδον εἶναι κάθετα μεταξύ των, κάθε εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν, εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον ἢ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου.

2032. (2068). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Ο νὰ ἀχθῇ μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ δύο δοθείσας E_1 καὶ E_2.

2033. (2069). Νὰ δειχθῇ, ὅτι εὐθεῖα καὶ ἐπίπεδον, κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, εἶναι παράλληλα.

2034. (2070). Νὰ δειχθῇ, ὅτι εὐθεῖα καὶ ἐπίπεδον, κάθετα ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, εἶναι παράλληλα.

2035. (2071) Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν κάθετον ΑΕ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου.

1ον. Ἐὰν Δ εἶναι τὸ μέσον τῆς βάσεως ΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΕΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΒΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΕΑΔ.

2036. (2072). Ἕνα ἐπίπεδον Π στρέφεται περὶ μίαν εὐθεῖαν xy. Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Ο φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὸ κινητὸν ἐπίπεδον εἰς τὰς διαφόρους θέσεις του. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν καθέτων αὐτῶν.

2037. (2073). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Ο ἑνὸς ἐπιπέδου Π, νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου Π, ἡ ὁποία νὰ ἀπέχῃ ἀπόστασιν λ ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ.

2038. (2074). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν ποδῶν τῶν καθέτων, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α ἐπὶ ὅλας τὰς εὐθείας ἑνὸς ἐπιπέδου Π, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον του Γ

2039. (2075). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς κορυφὰς δοθέντος τριγώνου.

2040. (2076). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς πλευρὰς ἑνὸς τριγώνου.

2041. (2077). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι μια εὐθεῖα ΟΔ, ἡ ὁποία σχηματίζει ἴσας γωνίας μὲ τρεῖς ἡμιευθείας Οx, Oy, Oz ἑνὸς ἐπιπέδου, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτό.

2042. (2078). Νὰ εὑρεθῇ ἕνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον νὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τέσσαρα δοθέντα σημεῖα.

2043. (2079). Ἕνα σημεῖον Α ἀπέχει 8 ἑκ. ἀπὸ ἐπίπεδον Π. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ ἐπιπέδου, διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι ΑΜ=10 ἑκ.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν

Α' Ὁμάς. **2044.** (2080). Νὰ ἀχθῇ μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α, νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον Π καὶ νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν Ε.

2045. (2081). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Ο ἑνὸς ἐπιπέδου Π νὰ ἀχθῇ μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία νὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ Π καὶ νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ μίαν εὐθεῖαν Ε τοῦ χώρου.

2046. (2082). Ἐπὶ δοθέντος ἐπιπέδου Π, νὰ ἀχθῇ μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία νὰ ἀπέχῃ ἀποστάσεις λ καὶ λ' ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου Π.

2047. (2083). Νὰ ἀχθοῦν τέσσαρα ἐπίπεδα Π, Ρ, Σ, Τ, παράλληλα, τὰ ὁποῖα νὰ ἰσαπέχουν καὶ νὰ διέρχωνται ἀντιστοίχως ἀπὸ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ.

2048. (2084). Δίδονται ἕνα σημεῖον Α καὶ μία εὐθεῖα Ε. Νὰ ἀχθῇ ἀπὸ τὸ Α ἕνα ἐπίπεδον Ρ καὶ ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν Ε ἕνα ἐπίπεδον Σ οὕτως, ὥστε τὰ δύο αὐτὰ ἐπίπεδα νὰ εἶναι παράλληλα καὶ νὰ ἀπέχουν μεταξύ των ἀπόστασιν λ.

2049. (2085). Δίδονται ἕνα σημεῖον Ο καὶ δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ΟΑ, τὸ ὁποῖον νὰ περιέχεται μεταξὺ τοῦ Ο καὶ τοῦ Π, νὰ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ Ρ καὶ νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος λ.

2050. (2086). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἕνα σημεῖον Ο ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου. Νὰ ἀχθῇ ἕνα ἐπίπεδον Π, τὸ ὁποῖον νὰ διέρχεται ἀπὸ τὸ Ο καὶ νὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τὰς κορυφὰς Α, Β, Γ τοῦ τριγώνου.

2051. (2087). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Ο νὰ ἀχθῇ ἕνα ἐπίπεδον Π, τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν Ε καὶ νὰ ἀπέχῃ ἀπόστασιν λ ἀπὸ τὴν Ε.

Β' Ὁμάς. 2052. (2888). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων ἑνὸς ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ δοθὲν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου.

2053. (2089). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν μέσων τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων, τῶν περιεχομένων μεταξὺ δύο οἱωνδήποτε εὐθειῶν Χ καὶ Ψ τοῦ χώρου.

2054. (2090). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν ποδῶν τῶν καθέτων τῶν ἀγομένων ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α ἐπὶ ὅλας τὰς εὐθείας ἑνὸς ἐπιπέδου Π, αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου.

2055 (2091). Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ δύο παραλλήλους εὐθείας.

2056. (2092). Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου τὰ ὁποῖα ἀπέχουν δοθεῖσαν ἀπόστασιν λ ἀπὸ δοθὲν ἐπίπεδον Π.

2057. (2893). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν ποδῶν τῶν καθέτων, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α ἐπὶ ὅλα τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα διέρχονται ἀπὸ δοθεῖσαν εὐθεῖαν Χ.

2058. (2094). Δίδονται δύο εὐθεῖαι παράλληλοι Ε καὶ Ε'. Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων Μ, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἀπόστασιν λ ἀπὸ τὴν Ε καὶ ἀπόστασιν λ' ἀπὸ τὴν Ε'.

2059. (2095). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων ἑνὸς ἐπιπέδου Π ἐκ τῶν ὁποίων βλέπομεν ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ, τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π.

2060. (2096). Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι παράλληλοι Χ, Ψ, Ζ, αἱ ὁποῖαι δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὰ τρία ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα ὁρίζουν αἱ εὐθεῖαι αὐταὶ ἀνὰ δύο.

2061. (2097). Δίδεται μία ὀρθὴ γωνία ΑΟΒ, ἡ ὁποία ἔχει τὴν πλευρὰν ΟΑ, καὶ μόνον αὐτὴν παράλληλον πρὸς ἕνα δοθὲν ἐπίπεδον Π. Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων Σ τοιούτων, ὥστε τὰ ἐπίπεδα ΣΟΑ καὶ ΣΟΒ τέμνουν τὸ ἐπίπεδον Π κατὰ δύο ὀρθογωνίους εὐθείας.

2062. (2098). Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ. Μία τρίτη εὐθεῖα ΜΝ κινεῖται κατὰ μῆκος τῆς ΑΒ καὶ παραλλήλως πρὸς τὴν ΓΔ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος, τὸν ὁποῖον γράφει ἡ ΜΝ.

2063. (2099). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο παράλληλα ἐπίπεδα εἶναι ἴσος μὲ μ : ν.

2064. (2100). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα χωρίζουν κατὰ δοθέντα λόγον μ : ν, τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, τὰ περιεχόμενα μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων.

2065. (2101). Δίδονται δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ καὶ μία εὐθεῖα Χ. Ἀπὸ ἕνα μεταβλητὸν σημεῖον Μ τῆς Χ φέρομεν ἐπίπεδα παράλληλα ἀντιστοίχως πρὸς τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῆς τομῆς των, ὅταν τὸ Μ γράφῃ τὴν Χ.

2066. (2102). Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ χώρου, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β νὰ εἶναι ἴση μὲ k^2.

2067. (2103). Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων ἑνὸς ἐπιπέδου Π, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα

Α καὶ Β, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐκτὸς τοῦ Π, νὰ εἶναι ἴσον μὲ k^2.

2068. (2104). Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων ἑνὸς ἐπιπέδου Π, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐκτὸς τοῦ Π, νὰ εἶναι ἴση μὲ k^2.

2069. (2105). Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων Μ ἑνὸς ἐπιπέδου Π, τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ Π, εἶναι ἴσος μὲ δοθέντα λόγον μ : ν.

2070. (2106). Δίδεται ἕνα ἐπίπεδον Π, μία εὐθεῖα ΟΧ, ἡ ὁποία τέμνει τὸ Π εἰς τὸ Ο, μία μεταβλητὴ εὐθεῖα ΟΜ, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ Ο καὶ κεῖται ἐπὶ τοῦ Π, καὶ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΟΜ′ οὕτως, ὥστε ἡ ΟΧ νὰ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΜΟΜ′. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῆς εὐθείας ΟΜ′.

2071. (2107). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἑνὸς στρεβλοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ κέντρου τοῦ παραλληλογράμμου αὐτοῦ, ὅταν τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ μένῃ ὡρισμένον, ἡ δὲ κορυφὴ Δ γράφῃ δοθεῖσαν εὐθεῖαν Χ.

2072. (2108). Εἰς ἕνα ἐπίπεδον Π θεωροῦμεν ἕνα κύκλον Ο διαμέτρου ΑΒ. Ἔστω Μ ἕνα τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας του. Φέρομεν τὴν ΑΣ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π καὶ ἔπειτα τὰς εὐθείας ΣΒ, ΣΜ. Φέρομεν ἐπίσης τὴν ΑΓ κάθετον ἐπὶ τὴν ΣΒ καὶ τὴν ΑΝ κάθετον ἐπὶ τὴν ΣΜ. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. ὅτι γων.ΣΜΒ=90°·

2ον. ὅτι $\overline{ΣΑ}^2$=ΣΝ.ΣΜ=ΣΓ.ΣΒ.

3ον. ὅτι τὰ τρίγωνα ΣΓΝ καὶ ΣΜΒ εἶναι ὅμοια.

4ον. ὅτι γων.ΣΓΝ=90°.

5ον. ὅτι ἡ ΣΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΝΓΑ.

6ον. ὅτι γων.ΓΝΑ=90°.

7ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου Ν, ἐὰν τὸ σημεῖον Μ γράφῃ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου Ο.

Γ′ Ὁμάς. **2073.** (2109). Νὰ εὑρεθῇ ἡ μικροτέρα καὶ ἡ μεγαλυτέρα ἀπόστασις ἑνὸς δοθέντος σημείου ἀπὸ δοθεῖσαν περιφέρειαν.

2074. 1ον. Ἵνα ἕνα ἐπίπεδον Π, ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ ἐπίπεδον νὰ εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ ἢ νὰ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς ΑΒ.

2ον. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον νὰ διέρχεται ἀπὸ μίαν δοθεῖσαν εὐθεῖαν Ε καὶ νὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα.

2075. (2111). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ἐπίπεδον Π, τὸ ὁποῖον νὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τέσσαρα δοθέντα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

2076. (2112). Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β, τὰ ὁποῖα κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος δοθέντος ἐπιπέδου Π. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π ἕνα σημεῖον Μ, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β, νὰ εἶναι ἐλάχιστον.

2077. (2113). Δίδονται εἰς τὸ διάστημα μία ὡρισμένη εὐθεῖα xy καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπὶ τῆς xy. Ἐπὶ τῆς εὐθείας xy κινεῖται ἕνα σημεῖον Μ. Ποῦ πρέπει νὰ τοποθετηθῇ τὸ σημεῖον Μ διὰ νὰ εἶναι:

1ον. Τὸ ἄθροισμα ΜΑ+ΜΒ ἐλάχιστον;

2ον. Ἡ διαφορὰ τῶν ΜΑ καὶ ΜΒ μεγίστη;

2078. (2114). Δίδονται δύο τεμνόμεναι καὶ ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι Οx καὶ Οy

καὶ ἕνα σημεῖον Σ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τῶν Οx καὶ Οy. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς Οx ἕνα σημεῖον Α καὶ ἐπὶ τῆς Οy ἕνα σημεῖον Β τοιαῦτα, ὥστε ἡ γωνία ΑΣΒ νὰ εἶναι ὀρθὴ καὶ ἡ ΑΒ ἐλαχίστη.

Δ' Ὁμάς. **2079.** (2115). Διὰ νὰ εἶναι δύο εὐθεῖαι ὀρθογώνιοι, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἀπὸ τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν ἕνα ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ἄλλην.

2080. (2116). Αἱ κάθετοι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Μ ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα διέρχονται ἀπὸ δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ, κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

2081. (2117). Διὰ νὰ ἀπέχουν δύο σημεῖα ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ μίαν εὐθεῖαν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ ἀποστάσεις ἑκάστου ἐξ αὐτῶν ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ὁρίζει ἡ εὐθεῖα καὶ τὸ ἄλλο σημεῖον, νὰ εἶναι ἴσαι.

2082. (2118). Δίδονται τρία ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἕνα κοινὸν ἄκρον.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἀπὸ τὰ μὴ κοινὰ ἄκρα των Α, Β, Γ διέρχεται μία περιφέρεια.

2ον. Ἐὰν τὰ ΟΑ καὶ ΟΒ εἶναι ὡρισμένα κατὰ τὴν θέσιν καὶ τὸ ΟΓ λαμβάνει ὅλας τὰς δυνατὰς διευθύνσεις, ποῖος εἶναι ὁ τόπος τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου αὐτοῦ.

2083. (2119). 1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι διὰ νὰ εἶναι ὀρθογώνια δύο εὐθύγραμματμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $\overline{\Gamma A}^2-\overline{\Gamma B}^2=\overline{\Delta A}^2-\overline{\Delta B}^2$.

2ον. Στηριζόμενοι εἰς τὴν ἰδιότητα αὐτήν, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν ἔχωμεν τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ ἐὰν δύο ἀπὸ τὰς τρεῖς ὁμάδας (ΑΒ, ΓΔ), (ΑΓ, ΒΔ), (ΑΔ, ΒΓ) σχηματίζουν ὀρθογώνια τμήματα, τὰ εὐθύγραμμα τμήματα καὶ τῆς τρίτης ὁμάδος θὰ εἶναι ἐπίσης ὀρθογώνια.

2084. (2120). Δίδονται δύο ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ Α'Β', τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ ἡ τομὴ Ε τῶν ἐπιπέδων τῶν καθέτων εἰς τὰ μέσα τῶν ΑΑ' καὶ ΒΒ'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι:

1ον. κάθε σημεῖον τῆς Ε ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ Α'Β'.

2ον. αἱ ΑΒ καὶ Α'Β' σχηματίζουν γωνίας ἴσας μὲ τὴν εὐθεῖαν Ε.

2085. (2121). Εἰς ἕνα ἐπίπεδον Π δίδεται μία εὐθεῖα Ε καὶ ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου ἕνα σημεῖον Ο. Συνδέομεν μὲ εὐθεῖαν τὸ σημεῖον Ο μὲ τυχὸν σημεῖον Α τῆς εὐθείας Ε καὶ ἐξετάζομεν τὸ ἐπίπεδον Ρ, τὸ κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΑ εἰς τὸ Ο. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ τομὴ Ε' τῶν ἐπιπέδων Π καὶ Ρ διέρχεται ἀπὸ ἕνα ὡρισμένον σημεῖον, ὅταν τὸ Α διαγράφῃ τὴν εὐθεῖαν Ε.

2086. (2122). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς ἕνα στρεβλὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ:

1ον. Τὰ ἓξ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα εἶναι κάθετα εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του καὶ τῶν διαγωνίων του, διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον.

2ον. Αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ μέσα τῶν μὴ διαδοχικῶν πλευρῶν του καὶ ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ μέσον ἑκάστης ἐξ αὐτῶν.

3ον. Τὰ ἓξ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα ἄγονται ἀπὸ τὰ μέσα ἑκάστης πλευρᾶς, καθέτως ἐπὶ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν καὶ ἀπὸ τὸ μέσον ἑκάστης διαγωνίου, καθέτως ἐπὶ τὴν ἄλλην διαγώνιον, διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

ΔΙΕΔΡΟΙ ΓΩΝΙΑΙ - ΕΠΙΠΕΔΑ ΚΑΘΕΤΑ

---

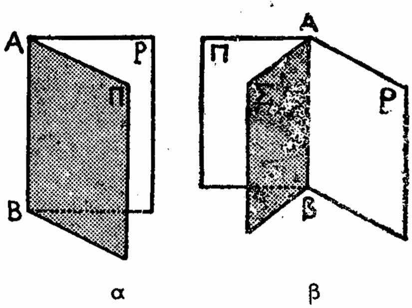
1. Δίεδροι γωνίαι

675. Ὁρισμοί. *Οἱ δύο συνεχόμενοι τοῖχοι μιᾶς αἰθούσης σχηματίζουν ἕνα σχῆμα, τὸ ὁποῖον λέγεται* ***δίεδρος γωνία.***

Γενικῶς: ***Δίεδρος γωνία*** *λέγεται τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον σχηματίζουν δύο ἡμιεπίπεδα, τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὴν τὴν ἀρχικὴν εὐθεῖαν των.*

Ἡ κοινὴ ἀρχικὴ εὐθεῖα τῶν ἡμιεπιπέδων ὀνομάζεται ***ἀκμὴ τῆς διέδρου γωνίας,*** *τὰ δὲ ἡμιεπίπεδα, τὰ ὁποῖα τὴν σχηματίζουν, ὀνομάζονται* ***ἕδραι τῆς διέδρου.***

Οὕτω τὰ δύο ἡμιεπίπεδα ΑΒΠ καὶ ΑΒΡ *(Σχ. 464 α)* σχηματίζουν μίαν δίεδρον γωνίαν, ἡ ὁποία ἔχει ἀκμὴν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ ἕδρας τὰ ἡμιεπίπεδα ΑΒΠ, ΑΒΡ.



Σχ. 464.

Μία δίεδρος γωνία ὀνομάζεται μὲ τὰ δύο γράμματα τῆς ἀκμῆς της.

Ἐὰν ὅμως πολλαὶ δίεδροι ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀκμήν, τότε ὀνομάζομεν κάθε δίεδρον μὲ τέσσαρα γράμματα, τὰ ὁποῖα θέτομεν δύο ἐπὶ τῆς ἀκμῆς των καὶ ἕνα ἐπὶ ἑκάστης ἕδρας της. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὅμως πρέπει νὰ διαβάζωμεν τὰ γράμματα τῆς ἀκμῆς εἰς τὸ μέσον.

Π.χ. ἡ δίεδρος γωνία, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὰ ἡμιεπίπεδα ΑΒΠ καὶ ΑΒΡ, διαβάζεται: δίεδρος ΑΒ ἢ δίεδρος ΠΑΒΡ καὶ γράφεται: διεδρ. ΑΒ ἢ διεδρ. Π - ΑΒ - Ρ.

Δύο δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι, *ὅταν ἡ μία τιθεμένη ἐπὶ τῆς ἄλλης ἐφαρμόζῃ καὶ ἀποτελῇ μίαν μόνον δίεδρον γωνίαν.*

Δύο δίεδροι γωνίαι *λέγονται* ***ἐφεξῆς,*** *ἐὰν ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀκμήν, μίαν κοινὴν ἕδραν καὶ τὰς μὴ κοινὰς ἕδρας ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς.*

Π.χ. αἱ δύο δίεδροι Π-ΑΒ-Σ καὶ Σ-ΑΒ-Ρ *(Σχ. 464 β)* εἶναι ἐφεξῆς δίεδροι γωνίαι.

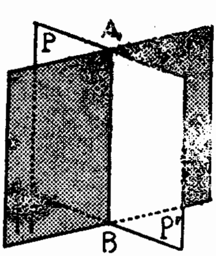
676. Ἄθροισμα δύο διέδρων γωνιῶν. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα δύο διέδρων γωνιῶν, θέτομεν τὴν μίαν πλησίον τῆς ἄλλης, ὥστε νὰ γίνουν ἐφεξῆς. Ἔπειτα παραλείπομεν τὴν κοινὴν ἕδραν των καὶ ἡ δίεδρος, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὰς δύο ἄλλας ἕδρας, εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο διέδρων γωνιῶν.

Π. χ. ἡ δίεδρος γωνία Π-ΑΒ-Ρ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν διέδρων Π-ΑΒ-Σ καὶ Σ-ΑΒ-Ρ *(Σχ. 464 β)*.

677. Διχοτόμον ἐπίπεδον. ***Διχοτόμον ἐπίπεδον μιᾶς διέδρου γωνίας*** *λέγεται, τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ἄγεται ἀπὸ τὴν ἀκμὴν τῆς διέδρου γωνίας καὶ χωρίζει αὐτὴν εἰς δύο ἴσας διέδρους γωνίας.*

Π.χ. τὸ ἐπίπεδον Σ *(Σχ. 464 β)* θὰ εἶναι διχοτόμον ἐπίπεδον τῆς διέδρου γωνίας Π-ΑΒ-Ρ, ἐὰν εἶναι δίεδρ.Π-ΑΒ-Σ=δίεδρ. Σ-ΑΒ-Ρ.

678. Κατὰ κορυφὴν δίεδροι γωνίαι. *Δύο δίεδροι γωνίαι λέγονται* ***κατὰ κορυφὴν δίεδροι γωνίαι,*** *ἐὰν ἔχουν κοινὴν τὴν ἀκμὴν καὶ αἱ ἕδραι τῆς μιᾶς εἶναι προεκτάσεις τῶν ἑδρῶν τῆς ἄλλης.*

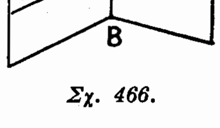


Σχ. 465.

Π.χ. αἱ δίεδροι γωνίαι Π-ΑΒ-Ρ καὶ Π —ΑΒ—Ρ' εἶναι *(Σχ. 465)* κατὰ κορυφὴν δίεδροι γωνίαι.

679. Ἐπίπεδος γωνία διέδρου γωνίας. Ἔστω μία δίεδρος γωνία Π-ΑΒ-Ρ *(Σχ. 466)*. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Ο τῆς ἀκμῆς της ΑΒ φέρομεν τὰς καθέτους ΟΓ καὶ ΟΔ ἐπὶ τὴν ἀκμήν της ΑΒ καὶ κειμένας ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν ἑδρῶν της Π καὶ Ρ.

Ἡ γωνία ΓΟΔ, ἡ ὁποία σχηματίζεται κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, λέγεται **ἀντίστοιχος ἐπίπεδος γωνία** τῆς διέδρου γωνίας Π-ΑΒ-Ρ.



Σχ. 466.

Ἐπειδὴ αἱ ΟΓ καὶ ΟΔ δύνανται νὰ θεωρηθοῦν, ὡς τομαὶ τῶν ἑδρῶν Π καὶ Ρ τῆς διέδρου ΑΒ ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν ἀκμήν της ΑΒ, δυνάμεθα νὰ δώσωμεν τὸν ἑξῆς ὁρισμόν:

Ἀντίστοιχος ἐπίπεδος γωνία μιᾶς διέδρου γωνίας *ἢ ἁπλῶς* ***ἐπίπεδος γωνία μιᾶς διέδρου γωνίας*** *λέγεται ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ τομαὶ τῶν ἑδρῶν της ὑπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν ἀκμήν της.*

Τὸ μέγεθος τῆς ἐπιπέδου γωνίας μιᾶς διέδρου γωνίας εἶναι τὸ αὐτό, οἱονδήποτε καὶ ἂν εἶναι τὸ σημεῖον τῆς ἀκμῆς της, τὸ ὁποῖον λαμβάνεται ὡς κορυφὴ τῆς γωνίας.

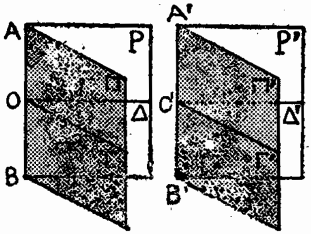
Ἐὰν φέρωμεν εἰς ἄλλο σημεῖον Ο′ τῆς ἀκμῆς ΑΒ *(Σχ. 466)* ἕνα ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, θὰ λάβωμεν μίαν δευτέραν ἐπίπεδον γωνίαν Γ′Ο′Δ′ τῆς διέδρου γωνίας ΑΒ. Ἡ γωνία Γ′Ο′Δ′ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐπίπεδον γωνίαν ΓΟΔ, διότι αἱ πλευραί των εἶναι παράλληλοι, ὡς τομαὶ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΓΟΔ καὶ Γ′Ο′Δ′ ὑπὸ τρίτου, καὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν.

Ὥστε: ***Ὅλαι αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι μιᾶς διέδρου γωνίας εἶναι ἴσαι.***

Σχέσεις μεταξὺ τῶν διέδρων καὶ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν των

680. Θεώρημα. ***Ἐὰν δύο δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι των εἶναι ἴσαι καὶ ἀντιστρόφως.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν αἱ ἴσαι δίεδροι γωνίαι Π-ΑΒ-Ρ καὶ Π′-Α′Β′-Ρ′.



Σχ. 467.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι των εἶναι ἴσαι.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ αἱ δίεδροι γωνίαι ΑΒ καὶ Α′Β′ εἶναι ἴσαι, ἐφαρμόζουν, ἐὰν ἡ μία τεθῇ ἐπὶ τῆς ἄλλης. Ἐὰν λοιπὸν φέρωμεν ἕνα ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν κοινὴν ἀκμήν των ΑΒ, ἡ ἐπίπεδος γωνία τῆς μιᾶς, θὰ εἶναι ἐπίπεδος γωνία καὶ τῆς ἄλλης, ἐφ' ὅσον αἱ ἕδραι τῶν διέδρων ἔχουν συμπέσει. Ἑπομένως αἱ δύο ἐπίπεδοι γωνίαι τῶν διέδρων αὐτῶν εἶναι ἴσαι.

Ἀντιστρόφως. ***Ἐὰν αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι δύο διέδρων γωνιῶν εἶναι ἴσαι καὶ αἱ δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν αἱ δίεδροι γωνίαι ΑΒ καὶ Α′Β′, τῶν ὁποίων αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι ΓΟΔ καὶ Γ′Ο′Δ′ *(Σχ. 467)* εἶναι ἴσαι.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ δίεδροι αὗται γωνίαι εἶναι ἴσαι.

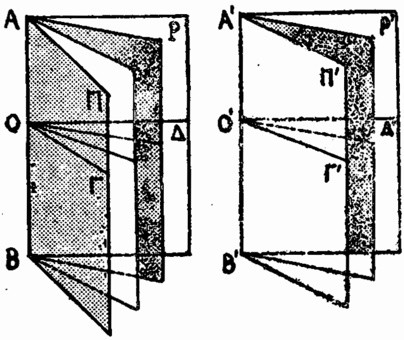
Ἀπόδειξις: Λαμβάνομεν (νοερῶς) τὴν δίεδρον γωνίαν Π′-Α′Β′-Ρ′ καὶ τὴν θέτομεν ἐπὶ τῆς Π-ΑΒ-Ρ οὕτως, ὥστε ἡ γωνία Γ′Ο′Δ′ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης της γωνίας ΓΟΔ. Ἀλλὰ τότε ἡ ἀκμὴ Α′Β′, ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Γ′Ο′Δ′ θὰ συμπέσῃ μὲ τὴν ἀκμὴν ΑΒ, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΓΟΔ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο· ἑπομένως ἡ ἕδρα Π′, ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὰς δύο τεμνομένας εὐθείας Α′Β′ καὶ Ο′Γ′ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἕδρας Π, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΟΓ. Ὁμοίως, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ ἡ ἕδρα

Ρ' θὰ ἐφαρμόση ἐπὶ τῆς ἕδρας Ρ· αἱ δίεδροι λοιπὸν γωνίαι Π-ΑΒ-Ρ καὶ Π'-Α'Β'-Ρ' ἐφαρμόζουν καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσαι.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν δύο δίεδροι. . . .***

681. Θεώρημα. ***Ὁ λόγος δύο διέδρων γωνιῶν εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν των.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν αἱ δίεδροι γωνίαι Π-ΑΒ-Ρ καὶ Π'-Α'Β'-Ρ' (*Σχ. 468*) καὶ ΓΟΔ, Γ'Ο'Δ' αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι των, ἀντιστοίχως.



Σχ. 468.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\dfrac{\text{δίεδρ.Π ΑΒ-Ρ}}{\text{δίεδρ.Π' Α'Β'-Ρ'}} = \dfrac{\widehat{ΓΟΔ}}{\widehat{Γ'Ο'Δ'}}$.

Ἀπόδειξις: I. Ὑποθέτομεν κατ' ἀρχάς, ὅτι αἱ δύο ἐπίπεδοι γωνίαι ΓΟΔ καὶ Γ'Ο'Δ' ἔχουν ἕνα κοινὸν μέρον, τὸ ὁποῖον περιέχεται 3 φορὰς εἰς τὴν γωνίαν ΓΟΔ καὶ 2 φορὰς εἰς τὴν γωνίαν Γ'Ο'Δ'· ἀλλὰ τότε θὰ εἶναι $\dfrac{\widehat{ΓΟΔ}}{\widehat{Γ'Ο'Δ'}} = \dfrac{3}{2}$ (1)

Φέρομεν τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι χωρίζουν τὴν γωνίαν ΓΟΔ εἰς 3 ἴσα μέρη καὶ τὴν γωνίαν Γ'Ο'Δ' εἰς 2 ἴσα μέρη· ὅλαι αὐταὶ αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των· ἔπειτα φέρομεν ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα διέρχονται ἀπὸ τὰς εὐθείας αὐτὰς καὶ ἀπὸ τὴν ἀκμὴν ἑκάστης διέδρου. Τὰ ἐπίπεδα αὐτὰ διαιροῦν τὴν δίεδρον γωνίαν ΑΒ εἰς 3 διέδρους γωνίας καὶ τὴν Α'Β' εἰς 2 διέδρους γωνίας. Ὅλαι αὐταὶ αἱ δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι, διότι αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι γωνίαι των εἶναι ἴσαι (§ 680). Θὰ εἶναι λοιπὸν $\dfrac{\text{δίεδρ.Π-ΑΒ Ρ}}{\text{δίεδρ.Π' Α'Β'-Ρ'}} = \dfrac{3}{2}$ (2)

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι

$$\frac{\text{δίεδρ.Π-ΑΒ-Ρ}}{\text{δίεδρ.Π'-Α'Β'-Ρ'}} = \frac{\widehat{ΓΟΔ}}{\widehat{Γ'Ο'Δ'}}.$$

II. Ὑποθέτομεν τώρα, ὅτι αἱ δύο ἐπίπεδοι γωνίαι ΓΟΔ καὶ Γ'Ο'Δ' δὲν ἔχουν ἕνα κοινὸν μέτρον. Διαιροῦμεν τὴν γωνίαν Γ'Ο'Δ' εἰς ν ἴσα μέρη, ὁπότε τὸ ἕνα ἀπὸ αὐτὰ τὰ ἴσα μέρη θὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ νιοστὸν τῆς γωνίας Γ'Ο'Δ', δηλ. μὲ $\dfrac{Γ'Ο'Δ'}{ν}$. Ἔπειτα ἀπὸ τὴν κορυφὴν Ο τῆς γωνίας ΓΟΔ φέρομεν εὐθείας, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν διαδοχικῶς μεταξύ των

γωνίας ἴσας μὲ τὸ νιοστὸν μέρος τῆς γωνίας Γ'Ο'Δ'. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ γωνία ΓΟΔ περιέχει μ ἀπὸ τὰς γωνίας αὐτάς, ἀλλὰ δὲν περιέχει μ+1· τότε ἡ γωνία ΓΟΔ θὰ εἶναι

$$\mu\cdot\frac{\Gamma'O'\Delta'}{\nu}<\widehat{\Gamma O\Delta}<(\mu+1)\frac{\Gamma'O'\Delta'}{\nu} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\mu}{\nu}<\frac{\widehat{\Gamma O\Delta}}{\widehat{\Gamma'O'\Delta'}}<\frac{\mu+1}{\nu} \quad (1).$$

Φέρομεν ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα διέρχονται ἀπὸ τὴν ἀκμὴν Α'Β' καὶ ἀπὸ τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι διαιροῦν τὴν γωνίαν Γ'Ο'Δ' εἰς ἴσα μέρη. Ὁμοίως φέρομεν ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα διέρχονται ἀπὸ τὴν ἀκμὴν ΑΒ καὶ ἀπὸ τὰς εὐθείας, τὰς ὁποίας ἐφέραμεν εἰς τὴν γωνίαν ΓΟΔ. Τὰ ἐπίπεδα αὐτὰ διαιροῦν τὰς διέδρους γωνίας Α'Β' καὶ ΑΒ εἰς ἄλλας διέδρους γωνιας, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των, διότι αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι γωνίαι των εἶναι ἴσαι· ἡ δίεδρος Α'Β' περιέχει ν ἀπὸ τὰς ἴσας αὐτὰς διέδρους καὶ ἡ δίεδρος ΑΒ περιέχει μ ἀπὸ τὰς ἴσας αὐτὰς διέδρους γωνίας, ἀλλὰ δὲν περιέχει μ+1· θὰ εἶναι λοιπὸν $\frac{\mu}{\nu}<\frac{\text{δίεδρ.}AB}{\text{δίεδρ.}A'B'}<\frac{\mu+1}{\nu}$ (2).

Ἀπὸ τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ λόγοι $\frac{\widehat{\Gamma O\Delta}}{\Gamma'O'\Delta'}$ καὶ $\frac{\text{δίεδρ.}AB}{\text{δίεδρ.}A'B'}$ περιέχονται μεταξὺ τῶν αὐτῶν τιμῶν $\frac{\mu}{\nu}$ καὶ $\frac{\mu+1}{\nu}$, αἱ ὁποῖαι διαφέρουν κατὰ $\frac{1}{\nu}$.

Ἀλλὰ ἡ διαφορὰ αὐτὴ δύναται νὰ γίνῃ ὁσονδήποτε μικρὰ καὶ ἂν θέλωμεν, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὴν γωνίαν Γ'Ο'Δ' εἰς ἕνα μεγάλον ἀριθμὸν ἴσων μερῶν. Οἱ λόγοι λοιπὸν αὐτοί, οἱ ὁποῖοι περιέχονται μεταξὺ δύο τιμῶν $\frac{\mu}{\nu}$ καὶ $\frac{\mu+1}{\nu}$, αἱ ὁποῖαι διαφέρουν τόσον ὀλίγον, ὅσον θέλομεν, θὰ διαφέρουν μεταξύ των κατὰ μίαν ποσότητα, ἡ ὁποία τείνει πρὸς τὸ μηδὲν καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ἴσοι· ἄρα θὰ εἶναι

$$\frac{\text{δίεδρ.}AB}{\text{δίεδρ.}A'B'}=\frac{\widehat{\Gamma O\Delta}}{\widehat{\Gamma'O'\Delta'}}.$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: *Ὁ λόγος δύο. . . .*

682. Θεώρημα. ***Τὸ μέτρον μιᾶς διέδρου γωνίας εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ μέτρον τῆς ἐπιπέδου γωνίας της, ἐὰν ληφθῇ ὡς μονὰς τῶν διέδρων γωνιῶν ἡ δίεδρος γωνία, ἡ ὁποία ἔχει ἀντίστοιχον ἐπίπεδον γωνίαν τὴν μονάδα τῶν γωνιῶν.***

Γνωρίζομεν, ὅτι μεταξὺ τῶν διέδρων γωνιῶν ΑΒ καὶ Α'Β' *(Σχ.468)* καὶ τῶν ἀντιστοίχων ἐπιπέδων γωνιῶν των ΓΟΔ καὶ Γ'Ο'Δ' ὑπάρχει ἡ σχέσις:

$$\frac{\text{δίεδρ.}AB}{\text{δίεδρ.}A'B'}=\frac{\widehat{\Gamma O\Delta}}{\widehat{\Gamma'O'\Delta'}} \quad (1)$$

Ἐὰν ἡ γωνία Γ'Ο'Δ' ληφθῇ ὡς μονὰς τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, τότε

ἡ δίεδρος γωνία Α'Β' θὰ εἶναι ἡ μονὰς τῶν διέδρων γωνιῶν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ πρῶτος λόγος τῆς ἰσότητος (1) παριστάνει τὸ μέτρον τῆς διέδρου γωνίας Π-ΑΒ Ρ καὶ ὁ δεύτερος λόγος αὐτῆς παριστάνει τὸ μέτρον τῆς ἐπιπέδου γωνίας ΓΟΔ. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ γράψωμεν:

μέτρον διέδρ. Π-ΑΒ-Ρ=μέτρον ἐπιπέδου γων. ΓΟΔ

683. Ὁρισμοί. ***Μία δίεδρος γωνία εἶναι ὀρθή, ὀξεῖα*** ἢ ***ἀμβλεῖα,*** *ἐὰν καὶ ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδός της εἶναι ὀρθή, ὀξεῖα ἢ ἀμβλεῖα.*

Δύο δίεδροι γωνίαι εἶναι συμπληρωματικαί, *ἐὰν αἱ ἐπίπεδοί γωνίαι των εἶναι συμπληρωματικαί.*

Δύο δίεδροι γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί, *ἐὰν αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι των εἶναι παραπληρωματικαί.*

Παρατήρησις. Αἱ κατωτέρω προτάσεις ἀποδεικνύονται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὅπως ἀπεδείχθησαν αἱ ἀντίστοιχοι προτάσεις εἰς τὴν Ἐπιπεδομετρίαν.

1ον. ***Δύο δίεδροι κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι.***

2ον. ***Ὅταν δύο δίεδροι εἶναι κατὰ κορυφήν, τὰ διχοτομοῦντα αὐτὰς ἐπίπεδα συμπίπτουν.***

3ον. ***Δύο ἐφεξῆς δίεδροι γωνίαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς μὴ κοινὰς ἕδρας των ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, εἶναι παραπληρωματικαί.***

Ἀντιστρόφως. ***Ἐὰν δύο ἐφεξῆς δίεδροι γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί, αἱ μὴ κοιναὶ ἕδραι των κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.***

4ον. ***Ὅταν δύο ἐφεξῆς δίεδροι εἶναι παραπληρωματικαί, τὰ διχοτομοῦντα αὐτὰς ἐπίπεδα σχηματίζουν μίαν δίεδρον ὀρθήν.***

5ον. ***Τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διχοτομεῖ μίαν δίεδρον γωνίαν, εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὰς ἕδρας τῆς διέδρου.***

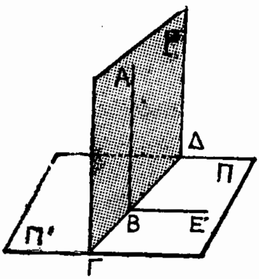
Κάθετα ἐπίπεδα

864. Ὁρισμός. *Δύο ἐπίπεδα εἶναι* ***κάθετα μεταξύ των,*** *ὅταν σχηματίζουν μίαν ὀρθὴν δίεδρον γωνίαν*

685. Θεώρημα. ***Ἐὰν μία εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, κάθε ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν αὐτήν, εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π *(Σχ. 469)* καὶ Ρ ἕνα τυχὸν ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὴν ΑΒ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ ἐπίπεδον Ρ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π.



Σχ. 469.

Ἀπόδειξις: Ἔστω ΓΔ ἡ τομὴ τῶν ἐπιπέδων Π καὶ Ρ· ἀπὸ τὸν πόδα Β τῆς

Ὑπόθ.	ΑΒ ⊥ Π Ρ διερχ. διὰ ΑΒ
Συμπ.	Ρ ⊥ Π

καθέτου ΑΒ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΒΕ τοῦ ἐπιπέδου Π, κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΔ. Ἡ εὐθεῖα ΑΒ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς εὐθείας ΓΔ καὶ ΒΕ· ἡ γωνία ΑΒΕ, τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν ΓΔ καὶ κεῖνται ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων Π καὶ Ρ, εἶναι ἡ ἐπίπεδος γωνία τῆς διέδρου γωνίας Ρ-ΓΔ-Π, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὰ δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ. Ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΒΕ εἶναι ὀρθὴ καὶ ἡ ἀντίστοιχος δίεδρος γωνία Ρ-ΓΔ-Π θὰ εἶναι ὀρθή· ἑπομένως τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ εἶναι κάθετα μεταξύ των.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν μία εὐθεῖα. . . .***

686. Θεώρημα. ***Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶναι κάθετα μεταξύ των καὶ ἀχθῇ μία τυχοῦσα εὐθεῖα, ἡ ὁποία νὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἑνὸς ἐπιπέδου καὶ νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν τομήν των, ἡ εὐθεῖα αὐτὴ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἄλλο ἐπίπεδον.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν Π καὶ Ρ *(Σχ. 469)* δύο κάθετα ἐπίπεδα καὶ ΑΒ μία εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου Ρ, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν τομὴν ΓΔ τῶν δύο ἐπιπέδων.

Ὑπόθ.	Ρ ⊥ Π ΓΔ τομὴ τῶν Ρ καὶ Π ΑΒ εὐθ. ἐπιπέδου Ρ ⊥ ΓΔ
Συμπ.	ΑΒ ⊥ Π

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ Π.

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὸν πόδα τῆς εὐθείας ΑΒ φέρομεν, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π, τὴν εὐθεῖαν ΒΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΔ. Ἐπειδὴ αἱ ΒΕ καὶ ΒΑ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν ἀκμὴν ΓΔ καὶ κεῖνται, ἀντιστοίχως, ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων Π καὶ Ρ, ἡ γωνία ΑΒΕ εἶναι ἡ ἐπίπεδος γωνία τῆς διέδρου γωνίας Ρ-ΓΔ-Π. Ἐπειδή, ἐξ ὑποθέσεως, τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ εἶναι κάθετα, ἡ δίεδρος γωνία Ρ-ΓΔ-Π εἶναι ὀρθή· ἄρα καὶ ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος γωνία της ΑΒΕ εἶναι ὀρθή. Ἀλλὰ τότε ἡ ΑΒ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΕ· ἐπειδὴ

δὲ εἶναι καί, ἐξ ὑποθέσεως, κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΓΔ, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π τῶν εὐθειῶν αὐτῶν.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν δύο ἐπίπεδα. . . .***

687. Θεώρημα. ***Ὅταν δύο ἐπίπεδα εἶναι κάθετα μεταξύ των, κάθε εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τυχὸν σημεῖον τοῦ ἑνὸς ἐπιπέδου, κάθετος ἐπὶ τὸ ἄλλο ἐπίπεδον, κεῖται ἐπὶ τοῦ πρώτου ἐπιπέδου.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν Π καὶ Ρ *(Σχ. 469)* δύο κάθετα ἐπίπεδα καὶ Α ἕνα τυχὸν σημεῖον ἐπιπέδου Ρ.

Ὑπόθ.	Ρ ⊥ Π Α σημεῖον τοῦ Ρ ΑΒ ⊥ Π
Συμπ.	ΑΒ κεῖται ἐπὶ Ρ

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ κάθετος, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Α ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π, κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ρ.

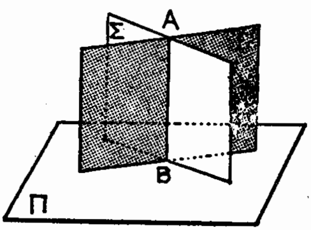
Ἀπόδειξις: Ἐὰν ἀπὸ τὸ σημεῖον Α φέρωμεν μίαν εὐθεῖαν ΑΒ τοῦ ἐπιπέδου Ρ, κάθετον ἐπὶ τὴν τομὴν ΓΔ τῶν δύο ἐπιπέδων Π καὶ Ρ, ἡ εὐθεῖα αὐτὴ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π (§ 686).

Ἐπειδὴ δὲ ἀπὸ ἕνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς ἐπιπέδου, δυνάμεθα νὰ φέρωμεν μίαν καὶ μόνον κάθετον ἐπὶ ἐπίπεδον ἕπεται, ὅτι ἡ κάθετος, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ Α ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π, συμπίπτει μὲ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ ἑπομένως κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ρ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ὅταν δύο ἐπίπεδα. . . .***

688. Θεώρημα. ***Ἕνα ἐπίπεδον, κάθετον ἐπὶ δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα, εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν τομήν των.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω Π ἕνα ἐπίπεδον *(Σχ. 470)*, τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα Ρ καὶ Σ, τὰ ὁποῖα τέμνονται κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ.



Σχ. 470.

Ὑπόθ.	ΑΒ τομὴ ἐπιπ. Ρ καὶ Σ Π ⊥ Ρ Π ⊥ Σ
Συμπ.	Π ⊥ ΑΒ

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ ἐπίπεδον Π εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Α τῆς εὐθείας ΑΒ φέρωμεν μίαν κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π, ἡ εὐθεῖα αὐτὴ θὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ρ καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Σ (§ 687) καὶ ἑπομένως θὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν τομήν των ΑΒ. Ὥστε ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π.

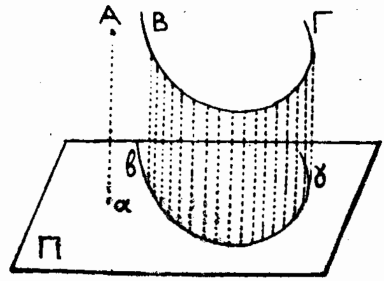
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἕνα ἐπίπεδον κάθετον. . . .***

689. Πόρισμα. ***Κάθε ἐπίπεδον Π κάθετον ἐπὶ τὴν τομὴν ΑΒ δύο ἐπιπέδων Ρ καὶ Σ εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ ἕκαστον ἐξ αὐτῶν.***

'Ασκήσεις: 2087, 2088, 2089, 2090.

'Ορθὴ προβολὴ ἐπὶ ἐπίπεδον

690. 'Ορθὴ προβολὴ σημείου ἢ σχήματος ἐπὶ ἐπίπεδον. Ἔστω ἕνα ἐπίπεδον Π καὶ Α ἕνα σημεῖον ἐκτὸς αὐτοῦ *(Σχ. 471)*. Ἀπὸ τὸ Α φέρομεν τὴν κάθετον Αα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον. Τὸ σημεῖον α, δηλ. ὁ ποὺς τῆς καθέτου Αα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π, λέγεται ***ὀρθὴ προβολὴ*** ἢ ἁπλῶς ***προβολὴ*** τοῦ σημείου Α ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π.



Σχ. 471.

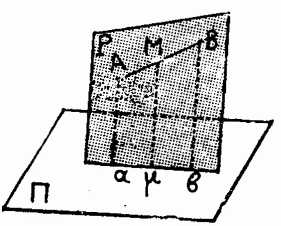
Ἡ προβολὴ ἑνὸς σχήματος ΒΓ ἐπὶ ἕνα ἐπίπεδον Π εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν προβολῶν ὅλων τῶν σημείων τοῦ σχήματος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτό.

Π.χ. Ἡ βγ εἶναι ἡ προβολὴ τοῦ σχήματος ΒΓ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π.

Τὸ ἐπίπεδον Π ἐπὶ τοῦ ὁποίου προβάλλονται τὰ σημεῖα ἢ τὰ σχήματα, λέγεται ***προβολικὸν ἐπίπεδον***, ἡ δὲ κάθετος Αα λέγεται ***προβάλλουσα τοῦ σημείου Α.***

691. Θεώρημα. ***Ἡ προβολὴ μιᾶς εὐθείας ἐπὶ ἕνα ἐπίπεδον εἶναι εὐθεῖα γραμμή.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω Π τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον καὶ ΑΒ μία εὐθεῖα, πλαγία πρὸς τὸ ἐπίπεδον αὐτό.



Σχ. 472.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ προβολὴ τῆς ΑΒ ἐπὶ τὸ Π εἶναι εὐθεῖα γραμμή.

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Α τῆς εὐθείας ΑΒ φέρομεν τὴν κάθετον Αα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π. Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ Αα ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδον Ρ, κάθετον ἐπὶ τὸ Π. Τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ τέμνονται κατὰ μίαν εὐθεῖαν αβ. Ἔστω τώρα ἕνα τυχὸν σημεῖον Μ τῆς εὐθείας ΑΒ· ἂν ἀπὸ τὸ Μ φέρωμεν κάθετον Μμ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π, ἡ κάθετος αὐτὴ θὰ κεῖται ὁλόκληρος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ρ καὶ ἑπομένως ἡ προβολὴ μ τοῦ σημείου Μ θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας αβ.

Ὅλα λοιπὸν τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας ΑΒ ἔχουν τὰς προβολάς των ἐπὶ τῆς εὐθείας αβ καὶ ἐπομένως ἡ προβολὴ τῆς εὐθείας ΑΒ εἶναι ἡ εὐθεῖα αβ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἡ προβολὴ μιᾶς εὐθείας....***

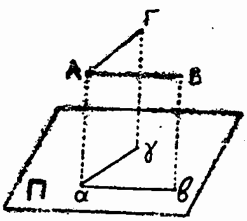
Παρατήρησις. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π, ἡ προβολή της ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ θὰ εἶναι ἕνα σημεῖον: ὁ πούς τῆς ΑΒ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π.

Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π, ἡ προβολή της αβ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν.

Ἀσκήσεις: 2901, 2092, 2093, 2094, 2095, 2096.

692. Θεώρημα. ***Ἡ προβολὴ μιᾶς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον εἶναι παράλληλον πρὸς μίαν ἐκ τῶν πλευρῶν της εἶναι ὀρθὴ γωνία.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω ἡ ὀρθὴ γωνία ΒΑΓ *(Σχ. 473)*, τῆς ὁποίας ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π καὶ βαγ ἡ προβολή της ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π.



Σχ. 473.

Ὑπόθ.	γων.ΒΑΓ=ὀρθὴ ΑΒ//Π γων.βαγ=προβ. τῆς ΒΑΓ
Συμπ.	γων.βαγ=ὀρθή

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ γωνία βαγ εἶναι ὀρθή.

Ἀπόδειξις: Ἡ εὐθεῖα Αα, ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν αβ, ἄρα καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν της ΑΒ· ἀλλὰ ἡ ΒΑ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΑΓ, διότι ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ὀρθή. Ἡ εὐθεῖα λοιπὸν ΒΑ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὰς δύο εὐθείας Αα καὶ ΑΓ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν ΓΑα· ἀλλὰ τότε καὶ ἡ παράλληλός της αβ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν αγ· ὥστε ἡ γωνία βαγ εἶναι ὀρθή.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἡ προβολὴ μιᾶς ὀρθῆς γωνίας....***

693. Θεώρημα. *(1ον. Ἀντίστροφον).* ***Ἐὰν μία γωνία ΒΑΓ ἔχῃ μίαν ἀπὸ τὰς πλευράς της ΑΒ παράλληλον πρὸς τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον Π καὶ ἐὰν ἡ γωνία αὐτὴ προβάλλεται κατὰ ὀρθὴν γωνίαν βαγ, ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ὀρθή*** *(Σχ. 473).*

Ὑπόθεσις: Ἔστω ἡ γωνία ΒΑΓ, ἡ ὁποία ἔχει τὴν πλευρὰν ΑΒ παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π καὶ ἡ ὁποία προβάλλεται πρὸς τὸ Π κατὰ τὴν ὀρθὴν γωνίαν βαγ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ὀρθή.

Ἀπόδειξις: Ἡ εὐθεῖα αβ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὰς εὐθείας αγ καὶ Αα εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΓΑαγ· ἄρα καὶ ἡ παράλληλός της ΒΑ θὰ

εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτό· ἡ ΒΑ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΓΑαγ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΓ καὶ ἐπομένως ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ὀρθή.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι : *Ἐὰν μία γωνία. . . .*

694. Θεώρημα. *(2ον. Ἀντίστροφον).* ***Ἐὰν μία ὀρθὴ γωνία ΒΑΓ προβάλλεται ἐπὶ ἕνα ἐπίπεδον Π κατὰ ὀρθὴν γωνίαν βαγ, ἡ μία, τουλάχιστον, ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας ΒΑΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π.*** *(473).*

Ὑπόθεσις : Ἔστω ἡ ὀρθὴ γωνία ΒΑΓ, βαγ ἡ προβολή της ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π καὶ ἔστω ὅτι βαγ=ὀρθὴ καὶ ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΓ τῆς ὀρθῆς γωνίας ΒΑΓ δὲν εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π.

Ὑπόθ.	γων.ΒΑΓ=γων.βαγ=ὀρθὴ γων.βαγ=προβολὴ τῆς γων.ΒΑΓ ἐπὶ τὸ Π
Συμπ.	ΑΒ//Π

Συμπέρασμα : Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ ἄλλη πλευρὰ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ Π.

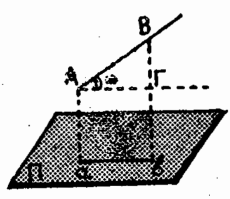
Ἀπόδειξις : Ἐπειδὴ ἡ αγ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς εὐθείας αβ καὶ Αα, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον βαΑΒ καὶ ἐπομένως καὶ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ· αἱ εὐθεῖαι λοιπὸν αγ καὶ ΒΑ εἶναι κάθετοι μεταξύ των. Ἀλλὰ ἡ ΒΑ εἶναι κάθετος, ἐξ ὑποθέσεως, καὶ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΓ. Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΒΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς δύο, μὴ παραλλήλους, εὐθείας ΑΓ καὶ αγ, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν ΓΑαγ· ἡ εὐθεῖα λοιπὸν ΒΑ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΓΑαγ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ εὐθεῖαν Αα· αἱ εὐθεῖαι ΒΑ καὶ βα, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν Αα, εἶναι παράλληλοι. Ἡ εὐθεῖα ΒΑ, ὡς παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν βα τοῦ ἐπιπέδου Π εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς ἐπίπεδον Π.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι : *Ἐὰν μία ὀρθὴ γωνία. . . .*

Ἀσκήσεις: 2097, 2098, 2099.

Γωνία μιᾶς εὐθείας καὶ ἑνὸς ἐπιπέδου

695. Κλίσις εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον. Ἔστω ΑΒ μία εὐθεῖα πλαγία πρὸς ἕνα ἐπίπεδον Π *(Σχ. 475)* καὶ Βα ἡ προβολή της ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτό. Ἡ γωνία ΑΒα, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ εὐθεῖα ΑΒ μὲ τὴν προβολήν της Βα, λέγεται ***γωνία τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ τοῦ ἐπιπέδου Π,*** ἢ ***κλίσις τῆς εὐθείας ΑΒ πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π.***



Σχ. 474.

Γενικῶς : ***Κλίσις εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον*** *λέγεται ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ εὐθεῖα μὲ τὴν προβολήν της ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.*

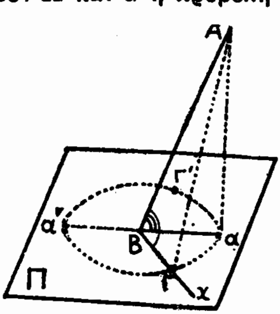
Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν κλίσιν μιᾶς εὐθείας ΑΒ *(Σχ. 474)* πρὸς ἕνα ἐπίπεδον, εἰς περίπτω-

σιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι μὲν πλαγία πρὸς τὸ ἐπίπεδον, ἀλλὰ τέμνει αὐτὸ ἐκτὸς τοῦ φύλλου σχεδιάσεως, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Α τῆς εὐθείας ΑΒ *(Σχ. 474)* φέρομεν τὴν παράλληλον ΑΓ πρὸς τὴν προβολήν της αβ. Ἡ γωνία ΒΑΓ=ω εἶναι ἡ ζητουμένη κλίσις.

696. Θεώρημα. ***Ἡ ὀξεῖα γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει μία εὐθεῖα, πλαγία πρὸς ἐπίπεδον, μὲ τὴν προβολήν της ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτό, εἶναι ἡ μικροτέρα γωνία, ἀπὸ ὅλας τὰς γωνίας, τὰς ὁποίας σχηματίζει αὐτὴ μὲ τυχοῦσαν ἄλλην εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω ΑΒ *(Σχ. 475)* μία εὐθεῖα πλαγία πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π καὶ α ἡ προβολὴ τυχόντος σημείου της Α ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π.



Σχ. 475.

Ἐπειδὴ ἡ προβολὴ τοῦ σημείου Β ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π εἶναι αὐτὸ τοῦτο τὸ σημεῖον Β, ἡ προβολὴ τῆς εὐθείας ΑΒ εἶναι ἡ εὐθεῖα Βα.

Συμπέρασμα: Ἐὰν φέρωμεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν Βx τοῦ ἐπιπέδου Π, θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ γωνία ΑΒα εἶναι μικροτέρα τῆς γωνίας ΑΒx.

Ἀπόδειξις: Ἐπὶ τῆς εὐθείας Βx λαμβάνομεν τμῆμα ΒΓ=Βα καὶ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΓ. Τὰ δύο τρίγωνα ΑΒα καὶ ΑΒΓ ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας μίαν πρὸς μίαν: τὴν πλευρὰν ΑΒ κοινήν, τὰς πλευρὰς Βα=ΒΓ ἐκ κατασκευῆς, ἀλλὰ ἡ τρίτη πλευρὰ Αα τοῦ πρώτου τριγώνου εἶναι μικροτέρα τῆς τρίτης πλευρᾶς ΑΓ τοῦ δευτέρου τριγώνου, διότι ἡ Αα εἶναι κάθετος καὶ ἡ ΑΓ πλαγία πρὸς τὸ ἐπίπεδον· ἄρα τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἄνισα καὶ ἑπομένως ἡ γωνία ΑΒα εἶναι μικροτέρα τῆς γωνίας ΑΒΓ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἡ ὀξεῖα γωνία....***

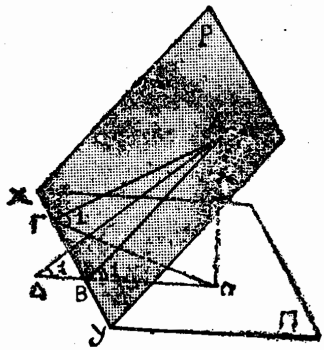
Παρατήρησις. Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π *(Σχ. 475)* γράφομεν τὴν περιφέρειαν, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τὸ σημεῖον Β καὶ ἀκτῖνα τὴν Βα. Ὅταν τὸ σημεῖον Γ κινῆται ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτῆς, μεταξὺ τοῦ σημείου α καὶ τοῦ σημείου α′, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἄλλο ἄκρον τῆς διαμέτρου αΒα′, ἡ ἀπόστασις αΓ τοῦ Γ ἀπὸ τὸν πόδα α τῆς καθέτου Αα αὐξάνει καὶ συνεπῶς αὐξάνει καὶ ἡ πλαγία ΑΓ, ὁπότε θὰ αὐξάνῃ καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ.

Ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτῆς δύο σημεῖα Γ καὶ Γ συμμετρικὰ πρὸς τὴν διάμετρον αα′, αἱ πλάγιαι ΑΓ καὶ ΑΓ′ εἶναι ἴσαι καὶ ἑπομένως καὶ αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΑΒΓ′ εἶναι ἴσαι.

Ἀσκήσεις: 2100, 2101, 2102, 2103, 2104.

697. Θεώρημα. ***Ἐὰν δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ τέμνωνται, αἱ εὐθεῖαι τοῦ ἐπιπέδου Ρ, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν μεγαλυτέραν γωνίαν μὲ τὸ ἐπίπεδον Π εἶναι ἐκεῖναι, αἱ ὁποῖαι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν τομήν των.*** *(Σχ. 476).*

Ὑπόθεσις: Ἔστω xy ἡ τομὴ τῶν ἐπιπέδων Π καὶ Ρ. Εἰς τὸ ἐπίπεδον Ρ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ κάθετον ἐπὶ τὴν xy καὶ τὴν πλαγίαν ΑΓ πρὸς τὴν xy· ἀπὸ τὸ Α φέρομεν τὴν κάθετον Αα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π· αἱ εὐθεῖαι Βα καὶ Γα εἶναι αἱ προβολαὶ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον καὶ ἑπομένως αἱ γωνίαι ΑΒα καὶ ΑΓα εἶναι αἱ κλίσεις τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΓ πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π·



Σχ. 476.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ γωνία ΑΒα εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΑΓα.

Ἀπόδειξις: Ἡ εὐθεῖα αΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν xy, κατὰ τὸ ἀντίστροφον θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων, ὁπότε ἡ εὐθεῖα αΓ θὰ εἶναι πλαγία πρὸς τὴν xy· ἄρα ἡ αΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς αΒ. Ἐπὶ τῆς εὐθείας αΒ λαμβάνομεν ἕνα μῆκος αΔ=αΓ καὶ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΔ. Τὸ σημεῖον Δ θὰ κεῖται προφανῶς ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς αΒ. Τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑαΓ καὶ ΑαΔ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς καθέτους πλευράς των ἴσας· δηλ. ἔχουν τὴν Αα κοινὴν καὶ αΓ=αΔ ἐκ κατασκευῆς· ἄρα τὰ τρίγωνα αὐτὰ θὰ ἔχουν ἴσας καὶ τὰς γωνίας ΑΓα καὶ ΑΔα. Ἀλλὰ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΔΒ, ἡ ἐξωτερική γωνία του ΑΒα εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΑΔα καὶ ἑπομένως εἶναι μεγαλυτέρα καὶ τῆς γωνίας ΑΓα, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μὴ τὴν ΑΔα. Ὥστε εἶναι γων.ΑΒα > γων.ΑΓα.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ. . . .***

Σημ. Ὅταν τὸ ἐπίπεδον Π εἶναι ὁριζόντιον, ἡ εὐθεῖα ΑΒ λαμβάνε τὸ ὄνομα: ***γραμμὴ μεγίστης κλίσεως τοῦ ἐπιπέδου Ρ***

Ἀσκήσεις

2087. (2123). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Ο, νὰ ἀχθῇ να ἐπίπεδον κάθετον ἐπι δοθὲν ἐπίπεδον Π καὶ παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν Ε.

2088. (2124). Δίδεται μία εὐθεῖα ΑΒ καὶ ἕνα ἐπίπεδον Π. Νὰ ἀχθῇ ἕνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον νὰ διέρχεται ἀπὸ τὴν ΑΒ καὶ νὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π.

2089. (2125). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν μία εὐθεῖα εἶναι πλαγία πρὸς ἐπίπεδον, διέρχεται δι' αὐτῆς ἕνα καὶ μόνον ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον.

2090. (2126). Ἐὰν ἕνα ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν διέδρου γωνίας εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὰςἕδρας της.

2091. (2127). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ προβολαὶ παραλλήλων εὐθειῶν ἐπὶ ἕνα ἐπίπεδον εἶναι παράλληλοι· ἐὰν αἱ εὐθεῖαι εἶναι ἴσαι, αἱ προβολαί των εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.

2092. (2128). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ δύο προβολαὶ ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ δύο παράλληλα ἐπίπεδα εἶναι ἴσαι.

2093. (2129). 1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ : ὅτι τὸ μέσον ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος προβάλλεται εἰς τὸ μέσον τῆς προβολῆς του.

2ον. Ἂν γνωρίζωμεν τὴν προβολὴν ἑνὸς τριγώνου ἐπὶ ἕνα ἐπίπεδον, νὰ κατασκευασθοῦν αἱ προβολαὶ τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου.

2094. (2130). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ προβολὴ παραλληλογράμμου ἐπὶ ἐπίπεδον εἶναι παραλληλόγραμμον. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ προβολὴ τοῦ κέντρου τοῦ παραλληλογράμμου.

2095. (2131). Τὸ ἄκρα εὐθείας ΑΒ μήκους 53 ἑκ. ἀπέχουν 48 ἑκ. καὶ 20 ἑκ. ἀπὸ ἕνα ἐπίπεδον Π. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῆς προβολῆς τῆς ΑΒ ἐπὶ τὸ Π·

2096. (2132). Τὰ ἄκρα μιᾶς εὐθείας ΑΒ ἀπέχουν ἀπὸ ἕνα ἐπίπεδον 44 ἑκ. καὶ 11 ἑκ. Ἐὰν ἡ προβολὴ τῆς ΑΒ ἐπὶ ἕνα ἐπίπεδον Π εἶναι 56 ἑκ., νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῆς εὐθείας ΑΒ.

2097. (2133). Μία γωνία εἶναι ὀξεῖα ἢ ἀμβλεῖα, ἐὰν καὶ ἡ προβολή της ἐπὶ ἕνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς μίαν πλευράν της, εἶναι ὀξεῖα ἢ ἀμβλεῖα.

2098. (2134). Διὰ νὰ τέμνῃ ἕνα ἐπίπεδον μίαν δίεδρον ὀρθὴν γωνίαν κατὰ ὀρθὴν γωνίαν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ τομή του μὲ μίαν ἀπὸ τὰς ἕδρας τῆς διέδρου νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκμὴν τῆς διέδρου.

2099. (2135). Ἡ προβολὴ μιᾶς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ ἕνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι παράλληλον πρὸς καμμίαν ἀπὸ τὰς πλευράς της εἶναι μία ἀμβλεῖα γωνία, ἐὰν τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον τέμνῃ τὰς δύο πλευρὰς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἢ τὰς προεκτάσεις των, καὶ μία ὀξεῖα γωνία, ἐὰν τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον τέμνῃ τὴν μίαν ἐκ τῶν πλευρῶν καὶ τὴν προέκτασιν τῆς ἄλλης.

2100. (2136). Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ κλίσις μιᾶς εὐθείας εἰς ἕνα ἐπίπεδον, ἵνα ἡ προβολὴ τῆς εὐθείας εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς εὐθείας;

2101. (2137). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ προβολὴ μιᾶς εὐθείας ΑΒ=α ἐπὶ ἕνα ἐπίπεδον, ἐὰν ἡ κλίσις της εἶναι : 1ον 30^0 ; 2ον 45^0 ; 3ον 60^0 ;

2102. (2138). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος μιᾶς εὐθείας ΑΒ, ἐὰν ἡ προβολή της ἐπὶ ἐπίπεδον εἶναι α καὶ ἡ κλίσις της πρὸς τὸ ἐπίπεδον εἶναι : 1ον 30^0 ; 2ον 45^0 ; 3ον 60^0 ;

2103. (2139). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ κλίσεις εὐθείας πρὸς παράλληλα ἐπίπεδα εἶναι ἴσαι.

2104. (2140). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον ἐπιπέδου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν κλίσιν ω πρὸς τὸ ἐπίπεδον αὐτό.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν ἐπὶ τοῦ Ε' Κεφαλαίου

Α' Ὁμάς. **2105.** (2141). Ἐὰν τρία σημεῖα μιᾶς εὐθείας Ε ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ μίαν εὐθεῖαν Ε', αἱ εὐθεῖαι Ε καὶ Ε' εἶναι παράλληλοι.

2106. (2142). Δίδονται δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα Π καὶ Ρ καὶ μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία τέμνει τὸ Π εἰς τὸ Α καὶ τὸ Ρ εἰς τὸ Β. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διχοτομεῖ τὴν δίεδρον (Π, Ρ) διαιρεῖ τὴν ΑΒ εἰς τμήματα ἀνάλογα πρὸς τὰς ἀποστάσεις τῶν Α καὶ Β ἀπὸ τὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων Π καὶ Ρ.

2107. (2143). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα Π καὶ Ρ καὶ τὰ

ἐπίπεδα Σ, Τ, τὰ ὁποῖα διχοτομοῦν τὰς διέδρους, τὰς ὁποίας σχηματίζουν τὰ Π καὶ Ρ, ὁρίζουν, ἐπὶ τυχούσης τεμνούσης αὐτά, τέσσαρα σημεῖα, τὰ ὁποῖα σχηματίζουν ἁρμονικὴν διαίρεσιν.

2108. (2144). Ἐὰν μία εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ ἕνα ἐπίπεδον Ρ, ἡ προβολή της ἐπὶ τυχὸν ἐπίπεδον Π εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων Π καὶ Ρ.

2109. (2145). Διὰ νὰ προβάλλεται ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας κατὰ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας τῆς προβολῆς της, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας τοῦ διαστήματος ἢ ἡ ἐξωτερικὴ διχοτόμος τῆς γωνίας αὐτῆς, νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον.

2110. (2146). Δίδονται δύο ἐπίπεδα κάθετα μεταξύ των. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι διὰ νὰ εἶναι μία εὐθεῖα τοῦ ἑνὸς καὶ μία εὐθεῖα τοῦ ἄλλου ἐπιπέδου ὀρθογώνιοι, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ μία τουλάχιστον ἐκ τῶν εὐθειῶν αὐτῶν νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν τομὴν τῶν δύο ἐπιπέδων.

2111. (2147). Ἵνα μία εὐθεῖα Ε σχηματίζῃ γωνίας ἴσας μὲ δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἕνα ἢ τὸ ἄλλο ἐπίπεδα, ποὺ διχοτομοῦν τὴν δίεδρον γωνίαν τῶν ἐπιπέδων Π καὶ Ρ ἢ νὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἑνὸς ἢ τοῦ ἄλλου τῶν ἐπιπέδων αὐτῶν.

2112. (2148). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι: 1ον. ὁ λόγος τῶν προβολῶν δύο εὐθυγράμμων τμημάτων τῆς αὐτῆς εὐθείας ἐπὶ ἕνα ἐπίπεδον εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν δοθέντων εὐθυγράμμων τμημάτων.

2ον. ἡ προβολὴ τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν διαμέσων ἑνὸς τριγώνου ἐπὶ ἕνα ἐπίπεδον, εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου προβολῆς.

2113. (2149). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς ἕνα στρεβλὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς μὴ διαδοχικὰς πλευράς του ἴσας, ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του, εἶναι κοινὴ κάθετος ἐπὶ τὰς διαγωνίους αὐτάς.

2114 (2150). Δίδεται ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ, τοῦ ὁποίου τὰ ἄκρα Α καὶ Β κεῖνται ἐπὶ τῶν ἑδρῶν Π καὶ Ρ μιᾶς διέδρου γωνίας (Π, Ρ). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν αἱ ἀποστάσεις τῶν Α καὶ Β ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα Ρ καὶ Π εἶναι ἴσαι, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου Μ τοῦ ΑΒ ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ εἶναι σταθερόν.

2115. (2151). Εἰς τὸ ἐσωτερικὸν μιᾶς διέδρου γωνίας (Π, Ρ) δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς δύο ἕδρας Π καὶ Ρ εἶναι τὸ αὐτό. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν ἕνα σημεῖον Μ κινῆται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ τὰς ἕδρας Π καὶ Ρ μένει σταθερόν.

Β' Ὁμάς. **2116.** (2152). Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ δύο τεμνομένας εὐθείας.

2117. (2153). Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὰς ἕδρας διέδρου γωνίας.

2118. (2154). Τὰ τρία ἐπίπεδα Π, Ρ, Σ τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Ο. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὰ τρία αὐτὰ ἐπίπεδα.

2119. (2155). Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα νὰ εἶναι ἴσος μὲ $\mu : \nu$.

2120. (2156). Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα

τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα εἶναι ἴσον μὲ δοθὲν μῆκος λ.

2121. (2157). Δίδονται δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι Χ'ΟΧ καὶ Ψ'ΟΨ. Ποῖος εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο καὶ σχηματίζουν ἴσας γωνίας μὲ τὰς δύο δοθείσας εὐθείας.

2122. (2158). Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων ἑνὸς ἐπιπέδου Π τοιούτων, ὥστε αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ σημεῖα αὐτὰ μὲ δύο δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου, νὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν κλίσιν πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π.

2123. (2159). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Ο καὶ τῶν ὁποίων ἡ μικροτέρα ἀπόστασις ἀπὸ δοθεῖσαν εὐθεῖαν Α ἔχει δοθὲν μῆκος λ.

2124. (2160). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος, τὸν ὁποῖον γράφει τὸ μέσον Μ ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος σταθεροῦ μήκους, τοῦ ὁποίου τὰ ἄκρα κινοῦνται ἐπὶ δύο ὀρθογωνίων εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

2125. (2161). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Ο καὶ σχηματίζουν ἴσας γωνίας μὲ δύο δοθέντα ἐπίπεδα

2126. (2162). Δίδονται δύο εὐθεῖαι Χ καὶ ΑΖ καὶ ἕνα ἐπίπεδον Π κάθετον ἐπὶ τὴν Χ. Διὰ τῆς Χ φέρομεν ἕνα μεταβλητὸν ἐπίπεδον Ρ καὶ διὰ τῆς ΑΖ ἕνα μεταβλητὸν ἐπίπεδον Σ κάθετον ἐπὶ τὸ Ρ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου εἰς τὸ ὁποῖον συναντᾷ τὸ ἐπίπεδον Π ἡ τομὴ τῶν δύο ἐπιπέδων Ρ καὶ Σ.

2127. (2163). Ἀπὸ τὰς ἴσας πλευρὰς ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) φέρομεν τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ κάθετα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου. Κάθε ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ἄγεται ἀπὸ τὴν βάσιν ΒΓ ὁρίζει ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων Π καὶ Ρ τὰς πλευρὰς ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου Α'ΒΓ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΓ.

1ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν διαμέσων καὶ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν ὑψῶν τῶν τριγώνων Α'ΒΓ.

2ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεών των ἀπὸ τὰ ὡρισμένα ἐπίπεδα, εἶναι σταθερόν.

Γ' Ὁμάς. **2128.** (2164). Δίδεται μία δίεδρος (Π, Ρ), ἕνα σημεῖον Α ἐπὶ τῆς ἕδρας Π καὶ ἕνα σημεῖον Β ἐπὶ τῆς ἕδρας Ρ. Νὰ ἀχθῇ ἕνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον νὰ διέρχεται ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ νὰ τέμνῃ τὴν δίεδρον γωνίαν κατὰ ὀρθὴν γωνίαν.

2129. (2165). Δίδεται ἕνα ὀξυγώνιον τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ ὁρισθῇ ἕνα ἐπίπεδον Π παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ εἰς τρόπον, ὥστε ἡ γωνία ΒΑΓ νὰ προβάλλεται ἐπὶ τοῦ Π κατὰ ὀρθὴν γωνίαν.

2130. (2166). Δίδεται ἕνα τυχὸν τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ ὁρισθῇ ἕνα ἐπίπεδον Π οὕτως, ὥστε αἱ προβολαὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἐπί τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ νὰ εἶναι ἴσαι.

2131. (2167). Νὰ προσδιορισθοῦν τὰ ἐπίπεδα ἐπὶ τῶν ὁποίων ἕνα στρεβλὸν τετράπλευρον προβάλλεται κατὰ ἕνα παραλληλόγραμμον.

2132. (2168). ᾿Απὸ δοθὲν σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ δοθέντος ἐπιπέδου Π, νὰ ἀχθῇ μία εὐθεῖα ΟΧ, ἡ ὁποία νὰ σχηματίζῃ δοθεῖσαν γωνίαν μὲ μίαν πλαγίαν ΟΑ πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π.

2133. (2169). Διὰ δοθείσης εὐθείας ΟΑ, πλαγίας πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον Π, νὰ ἀχθῇ ἕνα ἐπίπεδον, τοῦ ὁποίου ἡ κλίσις πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π νὰ εἶναι ἴση μὲ δοθεῖσαν γωνίαν ω.

2134. (2170). Δίδονται δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα Π καὶ Ρ καὶ ζητεῖται νὰ ἀχθῇ εἰς τὸ ἐπίπεδον Ρ καὶ ἀπὸ ἕνα σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ Ρ, μία εὐθεῖα, τῆς ὁποίας ἡ κλίσις πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π νὰ εἶναι ἴση μὲ δοθεῖσαν γωνίαν ω.

Δ' ῾Ομάς. **2135.** (2171). Δίδεται δίεδρος γωνία (Π, Ρ) καὶ μία εὐθεῖα ΑΒ ἐπὶ τῆς ἕδρας Π. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ἕδρας Ρ ἕνα σημεῖον Γ τοιοῦτον, ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ νὰ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Γ καὶ ἰσοσκελὲς ἢ νὰ εἶναι ἰσόπλευρον.

2136. (2172). Δίδεται μία δίεδρος γωνία Π-ΧΥ-Ρ καὶ μία ἡμιευθεῖα ΟΓ, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ ἕνα σημεῖον Ο τῆς ἀκμῆς ΧΥ. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον νὰ διέρχεται ἀπὸ τὴν ΟΓ καὶ νὰ τέμνῃ τὰς ἕδρας τῆς διέδρου κατὰ μίαν γωνίαν, τῆς ὁποίας ἡ διχοτόμος νὰ εἶναι ἡ ΟΓ.

2137. (2173). Δίδονται τρεῖς τεμνόμεναι εὐθεῖαι ΧΟΧ', ΥΟΥ', ΖΟΖ', αἱ ὁποῖαι δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Νὰ κατασκευασθῇ μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο καὶ νὰ σχηματίζῃ ἴσας γωνίας μὲ τὰς τρεῖς δοθείσας εὐθείας.

2138. (2174). Δίδεται ἕνα ἐπίπεδον Π, μία εὐθεῖα Ε παράλληλος πρὸς τὸ Π, ἡ ὁποία προβάλλεται ἐπὶ τοῦ Π κατὰ τὴν εὐθεῖαν Ε' καὶ ἕνα σημεῖον Ο τοῦ χώρου καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π ἕνα σημεῖον Ο' τοιοῦτον, ὥστε ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου Ο ἀπὸ ἕνα τυχὸν σημεῖον Μ τῆς Ε νὰ εἶναι σταθερῶς ἴση μὲ τὴν ἀπόστασιν τοῦ Ο' ἀπὸ τὴν προβολὴν Μ' τοῦ Μ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π.

2139. (2175). Νὰ κατασκευασθῇ μία εὐθεια, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Ο καὶ νὰ σχηματίζῃ ἴσας γωνίας μὲ τρία δοθέντα ἐπίπεδα Π, Ρ, Σ.

2140. (2176). Δίδονται τρία ἐπίπεδα Π, Ρ, Σ τεμνόμενα εἰς τὸ Ο καὶ ζητεῖται νὰ κατασκευασθοῦν τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν κλίσιν πρὸς τὰ τρία αὐτὰ ἐπίπεδα.

2141. (2177). Δίδονται εἰς τὸ διάστημα τέσσαρες εὐθεῖαι Α, Β, Γ, Δ καὶ ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ μία εὐθεῖα Χ παράλληλος πρὸς τὴν Δ καὶ τῆς ὁποίας αἱ βραχύτεραι ἀποστάσεις ἀπὸ τὰς εὐθείας Α, Β καὶ Γ νὰ εἶναι ἴσαι.

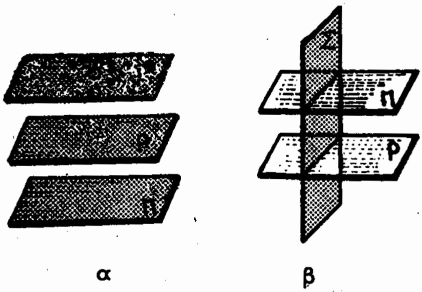
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ΄.

ΣΤΕΡΕΑΙ ΓΩΝΙΑΙ

698. Ἀμοιβαῖαι θέσεις τριῶν ἐπιπέδων. Ἔστωσαν τρία ἐπίπεδα Π, Ρ, Σ. Γνωρίζομεν, ὅτι δύο ἐπίπεδα ἔστω τὰ Π καὶ Ρ, δύνανται:

1ον. *Νὰ εἶναι παράλληλα.* 2ον. *Νὰ τέμνωνται* καὶ 3ον. *Νὰ συμπίπτουν.*

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν σχετικὴν θέσιν τῶν τριῶν ἐπιπέδων, ἀρκεῖ νὰ ἐξετάσωμεν τὴν θέσιν τοῦ τρίτου ἐπιπέδου Σ πρὸς τὰ δύο ἄλλα ἐπίπεδα:



Σχ. 477.

I. Τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ εἶναι παράλληλα.

Τὸ τρίτον ἐπίπεδον Σ:

1ον. Δύναται νὰ εἶναι παράλληλον πρὸς τὰ Π καὶ Ρ *(Σχ. 477 α)*.

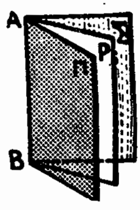
2ον. Δύναται νὰ τέμνῃ τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ *(Σχ. 477 β)*. Αἱ τομαὶ τῶν ἐπιπέδων Π καὶ Ρ ὑπὸ τοῦ Σ εἶναι παράλληλοι.

3ον. Δύναται νὰ συμπίπτῃ μὲ ἕνα ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα αὐτά, ἔστω μὲ τὸ Ρ.

II. Τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ τέμνονται.

Τὸ τρίτον ἐπίπεδον Σ:

1ον. Δύναται νὰ διέρχεται ἀπὸ τὴν τομὴν αὐτῶν ΑΒ *(Σχ. 478)*, ὁπότε θὰ εἶναι ἐκτὸς τῆς διέδρου γωνίας Π-ΑΒ-Ρ, ποὺ σχηματίζουν τὰ Π καὶ Ρ ἢ καὶ ἐντὸς αὐτῆς.



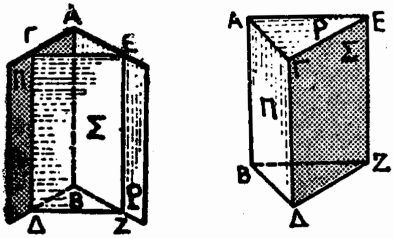
Σχ. 478.

2ον. Δύναται νὰ τέμνῃ τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ, χωρὶς νὰ τέμνῃ καὶ τὴν τομήν των ΑΒ *(Σχ. 479 α, β)*. Εἰ τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ΑΒ, ὡς παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον Σ, εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὰς τομὰς ΓΔ καὶ ΕΖ *(Σχ. 479 α, β)*.

3ον, Δύναται νὰ τέμνῃ τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ καὶ νὰ τέμνῃ καὶ τὴν τομήν των ΑΒ *(Σχ. 480)*.

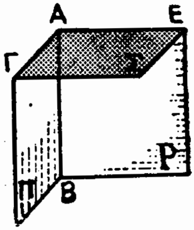
Π.χ. οἱ δύο συνεχόμενοι τοῖχοι μιᾶς αἰθούσης καὶ τὸ πάτωμα αὐτῆς.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὰ ἐπίπεδα τέμνονται ἀνὰ δύο καὶ αἱ



α β

Σχ. 479.



Σχ. 480.

τομαὶ ΑΓ καὶ ΑΕ τῶν ἐπιπέδων Π καὶ Ρ ὑπὸ τοῦ Σ διέρχονται ἀπὸ ἕνα σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον εἶναι κοινὸν τῶν τριῶν ἐπιπέδων.

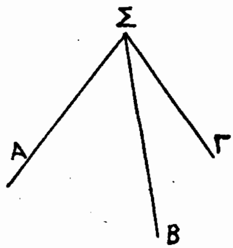
699. Τί εἶναι τρίεδρος γωνία; Εἴδομεν ἀνωτέρω (ΙΙ 3ον), ὅτι τὰ ἐπίπεδα Π, Ρ καὶ Σ δύνανται νὰ τέμνωνται ἀνὰ δύο καὶ νὰ διέρχωνται ἀπὸ ἕνα κοινὸν σημεῖον Α *(Σχ. 480)*.

Τὰ τρία αὐτὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἕνα κοινὸν σημεῖον καὶ περατοῦνται εἰς τὰς τομάς των, περικλείουν ἕνα μέρος τοῦ ἀπείρου διαστήματος, τὸ ὁποῖον λέγεται ***τρίεδρος γωνία***.

Τὸ κοινὸν σημεῖον Α τῶν ἐπιπέδων Π, Ρ, Σ λέγεται ***κορυφὴ*** *τῆς τριέδρου γωνίας.*

Τὰ ἐπίπεδα Π, Ρ καὶ Σ λέγονται ***ἕδραι*** *αὐτῆς καὶ αἱ ἡμιευθεῖαι ΑΒ, ΑΓ, ΑΕ, κατὰ τὰς ὁποίας τέμνονται τὰ ἐπίπεδα Π, Ρ, Σ λέγονται* ***ἀκμαὶ*** *αὐτῆς.*

Μία τρίεδρος γωνία, ἡ ὁποία ἔχει κορυφὴν τὸ Σ καὶ ἀκμὰς τὰς ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ *(Σχ. 481)* γράφεται Σ.ΑΒΓ.



Σχ. 481.

Εἰς κάθε τρίεδρον διακρίνομεν:

1ον. Τὰς γωνίας, αἱ ὁποῖαι περιέχονται μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ἀκμῶν καὶ τὰς ὁποίας ὀνομάζομεν ***ἕδρας*** *ἢ* ***ἐπιπέδους γωνίας*** *τῆς τριέδρου.*

Π.χ. Ἕδραι τῆς τριέδρου γωνίας Σ.ΑΒΓ εἶναι αἱ γων.ΑΣΒ, γων.ΒΣΓ, γων.ΓΣΑ.

2ον ***Τὰς διέδρους γωνίας,*** *αἱ ὁποῖαι περιέχονται μεταξὺ* ***δύο***

διαδοχικῶν ἑδρῶν καὶ ἔχουν ὡς ἀκμὰς τὰς ἀκμὰς τῆς τριέδρου γωνίας.

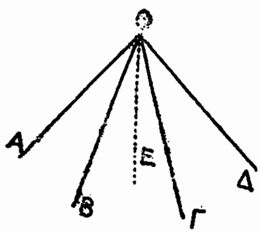
Αἱ δίεδροι γωνίαι μιᾶς τριέδρου γωνίας παρίστανται μὲ τὰς ἀκμὰς ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ ἢ ἁπλῶς μὲ Α, Β, Γ καὶ αἱ ἀπέναντι τῶν διέδρων ἕδραι της μὲ τὰ μικρὰ γράμματα α, β, γ ἀντιστοίχως.

Μία τρίεδρος γωνία λέγεται ***τρισορθογώνιος****, ὅταν αἱ τρεῖς ἕδραι της εἶναι ὀρθαὶ γωνίαι.*

Οἱ συνεχόμενοι τοῖχοι μιᾶς αἰθούσης σχηματίζουν μίαν τρισορθογώνιον τρίεδρον γωνίαν.

700. Στερεὰ ἢ πολυεδρικὴ γωνία. *Τὸ μέρος τοῦ ἀπείρου διαστήματος, τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ τρία ἢ περισσότερα ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὸν σημεῖον καὶ περατοῦνται εἰς τὰς διαδοχικὰς τομάς των, λέγεται* ***στερεὰ ἢ πολυεδρικὴ γωνία****.*

Ὅπως εἰς τὴν τρίεδρον γωνίαν, οὕτω καὶ εἰς κάθε πολυεδρικὴν γωνίαν Ο.ΑΒΓΔΕ (*Σχ. 482*) διακρίνομεν τὴν *κορυφήν* της Ο, τὰς *ἕδρας* της ἢ *ἐπιπέδους γωνίας* της ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΔ, ΔΟΕ, ΕΟΑ, τὰς *ἀκμάς* της ΟΑ, ΟΒ.... τὰς *διέδρους γωνίας* της ΟΑ, ΟΒ, ...



Σχ. 482.

Διὰ νὰ ὀνομάσωμεν μίαν στερεὰν γωνίαν ἢ ἐκφωνοῦμεν μόνον τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς της ἢ ἐκφωνοῦμεν πρῶτον τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς της καὶ ἔπειτα κατὰ σειράν, ἀνὰ ἕνα τὰ γράμματα, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ τῶν ἀκμῶν της.

Π.χ. λέγομεν ἡ στερεὰ γωνία Ο.ΑΒΓΔΕ καὶ γράφομεν: στερεὰ γωνία Ο.ΑΒΓΔΕ.

Μία στερεὰ γωνία λέγεται ***τρίεδρος, τετράεδρος*** *κλπ., ἐὰν ἔχῃ τρεῖς, τέσσαρας κλπ. ἕδρας.*

Μία στερεὰ γωνία λέγεται ***κυρτή****, ἐὰν κάθε ἕδρα της, προεκτεινομένη, ἀφίνῃ ὁλόκληρον τὴν στερεὰν γωνίαν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος της.* ***Μία*** *τρίεδρος γωνία εἶναι πάντοτε κυρτή.*

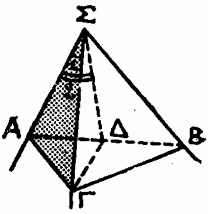
701. Θεώρημα. ***Κάθε ἕδρα τριέδρου στερεᾶς γωνίας εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, καὶ μεγαλ. τῆς διαφ. των***

Ὑπόθεσις: Ἔστω ἡ τρίεδρος στερεὰ γωνία Σ.ΑΒΓ καὶ ΑΣΒ ἡ μεγαλυτέρα ἕδρα αὐτῆς.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι: $\widehat{ΑΣΒ} < \widehat{ΑΣΓ} + \widehat{ΓΣΒ}$.

Ἀπόδειξις: Εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΣΒ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΣΔ οὕτως, ὥστε νὰ σχηματίζῃ μὲ τὴν εὐθεῖαν ΣΑ γωνίαν ΑΣΔ ἴσην μὲ τὴν γω-

νίαν ΑΣΓ. Ἐπειδὴ ἡ ἕδρα ΑΣΒ εἶναι, ἐξ ὑποθέσεως μεγαλυτέρα τῆς ἕδρας ΑΣΓ, ἡ εὐθεῖα ΣΔ θὰ κεῖται ἐντὸς τῆς γωνίας ΑΣΒ. Ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΣΔ καὶ ΣΓ λαμβάνομεν δύο μήκη ἴσα, ΣΔ=ΣΓ. Διὰ τῆς εὐθείας ΔΓ φέρομεν ἕνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὰς ἀκμὰς ΣΑ καὶ ΣΒ εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β, καὶ ἔστωσαν ΑΓ, ΓΒ, ΒΑ αἱ τομαὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ καὶ τῶν ἑδρῶν τῆς τριέδρου Σ.



Σχ. 483.

Τὰ σχηματισθέντα τρίγωνα ΑΣΓ καὶ ΑΣΔ ἔχουν τὰς γωνίας Σ_1 καὶ Σ_2 ἴσας ἐκ κατασκευῆς, τὴν πλευρὰν ΣΑ κοινὴν καὶ τὰς πλευρὰς ΣΓ=ΣΔ ἐκ κατασκευῆς· ἄρα θὰ εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ΑΔ=ΑΓ.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχομεν

$$AB<A\Gamma+\Gamma B \quad \text{ἢ} \quad A\Delta+\Delta B<A\Gamma+\Gamma B \qquad (1)$$

Ἀφαιροῦμεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς ἀνισότητος (1) τὰ ἴσα τμήματα ΑΔ καὶ ΑΓ καὶ λαμβάνομεν $\Delta B<\Gamma B$ (2)

Τὰ τρίγωνα ΣΓΒ καὶ ΣΔΒ ἔχουν τὴν πλευρὰν ΣΒ κοινήν, τὴν ΣΓ=ΣΔ καὶ τὴν ΔΒ μικροτέραν τῆς ΒΓ· ἄρα τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἄνισα καὶ ἀπέναντι τῆς μικροτέρας πλευρᾶς θὰ κεῖται μικροτέρα γωνία· ἤτοι θὰ εἶναι $\Delta\widehat{\Sigma}B<\Gamma\widehat{\Sigma}B$.

Προσθέτομεν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῆς ἀνισότητος αὐτῆς τὰς ἴσας γωνίας ΑΣΔ καὶ ΑΣΓ καὶ ἔχομεν

$$A\widehat{\Sigma}\Delta+\Delta\widehat{\Sigma}B<A\widehat{\Sigma}\Gamma+\Gamma\widehat{\Sigma}B \quad \text{ἢ} \quad A\widehat{\Sigma}B<A\widehat{\Sigma}\Gamma+\Gamma\widehat{\Sigma}B.$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Κάθε ἕδρα τριέδρου στερεᾶς γωνίας....***

702. Θεώρημα. ***Εἰς κάθε κυρτὴν πολυεδρικὴν γωνίαν, τὸ ἄθροισμα τῶν ἑδρῶν της εἶναι μικρότερον τῶν τεσσάρων ὀρθῶν.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω μία κυρτὴ πολυεδρικὴ γωνία Ο.ΑΒΓΔΕ *(Σχ. 484)* καὶ $A\widehat{O}B$, $B\widehat{O}\Gamma$, ... αἱ ἕδραι της.

Συμπέρασμα: Ἂν παραστήσωμεν μὲ Σ τὸ ἄθροισμα τῶν ἑδρῶν της $A\widehat{O}B$, $B\widehat{O}\Gamma$, ... εἰς ὀρθὰς γωνίας, θὰ δείξωμεν, ὅτι $\Sigma<4$ ὀρθ.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν ἕνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον νὰ τέμνῃ ὅλας τὰς ἀκμάς της πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς κορυφῆς Ο καὶ ἔστω ΑΒΓΔΕ ἡ τομὴ τῆς πολυεδρικῆς γωνίας ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ.

Γνωρίζομεν (§ 701) ὅτι κάθε ἕδρα τριέδρου στερεᾶς γωνίας, εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.

Οὕτω ἀπὸ τὴν τρίεδρον Α.ΒΟΕ ἔχομεν

$$\mathrm{E\widehat{A}B < O\widehat{A}E + O\widehat{A}B} \qquad (1)$$

Ὁμοίως ἀπὸ τὰς τριέδρους Β.ΓΟΑ, Γ.ΔΟΒ, Δ.ΕΟΓ,.... ἔχομεν

$$\mathrm{A\widehat{B}\Gamma < O\widehat{B}A + O\widehat{B}\Gamma} \qquad (2)$$

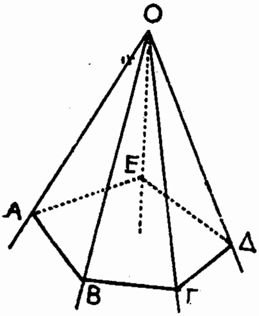
$$\mathrm{B\widehat{\Gamma}\Delta < O\widehat{\Gamma}B + O\widehat{\Gamma}\Delta} \qquad (3)$$

. . . .

Προσθέτομεν τὰς ἀνισότητας (1), (2), (3).... κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\mathrm{E\widehat{A}B + A\widehat{B}\Gamma + B\widehat{\Gamma}\Delta + \cdots < O\widehat{A}E + O\widehat{A}B + O\widehat{B}A + O\widehat{B}\Gamma + O\widehat{\Gamma}B + O\widehat{\Gamma}\Delta + \cdots} \quad (4)$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι εἰς τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἀνισότητος (4) ἔχομεν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ,. .. τῆς τομῆς. Ἐὰν ν εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου αὐτοῦ (ἴσος μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀκμῶν τῆς στερεᾶς γωνίας), τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου αὐτοῦ θὰ εἶναι ἴσον μὲ 2ν—4 ὀρθάς. Εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἀνισότητος (4) ἔχομεν τὸ ἄθροισμα τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν τῶν τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς κορυφάς των εἰς τὸ σημεῖον Ο· τὸ ἄθροισμα αὐτὸ εἶναι ἴσον μὲ 2ν—Σ ὀρθάς. Ἡ ἀνισότης (4) δύναται λοιπὸν νὰ γραφῇ:



Σχ. 484.

$(2\nu-4)$ ὀρθ. $<(2\nu-\Sigma)$ ὀρθ. ἢ -4 ὀρθ. $<-\Sigma$ ὀρθ. ἢ $\Sigma < 4$ ὀρθ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Εἰς κάθε κυρτὴν πολυεδρικήν....***

Ἀσκήσεις: 2142, 2143, 2144, 2145.

Κατασκευὴ τριέδρου στερεᾶς γωνίας

703. Πρόβλημα. ***Νὰ κατασκευασθῇ τρίεδρος στερεὰ γωνία, τῆς ὁποίας δίδονται αἱ τρεῖς ἕδραι της α, β, γ.***

Ἔστω, ὅτι ἡ β εἶναι ἡ μεγαλυτέρα ἕδρα.

Διὰ νὰ ἔχῃ τὸ πρόβλημα λύσιν πρέπει (§ 701, 702) νὰ εἶναι

$$\beta < \alpha + \gamma \quad \text{καὶ} \quad \alpha + \beta + \gamma < 4 \text{ ὀρθ.}$$

Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς μεγαλυτέρας γωνίας ΑΣΓ=β κατασκευάζομεν τὰς γωνίας ΑΣΕ=α καὶ ΓΣΔ=γ. Μὲ κέντρον τὸ Σ καὶ ἀκτῖνα οἱανδήποτε γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὰς πλευρὰς τῶν γωνιῶν α, β, γ, ἔστω εἰς τὰ σημεῖα Ε, Α, Γ, Δ.

Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν α, β, γ εἶναι μικρότερον τῶν 4 ὀρθῶν γωνιῶν, τὸ ἄθροισμα τῶν τόξων ΕΑ, ΑΓ, ΓΔ θὰ εἶναι μικρότερον περιφερείας.

Ἀπὸ τὰ σημεῖα Ε καὶ Δ φέρομεν καθέτους ΕΘ καὶ ΔΚ ἐπὶ τὰς ΣΑ καὶ ΣΓ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Ε′ καὶ Δ′.

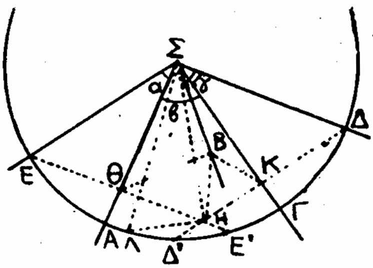
Ἐπειδὴ αἱ ἀκτῖνες ΣΑ καὶ ΣΓ εἶναι κάθετοι ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰς χορδὰς ΕΕ′ καὶ ΔΔ′ θὰ εἶναι

$$\widehat{\mathrm{E}\mathrm{A}}=\widehat{\mathrm{A}\mathrm{E}'} \quad \text{καὶ} \quad \widehat{\mathrm{A}\Gamma}=\widehat{\Gamma\Delta'}.$$

Ἐπειδὴ ἡ ἕδρα ΑΣΓ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων θὰ εἶναι

$$\widehat{\mathrm{A}\Gamma}<\widehat{\mathrm{E}\mathrm{A}}+\widehat{\Gamma\Delta} \quad \text{ἢ} \quad \widehat{\mathrm{A}\Gamma}<\widehat{\mathrm{A}\mathrm{E}'}+\widehat{\Gamma\Delta'}.$$

Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν τόξων ΑΕ′ καὶ ΓΔ′ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τόξου ΑΓ, τὸ σημεῖον Δ′ θὰ κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Ε′· ἑπομένως αἱ χορδαὶ ΕΕ′ καὶ ΔΔ′ τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Η, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς περιφερείας Σ.



Σχ. 485.

Φέρομεν τὴν ΣΗ καὶ τὴν ΗΛ κάθετον ἐπὶ τὴν ΣΗ μέχρις, ὅτου συναντήσῃ τὴν περιφέρειαν εἰς ἕνα σημεῖον Λ. Ἀπὸ τὸ Η φέρομεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου αὐτῆς λαμβάνομεν ἕνα μῆκος ΗΒ=ΗΛ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΣΒ.

Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ τρίεδρος Σ.ΑΒΓ εἶναι ἡ ζητουμένη.

Πράγματι· τὰ τρίγωνα ΣΗΒ καὶ ΣΗΛ εἶναι ἴσα, διότι εἶναι ὀρθογώνια εἰς τὸ Η καὶ ἔχουν τὰς καθέτους πλευράς των, ἴσας· ἤτοι τὴν ΣΗ κοινὴν καὶ ΗΒ=ΗΛ ἐκ κατασκευῆς· ἄρα θὰ εἶναι καὶ ΣΒ=ΣΛ, δηλ. ἡ ΣΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου (Σ, ΣΑ).

Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΒΘ· αὕτη εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΣΑ κατὰ τὸ θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων (ΗΒ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου, ἡ ΗΘ κάθετος ἐπὶ τὴν ΣΑ· ἄρα ἡ ΒΘ κάθετος ἐπὶ τὴν ΣΑ). Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΣΘΒ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Θ.

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΣΒΘ καὶ ΣΘΕ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὴν κάθετον πλευρὰν ΣΘ κοινὴν καὶ τὰς ὑποτεινούσας των ΣΒ καὶ ΣΕ ἴσας, ὡς ἀκτῖνας τοῦ κύκλου Σ· ἄρα θὰ εἶναι

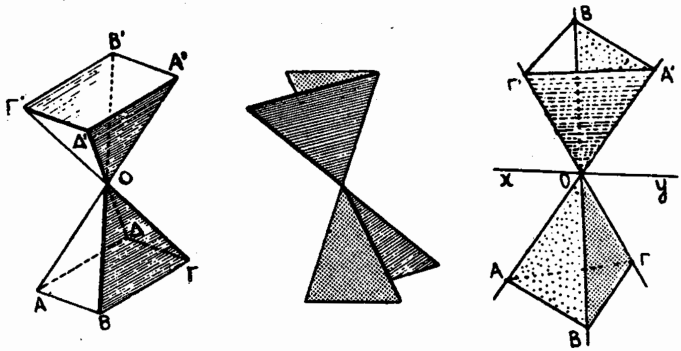
$$\text{γων.}\Theta\Sigma\mathrm{B}=\text{γων.}\mathrm{E}\Sigma\Theta \quad \text{ἢ} \quad \text{γων.}\mathrm{A}\Sigma\mathrm{B}=\text{γων.}\mathrm{E}\Sigma\mathrm{A}=\alpha.$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι ἡ γωνία ΒΣΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν ΓΣΔ=γ.

Ὥστε ἡ τρίεδρος Σ.ΑΒΓ ἔχει τὰς τρεῖς ἕδρας της ἴσας μὲ τὰς τρεῖς δοθείσας ἕδρας α, β, γ καὶ ἑπομένως εἶναι ἡ ζητουμένη.

Συμμετρικαι στερεαὶ γωνίαι

704. Συμμετρικαὶ στερεαὶ γωνίαι. Ἐὰν προεκτείνωμεν τὰς ἀκμὰς μιᾶς στερεᾶς γωνίας π.χ. τῆς τριέδρου Ο.ΑΒΓ *(Σχ. 486)* πρὸς



Σχ. 486.

τὸ μέρος τῆς κορυφῆς της Ο, σχηματίζεται μία νέα τρίεδρος γωνία Ο.Α'Β'Γ', ἡ ὁποία λέγεται ***συμμετρικὴ*** τῆς πρώτης, ἢ ***κατὰ κορυφὴν*** αὐτῆς.

Εἶναι φανερόν, ὅτι καὶ ἡ Ο.ΑΒΓ εἶναι συμμετρικὴ τῆς Ο.Α'Β'Γ'.

Αἱ συμμετρικαὶ στερεαὶ γωνίαι ἔχουν ὅλα τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα των ἴσα· πράγματι, αἱ ἕδραι τῆς τριέδρου Ο.ΑΒΓ εἶναι ἴσαι, μία πρὸς μίαν, πρὸς τὰς ἕδρας τῆς συμμετρικῆς της Ο.Α'Β'Γ', (π.χ. $A\widehat{O}B = A'\widehat{O'}B'$, ὡς κατὰ κορυφὴν γωνίαι). Ἐπίσης αἱ δίεδροι γωνίαι των εἶναι μία πρὸς μίαν ἴσαι (π.χ. διέδρ.ΟΑ=διέδρ.ΟΑ') ὡς κατὰ κορυφὴν δίεδροι γωνίαι.

Ἂν καὶ ἔχουν ὅλα τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα των ἴσα ἕνα πρὸς ἕνα, ***αἱ δύο αὗται τρίεδροι γωνίαι δὲν εἶναι ἴσαι,*** δηλ. δὲν δύναται νὰ ἐφαρμόσῃ (νοερῶς) ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης.

Πράγματι. *1ον.* Ἐὰν φαντασθῶμεν, ὅτι τὸ ἐπίπεδον ΑΟΓ συμπίπτῃ μὲ τὸ ἐπίπεδον τοῦ φύλλου σχεδιάσεως, τότε ἡ ἕδρα Α'ΟΓ' κεῖται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ἡ ἀκμὴ ΟΒ κεῖται ἔμπροσθεν αὐτοῦ καὶ ἡ ΟΒ' ὄπισθεν αὐτοῦ. Ἂν στρέψωμεν τὴν τρίεδρον Ο.Α'Β'Γ' περὶ τὸ

σημεῖον Ο κατὰ 180°, οὕτως ὥστε ἡ ἕδρα Α'ΟΓ' νὰ ὀλισθαίνῃ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου της, τότε ἡ ἀκμὴ ΟΑ' θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ἀκμῆς ΟΑ, ἡ ΟΓ' θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΟΓ, ἀλλὰ ἡ ἀκμὴ ΟΒ', ἡ ὁποία κατὰ τὴν κίνησιν τῆς τριέδρου ἐξακολουθεῖ νὰ κεῖται κάτω τοῦ ἐπιπέδου τῆς σχεδιάσεως, δὲν θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΟΒ, ἡ ὁποία κεῖται ἄνω τοῦ ἐπιπέδου τῆς σχεδιάσεως· αἱ τρίεδροι λοιπὸν Ο.ΑΒΓ καὶ Ο.Α'Β'Γ' δὲν ἐφαρμόζουν καὶ ἐπομένως δὲν εἶναι ἴσαι.

2ον. Ἐὰν ἡ τρίεδρος γωνία Ο.Α'Β'Γ' στραφῇ περὶ τὴν διχοτόμον xy τῆς ἐπιπέδου γωνίας ΑΟΓ' κατὰ 180°, ἡ ΟΓ' θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΟΑ καὶ ἡ ΟΑ' θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΟΓ καὶ ἐπομένως ἡ ἕδρα Γ'ΟΑ' θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἕδρας ΑΟΓ· ἀλλὰ ἡ τρίτη ἀκμὴ ΟΒ', ἡ ὁποία ἔκειτο ὄπισθεν τοῦ ἐπιπέδου τῆς σχεδιάσεως ΑΟΓ, θὰ λάβῃ θέσιν ἄνω τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ, ὅπως εἶναι καὶ ἡ ΟΒ. Ἐν τούτοις αἱ δύο τρίεδροι δὲν συμπίπτουν γενικῶς, διότι ἡ δίεδρος ΟΓ' δὲν εἶναι, γενικῶς, ἴση μὲ τὴν δίεδρον ΟΑ καὶ ἐπομένως τὸ ἐπίπεδον Γ'ΟΒ' δὲν θὰ λάβῃ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἐπιπέδου ΑΟΒ· ὁμοίως τὸ ἐπίπεδον Α'ΟΒ' δὲν θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΒΟΓ καὶ ἐπομένως ἡ ἀκμὴ ΟΒ' δὲν θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΟΒ.

705. Παρατήρησις. Διὰ νὰ ἐφαρμόσῃ ἡ τρίεδρος Ο.Α'Β'Γ' ἐπὶ τῆς συμμετρικῆς της Ο.ΑΒΓ πρέπει αἱ δίεδροι γωνίαι ΟΑ καὶ ΟΓ νὰ εἶναι ἴσαι· εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ τέσσαρες δίεδροι γωνίαι ΟΑ, ΟΓ, ΟΑ', ΟΓ' εἶναι ὅλαι ἴσαι μεταξύ των καὶ ὅταν μετὰ τὴν περιστροφὴν περὶ τὴν xy, ἐφαρμόσῃ ἡ ΟΓ' ἐπὶ τῆς ΟΑ, ἡ ΟΑ' ἐπὶ τῆς ΟΓ, τὸ ἐπίπεδον Γ'ΟΒ' θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΟΒ καὶ τὸ ἐπίπεδον Α'ΟΒ' θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ΓΟΒ καὶ ἐπομένως ἡ ἀκμὴ ΟΒ' θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ἀκμῆς ΟΒ· ἐξ αὐτοῦ συνάγομεν, ὅτι:

Δύο συμμετρικαὶ τρίεδροι γωνίαι ἐφαρμόζουν μεταξύ των, ὅταν ἡ μία ἐξ αὐτῶν ἔχῃ δύο διέδρους γωνίας ἴσας.

706. Ἰσοσκελὴς τρίεδρος γωνία. *Μία τρίεδρος γωνία λέγεται* ***ἰσοσκελής****, ἐὰν ἔχῃ δύο διέδρους γωνίας ἴσας.*

Ἔχοντες ὑπ' ὄψει τὴν § 705 δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, ὅτι:

Ἡ ἰσοσκελὴς τρίεδρος γωνία εἶναι ἴση μὲ τὴν συμμετρικήν της· καὶ κάθε τρίεδρος, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μὲ τὴν συμμετρικήν της εἶναι ἰσοσκελές.

707. Θεώρημα. ***Ἐὰν μία τρίεδρος γωνία εἶναι ἰσοσκελής, αἱ ἕδραι της, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἀπέναντι τῶν ἴσων διέδρων γωνιῶν της, εἶναι ἴσαι.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω ἡ τρίεδρος γωνίας Ο.ΑΒΓ *(Σχ. 486)* ἡ ὁποία ἔχει τὰς διέδρους γωνίας ΟΑ καὶ ΟΓ ἴσας.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\widehat{ΒΟΓ}=\widehat{ΑΟΒ}$.

Ἀπόδειξις: Ἔστω Ο.Α'Β'Γ' ἡ συμμετρικὴ τῆς τριέδρου γωνίας Ο.ΑΒΓ. Ὅπως ἐδείξαμεν προηγουμένως (§ 705), ἐὰν στρέψωμεν τὴν τρίεδρον γωνίαν Ο.Α'Β'Γ' περὶ τὴν διχοτόμον xy τῆς ἐπιπέδου γωνίας ΑΟΓ' κατὰ 180°, αὐτὴ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς τριέδρου Ο.ΑΒΓ καὶ ἐπομένως ἡ ΟΓ' θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΟΑ, ἡ ΟΑ' ἐπὶ τῆς ΟΓ καὶ ἡ ΟΒ' ἐπὶ τῆς ΟΒ. Ἀλλὰ τότε ἡ ἕδρα Γ'ΟΒ' θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἕδρας ΑΟΒ καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι ἴση μὲ αὐτήν· δηλ. θὰ εἶναι $\widehat{Γ'ΟΒ'}=\widehat{ΑΟΒ}$ (1)

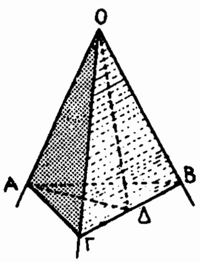
Ἀλλὰ $\widehat{Γ'ΟΒ'}=\widehat{ΒΟΓ}$ (2), ὡς κατὰ κορυφήν.

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι $\widehat{ΒΟΓ}=\widehat{ΑΟΒ}$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: *Ἐὰν μία τρίεδρος γωνία. . . .*

708. Θεώρημα. ***Ἐάν, εἰς μίαν τρίεδρον γωνίαν, δύο δίεδροι εἶναι ἄνισοι καὶ αἱ ἕδραι, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἀπέναντι τῶν διέδρων αὐτῶν εἶναι ἄνισοι καὶ ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας διέδρου κεῖται μεγαλυτέρα ἕδρα.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω ἡ τρίεδρος γωνία Ο.ΑΒΓ *(Σχ. 487)* εἰς τὴν ὁποίαν ὑποθέτομεν, ὅτι εἶναι: δίεδρ. ΟΑ > δίεδρ. ΟΒ.



Σχ. 487.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\widehat{ΓΟΒ}>\widehat{ΑΟΓ}$.

Ἀπόδειξις: Διὰ τῆς ἀκμῆς ΟΑ φέρομεν ἕνα ἐπίπεδον ΟΑΔ, τὸ ὁποῖον νὰ σχηματίζῃ μὲ τὴν ἕδραν ΑΟΒ μίαν δίεδρον γωνίαν ἴσην μὲ τὴν δίεδρον ΟΒ· τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ θὰ πέσῃ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς διέδρου ΟΑ καὶ θὰ τέμνῃ τὴν ἕδραν ΒΟΓ κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΟΔ, ἡ ὁποία θὰ κεῖται ἐντὸς τῆς γωνίας ΒΟΓ.

Εἰς τὴν τρίεδρον Ο.ΑΒΔ αἱ δίεδροι ΟΑ καὶ ΟΒ εἶναι ἴσαι καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν ἕδραι ΔΟΒ καὶ ΑΟΔ· δηλ. θὰ εἶναι

$$\widehat{ΔΟΒ}=\widehat{ΑΟΔ} \qquad (1)$$

Ἀλλὰ εἰς τὴν τρίεδρον Ο.ΑΓΔ εἶναι

$$\widehat{ΑΟΔ}+\widehat{ΓΟΔ}>\widehat{ΑΟΓ}.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἀνισότητα αὐτὴν τὴν ΑΟΔ μὲ τὴν ἴσην της ΔΟΒ καὶ ἔχομεν $\widehat{ΔΟΒ}+\widehat{ΓΟΔ}>\widehat{ΑΟΓ}$ ἢ $\widehat{ΓΟΒ}>\widehat{ΑΟΓ}$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: *Ἐὰν εἰς μίαν τρίεδρον. . . .*

709. Θεωρήματα ἀντίστροφα. Εἰς τὰ δύο προηγούμενα θεωρήματα ἀντιστοιχοῦν τὰ κάτωθι δύο ἀντίστροφα θεωρήματα:

I. Ἐὰν εἰς μίαν τρίεδρον γωνίαν, δύο ἕδραι της εἶναι ἴσαι, αἱ δίεδροι, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἀπέναντι αὐτῶν, εἶναι ἴσαι.

Διότι, ἐὰν αἱ δίεδροι ἦσαν ἄνισοι καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν ἕδραι θὰ ἦσαν ἄνισοι (§ 708)· τοῦτο ὅμως ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας.

II. Ἐὰν εἰς μίαν τρίεδρον, δύο ἕδραι εἶναι ἄνισοι καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν δίεδροι εἶναι ἄνισοι καὶ ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας ἕδρας κεῖται ἡ μεγαλυτέρα δίεδρος.

Ὑπόθεσις: Ἔστω ὅτι εἶναι $\widehat{BO\Gamma} > \widehat{AO\Gamma}$ *(Σχ. 487).*
Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι, θὰ εἶναι καὶ διέδρ. $OA >$ δίεδρ. OB.

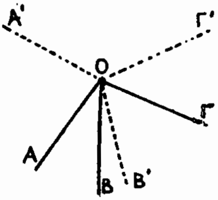
Ἀπόδειξις: Ἐὰν ἦτο διεδρ. $OA =$ διεδρ. OB, θὰ ἦτο (§ 707) καὶ $\widehat{BO\Gamma} = \widehat{AO\Gamma}$, τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν.

Ἐὰν ἦτο δίεδρ. $OA <$ δίεδρ. OB, θὰ ἦτο καὶ $\widehat{BO\Gamma} < \widehat{AO\Gamma}$, τὸ ὁποῖον πάλιν ἀντίκειται εἰς τήν ὑπόθεσίν μας· ὥστε εἶναι δίεδρ. $OA >$ δίεδρ. OB.

Ἀσκήσεις: 2146, 2147, 2148, 2149, 2150, 2151.

Τρίεδροι παραπληρωματικαὶ γωνίαι

710. Τρίεδροι παραπληρωματικαὶ γωνίαι. Ἔστω μία τρίεδρος γωνία Ο.ΑΒΓ· ἀπὸ τὴν κορυφὴν Ο φέρομεν τὴν ἡμιευθεῖαν ΟΑ′ κάθετον ἐπὶ τὴν ἕδραν ΒΟΓ καὶ κειμένην πρὸς τὸ μέρος τῆς ἀκμῆς ΟΑ· ἔπειτα τὴν ἡμιευθεῖαν ΟΒ′ κάθετον ἐπὶ τὴν ἕδραν ΓΟΑ καὶ κειμένην πρὸς τὸ μέρος τῆς ἀκμῆς ΟΒ· καὶ τέλος τὴν ἡμιευθεῖαν ΟΓ′ κάθετον ἐπὶ τὴν ἕδραν ΑΟΒ καὶ κειμένην πρὸς τὸ μέρος τῆς ἀκμῆς ΟΓ· αἱ ἡμιευθεῖαι αὐταὶ ΟΑ′, ΟΒ′, ΟΓ′ σχηματίζουν μίαν τρίεδρον γωνίαν Ο.Α′Β′Γ′, ἡ ὁποία λέγεται ***παραπληρωματικὴ*** τῆς τριέδρου γωνίας Ο.ΑΒΓ.



Σχ. 488.

711. Παρατήρησις. Αἱ ἡμιευθεῖαι ΟΑ′, ΟΒ′, ΟΓ′, ὅπως ἤχθησαν ἀνωτέρω, σχηματίζουν μίαν πραγματικὴν τρίεδρον γωνίαν.

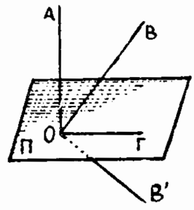
Πράγματι· αἱ ΟΑ′, ΟΒ′, ΟΓ′ δὲν δύνανται νὰ συμπέσουν, διότι τότε αἱ τρεῖς ἕδραι ΒΟΓ, ΓΟΑ, ΑΟΒ θὰ ἔκειντο ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Ἔπειτα αἱ τρεῖς αὐταὶ ἡμιευθεῖαι δὲν δύνανται νὰ κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, διότι τότε αἱ τρεῖς ἕδραι τῆς τριέδρου Ο.ΑΒΓ θὰ ἦσαν κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ καὶ θὰ περιεῖχον τὴν κάθετον, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτό.

712. Λῆμμα I*. ***Ἐὰν ἀπὸ τυχὸν σημεῖον ἑνὸς ἐπιπέδου***

* *Λῆμμα* λέγεται ἕνα θεώρημα ἢ ἕνα πρόβλημα, τὸ ὁποῖον χρησιμεύει εἰς τὴν ἀπόδειξιν ἢ τὴν λύσιν ἑνὸς ἄλλου σπουδαιοτέρου θεωρήματος ἢ προβλήματος.

φέρωμεν δύο ἡμιευθείας, μίαν κάθετον καὶ μίαν πλαγίαν πρὸς τὸ ἐπίπεδον αὐτό, ἡ γωνία τῶν δύο ἡμιευθειῶν εἶναι ὀξεῖα, ἐὰν αἱ ἡμιευθεῖαι αὐταὶ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, καὶ ἀμβλεῖα, ἐὰν αἱ ἡμιευθεῖαι κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ ἐπιπέδου καὶ ἀντιστρόφως.

1ον. Ἔστω ΟΑ *(Σχ. 489)* μία ἡμιευθεῖα κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π καὶ ΟΒ μία πλαγία πρὸς τὸ ἐπίπεδον αὐτό. Ἔστω ΟΓ ἡ προβολὴ τῆς ΟΒ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π. Ἡ γωνία ΑΟΓ εἶναι ὀρθή.



Σχ. 489.

Ἐὰν ἡ πλαγία ΟΒ κεῖται πρὸς τὸ μέρος πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ ΟΑ, ἐν σχέσει πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π, ἡ ἡμιευθεῖα ΟΒ εἶναι εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς ὀρθῆς γωνίας ΑΟΓ καὶ ἑπομένως ἡ γωνία ΑΟΒ εἶναι ὀξεῖα.

Ἐὰν ἡ πλαγία ΟΒ′ κεῖται πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τοῦ ἐπιπέδου Π, ἡ ΟΒ′ εὑρίσκεται ἐξωτερικῶς τῆς ὀρθῆς γωνίας ΑΟΓ καὶ ἑπομένως ἡ γωνία ΑΟΒ′ εἶναι ἀμβλεῖα.

2ον. Ἀντιστρόφως. ***Ἐὰν ἀπὸ τυχὸν σημεῖον ἑνὸς ἐπιπέδου φέρωμεν δύο ἡμιευθείας, τὴν μίαν κάθετον καὶ τὴν ἄλλην πλαγίαν πρὸς τὸ ἐπίπεδον αὐτό, αἱ δύο αὐταὶ ἡμιευθεῖαι κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, ἐὰν σχηματίζουν ὀξεῖαν γωνίαν καὶ ἑκατέρωθεν τοῦ ἐπιπέδου, ἐὰν σχηματίζουν ἀμβλεῖαν γωνίαν.***

Πράγματι· ἔστω, ὅτι ἡ γωνία ΑΟΒ εἶναι ὀξεῖα· αἱ ἡμιευθεῖαι ΟΑ καὶ ΟΒ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου Π· διότι, ἐὰν ἔκειντο ἑκατέρωθεν αὐτοῦ, τότε ἡ γωνία ΑΟΒ θὰ ἦτο ἀμβλεῖα, ὅπως ἐδείχθη ἀνωτέρω, τὸ ὁποῖον ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας· ὥστε αἱ ἡμιευθεῖαι κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου Π.

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι, ἐὰν ἡ γωνία ΑΟΒ′ εἶναι ἀμβλεῖα αἱ ἡμιευθεῖαι ΟΑ καὶ ΟΒ′ κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ ἐπιπέδου Π

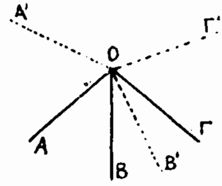
713. Θεώρημα. ***Ἐὰν ἡ τρίεδρος γωνία Ο.Α′Β′Γ′*** *(Σχ. 490)*, ***εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς τριέδρου Ο.ΑΒΓ, θὰ εἶναι ἀντιστρόφως καὶ ἡ τρίεδρος γωνία Ο.ΑΒΓ παραπληρωματικὴ τῆς τριέδρου Ο.Α′Β′Γ′.***

Διὰ νὰ ἀποδειχθῇ τὸ θεώρημα αὐτὸ πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν:

1ον. Ὅτι μία τυχοῦσα ἀκμὴ ΟΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀπέναντι ἕδραν Β′ΟΓ′.

2ον. Ὅτι ἡ ἀκμὴ αὐτὴ κεῖται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ ΟΑ′, ἐν σχέσει πρὸς τὴν ἕδραν Β′ΟΓ′.

Ἀπόδειξις: Ἐξ ὑποθέσεως ἡ τρίεδρος Ο.Α΄Β΄Γ΄ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς τριέδρου Ο.ΑΒΓ· ἄρα ἡ ΟΒ΄, ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΓΟΑ, θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΑ. Ἐπίσης ἡ ΟΓ΄ ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΟΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΑ. Ἄρα ἡ ΟΑ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὰς εὐθείας ΟΒ΄ καὶ ΟΓ΄, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Β΄ΟΓ΄. Ἐπειδὴ ἡ ΟΑ΄ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΟΓ καὶ κεῖται πρὸς τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ, πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ ΟΑ, ἡ γωνία ΑΟΑ΄ εἶναι ὀξεῖα (§ 712, 1ον). Ἐπειδὴ ἡ ΟΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Β΄ΟΓ΄, καὶ σχηματίζει μὲ τὴν πλαγίαν ΟΑ΄ πρὸς τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν, ἕπεται (§ 712, 2ον), ὅτι ἡ ΟΑ κεῖται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου Β΄ΟΓ΄, πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ ἀκμὴ ΟΑ. Ὥστε ἡ ἀκμὴ ΟΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν Β΄ΟΓ΄, καὶ κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς ἕδρας, πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ ΟΑ΄.



Σχ. 490.

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι ἡ ΟΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν Γ΄ΟΑ καὶ κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς ἕδρας αὐτῆς, πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ ΟΒ΄ καὶ τέλος, ὅτι ἡ ΟΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν Α΄ΟΒ΄ καὶ κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς ἕδρας αὐτῆς, πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ ΟΓ΄.

Ἡ τρίεδρος λοιπὸν Ο.ΑΒΓ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς Ο.Α΄Β΄Γ΄, διότι δύναται νὰ κατασκευασθῇ ἀπὸ αὐτήν, ὅπως ἡ Ο.Α΄Β΄Γ΄ κατεσκευάσθη ἀπὸ τὴν Ο.ΑΒΓ.

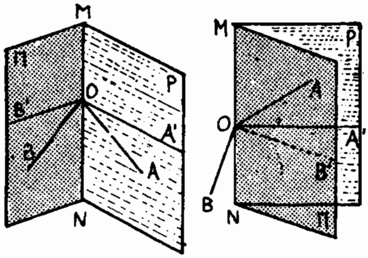
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν ἡ τρίεδρος γωνία Ο.Α΄Β΄Γ΄ εἶναι....***

714. Λῆμμα. ***Ἐὰν ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Ο τῆς ἀκμῆς ΜΝ μιᾶς διέδρου γωνίας Π-ΜΝ-Ρ, φέρωμεν τὴν ἡμιευθεῖαν ΟΑ κάθετον ἐπὶ τὴν ἕδραν Π καὶ κειμένην πρὸς τὸ μέρος πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ ἕδρα Ρ καὶ τὴν ἡμιευθεῖαν ΟΒ κάθετον ἐπὶ τὴν ἕδραν Ρ καὶ κειμένην πρὸς τὸ μέρος τῆς ἄλλης ἕδρας Π, ἡ γωνία ΑΟΒ τῶν δύο αὐτῶν ἡμιευθειῶν εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ἐπιπέδου γωνίας τῆς διέδρου Π-ΜΝ-Ρ*** (*Σχ. 491*).

Ὑπόθεσις: Αἱ ἡμιευθεῖαι ΟΑ καὶ ΟΒ, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν ΜΝ ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν ΜΝ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὰς ἕδρας Π καὶ Ρ τῆς διέδρου Π-ΜΝ-Ρ κατὰ τὰς εὐθείας ΟΒ΄ καὶ ΟΑ΄, αἱ ὁποῖαι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν ΜΝ. Ἡ γωνία Α΄ΟΒ΄ εἶναι ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος γωνία τῆς διέδρου Π-ΜΝ-Ρ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\widehat{AOB}+A'\widehat{O}B'=2$ ὀρθαί.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ ἡ ΟΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΟΒ′. Ἐπίσης ἡ ΟΒ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ρ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΑ′.



α β

Σχ. 491.

Αἱ γωνίαι λοιπὸν ΑΌΒ καὶ Α′ΟΒ′ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους μίαν πρὸς μίαν· ἄρα θὰ εἶναι ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί.

Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ γωνίαι αὐταὶ δὲν δύνανται νὰ εἶναι ἴσαι· πράγματι, ἐὰν ἡ γωνία ΑΟΒ *(Σχ. 491 α)* εἶναι ὀξεῖα, αἱ ἡμιευθεῖαι ΟΑ′ καὶ ΟΒ′ κεῖνται ἐξωτερικῶς τῆς γωνίας ΑΟΒ καὶ ἑπομένως ἡ γωνία Α′ΟΒ′ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας ΑΟΒ

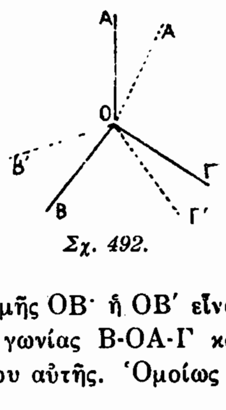
Ἐὰν ἡ γωνία ΑΟΒ εἶναι ἀμβλεῖα *(Σχ. 491 β)*, αἱ ἡμιευθεῖαι ΟΑ′ καὶ ΟΒ′ κεῖνται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας ΑΟΒ καὶ ἑπομένως ἡ γωνία Α′ΟΒ′ εἶναι μικροτέρα τῆς γωνίας ΑΟΒ· ὥστε καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις αἱ γωνίαι ΑΟΒ καὶ Α′ΟΒ′ εἶναι ἄνισοι· ἑπομένως εἶναι παραπληρωματικαί.

715. Θεώρημα. ***Ἐὰν δύο τρίεδροι γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί, κάθε δίεδρος γωνία τῆς μιᾶς ἐκ τῶν τριέδρων αὐτῶν, εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ἀπέναντι ἕδρας εἰς τὴν ἄλλην τρίεδρον.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν αἱ παραπληρωματικαὶ τρίεδροι γωνίαι Ο.ΑΒΓ καὶ Ο.Α′Β′Γ′. Ἐὰν λάβωμεν μίαν τυχοῦσαν δίεδρον τῆς πρώτης, ἔστω τὴν ΟΑ, ἡ ἀπέναντι αὐτῆς ἕδρα τῆς ἄλλη τριέδρου εἶναι ἡ Β′ΟΓ′.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\text{δίεδρ.}ΟΑ + Β'\widehat{Ο}Γ' = 2 \text{ ὀρθαί}.$$



Σχ. 492.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ αἱ τρίεδροι γωνίαι Ο.ΑΒΓ καὶ Ο.Α′Β′Γ′ εἶναι παραπληρωματικαί, ἡ ἡμιευθεῖα ΟΒ′ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν τὴν ἕδραν ΑΟΓ καὶ κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς ἀκμῆς ΟΒ· ἡ ΟΒ′ εἶναι λοιπὸν κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν ΑΟΓ τῆς διέδρου γωνίας Β-ΟΑ-Γ καὶ κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς ἕδρας ΑΟΒ τῆς διέδρου αὐτῆς. Ὁμοίως ἡ

ΟΓ′ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν ΑΟΒ τῆς αὐτῆς διέδρου Β-ΟΑ-Γ καὶ κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς ἕδρας ΑΟΓ. Ὥστε ἡ γωνία Β′ΟΓ′ εἶναι, κατὰ τὸ λῆμμα τῆς § 714, παραπληρωματικὴ τῆς ἐπιπέδου γωνίας, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν δίεδρον γωνίαν· δηλ. εἶναι

$$\text{ἐπίπ. γων. διέδρ.}ΟΑ+\widehat{Β'ΟΓ'}=2 \text{ ὀρθ. ἢ δίεδρ. } ΟΑ+\widehat{Β'ΟΓ'}=2 \text{ ὀρθ.}$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι

$$\text{δίεδρ } ΟΒ+\widehat{Γ'ΟΑ'}=2 \text{ ὀρθ.} \quad \text{καὶ} \quad \text{δίεδρ.}ΟΓ+\widehat{Α'ΟΒ'}=2 \text{ ὀρθ.}$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι : ***Ἐὰν δύο τρίεδροι γωνίαι....***

Παρατήρησις. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ $\widehat{α}, \widehat{β}, \widehat{γ}$ τὰς ἕδρας, μὲ $\widehat{Α}, \widehat{Β}, \widehat{Γ}$ τὰς διέδρους γωνίας μιᾶς τριέδρου γωνίας Ο.ΑΒΓ καὶ μὲ $\widehat{α'}, \widehat{β'}, \widehat{γ'}$, $\widehat{Α'}, \widehat{Β'}, \widehat{Γ'}$ τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα τῆς παραπληρωματικῆς τριέδρου Ο.Α′Β′Γ′, θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις :

$$\widehat{α}+\widehat{Α'}=2 \text{ ὀρθ.} \qquad \widehat{β}+\widehat{Β'}=2 \text{ ὀρθ.} \qquad \widehat{γ}+\widehat{Γ'}=2 \text{ ὀρθ.}$$

$$\widehat{α'}+\widehat{Α}=2 \text{ ὀρθ.} \qquad \widehat{β'}+\widehat{Β}=2 \text{ ὀρθ.} \qquad \widehat{γ'}+\widehat{Γ}=2 \text{ ὀρθ.}$$

716. Θεώρημα. ***Εἰς κάθε τρίεδρον γωνίαν :***

1ον. Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν διέδρων της εἶναι μεγαλύτερον τῶν 2ὀρθῶνγωνιῶν καὶ μικρότερον τῶν 6 ὀρθῶν.

2ον. Ἐὰν μία δίεδρος αὐξηθῇ κατὰ δύο ὀρθὰς γωνίας, ὑπερβαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων διέδρων.

Ὑπόθεσις : Ἔστω ἡ τρίεδρος γωνία Ο.ΑΒΓ.

1ον. Συμπέρασμα : Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ $\widehat{Α}, \widehat{Β}, \widehat{Γ}$ τὰς τρεῖς διέδρους γωνίας τῆς τριέδρου γωνίας Ο.ΑΒΓ, θὰ δείξωμεν, ὅτι $2 \text{ ὀρθ.}<\widehat{Α}+\widehat{Β}+\widehat{Γ}<6 \text{ ὀρθ.}$

Ἀπόδειξις : Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ α′, β′, γ′ τὰς ἕδρας τῆς παραπληρωματικῆς της τριέδρου γωνίας, θὰ ἔχωμεν (§ 715 παρατήρησις).

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{Α}+\widehat{α'}=2 \text{ ὀρθ.}\\ \widehat{Β}+\widehat{β'}=2 \text{ ὀρθ.}\\ \widehat{Γ}+\widehat{γ'}=2 \text{ ὀρθ.}\end{array}\right\} \text{ ἢ } \left.\begin{array}{l}\widehat{Α}=2 \text{ ὀρθ.}-\widehat{α'}\\ \widehat{Β}=2 \text{ ὀρθ.}-\widehat{β'}\\ \widehat{Γ}=2 \text{ ὀρθ.}=\widehat{γ'}\end{array}\right\} \qquad (1)$$

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (1) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\widehat{Α}+\widehat{Β}+\widehat{Γ}=6 \text{ ὀρθ.}-(\widehat{α'}+\widehat{β'}+\widehat{γ'}) \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $(\widehat{α'}+\widehat{β'}+\widehat{γ'})$ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ μηδενὸς καὶ μικρότερον τῶν 4 ὀρθῶν γωνιῶν (§ 702) συνάγομεν ἀπὸ τὴν

σχέσιν (2) ὅτι τὸ ἄθροισμα $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}$ εἶναι μικρότερον τῶν 6 ὀρθῶν καὶ μεγαλύτερον τῶν 2 ὀρθῶν γωνιῶν· δηλ. εἶναι

$$\boxed{\mathbf{2\ \text{ὀρθ.}<\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}<6\ \text{ὀρθ.}}}$$

2ον. Συμπέρασμα: Ἔστω Α ἡ μικροτέρα δίεδρος μιᾶς τριέδρου γωνίας. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\widehat{A}+2\ \text{ὀρθ.}>\widehat{B}+\widehat{\Gamma}$.

Ἀπόδειξις: Γνωρίζομεν ὅτι κάθε ἕδρα τριέδρου γωνίας εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων ἑδρῶν· δηλ. ὅτι εἶναι

$$\widehat{\alpha'}<\widehat{\beta'}+\widehat{\gamma'} \qquad (3)$$

Ἀλλὰ ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) λαμβάνομεν

$$\widehat{\alpha'}=2\ \text{ὀρθ.}-\widehat{A}, \quad \widehat{\beta'}=2\ \text{ὀρθ.}-\widehat{B}, \quad \widehat{\gamma'}=2\ \text{ὀρθ.}-\widehat{\Gamma}.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (3) τὰς $\widehat{\alpha'}$, $\widehat{\beta'}$, $\widehat{\gamma'}$ μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν

$$2\ \text{ὀρθ.}-\widehat{A}<2\ \text{ὀρθ.}-B+2\ \text{ὀρθ.}-\widehat{\Gamma} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\mathbf{\widehat{A}+2\ \text{ὀρθ.}>\widehat{B}+\widehat{\Gamma}}}$$

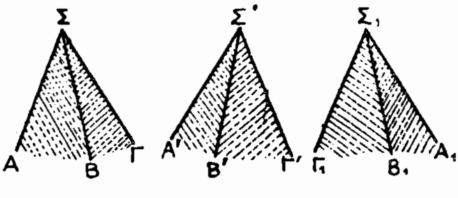
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Εἰς κάθε τρίεδρον γωνίαν....***

Ἀσκήσεις: 2152, 2153, 2154, 2155, 2156, 2157, 2158.

Περιπτώσεις ἰσότητος τῶν τριέδρων γωνιῶν

717. Προσανατολισμὸς τριέδρων γωνιῶν. Ἔστωσαν αἱ τρίεδροι γωνίαι Σ.ΑΒΓ καὶ Σ'.Α'Β'Γ' *(Σχ. 492).*

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι δύο παρατηρηταὶ ἔχουν τοποθετηθῆ ἔμπροσθεν τῶν ἀκμῶν ΣΑ καὶ Σ'Α' τῶν τριέδρων αὐτῶν οὕτως, ὥστε αἱ κεφαλαί των νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὰ σημεῖα Σ καὶ Σ' καὶ οἱ πόδες των εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Α' ἀντιστοίχως καὶ ὅτι παρατηροῦν καὶ οἱ δύο εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῶν τριέδρων αὐτῶν γωνιῶν. Ἐὰν καὶ οἱ δύο παρατηρηταὶ ἔχουν πρὸς τὰ δεξιά των τὰς ἀκμὰς ΣΒ καὶ Σ'Β' καὶ πρὸς τὰ ἀριστερά των τὰς ἀκμὰς ΣΓ καὶ Σ'Γ', θὰ λέγωμεν, ὅτι αἱ δύο αὐταὶ τρίεδροι ἔχουν τὸν *αὐτὸν προσανατολισμόν*. Εἰς τὴν ἐναντίαν περίπτωσιν θὰ λέγωμεν, ὅτι αἱ τρίεδροι *δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμόν*.



Σχ. 492.

Π.χ. αἱ τρίεδροι Σ.ΑΒΓ καὶ Σ'.Α'Β'Γ' ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμόν, ἐνῷ αἱ τρίεδροι Σ.ΑΒΓ καὶ $Σ_1.Α_1Β_1Γ_1$ *(Σχ. 492)* δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμόν.

Σημ. Ὅταν γράφωμεν μίαν τρίεδρον γωνίαν Σ.ΑΒΓ, θεωροῦμεν, ὅτι ἡ ἀκμὴ ΣΑ εἶναι ἡ πρώτη ἀκμή, ἡ ΣΒ ἡ δευτέρα καὶ ἡ ΣΓ ἡ τρίτη.

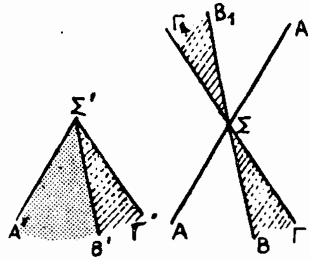
718. Θεώρημα. ***Περίπτωσις I. Δύο τρίεδροι γωνίαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν μίαν ἕδραν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν διέδρους ἴσας μίαν πρὸς μίαν, εἶναι ἴσαι μέν, ἐὰν ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμόν, συμμετρικαὶ δέ, ἐὰν δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμόν.***

1ον. Αἱ τρίεδροι ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμόν.

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν αἱ δύο τρίεδροι γωνίαι Σ.ΑΒΓ καὶ Σ'.Α'Β'Γ' *(Σχ 493)*, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ΑΣΓ=Α'Σ'Γ, δίεδρ.ΣΑ= =δίεδρ.Σ'Α' καὶ δίεδρ.ΣΓ=δίεδρ.Σ'Γ'.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ τρίεδροι αὐταὶ εἶναι ἴσαι.

Ἀπόδειξις: Λαμβάνομεν τὴν τρίεδρον Σ'.Α'Β'Γ' καὶ τὴν θέτομεν (νοερῶς) ἐπὶ τῆς τριέδρου Σ.ΑΒΓ οὕτως, ὥστε ἡ ἕδρα Α'Σ'Γ' νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης της ἕδρας ΑΣΓ. Ἐπειδὴ αἱ τρίεδροι αὐταὶ ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμόν, αἱ ἀκμαὶ Σ'Β' καὶ ΣΒ θὰ πέσουν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου ΑΣΓ.



Σχ. 493.

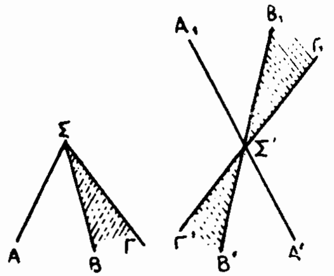
Ἐπειδὴ ἡ δίεδρος Σ'Α' εἶναι ἴση μὲ τὴν δίεδρον ΣΑ, τὸ ἐπίπεδον Α'Σ'Β' θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΣΒ. Ἐπίσης, ἐπειδὴ ἡ δίεδρος Σ'Γ' εἶναι ἴση μὲ τὴν δίεδρον ΣΓ, τὸ ἐπίπεδον Γ'Σ'Β' θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΓΣΒ. Ὥστε τὰ δύο ἐπίπεδα Α'Σ'Β' καὶ Γ'Σ'Β' ἐφαρμόζουν ἐπὶ τῶν δύο ἐπιπέδων ΑΣΒ καὶ ΓΣΒ καὶ ἐπομένως καὶ ἡ τομὴ Σ'Β' τῶν δύο πρώτων ἐπιπέδων θὰ ἐφαρμόσῃ μὲ τὴν τομὴν ΣΒ τῶν δύο δευτέρων ἐπιπέδων. Αἱ τρίεδροι λοιπὸν γωνίαι Σ.ΑΒΓ καὶ Σ'.Α'Β'Γ' ἐφαρμόζουν καὶ ἐπομένως εἶναι ἴσαι.

2ον. Αἱ τρίεδροι δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμόν.

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν αἱ τρίεδροι Σ.ΑΒΓ καὶ Σ'.Α'Β'Γ' *(Σχ. 494)*, αἱ ὁποῖαι δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμόν.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ τρίεδρος Σ.ΑΒΓ εἶναι συμμετρικὴ τῆς τριέδρου Σ'.Α'Β'Γ'.

Ἀπόδειξις: Λαμβάνομεν τὴν συμμετρικὴν Σ'.$A_1B_1\Gamma_1$ τῆς Σ'.Α'Β'Γ'. Αἱ τρίεδροι Σ'.$A_1B_1\Gamma_1$ καὶ Σ.ΑΒΓ ἔχουν τότε τὸν αὐτὸν προσανατολισμὸν καὶ ἑπομένως αἱ τρίεδροι αὐταὶ εἶναι ἴσαι.



Σχ. 494.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ Σ'$A_1B_1\Gamma_1$ εἶναι συμμετρικὴ τῆς Σ'Α'Β'Γ' καὶ ἡ ἴση της Σ.ΑΒΓ θὰ εἶναι συμμετρικὴ τῆς Σ'.Α'Β'Γ'.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Δύο τρίεδροι γωνίαι, αἱ ὁποῖαι....***

719. Θεώρημα. ***Περίπτωσις ΙΙ. Δύο τρίεδροι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν δύο ἕδρας ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην δίεδρον γωνίαν ἴσην, εἶναι ἴσαι μέν, ἐὰν ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμόν, συμμετρικαὶ δέ, ἐὰν δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμόν.***

1ον. Αἱ τρίεδροι ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμόν.

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν αἱ δύο τρίεδροι γωνίαι Σ.ΑΒΓ καὶ Σ'.Α'Β'Γ' *(Σχ. 493)*, αἱ ὁποῖαι ἔχουν $\widehat{Α\Sigma Β} = \widehat{Α'\Sigma'Β'}$, $\widehat{Α\Sigma\Gamma} = \widehat{Α'\Sigma'\Gamma'}$ καὶ δίεδρ.ΣΑ=δίεδρ.Σ'Α'.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ τρίεδροι αὐταὶ εἶναι ἴσαι.

Ἀπόδειξις: Λαμβάνομεν τὴν τρίεδρον Σ'.Α'Β'Γ' καὶ τὴν θέτομεν ἐπὶ τῆς τριέδρου Σ.ΑΒΓ οὕτως, ὥστε ἡ ἕδρα Α'Σ'Γ' νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης της ΑΣΓ. Ἐπειδὴ αἱ δίεδροι γωνίαι Σ'Α' καὶ ΣΑ εἶναι ἴσαι, τὸ ἐπίπεδον τῆς ἕδρας Α'Σ'Β' θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἕδρας ΑΣΒ καὶ ἐπειδὴ ἐξ ἄλλου ἡ ἕδρα $\widehat{Α'\Sigma Β'}$ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἕδραν $\widehat{Α\Sigma Β}$, ἡ ἀκμὴ Σ'Β' θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ἀκμῆς ΣΒ. Ἀλλὰ τότε αἱ δύο τρίεδροι συμπίπτουν καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσαι.

2ον. Αἱ τρίεδροι δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμόν.

Ἡ ἀπόδειξις γίνεται ὅπως εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν (§ 718).

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Δύο τρίεδροι, αἱ ὁποῖαι....***

720. Θεώρημα. ***Περίπτωσις ΙΙΙ. Δύο τρίεδροι γωνίαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμόν, εἶναι ἴσαι, ἐὰν ἔχουν τὰς τρεῖς ἕδρας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν.***

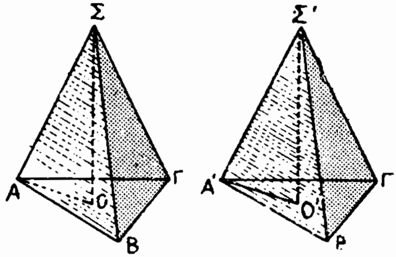
Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν αἱ δύο τρίεδροι γωνίαι Σ.ΑΒΓ καὶ Σ'.Α'Β'Γ'

(Σχ. 495), αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμὸν καὶ εἰς τὰς ὁποίας εἶναι:

$$\widehat{\text{ΑΣΒ}}=\widehat{\text{Α'Σ'Β'}},\quad \widehat{\text{ΒΣΓ}}=\widehat{\text{Β'Σ'Γ'}},\quad \widehat{\text{ΓΣΑ}}=\widehat{\text{Γ'Σ'Α'}}.$$

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ τρίεδροι αὗται εἶναι ἴσαι.

Ἀπόδειξις: Ἐπὶ τῶν ἓξ ἀκμῶν λαμβάνομεν ἴσα μήκη ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ, Σ'Α', Σ'Β', Σ'Γ' καὶ φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, Α'Β', Β'Γ', Γ'Α'. Τὰ δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΣΑΒ καὶ Σ'Α'Β' εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ δύο πλευρῶν ἴσων· ἄρα θὰ εἶναι ΑΒ=Α'Β'. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι ΒΓ=Β'Γ' καὶ ΓΑ=Γ'Α'. Ἀλλὰ τότε τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς πλευράς των ἴσας μίαν πρὸς μίαν. Ἀπὸ τὰς κορυφὰς Σ καὶ Σ' φέρομεν τὰς καθέτους ΣΟ καὶ Σ'Ο' ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ'. Ἐπειδὴ αἱ πλάγιαι ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ εἶναι ἴσαι, θὰ εἶναι ΟΑ==ΟΒ=ΟΓ καὶ ἑπομένως τὸ Ο εἶναι τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.



Σχ. 495.

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι τὸ Ο' εἶναι τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ'. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι ἴσα, αἱ ἀκτῖνες ΟΑ καὶ Ο'Α' τῶν περιγεγραμμένων κύκλων εἶναι ἴσαι, δηλ. εἶναι ΟΑ=Ο'Α'. Ἀλλὰ τότε τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΣΟΑ καὶ Σ'Ο'Α' εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των ἴσας, ΣΑ=Σ'Α' καὶ μίαν κάθετον πλευρὰν ἴσην, ΟΑ=Ο'Α'. Ἄρα θὰ εἶναι καὶ ΣΟ=Σ'Ο'.

Λαμβάνομεν τώρα τὴν τρίεδρον Σ'.Α'Β'Γ' καὶ τὴν θέτομεν (νοερῶς) ἐπὶ τῆς τριέδρου Σ.ΑΒΓ οὕτως, ὥστε τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ἴσου του τριγώνου ΑΒΓ. Τότε τὸ κέντρον Ο' θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Ο. Αἱ δύο κορυφαὶ Σ καὶ Σ' θὰ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ, διότι ἄλλως αἱ τρίεδροι δὲν θὰ εἶχον τὸν αὐτὸν προσανατολισμόν. Ἐπειδὴ αἱ Ο'Σ' καὶ ΟΣ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Ο, ἡ Ο'Σ' θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΟΣ καὶ ἐπειδὴ εἶναι Ο'Σ'=ΟΣ, ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω, ἡ κορυφὴ Σ' θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς κορυφῆς Σ. Ἀλλὰ τότε αἱ ἀκμαὶ Σ'Α', Σ'Β', Σ'Γ' θὰ ἐφαρμόσουν ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν ἀκμῶν ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ καὶ ἡ τρίεδρος

Σ'.Α'Β'Γ' θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς τριέδρου Σ.ΑΒΓ. Ἐπειδὴ αἱ τρίεδροι αὐταὶ ἐφαρμόζουν εἶναι ἴσαι.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Δύο τρίεδροι γωνίαι, αἱ ὁποῖαι. . . .***

Παρατήρησις. Ἐὰν αἱ δύο τρίεδροι ΣΑΒΓ καὶ Σ'.Α'Β'Γ' δὲν εἶχον τὸν αὐτὸν προσανατολισμὸν *(Σχ. 494)*, τότε ἡ μία τρίεδρος εἶναι ἴση μὲ τὴν συμμετρικὴν τῆς ἄλλης.

721. Θεώρημα. ***Δύο τρίεδροι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς διέδρους των γωνίας ἴσας μίαν πρὸς μίαν, εἶναι ἴσαι μέν, ἐὰν ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμόν, συμμετρικαὶ δέ, ἐὰν δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμόν.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν αἱ τρίεδροι Σ καὶ Σ', αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς διέδρους γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν ὅτι αἱ τρίεδροι Σ καὶ Σ' εἶναι ἴσαι, ἐὰν ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμόν, συμμετρικαὶ δέ, ἐὰν δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμόν.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν αἱ τρίεδροι Σ καὶ Σ' *(Σχ. 495)* ἔχουν τὰς διέδρους γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν, αἱ παραπληρωματικαί των τρίεδροι $Σ_1$ καὶ $Σ_1'$ θὰ ἔχουν τὰς ἕδρας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ἴσαι ἢ συμμετρικαὶ (§ 720). Αἱ δύο παραπληρωματικαὶ τρίεδροι $Σ_1$ καὶ $Σ_1'$, ὡς ἴσαι ἢ συμμετρικαί, θὰ ἔχουν τὰς διέδρους των ἴσας. Ἀλλὰ ἀφοῦ αἱ δίεδροι τῶν $Σ_1$ καὶ $Σ_1'$ εἶναι ἴσαι, αἱ παραπληρωματικαὶ αὐτῶν, δηλ. αἱ δοθεῖσαι τρίεδροι Σ καὶ Σ', θὰ ἔχουν τὰς ἕδρας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ θὰ εἶναι ἴσαι ἢ συμμετρικαί.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Δύο τρίεδροι, αἱ ὁποῖαι. . . .***

Ἀσκήσεις

2142. (2178). Δύο ἕδραι τριέδρου γωνίας εἶναι 58° καὶ 127°. Μεταξὺ ποίων τιμῶν περιέχεται ἡ τρίτη ἕδρα της;

2143. (2179). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι κάθε ἕδρα πολυέδρου στερεᾶς γωνίας εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄλλων ἑδρῶν της.

2144. (2180). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς στρεβλοῦ τετραπλεύρου εἶναι μικρότερον τῶν τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν.

2145. (2181). Ἐὰν φέρωμεν μίαν ἡμιευθεῖαν ΟΧ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν μιᾶς τριέδρου γωνίας Ο.ΑΒΓ θὰ ἔχωμεν

$$\widehat{XOB}+\widehat{XO\Gamma}<\widehat{AOB}+\widehat{AO\Gamma}.$$

2146. (2182). Εἰς μίαν ἰσοσκελῆ τρίεδρον γωνίαν, τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον διχοτομεῖ τὴν δίεδρον, ἡ ὁποία περιέχεται μεταξὺ τῶν ἴσων ἑδρῶν της, εἶναι

κάθετον ἐπὶ τὴν ἕδραν, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς διέδρου αὐτῆς.

2147. (2183). Μία τρίεδρος εἶναι ἰσοσκελής, ἐὰν τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διχοτομεῖ μίαν δίεδρον γωνίαν της, εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ἀπέναντι ἕδραν.

2148. (2184). Εἰς μίαν ἰσοσκελῆ τρίεδρον γωνίαν τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ἄγεται ἀπὸ τὴν κοινὴν ἀκμὴν τῶν δύο ἴσων ἑδρῶν της, καθέτως ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς ἀπέναντι ἕδρας, διέρχεται ἀπὸ τὴν διχοτόμον τῆς ἕδρας αὐτῆς.

2149. (2185). Μία τρίεδρος γωνία εἶναι ἰσοσκελής, ἐὰν τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ἄγεται ἀπὸ μίαν ἀπὸ τὰς ἀκμάς της, καθέτως ἐπὶ τὴν ἀπέναντι ἕδραν της, διέρχεται ἀπὸ τὴν διχοτόμον τῆς ἕδρας αὐτῆς.

2150. (2186). Ἐὰν εἰς μίαν τρίεδρον γωνίαν δύο ἐπίπεδοι γωνίαι της εἶναι ὀρθαὶ καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν κείμεναι δίεδροι εἶναι ὀρθαὶ καὶ ἀντιστρόφως.

2151. (2187). Ἐάν, εἰς μίαν τρίεδρον γωνίαν Ο.ΑΒΓ, ἡ ἀκμὴ ΟΓ σχηματίζῃ μὲ τὴν διχοτόμον ΟΔ τῆς ἀπέναντι ἕδρας, μίαν γωνίαν ἴσην μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἕδρας αὐτῆς, ἡ δίεδρος Γ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα Α+Β τῶν δύο ἄλλων διέδρων γωνιῶν.

2152. (2188). Ἂν δύο τρίεδροι ἔχουν τὰς διέδρους γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν, αἱ παραπληρωματικαί των θὰ ἔχουν τὰς ἐπιπέδους των ἴσας μίαν πρὸς μίαν.

2153. (2189). Ἂν δύο τρίεδροι ἔχουν τὰς ἕδρας των ἴσας μίαν πρὸς μιαν, αἱ παραπληρωματικαί των ἔχουν τὰς διέδρους των ἴσας μίαν πρὸς μίαν.

2154. (2190). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἕδρα ΒΟΓ=α μιᾶς τριέδρου Ο.ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ δίεδρος Α εἶναι ὀρθὴ καὶ ὅτι αἱ ἕδραι ΑΟΓ=β καὶ ΑΟΒ=γ εἶναι γωνίαι 45°.

2155. (2191). Εἰς μίαν μίαν τρίεδρον Ο.ΑΒΓ γνωρίζομεν τὴν ἕδραν α=90° καὶ τὰς διέδρους Β=Γ=135°. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ δίεδρος Α.

2156. (2192). Εἰς μίαν τρίεδρον γωνίαν μία ἕδρα της τοὐλάχιστον εἶναι μικροτέρα τῶν 120° καὶ μία δίεδρός της τοὐλάχιστον εἶναι μεγαλυτέρα τῶν 60°.

2157. (2193). Δίδεται μία πολύεδρος στερεὰ γωνία μὲ ν ἕδρας. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν διέδρων γωνιῶν της περιέχεται μεταξὺ 2ν καὶ 2(ν—2) ὀρθῶν διέδρων γωνιῶν.

2ον. ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐξωτερικῶν διέδρων της εἶναι μικρότερον τῶν τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν.

2158. (2194). Μία τρίεδρος Ο.ΧΥΖ ἔχει τὰς ἀκμὰς ΟΧ, ΟΥ ὡρισμένας καὶ τὰς ἕδρας της $\widehat{XOZ}$, $\widehat{YOZ}$ μεταβλητάς, ἀλλὰ παραπληρωματικάς. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῆς ἀκμῆς ΟΖ.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν ἐπὶ τοῦ ΣΤ' Κεφαλαίου

Α' Ὁμάς. **2159.** (2195). Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζει μία ἡμιευθεῖα ΟΧ, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν Ο μιᾶς τριέδρου Ο.ΑΒΓ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς τριέδρου αὐτῆς, μὲ τὰς τρεῖς ἀκμάς, περιέχεται μεταξὺ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἑδρῶν τῆς τριέδρου καὶ τοῦ ἡμιαθροίσματος αὐτῶν.

2160. (2196). Εἰς κάθε τρίεδρον γωνίαν, τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα διχοτομοῦν τὰς διέδρους γωνίας της, τέμνονται κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

2161. (2197). Δίδεται μία τρίεδρος Ο.ΑΒΓ εἰς τὴν ὁποίαν ἡ δίεδρος Γ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα Α+Β τῶν δύο ἄλλων διέδρων. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ἀκμὴ ΟΓ σχηματίζει μὲ τὴν διχοτόμον ΟΔ τῆς ἀπέναντι ἕδρας μίαν γωνίαν ἴσην μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἕδρας αὐτῆς.

2162. (2198). Εἰς κάθε τρίεδρον γωνίαν, τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα διέρχονται ἀπὸ τὰς ἀκμάς της καὶ ἀπὸ τὰς διχοτόμους τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν της, τέμνονται κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

2163. (2199). Εἰς μίαν τρίεδρον γωνίαν, τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον περιέχει μίαν ἀκμήν της καὶ τὴν ἐσωτερικὴν διχοτόμον τῆς ἀπέναντι ἕδρας καὶ τὰ δύο ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα ὁρίζονται, ἕκαστον, ἀπὸ μίαν ἐκ τῶν δύο ἄλλων ἀκμῶν καὶ ἀπὸ τὴν ἐξωτερικὴν διχοτόμον τῆς ἀπέναντι ἕδρας, τέμνονται κατὰ μίαν εὐθεῖαν.

2164. (2200). Εἰς μίαν τρίεδρον: 1ον. αἱ διχοτόμοι δύο ἑδρῶν καὶ ἡ διχοτόμος τῆς ἐφεξῆς παραπληρωματικῆς γωνίας τῆς τρίτης ἕδρας, κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

2ον. αἱ διχοτόμοι τῶν ἐφεξῆς παραπληρωματικῶν γωνιῶν τῶν τριῶν ἑδρῶν της κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

2165. (2201). Εἰς κάθε τρίεδρον γωνίαν, τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα εἶναι κάθετα ἐπὶ τὰς ἕδρας της καὶ διέρχονται ἀπὸ τὰς διχοτόμους τῶν ἑδρῶν αὐτῶν, τέμνονται κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

2166. (2202). Ἡ τομὴ μιᾶς ὀρθογωνίου τριέδρου γωνίας (δηλ. μιᾶς τριέδρου τῆς ὁποίας μία δίεδρος εἶναι ἴση μὲ ὀρθήν) ὑπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ μίαν ἐκ τῶν ἀκμῶν της, εἶναι ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον.

2167. (2203). Εἰς κάθε τρίεδρον γωνίαν, τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα διέρχονται ἀπὸ τὰς ἀκμάς της καὶ εἶναι κάθετα ἐπὶ τὰς ἀπέναντι ἕδρας της, τέμνονται κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

2168. (2204). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι: 1ον. ἡ προβολὴ τῆς κορυφῆς Ο μιᾶς τρισορθογωνίου τριέδρου γωνίας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὰς ἀκμάς της εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, συμπίπτει μὲ τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

2ον. τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει ὅλας τὰς γωνίας του ὀξείας.

2169. (2205). Ἐάν, ἀπὸ ἕνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν μιᾶς πολυέδρου γωνίας, φέρωμεν καθέτους ἐπὶ ὅλας τὰς ἕδρας της, ἡ νέα πολύεδρος γωνία εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς πρώτης.

2170. (2206). Ἐπὶ τῶν ἀκμῶν μιᾶς τριέδρου γωνίας λαμβάνομεν τρία σημεῖα Α, Β, Γ καὶ ἔστω Η ἡ προβολὴ τῆς κορυφῆς Ο τῆς τριέδρου Ο.ΑΒΓ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΟΒ εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΗΑΒ.

Β' Ὁμάς. **2171.** (2207). Ποῖος εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὰς τρεῖς ἕδρας μιᾶς τριέδρου γωνίας.

2172. (2208). Ποῖος εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὰς τρεῖς ἀκμὰς μιᾶς τριέδρου γωνίας.

2173. (2209). Τέμνομεν μίαν τρίεδρον Ο.ΧΥΖ μὲ ἕνα μεταβλητὸν ἐπίπεδον καὶ ἔστω ΑΒΓ ἡ τομή της. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ:

1ον. ὅταν τὰ σημεῖα Α καὶ Β εἶναι ὡρισμένα.

2ον. ὅταν τὸ Α εἶναι ὡρισμένον.

Γ΄ Ὁμάς. **2174.** (2210). Δίδεται ἕνα ἐπίπεδον Π καὶ δύο εὐθεῖαι ΟΑ καὶ ΟΒ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὸ Π εἰς τὸ σημεῖον Ο. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π μία εὐθεῖα ΟΓ τοιαύτη, ὥστε τὰ ἐπίπεδα ΟΑΓ καὶ ΟΒΓ νὰ εἶναι ὀρθογώνια·

2175. (2211). Νὰ κατασκευασθῇ μία τρισορθογώνιος τρίεδρος γωνία, τῆς ὁποίας αἱ ἀκμαὶ νὰ διέρχωνται ἀπὸ τρία δοθέντα σημεῖα Α, Β, Γ.

2176. (2212). Νὰ κατασκευασθῇ μία τρισορθογώνιος τρίεδρος γωνία, τῆς ὁποίας αἱ ἀκμαὶ νὰ ἔχουν, ὡς προβολὰς ἐπὶ ἕνα ἐπίπεδον, τρεῖς δοθείσας τεμνομένας ἡμιευθείας.

2177. (2213). Δίδεται μία τρίεδρος Ο.ΧΥΖ καὶ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτῆς ἕνα σημεῖον Θ. Νὰ τμηθῇ ἡ τρίεδρος αὐτὴ ὑπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου οὕτω, ὥστε ἡ τομὴ ΑΒΓ νὰ ἔχῃ τὸ σημεῖον Θ ὡς σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων της.

2178. (2614). 1ον. Νὰ τμηθῇ μία τρισορθογώνιος τρίεδρος γωνία Ο.ΧΥΖ ὑπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου οὕτως, ὥστε ἡ τομὴ ΑΒΓ νὰ εἶναι ἴση μὲ δοθὲν τρίγωνον.

2ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ΟΑ=x, ΟΒ=y, ΟΓ=ω, ἐὰν δίδωνται αἱ πλευραὶ α=244 ἑκ., β=267 ἑκ., γ=125 ἑκ. τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

2179. (2215). Νὰ τμηθῇ δοθεῖσα τετράεδρος στερεὰ γωνία, εἰς τρόπον, ὥστε ἡ τομὴ νὰ εἶναι ἕνα παραλληλόγραμμον.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν ἐπὶ τοῦ Ε΄ Βιβλίου

Α΄ Ὁμάς. **2180.** (2216). Δίδονται δύο τρίγωνα ΑΒΓ, Α΄ΒΓ, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν πλευρὰν ΒΓ κοινὴν καὶ Η, Η΄ τὰ ὀρθόκεντρά των. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν ἡ Α΄Α εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ, ἡ ΗΗ΄ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Α΄ΒΓ.

2181. (2217). Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι Χ, Υ, τῶν ὁποίων αἱ προβολαὶ ἐπὶ ἕνα ἐπίπεδον εἶναι παράλληλοι. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὅλαι αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συναντοῦν τὰς Χ καὶ Υ καὶ αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π συναντοῦν μίαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ Π.

2182. (2218). Δίδονται δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι ΟΧ καὶ ΟΥ καὶ ἡ κάθετος ΟΖ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδόν των· κατασκευάζομεν τὰ συμμετρικὰ Μ΄ καὶ Μ΄΄ ἑνὸς τυχόντος σημείου Μ πρὸς ἄξονας συμμετρίας τὰς ΟΧ καὶ ΟΥ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ Μ΄Μ΄΄ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΧΟΥ καὶ ὅτι ἡ δίεδρος Μ-ΟΖ-Μ΄΄ εἶναι διπλασία τῆς Χ-ΟΖ-Υ.

2183. (2219). Δίδεται μία δίεδρος γωνία Π-ΑΒ-Ρ. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Ο τῆς ἀκμῆς ΑΒ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΟΓ πλαγίαν πρὸς τὴν ΑΒ καὶ κειμένην ἐπὶ τῆς ἕδρας Ρ καὶ τὴν ΟΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν ΑΒ καὶ κειμένην ἐπὶ τῆς ἕδρας Π. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ σχηματιζομένη γωνία ΓΟΔ εἶναι μεγαλυτέρα, ἴση ἢ μικροτέρα τῆς ἐπιπέδου γωνίας τῆς διέδρου, καθόσον ἡ δίεδρος γωνία εἶναι ὀξεῖα, ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα.

2184. (2220). Δίδεται ἕνας κύκλος διαμέτρου ΑΒ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΧ καὶ ΒΥ καθέτους ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΒ οὕτως, ὥστε νὰ σχηματίζουν ἴσας γωνίας ω μὲ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου καὶ νὰ μὴν εἶναι παράλληλοι. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι κάθε εὐθεῖα, ἡ ὁποία συναντᾷ τὰς δύο αὐτὰς εὐθείας καὶ τὸν κύκλον, σχηματίζει τὴν αὐτὴν γωνίαν ω μὲ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου καὶ προβάλλεται ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ κατὰ μίαν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου.

2185. (2221). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι κάθε εὐθεῖα, ἡ ὁποία τέμνει τὰς ἕδρας μιᾶς διέδρου γωνίας εἰς σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὴν ἀκμὴν τῆς διέδρου αὐτῆς, σχηματίζει ἴσας γωνίας μὲ ἑκάστην τῶν ἑδρῶν καὶ ἀντιστρόφως.

2186. (2222). Δίδονται δύο ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι Ε καὶ Ε', ἡ κοινὴ κάθετός των ΑΑ'=α καὶ ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ΜΜ' σταθεροῦ μήκους λ, τὸ ὁποῖον ὀλισθαίνει διὰ τῶν ἄκρων του ἐπὶ τῶν εὐθειῶν Ε καὶ Ε'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι:

1ον. ἡ ΜΜ' σχηματίζει μὲ τὴν ΑΑ' μίαν γωνίαν σταθεράν.

2ον. τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν 6 τμημάτων, ποὺ συνδέουν τὰ σημεῖα Α, Α', Μ, Μ' ἀνὰ δύο, μένει σταθερόν.

Β' Ὁμάς. **2187.** (2223). Ἐὰν δύο στρεβλὰ τετράπλευρα ΑΒΓΔ καὶ Α'Β'Γ'Δ' ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους μίαν πρὸς μίαν, αἱ εὐθεῖαι ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ', ΔΔ' αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰς κορυφὰς τῆς τομῆς τῶν παραλλήλων πλευρῶν τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον ἢ ἐξαιρετικῶς εἶναι παράλληλοι.

2188. (2224). Δίδονται πέντε ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, ΟΕ, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἕνα κοινὸν ἄκρον καὶ δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι οἱ κύκλοι (Α, Β, Γ) καὶ (Α, Δ, Ε) ἔχουν καὶ ἕνα δεύτερον σημεῖον κοινόν.

2189. (2225). Ἐὰν μ καὶ μ' εἶναι αἱ προβολαὶ ἑνὸς σημείου Μ ἐπὶ δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα Π καὶ Ρ, αἱ προβολαὶ τῶν μ καὶ μ' ἐπὶ τὴν τομὴν ΧΥ τῶν ἐπιπέδων αὐτῶν συμπίπτουν καὶ ἀντιστρόφως.

Γ' Ὁμάς. **2190.** (2226). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Ο καὶ ἐπὶ τὰς ὁποίας εὐθείας δύο δοθέντα εὐθύγραμμα τμήματα νὰ ἔχουν ἴσας προβολάς.

2191. (2227). Δίδονται δύο εὐθεῖαι Ε καὶ Ε' ὀρθογώνιοι καὶ ἕνα ἐπίπεδον Π, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὴν Ε' καὶ εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν Ε. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ ἐπιπέδου Π, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς εὐθείας Ε καὶ Ε' νὰ εἶναι ἴσον μὲ k^2.

2192. (2228). Μία εὐθεῖα μετακινεῖται, μένουσα παράλληλος πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον οὕτως, ὥστε τὰ ἄκρα της νὰ κεῖνται ἐπὶ δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ μέσου τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος, τοῦ περιλαμβανομένου μεταξὺ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ.

2193. (2229). Εἰς ἕνα ὡρισμένον ἐπίπεδον Π, μία γωνία xOy σταθεροῦ μεγέθους στρέφεται περὶ τὴν κορυφήν της Ο. Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου Π, φέρομεν τὰς καθέτους ΑΒ καὶ ΑΓ ἐπὶ τὰς πλευρὰς Ox καὶ Oy. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ μέσου Μ τῆς ΒΓ.

2194. (2230). Μία εὐθεῖα μετακινεῖται μένουσα παράλληλος πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον οὕτως, ὥστε τὰ ἄκρα της νὰ κεῖνται ἐπὶ δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα διαιροῦν τὴν κινητὴν αὐτὴν εὐθεῖαν κατὰ δοθέντα λόγον.

2195. (2231). Δίδεται μία δίεδρος γωνία καὶ ἕνα σημεῖον Α τῆς ἀκμῆς της ΕΖ. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Α φέρομεν ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα τέμνουν τὰς ἕδρας τῆς διέδρου κατὰ εὐθείας καθέτους. Νὰ προσδιορισθοῦν τὰ ἐπίπεδα αὐτὰ καὶ νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν ποδῶν τῶν καθέτων, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐπ' αὐτὰ ἀπὸ ἕνα ἄλλο σημεῖον Β τῆς ἀκμῆς ΕΖ.

Δ' Ὁμάς. **2196.** (2232). Δίδονται δύο ἐπίπεδα Π καὶ Π', τὰ ὁποῖα τέμνον-

ται κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΧΥ καὶ ἕνα ἐπίπεδον Π'', τὸ ὁποῖον συναντᾷ τὴν ΧΥ. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ προβολὴ μ'' ἐπὶ τοῦ Π'' ἑνὸς σημείου, ἂν γνωρίζωμεν μόνον τὰς προβολὰς μ καὶ μ' τοῦ σημείου αὐτοῦ ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Π'.

2197. (2233). Ἐὰν ἀπὸ τὴν κορυφὴν μιᾶς τρισορθογωνίου τριέδρου γωνίας φέρωμεν εἰς τὸ ἐσωτερικόν της μίαν ἡμιευθεῖαν :

1ον. τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζει αὕτη μὲ τὰς ἀκμὰς καὶ μὲ τὰς ἕδρας εἶναι ἴσον μὲ τρεῖς ὀρθὰς γωνίας.

2ον. τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζει αὕτη μὲ τὰς ἀκμὰς εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζει αὕτη μὲ τὰς ἕδρας.

2198. (2234). Δίδεται μία τετράεδρος γωνία Ο.ΧΥΖΤ εἰς τὴν ὁποίαν αἱ ἀπέναντι ἕδραι εἶναι ἴσαι. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι :

1ον αἱ ἀπέναντι δίεδροι εἶναι ἴσαι.

2ον. τὰ δύο ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα διέρχονται ἀπὸ τὰς ἀπέναντι ἀκμάς της (διαγώνιαι ἕδραι) τέμνονται κατὰ μίαν εὐθεῖαν ΟΘ, ἡ ὁποία εἶναι διχοτόμος ἑκάστης τῶν ἑδρῶν αὐτῶν.

3ον. κάθε ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΘ τέμνει τὴν τετράεδρον κατὰ ἕνα παραλληλόγραμμον. Νὰ ἐξαχθῇ ἐκ τῆς τελευταίας ἰδιότητος ἡ κατασκευὴ τῶν τετραέδρων γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς ἀπέναντι ἕδρας των ἴσας.

2199. (2235). Εἰς ἕνα ἐπίπεδον Π γράφομεν ἕνα κύκλον Ο διαμέτρου ΑΒ καὶ φέρομεν τὴν κάθετον εἰς τὸ Α ἐπὶ τὸ Π· ἐπὶ τῆς καθέτου αὐτῆς λαμβάνομεν ἕνα τυχὸν σημεῖον Γ. Συνδέομεν μὲ εὐθεῖαν τὸ Γ μὲ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς περιφερείας Ο.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΓΜ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΜ.

2ον. Νὰ δείξετε, καὶ νὰ ἐξηγήσετε διατί, καὶ ποὺ εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ σχήματος : α) ἡ γωνία τῆς εὐθείας ΓΜ καὶ τοῦ ἐπιπέδου Π· β) μία ἐπίπεδος γωνία, ἀντίστοιχος τῆς διέδρου, τῆς σχηματιζομένης ἀπὸ τὰ ἡμιεπίπεδα ΒΜΑ καὶ ΒΜΓ· γ) μία γραμμὴ μεγίστης κλίσεως τοῦ ἐπιπέδου ΓΒΜ ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π· δ) ἡ κοινὴ κάθετος τῶν εὐθειῶν ΓΑ καὶ ΒΜ· ε) τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ τέσσαρα σημεῖα Γ, Α, Β καὶ Μ.

(Baccalaurèat Grenoble)

2200. (2236). Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ πλευρῶν ΑΒ=α καὶ ΒΓ=β καὶ αἱ κάθετοι Ε καὶ Ε' ἐπὶ τὸ ἐπίπεδόν του, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ. Ἔστωσαν Μ καὶ Ν δύο σημεῖα μεταβλητά, τὸ μὲν Μ ἐπὶ τῆς Ε καὶ τὸ Ν ἐπὶ τῆς Ε' καὶ τοιαῦτα, ὥστε αἱ ΒΜ καὶ ΑΝ νὰ εἶναι σταθερῶς κάθετοι μεταξύ των.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΒΜ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΑΝ καὶ ὅτι ἡ ΑΝ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΜ. Ἐξ αὐτοῦ συνάγομεν, ὅτι τὰ διάφορα τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡς κορυφὰς τρία ἀπὸ τὰ τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Μ καὶ Ν εἶναι ὀρθογώνια καὶ ὅτι τὸ μέσον Θ τῆς ΜΝ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Μ καὶ Ν.

2ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ Θ, ὅταν τὰ Μ καὶ Ν κινοῦνται ἐπὶ τῶν Ε καὶ Ε'.

3ον. Θέτομεν ΓΜ=x καὶ ΔΝ=y. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι : $xy=\beta^2$.

(Baccalaureat Grenoble)

2201. (2237). Δίδεται εἰς ἕνα ἐπίπεδον Π ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΒΓΔ

πλευρᾶς α. Ἀπὸ τὸ κέντρον του Η ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π.

1ον. Νὰ προσδιορισθῇ ἐπὶ τῆς καθέτου αὐτῆς ἕνα σημεῖον Α τοιοῦτον, ὥστε τὰ μήκη ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ νὰ εἶναι ἴσα μὲ α.

2ον. Ἔστω Ο τὸ μέσον τῆς ΑΗ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ τρίεδρος Ο.ΒΓΔ εἶναι τρισορθογώνιος.

3ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι ὀρθογώνιοι.

4ον. Ἕνα σημεῖον Μ γράφει τὴν ΑΒ· πῶς μεταβάλλεται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΓΜΔ; Διὰ ποίαν θέσιν τοῦ Μ τὸ ἐμβαδὸν αὐτὸ εἶναι ἐλάχιστον; ποία εἶναι τότε ἡ τιμή του;

2202. Δίδεται ἡ τρισορθογώνιος στερεὰ γωνία Κ.ΑΒΓ καὶ ΑΒΓ μία τυχοῦσα ἐπίπεδος τομὴ αὐτῆς. Ἐὰν κ εἶναι ἡ προβολὴ τῆς κορυφῆς Κ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. ὅτι τὸ κ εἶναι ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

2ον. ὅτι $\dfrac{\text{ἐμβ.ΑΒΓ}}{\text{ἐμβ.ΑΚΒ}} = \dfrac{\text{ἐμβ.ΑΚΒ}}{\text{ἐμβ.ΑκΒ}}$.

3ον. ὅτι $(\text{ἐμβ.ΑΒΓ})^2 = (\text{ἐμβ.ΑΚΒ})^2 + (\text{ἐμβ.ΑΚΓ})^2 + (\text{ἐμβ.ΒΚΓ})^2$.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΚΤΟΝ

ΠΟΛΥΕΔΡΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

ΠΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΑ

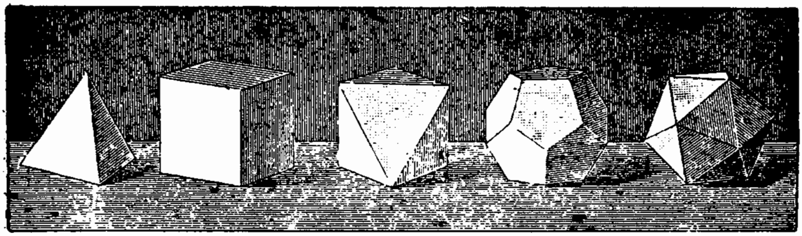
722. Πολύεδρον. *Ἕνα στερεόν, τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ ὅλα τὰ μέρη του μὲ ἐπίπεδα, λέγεται* ***πολύεδρον*** *(Σχ. 496).*

Εἰς ἕνα πολύεδρον διακρίνομεν:

Τὰς ἕδρας του, δηλ. *τὰ πολύγωνα, ποὺ* ***περικλείουν*** *τὸ πολύεδρον.*

Τὰς ἀκμάς του, δηλ. *τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου αὐτοῦ·* ***κάθε ἀκμὴ*** *εἶναι κοινὴ εἰς δύο συνεχομένας ἕδρας.*

Τὰς κορυφάς του, δηλ. *τὰ ἄκρα τῶν ἀκμῶν του·* ***κάθε κορυφὴ εἶναι κοινὴ*** *εἰς τρεῖς τοὐλάχιστον συνεχομένας ἕδρας.*



Τετράεδρον　　Ἑξάεδρον　　Ὀκτάεδρον　　Δωδεκάεδρον　　Εἰκοσάεδρον

Σχ. 496.

Τὰς διέδρους γωνίας τοῦ πολυέδρου, δηλ. *τὰς διέδρους, ποὺ σχηματίζονται ἀπὸ δύο ἕδρας μὲ κοινὴν ἀκμήν.*

Τὰς πολυέδρους γωνίας του, δηλ. *τὰς στερεὰς γωνίας, ποὺ σχηματίζονται ἀπὸ πολλὰς ἕδρας, αἱ ὁποῖαι ἔχουν* ***μίαν κοινὴν κορυφήν.***

Τὰς διαγωνίους του, δηλ. *τὰ* ***εὐθύγραμμα τμήματα, ποὺ συνδέουν*** *δύο κορυφάς, αἱ ὁποῖαι δὲν* ***κεῖνται*** *ἐπὶ* ***τῆς αὐτῆς ἕδρας.***

Ἕνα πολύεδρον λέγεται ***τετράεδρον, πεντάεδρον, ἑξάεδρον, ... ἐὰν*** *ἔχῃ 4, 5, 6, ... ἕδρας.*

Τὸ ἁπλούστερον ἀπὸ ὅλα τὰ πολύεδρα εἶναι τὸ **τετράεδρον**.

723. Πολύεδρα κυρτά. *Ἕνα πολύεδρον λέγεται* ***κυρτόν****, ὅταν κάθε ἕδρα του προεκτεινομένη ἀφήνῃ τὸ πολύεδρον πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος της.*

Τομὴ ἑνὸς κυρτοῦ πολυέδρου ὑπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου *εἶναι τὸ σύνολον τῶν σημείων τῆς ἐπιφανείας τοῦ πολυέδρου, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου.*

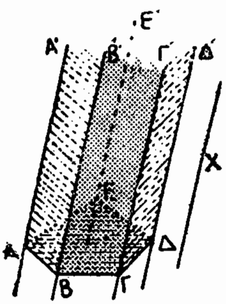
Αὐτὴ ἡ τομὴ εἶναι ἕνα πολύγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει, ὡς πλευρὰς τὰς τομὰς τῶν ἑδρῶν τοῦ πολυέδρου ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου καὶ ὡς κορυφὰς τὰς τομὰς τῶν ἀκμῶν τοῦ πολυέδρου ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου.

724. Πολύεδρα ἴσα. *Δύο πολύεδρα εἶναι ἴσα, ὅταν τὸ ἕνα τιθέμενον* (νοερῶς) *ἐπὶ τοῦ ἄλλου ἐφαρμόζῃ.*

Διὰ νὰ ἐφαρμόζουν δύο πολύεδρα, πρέπει αἱ κορυφαί των νὰ ἐφαρμόζουν, διότι τότε ἐφαρμόζουν καὶ αἱ ἀκμαί των καὶ αἱ ἕδραι των.

Πρίσματα

725. Πρισματικὴ ἐπιφάνεια. ***Πρισματικὴ ἐπιφάνεια*** *λέγεται ἡ ἐπιφάνεια, τὴν ὁποίαν παράγει μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία μένει παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν καὶ ἡ ὁποία, κινουμένη, στηρίζεται σταθερῶς ἐπὶ τῆς περιμέτρου ἑνὸς πολυγώνου.*



Σχ. 497.

Ἔστω ἕνα πολύγωνον ΑΒΓΔΕ *(Σχ. 497)* καὶ μία εὐθεῖα Χ, ἡ ὁποία δὲν κεῖται ἐπὶ τοῦ πολυγώνου· ἀπὸ τὰς κορυφὰς Α, Β, Γ, Δ, Ε φέρομεν τὰς παραλλήλους ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄, ΔΔ΄, ΕΕ΄ πρὸς τὴν εὐθεῖαν Χ. Ἡ πρισματικὴ ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία παράγεται ἀπὸ μίαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν Χ καὶ κινεῖται σταθερῶς ἐπὶ τῆς περιμέτρου τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ, ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ μέρη ἐπιπέδων, τὰ ὁποῖα περατοῦνται εἰς δύο παραλλήλους εὐθείας, ὅπως εἶναι τὸ μέρος τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ τῶν παραλλήλων ΑΑ΄ καὶ ΒΒ΄.

Αὐτὰ τὰ μέρη τῶν ἐπιπέδων εἶναι αἱ ***παράπλευροι ἕδραι*** τῆς πρισματικῆς ἐπιφανείας.

Αἱ τομαὶ τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν λέγονται ***παράπλευροι ἀκμαὶ*** *τῆς πρισματικῆς ἐπιφανείας.*

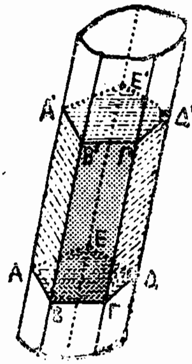
726. Θεώρημα. ***Αἱ τομαὶ μιᾶς πρισματικῆς ἐπιφανείας ὑπὸ***

παραλλήλων ἐπιπέδων εἶναι πολύγωνα ἴσα· (τὰ ἐπίπεδα δὲν εἶναι παράλληλα πρὸς τὰς ἀκμάς της).

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν ΑΒΓΔΕ καὶ Α'Β'Γ'Δ'Ε' *(Σχ. 498)* αἱ τομαὶ μιᾶς πρισματικῆς ἐπιφανείας ὑπὸ δύο ἐπιπέδων παραλλήλων.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ Α'Β'Γ'Δ'Ε'.

Ἀπόδειξις: Αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ Α'Β' εἶναι παράλληλοι, ὡς τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τρίτου· ἀλλὰ καὶ αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ ΑΑ' καὶ ΒΒ' εἶναι παράλληλοι· τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΑΒΒ'Α' εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ΑΒ=Α'Β'. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι ΒΓ=Β'Γ', ΓΔ=Γ'Δ',....



Σχ. 498.

Ἀλλὰ τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ Α'Β'Γ'Δ'Ε' ἔχουν καὶ τὰς γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν· δηλ. τὴν Α=Α', Β=Β', Γ=Γ'.... διότι αἱ πλευραί των εἶναι παράλληλοι καὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν.

Τὰ δύο λοιπὸν πολύγωνα εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς πλευράς των ἴσας, μίαν πρὸς μίαν καὶ τὰς περιεχομένας ὑπὸ τῶν πλευρῶν αὐτῶν γωνίας ἴσας ἀντιστοίχως

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Αἱ τομαὶ μιᾶς πρισματικῆς ..***

727 Κάθετος τομή. ***Κάθετος τομὴ μιᾶς πρισματικῆς ἐπιφανείας*** *λέγεται ἡ τομὴ τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς ὑπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὰς ἀκμάς της.*

Ἀπὸ τὸ προηγούμενον θεώρημα συνάγομεν, ὅτι: ***ὅλαι αἱ κάθετοι τομαὶ μιᾶς πρισματικῆς ἐπιφανείας εἶναι ἴσαι.***

728. Πρῖσμα. ***Πρῖσμα*** *λέγεται τὸ πολύεδρον, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ μιᾶς πρισματικῆς ἐπιφανείας καὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων·* (τὰ ἐπίπεδα δὲν πρέπει νὰ εἶναι παράλληλα πρὸς τὰς ἀκμὰς τῆς πρισματικῆς ἐπιφανείας).

Π.χ. τὸ πολύεδρον ΑΒΓΔΕΑ'Β'Γ'Δ'Ε' *(Σχ. 498)* εἶναι ἕνα πρῖσμα.

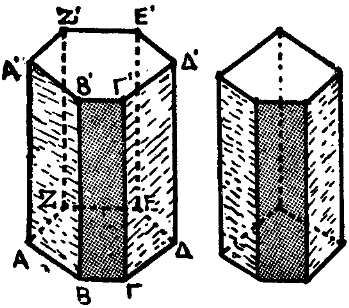
Αἱ τομαὶ τῆς πρισματικῆς ἐπιφανείας ὑπὸ τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων λέγονται ***βάσεις*** *τοῦ πρίσματος.*

Π.χ. βάσεις τοῦ πρίσματος ΑΒΓΔΕΑ'Β'Γ'Δ'Ε' εἶναι αἱ ἕδραι ΑΒΓΔΕ καὶ Α'Β'Γ'Δ'Ε'

Αἱ βάσεις ἑνὸς πρίσματος εἶναι πολύγωνα ἴσα, ὡς τομαὶ πρισματικῆς ἐπιφανείας ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων (§ 726)

Αἱ ἄλλαι ἕδραι τοῦ πρίσματος, ἐκτὸς τῶν δύο βάσεών του, λέγονται ***παράπλευροι ἕδραι.***

Αἱ παράπλευροι ἕδραι ἑνὸς πρίσματος εἶναι παραλληλόγραμμα (§ 726) καὶ ἀποτελοῦν τὴν ***παράπλευρον ἐπιφάνειαν τοῦ πρίσματος.***



Πρίσματα
Σχ. 499.

Παράπλευροι ἀκμαὶ πρίσματος *λέγονται αἱ ἀκμαὶ τοῦ πρίσματος, αἱ ὁποῖαι δὲν κεῖνται ἐπὶ τῶν βάσεών των.*

Π.χ. παράπλευροι ἀκμαὶ τοῦ πρίσματος ΑΒΓ.... *(Σχ. 499)* εἶναι αἱ εὐθεῖαι ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ', ΔΔ',...

Ὅλαι αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ ἑνὸς πρίσματος εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι (§ 726).

Τὸ κοινὸν μῆκος τῶν ἀκμῶν αὐτῶν λέγεται ***ἀκμὴ τοῦ πρίσματος.***

Ὕψος ἑνὸς πρίσματος *λέγεται ἡ ἀπόστασις τῶν δύο βάσεών του.*

Ἕνα ***πρῖσμα λέγεται ὀρθόν,*** *ἐὰν αἱ παράπλευροι ἀκμαί του εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς βάσεις του.*

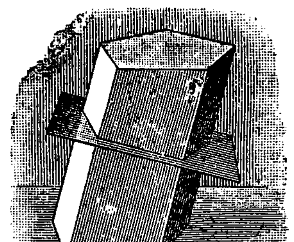
Ἐὰν ἕνα πρῖσμα εἶναι ὀρθόν, αἱ παράπλευροι ἕδραι του εἶναι ὀρθογώνια.

Ἕνα ***πρῖσμα λέγεται πλάγιον,*** *ἐὰν αἱ παράπλευροι ἀκμαί του εἶναι πλάγιαι πρὸς τὰς βάσεις του.*

Ἐὰν ἕνα πρῖσμα εἶναι πλάγιον αἱ παράπλευροι ἕδραι του εἶναι παραλληλόγραμμα.

Ἕνα ***πρῖσμα λέγεται τριγωνικόν, τετραγωνικόν, πενταγωνικὸν*** *κλπ. ἐὰν αἱ βάσεις του εἶναι τρίγωνα, τετράπλευρα, πεντάγωνα κλπ.*

Κάθετος τομὴ ἑνὸς πρίσματος *λέγεται ἡ κάθετος τομὴ* (§ 727) *τῆς πρισματικῆς ἐπιφανείας, ἡ ὁποία τὸ σχηματίζει (Σχ. 500).*



Σχ. 500.

Ἕνα ***πρῖσμα λέγεται κανονικόν,*** *ἐὰν εἶναι ὀρθὸν καὶ ἐὰν ἡ βάσις του εἶναι ἕνα κανονικὸν πολύγωνον.*

Διὰ νὰ ὀνομάσωμεν ἕνα πρῖσμα, ἀπαγγέλλομεν κατὰ σειρὰν τὰ γράμματα τῶν δύο βάσεών του

Π.χ. λέγομεν τὸ πρῖσμα ΑΒΓΔΕΖΑ'Γ'Δ'Ε'Ζ' *(Σχ. 499)*.

Δυνάμεθα ὅμως νὰ ὀνομάσωμεν ἕνα πρῖσμα καὶ μὲ δύο μόνον γράμματα, τὰ ὁποῖα ὅμως δὲν πρέπει νὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἕδρας.

Π.χ. λέγομεν: τὸ πρῖσμα ΑΕ' ἀντὶ νὰ εἴπωμεν τὸ πρῖσμα ΑΒΓΔΕΖΑ'Β'Γ'Δ'Ε'Ζ'.

Ἀσκήσεις: 2203, 2204, 2205, 2206.

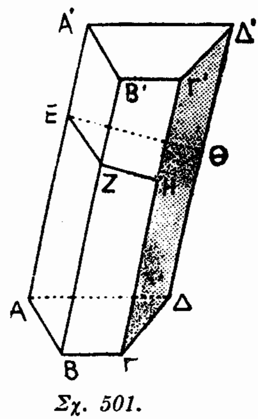
729. Ὁρισμός. ***Ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς πολυέδρου*** *ὀνομάζομεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν ὅλων τῶν ἑδρῶν του.*

730. Πρόβλημα. ***Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ἑνὸς πρίσματος συναρτήσει τῆς περιμέτρου μιᾶς καθέτου τομῆς του καὶ τῆς ἀκμῆς του.***

Ἔστω τὸ πρῖσμα ΑΒΓΔΑ'Β'Γ'Δ' *(Σχ. 501)* καὶ ΕΖΗΘ μία κάθετος τομή του. Τὸ ἐμβαδὸν Ε τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ δοθέντος πρίσματος ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τῶν τεσσάρων παραπλεύρων ἑδρῶν του, αἱ ὁποῖαι εἶναι παραλληλόγραμμα· δηλ. εἶναι

Ε=ἐμβ.ΑΒΒ'Α'+ἐμβ.ΒΓΓ'Β'+ἐμβ.ΓΔΔ'Γ'+ἐμβ.ΔΑΑ'Δ' (1)

Ἐπειδὴ ἡ ΕΖΗΘ εἶναι ἡ κάθετος τομὴ τοῦ πρίσματος, αἱ πλευραὶ τῆς τομῆς αὐτῆς εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς παραπλεύρους ἀκμὰς τοῦ πρίσματος. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ θεωρήσωμεν τὰς πλευρὰς τῆς καθέτου αὐτῆς τομῆς ὡς ὕψη τῶν παραλληλογράμμων, ὁπότε αἱ βάσεις των θὰ εἶναι αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ τοῦ πρίσματος.



Σχ. 501.

Θὰ εἶναι λοιπὸν ἐμβ.ΑΒΒ'Α'=ΑΑ'×ΕΖ

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ἐμβ.ΒΓΓ'Β'=ΒΒ'×ΖΗ

ἐμβ.ΓΔΔ'Γ'=ΓΓ'×ΗΘ

καὶ ἐμβ.ΔΑΑ'Δ'=ΔΔ'×ΘΕ

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὰ ἐμβαδὰ τῶν παραλληλογράμμων μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν

Ε=ΑΑ'×ΕΖ+ΒΒ'×ΖΗ+ΓΓ'×ΗΘ+ΔΔ'×ΘΕ.

Ἐπειδὴ ΑΑ'=ΒΒ'=ΓΓ'=ΔΔ', ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται

Ε=ΑΑ'×ΕΖ+ΑΑ'×ΖΗ+ΑΑ'×ΗΘ+ΑΑ'×ΘΕ=

=ΑΑ'×(ΕΖ+ΖΗ+ΗΘ+ΘΕ).

Ἐπειδὴ ΑΑ'=παράπλευρος ἀκμὴ καὶ (ΕΖ+ΖΗ+ΗΘ+ΘΕ)=περίμετρος καθέτου τομῆς τοῦ πρίσματος συνάγομεν, ὅτι:

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ἑνὸς πρίσματος εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου μιᾶς καθέτου τομῆς του ἐπὶ τὴν ἀκμήν του.

731. Πόρισμα. Ἐὰν τὸ πρῖσμα εἶναι ὀρθόν, ἡ κάθετος τομή του εἶναι ἴση μὲ τὴν βάσιν του καὶ ἡ ἀκμή του εἶναι ἴση μὲ τὸ ὕψος του. Ἑπομένως συνάγομεν, ὅτι:

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι ἴσον μὲ τὴν περίμετρον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

732. Ἐμβαδὸν ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς πρίσματος. *Ἐὰν εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ἑνὸς πρίσματος προσθέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεών του, λαμβάνομεν* ***τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος.***

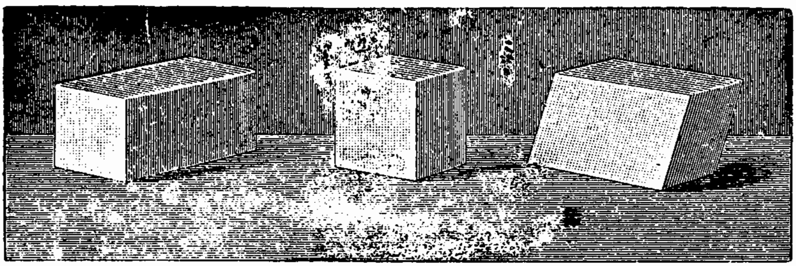
Ἀσκήσεις: 2207, 2208, 2209, 2210, 2211, 2212, 2213.

Παραλληλεπίπεδα

733. Παραλληλεπίπεδον. *Κάθε πρῖσμα, τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι παραλληλόγραμμα, λέγεται* ***παραλληλεπίπεδον.***

Ὅλαι αἱ ἕδραι ἑνὸς παραλληλεπιπέδου εἶναι παραλληλόγραμμα *(Σχ. 502).*

Ἕνα παραλληλεπίπεδον δύναται νὰ εἶναι ***ὀρθὸν*** ἢ ***πλάγιον.*** Εἰς τὸ ὀρθὸν παραλληλεπίπεδον αἱ παράπλευροι ἕδραι του εἶναι ὀρθογώνια.



Ὀρθογων. παραλληλεπίπεδον *Κύβος* *Πλάγιον παραλληλεπίπεδον*

Σχ. 502.

Μεταξὺ τῶν ὀρθῶν παραλληλεπιπέδων διακρίνομεν τὸ *ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον (Σχ. 502)*, τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι ὀρθογώνια. Ὅλαι αἱ ἕδραι ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ὀρθογώνια.

734. Κύβος. ***Κύβος*** *λέγεται τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ ἕδραι εἶναι τετράγωνα (Σχ. 502).*

Εἶναι φανερόν, ὅτι *ὅλαι αἱ ἀκμαὶ ἑνὸς κύβου εἶναι ἴσαι.*

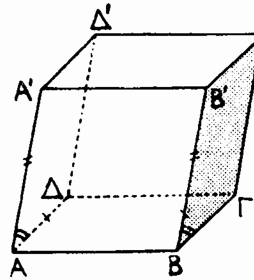
Δύο κύβοι, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀκμήν, εἶναι ἴσοι.

735. Θεώρημα. ***Αἱ ἀπέναντι ἕδραι ἑνὸς παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔΑ′Β′Γ′Δ′ *(Σχ.503)*.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ἀπέναντι ἕδραι του εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.

Ἀπόδειξις: Αἱ ἀπέναντι ἕδραι ΑΔΔ′Α′ καὶ ΒΓΓ′Β′ ἔχουν: τὰς πλευρὰς ΑΔ καὶ ΒΓ ἴσας καὶ παραλλήλους, ὡς ἀπέναντι πλευρὰς τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ· τὰς πλευρὰς ΑΑ′ καὶ ΒΒ′ ἴσας καὶ παραλλήλους, ὡς ἀπέναντι πλευρὰς τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΒ′Α′ καὶ τὰς γωνίας Α′ΑΔ καὶ Β′ΒΓ ἴσας, διότι αἱ πλευραί των εἶναι παράλληλοι καὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν. Αἱ ἕδραι λοιπὸν εἶναι ἴσαι, ὡς παραλληλόγραμμα, τὰ ὁποῖα ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας, μίαν πρὸς μίαν καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην.



Σχ. 503.

Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι Α′ΑΔ καὶ Β′ΒΓ ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους μίαν πρὸς μίαν, τὰ ἐπίπεδα, ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται, εἶναι παράλληλα (§ 635)· ἄρα αἱ ἕδραι ΑΔΔ′Α′ καὶ ΒΓΓ′Β′ εἶναι παράλληλοι. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ αἱ ἄλλαι ἀπέναντι ἕδραι τοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Αἱ ἀπέναντι ἕδραι. . . .***

Παρατήρησις. Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος συνάγομεν, ὅτι: ***Εἰς ἕνα παραλληλεπίπεδον δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς βάσεις του δύο τυχούσας ἀπέναντι ἕδρας.***

736. Θεώρημα. ***Αἱ τέσσαρες διαγώνιοι ἑνὸς παραλληλεπιπέδου διχοτομοῦνται.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔΑ′Β′Γ′Δ′ *(Σχ.504)* καὶ ΑΓ′, ΒΔ′, ΓΑ′, ΔΒ′ αἱ τέσσαρες διαγώνιοί του.

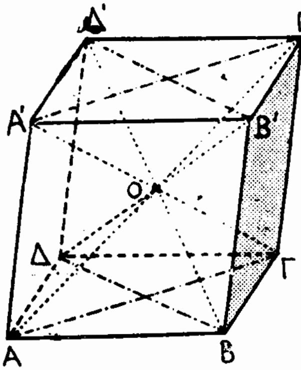
Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ διαγώνιοι αὗται τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ μέσον ἑκάστης ἐξ αὐτῶν.

Ἀπόδειξις: Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ μέσα δύο ἐξ αὐτῶν τῶν διαγωνίων, π.χ. τῶν ΒΔ′ καὶ ΔΒ′, συμπίπτουν.

Πράγματι· ἐὰν φέρωμεν τὰς εὐθείας ΒΔ καὶ Β′Δ′, τὸ τετράπλευρον ΒΒ′Δ′Δ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ δύο ἀπέναντι πλευραί

του ΒΒ′ καὶ ΔΔ′ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, ὡς παράπλευροι ἀκμαὶ παραλληλεπιπέδου. Αἱ ΒΔ′ καὶ ΔΒ′ εἶναι διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου καὶ ἑπομένως διχοτομοῦνται· δηλ. εἶναι

ΒΟ=ΟΔ′, ΔΟ=ΟΒ′.



Σχ. 504.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ διαγώνιος ΑΓ′ τέμνει ἐπίσης τὴν διαγώνιον ΔΒ′ εἰς τὸ μέσον της Ο καὶ ὅτι ἡ διαγώνιος Α′Γ τέμνει τὴν διαγώνιον ΔΒ′ εἰς τὸ μέσον της Ο. Ὥστε αἱ τέσσαρες διαγώνιοι τοῦ παραλληλεπιπέδου τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ μέσον ἑκάστης ἐξ αὐτῶν.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Αἱ τέσσαρες διαγώνιοι....***

737. Κέντρον παραλληλεπιπέδου. *Τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς τομῆς τῶν τεσσάρων διαγωνίων ἑνὸς παραλληλεπιπέδου λέγεται* ***κέντρον τοῦ παραλληλεπιπέδου.***

Ἀσκήσεις: 2214.

738. Ὁρισμός. ***Διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου*** *εἶναι τὰ μήκη τῶν τριῶν ἀκμῶν του, αἱ ὁποῖαι ἔχουν κοινὴν κορυφήν.*

Π.χ. εἰς τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔΑ′Β′Γ′Δ′ *(Σχ. 505)* διαστάσεις του εἶναι τὰ μήκη τῶν ἀκμῶν ΔΑ, ΔΓ, ΔΔ′.

Συνήθως αἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου λέγονται *μῆκος, πλάτος* καὶ *ὕψος* ἢ *βάθος τοῦ παραλληλεπιπέδου*·

Εἶναι φανερόν, ὅτι: *δύο ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς διαστάσεις των ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, εἶναι ἴσα.*

739. Θεώρημα. ***Εἰς κάθε ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον:***

1ον. Αἱ διαγώνιοί του εἶναι ἴσαι.

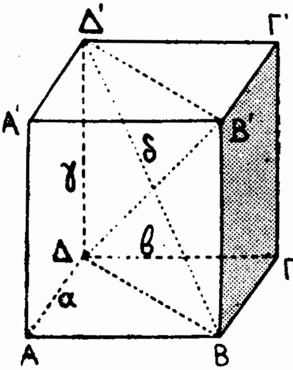
2ον. Τὸ τετράγωνον μιᾶς διαγωνίου του εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τριῶν διαστάσεών του.

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔΑ′Β′Γ′Δ′ *(Σχ. 505)* καὶ ΑΓ′, ΒΔ′, ΓΑ′, ΔΒ′ αἱ διαγώνιοί του.

1ον. Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ διαγώνιοί του εἶναι ἴσαι.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὰς εὐθείας ΒΔ καὶ Β′Δ′· ἐπειδὴ τὸ δοθὲν παραλληλεπίπεδον εἶναι ὀρθογώνιον, αἱ ἀκμαί του Β′Β καὶ Δ′Δ εἶναι

κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως ΑΒΓΔ καὶ ἑπομένως εἶναι κάθετοι καὶ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΔ· ἐπειδὴ δὲ αἱ ἀκμαὶ ΒΒ′ καὶ ΔΔ′ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, τὸ τετράπλευρον ΒΒ′Δ′Δ εἶναι ὀρθογώνιον· ἄρα αἱ διαγώνιοί του ΒΔ′ καὶ ΔΒ′ εἶναι ἴσαι.



Σχ. 505.

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ αἱ διαγώνιοί του ΑΓ′ καὶ ΓΑ′ εἶναι ἴσαι, ὡς διαγώνιοι τοῦ ὀρθογωνίου ΑΓΓ′Α′. Ἐπειδὴ ὅμως τὰ ὀρθογώνια ΑΓΓ′Α′ καὶ ΒΔΔ′Β′ εἶναι ἴσα καὶ αἱ διαγώνιοί των θὰ εἶναι ἴσαι· ὥστε αἱ τέσσαρες διαγώνιοι ΑΓ′, ΒΔ′, ΓΑ′ καὶ ΔΒ′ τοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

2ον. Συμπέρασμα: Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ α, β, γ τὰς τρεῖς διαστάσεις ΔΑ, ΔΓ, ΔΔ′ τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΓ′ *(Σχ. 505)* καὶ μὲ δ τὴν διαγώνιόν του, θὰ δείξωμεν, ὅτι $\delta^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$.

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον Δ′ΔΒ ἔχομεν

$$\overline{\Delta'B}^2=\overline{\Delta\Delta'}^2+\overline{\Delta B}^2 \quad \text{ἢ} \quad \delta^2=\gamma^2+\overline{\Delta B}^2 \qquad (1)$$

Ἀλλὰ ἡ ΔΒ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΔΑΒ καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι

$$\overline{\Delta B}^2=\overline{A\Delta}^2+\overline{AB}^2 \quad \text{ἢ} \quad \Delta B^2=\alpha^2+\beta^2.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὸ ΔB^2 μὲ τὸ ἴσον του καὶ ἔχομεν

$$\delta^2=\gamma^2+\alpha^2+\beta^2 \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\delta^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} \qquad (2)$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι:***Εἰς κάθε ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον.***

Σημ. Ἐὰν τὸ δοθὲν παραλληλεπίπεδον εἶναι κύβος, αἱ τρεῖς διάστασεις του α, β, γ εἶναι ἴσαι καὶ ἑπομένως ὁ τύπος (2) γράφεται

$$\delta^2=\alpha^2+\alpha^2+\alpha^2 \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\delta^2=3\alpha^2}, \quad \text{ἄρα} \quad \boxed{\delta=\alpha\sqrt{3}}\cdot$$

Ἀσκήσεις: 2215, 2216, 2217, 2218, 2219, 2220, 2221 2222, 2223, 2224.

Μέτρησις πρισμάτων - παραλληλεπιπέδων

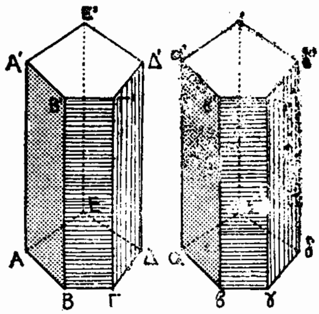
740. Θεώρημα. ***Δύο ὀρθὰ πρίσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη εἶναι ἴσα.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν τὰ ὀρθὰ πρίσματα ΑΔ′ καὶ αδ′ *(Σχ. 506)*

τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας τὰς βάσεις ΑΒΓΔΕ καὶ αβγδε καὶ ἴσα τὰ ὕψη **ΑΑ'** καὶ αα'.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ πρίσματα αὐτὰ εἶναι ἴσα.

Ἀπόδειξις: Λαμβάνομεν (νοερῶς) τὸ πρῖσμα αδ' καὶ τὸ θέτομεν ἐπὶ τοῦ πρίσματος ΑΔ' οὕτως, ὥστε ἡ βάσις του αβγδε νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης της ΑΒΓΔΕ.



Σχ. 506.

Τότε ἡ ἀκμὴ αα', ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος αδ', θὰ συμπέσῃ μὲ τὴν ΑΑ', ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως ΑΒΓΔΕ εἰς τὸ σημεῖον Α (§ 660)· ἐπειδὴ εἶναι ΑΑ'=αα', ἐξ ὑποθέσεως, τὸ σημεῖον α' θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Α'. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι τὸ σημεῖον β' θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Β', τὸ σημεῖον γ' ἐπὶ τοῦ Γ' κλπ. Ἐπειδὴ αἱ κορυφαὶ τῶν δύο πρισμάτων συμπίπτουν μία πρὸς μίαν, τὰ δύο πρίσματα συμπίπτουν καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσα.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Δύο ὀρθὰ πρίσματα....***

741. Πόρισμα. ***Δύο ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη εἶναι ἴσα.***

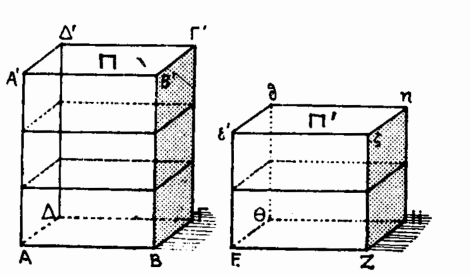
Διότι τὰ ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα εἶναι ὀρθὰ πρίσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη.

742. Θεώρημα. ***Ὁ λόγος δύο ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν, εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν ὑψῶν των.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν τὰ ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα ΑΓ' καὶ Εη *(Σχ. 507)*, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας τὰς βάσεις των ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘ καὶ διάφορα ὕψη ΑΑ'=υ καὶ Εε'=υ'.

Συμπέρασμα: Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Π καὶ Π' τὰ ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα ΑΓ' καὶ Εη, θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{\upsilon}{\upsilon'}.$$



Σχ. 507.

Ἀπόδειξις: Ὑποθέτομεν, ὅτι τὰ ὕψη υ καὶ υ′ ἔχουν ἕνα κοινὸν μέτρον, τὸ ὁποῖον χωρεῖ 3 φορὰς εἰς τὸ ὕψος υ καὶ 2 φορὰς εἰς τὸ ὕψος υ′. Ἀλλὰ τότε θὰ εἶναι $\frac{υ}{υ'} = \frac{3}{2}$ (1)

Διαιροῦμεν τὸ ὕψος ΑΑ′=υ εἰς 3 ἴσα μέρη καὶ τὸ ὕψος Εε′=υ′ εἰς 2 ἴσα μέρη· ὅλα τὰ τμήματα τῶν ὑψῶν αὐτῶν θὰ εἶναι ἴσα. Ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως φέρομεν ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τὰς βάσεις ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘ. Τὰ ἐπίπεδα αὐτὰ διαιροῦν τὸ πρῶτον παραλληλεπίπεδον ΑΓ′ εἰς 3 ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα καὶ τὸ δεύτερον παραλληλεπίπεδον Εη εἰς 2 ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα. Ὅλα αὐτὰ τὰ παραλληλεπίπεδα εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη (§ 740)· ἀλλὰ τότε θὰ εἶναι $\frac{Π}{Π'} = \frac{2}{3}$ (2)

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι

$$\frac{Π}{Π'} = \frac{υ}{υ'} \quad (3)$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ὁ λόγος δύο ὀρθογωνίων παραλλήλεπ...***

Σημ. Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι τὰ ὕψη ΑΑ′ καὶ Εε′ *δὲν ἔχουν ἕνα κοινὸν μέτρον*, τότε ἐργαζόμεθα ὅπως εἰργάσθημεν εἰς τὴν (§ 507, 2ον) διὰ τὰ ἐμβαδὰ δύο ὀρθογωνίων, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ ἀποδεικνύομεν, κατ' ἀνάλογον τρόπον, τὴν σχέσιν (3).

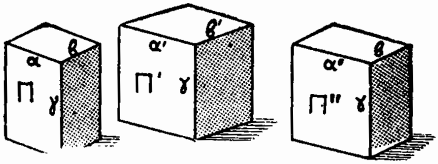
743. Πόρισμα. Ἐπειδὴ τὰ ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας βάσεις, ἔχουν δύο διαστάσεις ἴσας, τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος, συνάγομεν, ὅτι:

Ὁ λόγος δύο ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων, τὰ ὁποῖα ἔχουν δύο διαστάσεις ἴσας, εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν τρίτων διαστάσεών των.

744. Θεώρημα. ***Ὁ λόγος δύο ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσα ὕψη, εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν βάσεών των.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν τὰ ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα Π καὶ Π′, τὰ ὁποῖα ἔχουν, ὡς διαστάσεις τὸ πρῶτον α, β, γ καὶ τὸ δεύτερον α′, β′, γ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\frac{Π}{Π'} = \frac{α \times β}{α \times β'}$.



Σχ. 508.

Ἀπόδειξις: Φανταζόμεθα ἕνα τρίτον ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον Π″, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς δια-

στάσεις α′, β, γ, δηλ. αἱ δύο διαστάσεις του εἶναι ἴσαι μὲ δύο διαστάσεις τοῦ πρώτου παραλληλεπιπέδου.

Ἐπειδὴ τὰ ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα Π καὶ Π′′ ἔχουν δύο διαστάσεις β καὶ γ ἴσας, θὰ ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν τρίτων διαστάσεών των (§ 743) δηλ. θὰ εἶναι $\frac{\Pi}{\Pi''} = \frac{\alpha}{\alpha'}$ (1)

Ἐπειδὴ τὰ ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα Π′′ καὶ Π′ ἔχουν δύο διαστάσεις α′ καὶ γ ἴσας, θὰ ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν τρίτων διαστάσεών των, δηλ. θὰ εἶναι $\frac{\Pi''}{\Pi'} = \frac{\beta}{\beta'}$ (2)

Πολλαπλασιάζομεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\frac{\Pi}{\Pi''} \times \frac{\Pi''}{\Pi'} = \frac{\alpha}{\alpha'} \times \frac{\beta}{\beta'} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{\alpha \times \beta}{\alpha' \times \beta'}.$$

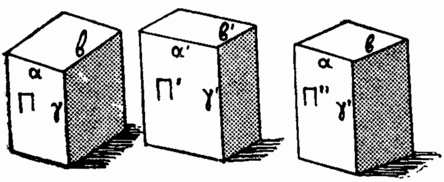
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ὁ λόγος δύο ὀρθογωνίων....***

745. Πόρισμα. Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν τοῦ προηγουμένου θεωρήματος συνάγομεν, ὅτι:

Ὁ λόγος δύο ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων, τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν διάστασιν ἴσην, εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν γινομένων τῶν δύο ἄλλων διαστάσεών των.

746. Θεώρημα. ***Ὁ λόγος δύο ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν γινομένων τῶν τριῶν διαστάσεών των.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν τὰ ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα Π καὶ Π′, τὰ ὁποῖα ἔχουν, ὡς διαστάσεις, τὸ πρῶτον α, β, γ καὶ τὸ δεύτερον α′, β′, γ′.



Σχ. 509.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{\alpha \times \beta \times \gamma}{\alpha' \times \beta' \times \gamma'}$.

Ἀπόδειξις: Φανταζόμεθα ἕνα τρίτον ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον Π′′, τὸ ὁποῖον ἔχει διαστάσεις α, β, γ′ δηλ. αἱ δύο διαστάσεις του α καὶ β εἶναι ἴσαι μὲ δύο διαστάσεις τοῦ πρώτου καὶ ἡ τρίτη διάστασίς του γ′ εἶναι ἴση μὲ μίαν διάστασιν τοῦ δευτέρου.

Ἐπειδὴ τὰ ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα Π καὶ Π′′ ἔχουν δύο διαστάσεις α καὶ β ἴσας, ὁ λόγος των εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν τρίτων διαστάσεών των (§ 743)· δηλ. θὰ εἶναι $\frac{\Pi}{\Pi''} = \frac{\gamma}{\gamma'}$ (1)

Ἐπίσης ἐπειδὴ τὰ παραλληλεπίπεδα Π'' καὶ Π' ἔχουν μίαν διάστασιν ἴσην γ', ὁ λόγος των εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων διαστάσεων (§ 745)· δηλ. θὰ εἶναι $\frac{\Pi''}{\Pi'}=\frac{\alpha\times\beta}{\alpha'\times\beta'}$ (2)

Πολλαπλασιάζομεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\frac{\Pi}{\Pi''}\times\frac{\Pi''}{\Pi'}=\frac{\gamma}{\gamma'}\times\frac{\alpha\times\beta}{\alpha'\times\beta'} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\Pi}{\Pi'}=\frac{\alpha\times\beta\times\gamma}{\alpha'\times\beta'\times\gamma'}.$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ὁ λόγος δύο ὀρθογωνίων παραλληλ....***
Ἀσκήσεις: 2225, 2226.

747. Μονὰς ὄγκου. Διὰ νὰ μετρήσωμεν (§ 32) τὸν ὄγκον ἑνὸς σώματος, δηλ. τὸν χῶρον, τὸν ὁποῖον καταλαμβάνει τὸ σῶμα αὐτὸ εἰς τὸ διάστημα, λαμβάνομεν ὡς μονάδα μετρήσεως τὸν ὄγκον ἑνὸς κύβου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκμὴ εἶναι ἴση μὲ τὴν μονάδα τοῦ μήκους.

Ἂν λάβωμεν ὡς μονάδα μήκους τὸ μέτρον, ἡ μονὰς τῶν ὄγκων θὰ εἶναι ἕνας κύβος, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκμὴ εἶναι ἴση μὲ ἕνα μέτρον· ἡ μονὰς αὐτὴ τῶν ὄγκων θὰ λέγεται *κυβικὸν μέτρον*.

Ἐὰν λάβωμεν ὡς μονάδα μήκους τὸ δεκατόμετρον, τὸ ἑκατοστόμετρον, τὸ χιλιοστόμετρον, ἡ μονὰς τῶν ὄγκων θὰ εἶναι ἕνας κύβος, ὁ ὁποῖος θὰ ἔχῃ ἀκμὴν ἴσην, ἀντιστοίχως, μὲ ἕνα δεκατόμετρον (παλάμην), ἕνα ἑκατοστόμετρον, ἕνα χιλιοστόμετρον καὶ θὰ λέγεται κατὰ σειρὰν *κυβικὸν δεκατόμετρον, κυβικὸν ἑκατοστόμετρον, κυβικὸν χιλιοστόμετρον*.

748. Ὄγκος σώματος. *Τὸ ἐξαγόμενον τῆς συγκρίσεως ἑνὸς σώματος πρὸς τὴν μονάδα τῶν ὄγκων, δηλ. ὁ* ***ἀριθμὸς*** *ποὺ ἐκφράζει πόσας φορὰς τὸ δοθὲν σῶμα περιέχει τὴν μονάδα τῶν ὄγκων ἢ τὰ μέρη αὐτῆς, λέγεται* ***ὄγκος*** *τοῦ σώματος.*

Παρατήρησις. Εἶναι φανερόν, ὅτι *δύο πολύεδρα καὶ γενικῶς δύο σώματα εἶναι* ***ἰσοδύναμα****, ἐὰν ἔχουν τὸν αὐτὸν ὄγκον.*

Δύο πολύεδρα κλπ. ἴσα, εἶναι προφανῶς ἰσοδύναμα, ἀλλὰ δύο πολύεδρα κλπ. δύνανται νὰ εἶναι ἰσοδύναμα, χωρὶς νὰ εἶναι ἴσα.

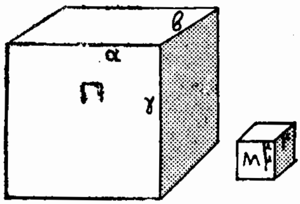
749. Θεώρημα. ***Ὁ ὄγκος ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν διαστάσεών των.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον Π, τὸ ὁποῖον ἔχει διαστάσεις α, β, γ.

Συμπέρασμα: Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ V τὸν ὄγκον του θὰ δείξωμεν, ὅτι $V=\alpha\times\beta\times\gamma$.

Ἀπόδειξις: Ὑποθέτομεν, ὅτι αἱ διαστάσεις α, β, γ τοῦ ὀρθογω-

νίου παραλληλεπιπέδου Π ἐμετρήθησαν μὲ τὴν μονάδα μ τοῦ μήκους. Ἡ μονὰς τῶν ὄγκων θὰ εἶναι τότε ἕνας κύβος Μ, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ θὰ εἶναι ἴση μὲ μ.



Σχ. 510.

Ἐπειδὴ καὶ ὁ κύβος Μ εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, ὁ λόγος τῶν ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων Π καὶ Μ θὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν γινομένων τῶν τριῶν διαστάσεών των· δηλ. θὰ εἶναι

$$\frac{\Pi}{M} = \frac{\alpha \times \beta \times \gamma}{\mu \times \mu \times \mu}.$$

Ἐπειδὴ ὁ κύβος Μ εἶναι ἡ μονὰς τῶν ὄγκων, ὁ λόγος $\frac{\Pi}{M}$ παριστάνει τὸν ὄγκον τοῦ παραλληλεπιπέδου Π καὶ ἐπειδὴ μ=μ=μ=1, ἡ ἰσότης (1) γράφεται

$$\text{ὄγκ. παραλληλεπιπέδου } \Pi = \frac{\alpha \times \beta \times \gamma}{1 \times 1 \times 1} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\mathbf{V = \alpha \times \beta \times \gamma}}$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ὁ ὄγκος ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλλη...***

750. Παρατήρησις. Ὅπως ἀνεφέραμεν καὶ εἰς τὴν § 510 παρ., ὅταν λέγωμεν: ὁ ὄγκος ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν διαστάσεών του ἐννοοῦμεν, ὅτι: *ὁ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος μετρεῖ τὸν ὄγκον τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι μετροῦν τὰς τρεῖς διαστάσεις του.*

751. Πόρισμα Ι. Ἡ ἰσότης V=α×β×γ δύναται νὰ γραφῇ:

$$V = (\alpha \times \beta) \times \gamma.$$

Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον (α×β) παριστάνει τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου καὶ τὸ γ τὸ ὕψος του συνάγομεν, ὅτι:

Ὁ ὄγκος ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Δηλ. **Ὄγκ. ὀρθ. παραλληλεπ.=ἐμβ. βάσεως×ὕψος**

752. Πόρισμα ΙΙ. ***Ὁ ὄγκος ἑνὸς κύβου εἶναι ἴσος μὲ τὴν τρίτην δύναμιν τῆς ἀκμῆς του.***

Ὁ κύβος εἶναι ἕνα ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς διαστάσεις εἶναι ἴσαι. Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ V τὸν ὄγκον του καὶ μὲ α τὴν ἀκμήν του θὰ εἶναι

$$V = \alpha \times \alpha \times \alpha \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\textbf{ὄγκ. κύβου} = \alpha^3}$$

Σημ. Ἡ τρίτη δύναμις ἑνὸς ἀριθμοῦ λέγεται καὶ **κύβος τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ,** διότι δίδει τὸν ὄγκον ἑνὸς κύβου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκμὴ εἶναι ἴση μὲ τὸν ἀριθμόν.

Ἀσκήσεις: *2227, 2228, 2229, 2230, 2231, 2232, 2233, 2234, 2235.*

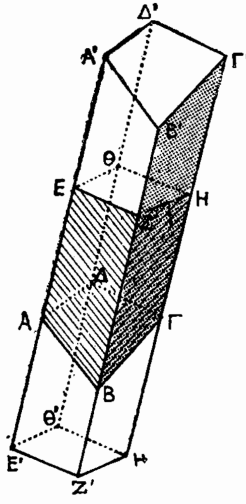
753. Θεώρημα. ***Κάθε πλάγιον πρῖσμα εἶναι ἰσοδύναμον μὲ ὀρθὸν πρῖσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς βάσιν τὴν κάθετον τομὴν τοῦ πλαγίου πρίσματος καὶ ὡς ὕψος τὴν παράπλευρον ἀκμήν του.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ πλάγιον πρῖσμα ΑΒΓΔΑ′Β′Γ′Δ′ καὶ ΕΖΗΘ μία κάθετος τομὴ αὐτοῦ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ πρῖσμα ΑΓ′ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ πρῖσμα, ποὺ ἔχει βάσιν τὴν ΕΖΗΘ καὶ παράπλευρον ἀκμὴν τὴν ΑΑ′.

Ἀπόδειξις: Ὑποθέτομεν, ὅτι ἡ κάθετος τομὴ ΕΖΗΘ δὲν συναντᾷ τὴν βάσιν ΑΒΓΔ τοῦ πλαγίου πρίσματος *(Σχ. 511).*

Προεκτείνομεν τὰς παραπλεύρους ἀκμὰς τοῦ πλαγίου πρίσματος κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν. Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ἀκμῆς ΕΑ λαμβάνομεν ἕνα τμῆμα ΕΕ′ ἴσον μὲ τὴν ἀκμὴν Α′Α τοῦ πλαγίου πρίσματος· ἀπὸ τὸ σημεῖον Ε′ φέρομεν μίαν δευτέραν κάθετον τομὴν Ε′Ζ′Η′Θ′ καὶ οὕτω σχηματίζεται ἕνα ὀρθὸν πρῖσμα Ε′Ζ′Η′Θ′ΕΖΗΘ, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς βάσιν τὴν κάθετον τομὴν ΕΖΗΘ τοῦ πλαγίου πρίσματος καὶ ὡς ὕψος τὴν παράπλευρον ἀκμὴν ΕΕ′, ἡ ὁποία εἶναι ἴση ἐκ κατασκευῆς μὲ τὴν παράπλευρον ἀκμὴν τοῦ πλαγίου πρίσματος. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ ὀρθὸν πρῖσμα Ε′Η εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ πλάγιον πρῖσμα ΑΓ′.



Σχ. 511.

Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα 511 τὸ πλάγιον πρῖσμα ΑΓ′ καὶ τὸ ὀρθὸν πρῖσμα Ε′Η ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὸ κοινὸν στερεὸν ΑΒΓΔΕΖΗΘ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μὴ κοινὰ στερεὰ Ε′Ζ′Η′Θ′ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘΑ′Β′Γ′Δ′. Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τώρα, ὅτι τὸ πλάγιον πρῖσμα καὶ τὸ ὀρθὸν πρῖσμα εἶναι ἰσοδύναμα ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι τὰ δύο αὐτὰ στερεὰ Ε′Ζ′Η′Θ′ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘΑ′Β′Γ′Δ′ εἶναι ἴσα.

Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν (νοερῶς) τὸ στερεὸν Ε'Ζ'Η'Θ'ΑΒΓΔ καὶ τὸ θέτομεν ἐπὶ τοῦ στερεοῦ ΕΖΗΘΑ'Β'Γ'Δ' οὕτως, ὥστε ἡ ἕδρα Ε'Ζ'Η'Θ' νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης της ἕδρας ΕΖΗΘ. Τότε ἡ ἀκμὴ Ε'Α, ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ε'Ζ'Η'Θ' εἰς τὸ σημεῖον Ε' θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς καθέτου ΕΑ' ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΕΖΗΘ εἰς τὸ σημεῖον Ε. Ἐπειδὴ δὲ αἱ ἀκμαὶ Ε'Α καὶ ΕΑ' εἶναι ἴσαι, ὡς διαφορὰ τῶν ἴσων ἀκμῶν Ε'Ε καὶ ΑΑ' ἀπὸ τῶν ὁποίων ἀφηρέθη τὸ κοινὸν τμῆμα ΑΕ, τὸ σημεῖον Α θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Α'.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι αἱ ἀκμαὶ Ζ'Β, Η'Γ, Θ'Δ θὰ πέσουν ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν ἀκμῶν ΖΒ', ΗΓ', ΘΔ' καὶ τὰ σημεῖα Β, Γ, Δ, θὰ πέσουν ἐπὶ τῶν σημείων Β', Γ', Δ'. Ἐπειδὴ αἱ κορυφαὶ τῶν δύο στερεῶν Ε'Ζ'Η'Θ'ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘΑ'Β'Γ'Δ' συμπίπτουν, μία πρὸς μίαν, τὰ στερεὰ αὐτὰ ἐφαρμόζουν καὶ ἐπομένως εἶναι ἴσα.

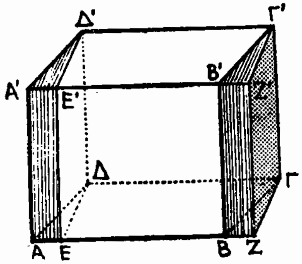
Παρατηροῦμεν λοιπόν, ὅτι τὸ πλάγιον πρῖσμα καὶ τὸ ὀρθὸν πρῖσμα ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἴσα μέρη καὶ ἐπομένως εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Κάθε πλάγιον πρῖσμα....***

754. Θεώρημα. ***Ὁ ὄγκος ἑνὸς παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.***

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, *καθόσον τὸ παραλληλεπίπεδον εἶναι ὀρθὸν ἢ πλάγιον.*

1η. Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ ὀρθὸν παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔΑ'Β'Γ'Δ' ἢ ΑΓ', τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ ὕψος τὸ ΑΑ'.



Σχ. 512.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι: ὄγκος ΑΓ'=ἐμβ. ΑΒΓΔ×ΑΑ'.

Ἀπόδειξις: Κατασκευάζομεν τὸ ὀρθογώνιον ΔΕΖΓ, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς βάσιν τὴν πλευρὰν ΔΓ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ καὶ ὡς ὕψος τὸ ὕψος ΔΕ τοῦ παραλληλογράμμου αὐτοῦ. Κατασκευάζομεν ἔπειτα τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ΕΖΓΔΕ'Ζ'Γ'Δ', τὸ ὁποῖον ἔχει τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὸ δοθὲν παραλληλεπίπεδον. Τὰ δύο παραλληλεπίπεδα ΑΒΓΔΑ'Β'Γ'Δ' καὶ ΕΖΓΔΕ'Ζ'Γ'Δ' εἶναι ἰσοδύναμα, διότι ἕκαστον τούτων ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ κοινὸν στερεὸν ΕΒΓΔΕ'Β'Γ'Δ' καὶ ἀπὸ τὰ ἴσα τριγωνικὰ πρίσματα ΑΕΔΑ'Ε'Δ' καὶ ΒΖΓΒ'Ζ'Γ'. Τὰ τριγωνικὰ αὐτὰ πρίσματα εἶναι ἴσα (§ 740) διότι εἶναι ὀρθὰ καὶ ἔχουν ἴσας βάσεις, τὰ τρίγωνα ΑΕΔ καὶ ΒΖΓ καὶ ἴσα ὕψη ΑΑ'=ΒΒ'.

Ἀλλὰ (§ 749) ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ΕΖΓΔΕ′Ζ′Γ′Δ′, καὶ ἑπομένως καὶ τοῦ ἰσοδυνάμου του ὀρθοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΒΓΔΑ′Β′Γ′Δ′, εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ΕΖΓΔ ἐπὶ τὸ ὕψος του, δηλ. μὲ ἐμβ. ΕΖΓΔ×ΔΔ′.

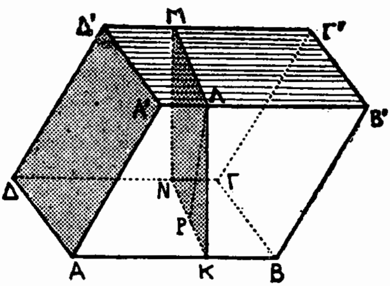
Θὰ εἶναι λοιπὸν ὀγκ. ΑΓ′=ἐμβ. ΕΖΓΔ×ΔΔ′ (1)

Ἐπειδὴ αἱ βάσεις ΕΖΓΔ καὶ ΑΒΓΔ εἶναι ἰσοδύναμοι καὶ ΔΔ′=ΑΑ′, ἡ ἰσότης (1) γράφεται ὀγκ. ΑΓ′=ἐμβ. ΑΒΓΔ×ΑΑ′·

2α. *Ὑπόθεσις:* Ἔστω τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔΑ′Β′Γ′Δ′ *(Σχ. 513)*, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ.

Συμπέρασμα: Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ υ τὸ ὕψος τοῦ παραλληλεπιπέδου θὰ δείξωμεν, ὅτι ὄγκ. ΑΓ′=ἐμβ. ΑΒΓΔ×υ.

Ἀπόδειξις: Τὸ δοθὲν παραλληλεπίπεδον ΑΓ′ δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς ἕνα πλάγιον πρίσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν τὴν ΔΑΑ′Δ′ καὶ ὡς παράπλευρον ἀκμὴ τὴν ΑΒ. Ἀλλὰ τὸ παραλληλεπίπεδον αὐτό, ὡς πλάγιον πρῖσμα, εἶναι ἰσοδύναμον (§ 753) μὲ ἕνα ὀρθὸν πρῖσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν τὴν κάθετον τομὴν ΚΛΜΝ καὶ ὡς ὕψος τὴν παράπλευρον ἀκμὴν ΑΒ.



Σχ. 513.

Ἀλλὰ ἡ κάθετος τομὴ ΚΛΜΝ εἶναι ἕνα παραλληλόγραμμον, διότι αἱ ἀπέναντι πλευραί του ΚΛ, ΝΜ καὶ ΚΝ, ΛΜ εἶναι παράλληλοι, ὡς τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τρίτου καὶ ἑπομένως τὸ ὀρθὸν αὐτὸ πρῖσμα εἶναι ἕνα ὀρθὸν παραλληλεπίπεδον. Ὁ ὄγκος αὐτοῦ καὶ ἑπομένως καὶ τοῦ ἰσοδυνάμου του ΑΓ′ θὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ΚΛΜΝ ἐπὶ τὸ ὕψος του ΑΒ, δηλ. θὰ εἶναι

ὄγκ. ΑΓ′=ἐμβ. ΚΛΜΝ×ΑΒ (2)

Ἐὰν λάβωμεν ὡς βάσιν τοῦ παραλληλογράμμου ΚΛΜΝ τὴν πλευρὰν ΚΝ, ὕψος του θὰ εἶναι ἡ ΛΡ καὶ ἑπομένως τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶναι ἴσον μὲ ΚΝ×ΛΡ. Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἰσότητα (2) τὸ ἐμβ.ΚΛΜΝ μὲ τὸ ἴσον του ΚΝ×ΛΡ, ἡ ἰσότης (2) γράφεται

ὄγκος ΑΓ′=ΚΝ×ΛΡ×ΑΒ ἢ ὄγκος ΑΓ′=(ΑΒ×ΚΝ)×ΛΡ (3)

Ἐπειδὴ ἡ ΚΛΜΝ εἶναι κάθετος τομὴ τοῦ ΑΓ′, ἡ ΝΚ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκμὴν ΑΒ καὶ ἑπομένως ἡ ΚΝ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ὕψος τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Ἑπομένως τὸ γινόμενον (ΑΒ×ΚΝ)

παριστάνει τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ΑΒΓΔ· δηλ. εἶναι

(ΑΒ×ΚΝ)=ἐμβ. ΑΒΓΔ.

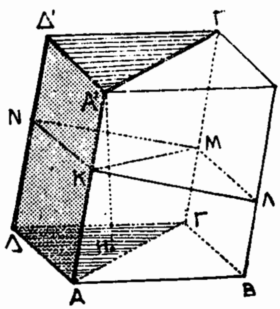
Ἐπίσης ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδον ΚΛΜΝ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓΔ, ἡ εὐθεῖα ΛΡ, ἡ ὁποία κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΚΛΜΝ καὶ εἶναι, ἐκ κατασκευῆς, κάθετος ἐπὶ τὴν τομὴν ΚΝ τῶν ἐπιπέδων ΑΒΓΔ καὶ ΚΛΜΝ, θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓΔ (§ 686)· ἐπομένως ἡ ΛΡ εἶναι τὸ ὕψος υ τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΓ'. Ἂν ἀντι καταστήσωμεν εἰς τὴν ἰσότητα (3) τὸ (ΑΒ×ΚΝ) μὲ τὸ ἴσον του ἐμβ. ΑΒΓΔ καὶ τὸ ΛΡ μὲ τὸ ἴσον του υ, ἔχομεν

ὄγκ. ΑΓ' = ἐμβ. ΑΒΓΔ×υ

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ὁ ὄγκος ἑνὸς παραλληλεπιπέδου....***

755. Θεώρημα. ***Τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ δύο ἀπέναντι ἀκμὰς ἑνὸς παραλληλεπιπέδου, διαιρεῖ τὸ παραλληλεπίπεδον εἰς δύο τριγωνικὰ πρίσματα ἰσοδύναμα.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔΑ'Β'Γ'Δ'. Φέρομεν τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὰς δύο ἀπέναντι ἀκμὰς ΑΑ' καὶ ΓΓ' καὶ τὸ ὁποῖον διαιρεῖ τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΓ εἰς τὰ δύο στερεὰ ΑΒΓΑ'Β'Γ' καὶ ΑΔΓΑ'Δ'Γ'.



Σχ. 514.

1ον. Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ στερεὰ αὐτὰ εἶναι τριγωνικὰ πρίσματα ἰσοδύναμα.

Ἀπόδειξις: Τὸ στερεὸν ΑΒΓΑ'Β'Γ' εἶναι τριγωνικὸν πρῖσμα, διότι αἱ παράπλευροι ἀκμαί του ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, ὡς παράπλευροι ἀκμαὶ τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΓ' καὶ αἱ τριγωνικαὶ βάσεις του ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι παράλληλοι, ὡς μέρη τῶν παραλλήλων βάσεων τοῦ αὐτοῦ παραλληλεπιπέδου. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ τὸ στερεὸν ΑΔΓΑ'Δ'Γ' εἶναι τριγωνικὸν πρῖσμα.

2ον. Συμπέρασμα: Τώρα θὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι τὰ τριγωνικὰ αὐτὰ πρίσματα εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἀπόδειξις: Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, *καθ' ὅσον τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΓ' εἶναι ὀρθὸν ἢ πλάγιον.*

I. Ἐὰν τὸ δοθὲν παραλληλεπίπεδον ΑΓ' εἶναι ὀρθὸν καὶ τὰ τριγωνικὰ πρίσματα ΑΒΓΑ'Β'Γ' καὶ ΑΔΓΑ'Δ'Γ' εἶναι ὀρθά. Ἀλλὰ τὰ

δύο αὐτὰ ὀρθὰ πρίσματα ἔχουν ἴσας τὰς βάσεις των ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ, ὡς ἡμίση τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ καὶ ἴσα τὰ ὕψη των ΑΑ' καὶ ΒΒ'· ἄρα θὰ εἶναι ἴσα (§ 740) καὶ ἑπομένως καὶ ἰσοδύναμα.

ΙΙ. *Ἐὰν τὸ δοθὲν παραλληλεπίπεδον ΑΓ' εἶναι πλάγιον*, καὶ τὰ δύο τριγωνικὰ πρίσματα ΑΒΓΑ'Β'Γ' καὶ ΑΔΓΑ'Δ'Γ' εἶναι πλάγια. Φέρομεν τὴν κάθετον τομὴν ΚΛΜΝ τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΓ'· ἡ κάθετος αὐτὴ τομὴ εἶναι ἕνα παραλληλόγραμμον, διότι αἱ ἀπέναντι πλευραί του εἶναι παράλληλοι, ὡς τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τρίτου. Τὸ ἐπίπεδον λοιπὸν ΑΑ'Γ'Γ διαιρεῖ τὸ παραλληλόγραμμον ΚΛΜΝ εἰς δύο ἴσα τρίγωνα ΚΛΜ καὶ ΚΝΜ, τὰ ὁποῖα εἶναι αἱ κάθετοι τομαὶ τῶν τριγωνικῶν πρισμάτων ΑΒΓΑ'Β'Γ' καὶ ΑΔΓΑ'Δ'Γ' ἀντιστοίχως.

Ἀλλὰ τότε τὸ πλάγιον τριγωνικὸν πρῖσμα ΑΒΓΑ'Β'Γ' εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ὀρθὸν πρῖσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν τὴν κάθετον τομὴν ΚΛΜ καὶ ὕψος ἴσον μὲ τὴν παράπλευρον ἀκμὴν ΑΑ'. Ὁμοίως τὸ πλάγιον τριγωνικὸν πρῖσμα ΑΔΓΑ'Δ'Γ' εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ὀρθὸν πρῖσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν τὴν κάθετον τομὴν ΚΝΜ καὶ ὕψος ἴσον μὲ τὴν παράπλευρον ἀκμὴν ΑΑ'. Ἐπειδὴ τὰ δύο αὐτὰ ὀρθὰ πρίσματα ἔχουν ἴσας βάσεις, τὰς ΚΛΜ καὶ ΚΝΜ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΑ', εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως καὶ ἰσοδύναμα. Ἀλλὰ τότε καὶ τὰ δύο πλάγια τριγωνικὰ πρίσματα ΑΒΓΑ'Β'Γ' καὶ ΑΔΓΑ'Δ'Γ', τὰ ὁποῖα εἶναι ἀντιστοίχως ἰσοδύναμα μὲ τὰ ὀρθὰ τριγωνικὰ πρίσματα, θὰ εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον....***

756. Θεώρημα. ***Ὁ ὄγκος ἑνὸς πρίσματος εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.***

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, *καθόσον τὸ πρῖσμα εἶναι τριγωνικὸν ἢ τυχὸν πρῖσμα.*

Ι. Τὸ πρῖσμα εἶναι τριγωνικόν.

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ τριγωνικὸν πρῖσμα ΑΒΓΑ'Β'Γ' *(Σχ. 514)*, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὸ ὕψος του ΑΗ.

Συμπέρασμα: Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ V τὸν ὄγκον του, θὰ δείξωμεν, ὅτι V=ἐμβ. ΑΒΓ×Α'Η.

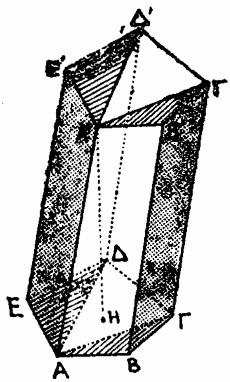
Ἀπόδειξις: Κατασκευάζομεν τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔΑ'Β'Γ'Δ' τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς βάσιν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον κατασκευάζεται μὲ πλευρὰς τὰς ΑΒ καὶ ΒΓ καὶ ὡς ὕψος τὸ ὕψος Α'Η τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος. Τὸ παραλληλεπίπεδον αὐτὸ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ δύο τριγωνικὰ πρίσματα ΑΒΓΑ'Β'Γ' καὶ ΑΔΓΑ'Δ'Γ', τὰ ὁποῖα *ἰσοδύναμα* (§ 755). Συνεπῶς τὸ τριγωνικὸν πρῖσμα ΑΒΓΑ'Β'Γ' εἶναι

τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΓ′ καὶ ἐπομένως ὁ ὄγκος του θὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ὄγκου τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΓ′. Ἐπειδὴ ὁ ὄγκος τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΓ′ εἶναι ἴσος μὲ ἐμβ. ΑΒΓΔ×Α′Η ἕπεται, ὅτι ὁ ὄγκος V τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος θὰ εἶναι:

$$V=\frac{1}{2}\text{ἐμβ. ΑΒΓΔ}\times \text{Α′Η} \quad \text{ἢ} \quad V=\text{ἐμβ. ΑΒΓ}\times\text{Α′Η}.$$

II. Τὸ πρῖσμα εἶναι τυχόν.

Ὑπόθεσις: Ἔστω τώρα τὸ τυχὸν πρῖσμα ΑΒΓΔΕΑ′Β′Γ′Δ′Ε′ *(Σχ. 515)* τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ καὶ ὕψος του τὸ Α′Η.



Σχ. 515.

Συμπέρασμα: Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ V τὸν ὄγκον του θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$V=\text{ἐμβ.ΑΒΓΔΕ}\times\text{Α′Η}.$$

Ἀπόδειξις: Δυνάμεθα νὰ χωρίσωμεν τὸ δοθὲν πρῖσμα εἰς τριγωνικὰ πρίσματα, ὅπως ἐχωρίσαμεν ἕνα τυχὸν πολύγωνον εἰς τρίγωνα. Πρὸς τοῦτο φέρομεν τὰ διαγώνια ἐπίπεδα ΑΑ′Γ′Γ, ΑΑ′Δ′Δ, τὰ ὁποῖα χωρίζουν τὸ δοθὲν πρῖσμα εἰς τὰ τριγωνικὰ πρίσματα ΑΒΓΑ′Β′Γ′, ΑΓΔΑ′Γ′Δ′, ΑΔΕΑ′Δ′Ε′. Τὰ τριγωνικὰ αὐτὰ πρίσματα ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος Α′Η καὶ βάσεις ἀντιστοίχως τὰς ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ.

Ὁ ὄγκος V τοῦ δοθέντος πρίσματος εἶναι προφανῶς ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων ὅλων αὐτῶν τῶν τριγωνικῶν πρισμάτων· δηλ. εἶναι

$$V=\text{ὄγκ.ΑΒΓΑ′Β′Γ′}+\text{ὄγκ.ΑΓΔΑ′Γ′Δ′}+\text{ὄγκ.ΑΔΕΑ′}\times\text{Δ′Ε′} \quad (1)$$

Ἐπειδὴ ὄγκ. ΑΒΓΑ′Β′Γ′=ἐμβ. ΑΒΓ×Α′Η,

ὄγκ. ΑΓΔΑ′Γ′Δ′=ἐμβ. ΑΓΔ×Α′Η

καὶ ὄγκ. ΑΔΕΑ′Δ′Ε′=ἐμβ. ΑΔΕ×Α′Η

καὶ ἰσότης (1) γράφεται:

$$V=\text{ἐμβ. ΑΒΓ}\times\text{Α′Η}+\text{ἐμβ. ΑΓΔ}\times\text{Α′Η}+\text{ἐμβ. ΑΔΕ}\times\text{Α′Η}$$

ἢ $V=(\text{ἐμβ.ΑΒΓ}+\text{ἐμβ.ΑΓΔ}+\text{ἐμβ. ΑΔΕ})\times\text{Α′Η}$

ἢ $V=\text{ἐμβ.ΑΒΓΔΕ}\times\text{Α′Η}$ ἢ **ὄγκ.πρίσμ.=ἐμβ.βασ.×ὕψος**

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ὁ ὄγκος ἑνὸς πρίσματος....***

757. Πορίσματα. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Β τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἑνὸς πρίσματος, μὲ υ τὸ ὕψος του καὶ μὲ V τὸν ὄγκον του θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον: **V=B.υ**

Ἀπὸ τὸν τύπον αὐτὸν συνάγομεν ἀμέσως, ὅτι:

I. Δύο πρίσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν βάσεις ἰσοδυνάμους καὶ ἴσα ὕψη, εἶναι ἰσοδύναμα.

II. Δύο πρίσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἰσοδυνάμους βάσεις, εἶναι ὡς τὰ ὕψη των.

III. Δύο πρίσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσα ὕψη, εἶναι ὡς αἱ βάσεις των.

Ἀσκήσεις

2203. (2239). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ὕψος πλαγίου πρίσματος εἶναι μικρότερον τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν του.

2204. (2240). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ ἑνὸς πρίσματος ἔχουν τὴν αὐτὴν κλίσιν πρὸς τὰς βάσεις του.

2205. (2241). Κάθε τομὴ πρίσματος ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰς παραπλεύρους ἀκμὰς εἶναι παραλληλόγραμμον.

2206. (2242). Δύο διαγώνια ἐπίπεδα πρίσματος, (δηλ. τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα διέρχονται ἀπὸ δύο μὴ διαδοχικὰς παραπλεύρους ἀκμὰς) τέμνονται κατὰ εὐθεῖαν παράλληλον καὶ ἴσην πρὸς τὰς παραπλεύρους ἀκμάς του.

2207. (2243). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος, ἐὰν αἱ ἀκμαὶ τῆς βάσεώς του εἶναι 18 ἑκ., 24 ἑκ., 30 ἑκ. καὶ τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος εἶναι 64 ἑκ.

2208. (2244). Ἡ βάσις ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς 0,60 μ. καὶ τὸ ὕψος του 2,4 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος.

2209. (2245). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγωνικοῦ πρίσματος, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ βάσις του εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον ἀκτῖνος 12 ἑκ. καὶ τὸ ὕψος του εἶναι 0,60 μ.

2210. (2246). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ βάσις του εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον αὐτόν.

2211. (2247). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν ἡ βάσις του εἶναι τετράγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον αὐτόν.

2212. (2248). Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κανονικοῦ τετραγωνικοῦ πρίσματος, μὲ ὅλας τὰς ἀκμάς του, ἴσας εἶναι 61,44 τ. ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος.

2213. (2249). Ἡ βάσις ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος του εἶναι διπλάσιον τοῦ πλάτους του. Ἐὰν τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος εἶναι 5 μ. καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του 76 τ.μ. νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις τῆς βάσεως καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος.

2214. (2250). Κάθε εὐθεῖα, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον ἑνὸς παραλληλεπιπέδου καὶ περατοῦται εἰς τὴν ἐπιφάνειάν του διχοτομεῖται ὑπὸ τοῦ κέντρου.

2215. (2251). Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ἑνὸς κύβου εἶναι 289 τ.μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκμὴ τοῦ κύβου αὐτοῦ.

2216. (2252). Διὰ νὰ βάψωμεν τὰς ἕδρας ἑνὸς κυβικοῦ δοχείου ἐπληρώσαμεν 1080 δρχ. πρὸς 125 δρχ. τὸ τ.μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκμὴ τοῦ δοχείου.

2217. (2253). Αἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι 12 ἑκ., 8 ἑκ. καὶ 20 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαγώνιός του καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας.

2218. (2254). Ἡ ἀκμὴ ἑνὸς κύβου εἶναι 40 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαγώνιός του.

2219. (2255). Τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἕδρας ἑνὸς κύβου εἶναι 72,25 τ.μ. Πόση εἶναι ἡ διαγώνιός του.

2220. (2256). Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κύβου εἶναι 486 τ.ἑκ. Πόση εἶναι ἡ διαγώνιός του;

2221. (2257). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κύβου, ἂν γνωρίζωμεν:

1ον. τὴν διαγώνιόν του.

2ον. τὴν διαγώνιον μιᾶς ἕδρας του.

3ον. τὴν διαγώνιον ἑνὸς διαγωνίου ἐπιπέδου του.

4ον. τὴν περίμετρον ἑνὸς διαγωνίου ἐπιπέδου του.

2222. (2258). Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι 1550 τ.ἑκ. καὶ αἱ τρεῖς διαστάσεις του εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 5. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις του.

2223. (2259). Ἐὰν αἱ διαγώνιοι ἑνὸς παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι, τὸ παραλληλεπίπεδον αὐτὸ εἶναι ὀρθογώνιον.

2224. (2260). Ἐὰν εἰς ἕνα τετραγωνικὸν πρῖσμα τρεῖς διαγώνιοί του διέρχωνται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον, ἡ τετάρτη διαγώνιος διέρχεται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ τὸ πρῖσμα εἶναι ἕνα παραλληλεπίπεδον.

2225. (2261). Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος δύο ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων, ἐὰν τὰ ὕψη των εἶναι 3,2 μ. καὶ αἱ διαστάσεις τῶν βάσεών των εἶναι τοῦ μὲν πρώτου 1,5 μ. καὶ 3 μ. τοῦ δὲ δευτέρου 4,5 μ. καὶ 6 μ.

2226. (2262). Αἱ διαστάσεις δύο ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων εἶναι τοῦ μὲν πρώτου 4 μ., 6 μ., 8 μ. τοῦ δὲ ἄλλου 8 μ., 12 μ., 16 μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν δύο αὐτῶν παραλληλεπιπέδων.

2227. (2263). Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κύβου εἶναι 90,25 τ.ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ κύβου καὶ ἡ διαγώνιός του.

2228. (2264). Ὁ ὄγκος ἑνὸς κύβου εἶναι 5 κ.μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαγώνιός του καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του.

2229. (2265). Διὰ νὰ καλύψωμεν τὸ ἐσωτερικὸν ἑνὸς κυβικοῦ κιβωτίου, χωρὶς πῶμα, ἐχρησιμοποιήσαμεν 0,882 τ.μ. χάρτου. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ κιβωτίου αὐτοῦ;

2230. (2266). Ἡ διαγώνιος ἑνὸς κύβου εἶναι 5 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του καὶ ὁ ὄγκος του.

2231. (2267). Τὸ ἐσωτερικὸν ἑνὸς κιβωτίου, τὸ ὁποῖον ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχει 1 μ. μῆκος, 0,75 μ. πλάτος καὶ 0,50 μ. ὕψος. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος του εἰς κυβ. δεκατόμετρα.

2232. (2268). Μία δοκὸς ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Τὸ μῆκος της εἶναι 5 μ., τὸ πλάτος της εἶναι 3/50 τοῦ μήκους της καὶ τὸ πάχος

της εἶναι τὰ 4/5 τοῦ πλάτους της. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος καὶ τὸ βάρος της, ἐὰν τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ξύλου εἶναι 0,75.

2233. (2269). Ἕνα δοχεῖον, τὸ ὁποῖον ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου χωρεῖ 7,200 κ.μ. ὕδατος. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις του, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ μῆκος του εἶναι διπλάσιον τοῦ πλάτους καὶ τὸ βάθος του τὰ 2/3 τοῦ μήκους του.

2234. (2270). Τὸ ἐσωτερικὸν ἑνὸς κιβωτίου, τὸ ὁποῖον ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχει μῆκος 75 ἑκ. καὶ πλάτος 40 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ χωρητικότης τοῦ κιβωτίου, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ διαγώνιός του εἶναι 90 ἑκ.

2235. (2271). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας καὶ ὁ ὄγκος ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ὕψος του εἶναι 65 ἑκ., τὸ πλάτος του 40 ἑκ. καὶ ἡ διαγώνιος τῆς βάσεώς του 89 ἑκ.

2236. (2272). Ἡ βάσις ἑνὸς ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς 40 ἑκ. καὶ τὸ ὕψος του εἶναι ἴσον μὲ τὴν πλευρὰν τῆς βάσεως. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του καὶ ὁ ὄγκος του.

2237. (2273). Ἡ βάσις ἑνὸς πρίσματος εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α καὶ τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος εἶναι ἴσον μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ ὕψους τῆς βάσεως. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος. Ἐφαρμογή: $α=3{,}6$ μ.

2238. (2274). Ἡ βάσις ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι ρόμβος, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 16 ἑκ. καὶ ἡ μικροτέρα διαγώνιός του 30 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του καὶ ὁ ὄγκος του, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ὕψος του εἶναι ἴσον μὲ τὴν μεγαλυτέραν διαγώνιόν του.

2239. (2275). Ἡ βάσις ἑνὸς πρίσματος εἶναι τετράγωνον, ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον ἀκτῖνος 2 μέτρων. Τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος εἶναι ἴσον μὲ τὴν διαγώνιον τοῦ τετραγώνου τῆς βάσεως. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος.

2240. (2276). Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγωνικοῦ πρίσματος, ἂν τὸ ὕψος του εἶναι 90 ἑκ. καὶ ἡ βάσις του εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς ἕνα κύκλον ἀκτῖνος 15 ἑκ.

2241. (2277). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν ἡ βάσις του εἶναι τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον, τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον αὐτόν.

2242. (2278). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν ἡ βάσις του εἶναι τὸ τετράγωνον, τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον αὐτόν.

2243. (2279). Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον, ἐγγραμμένον εἰς κύκλον ἀκτῖνος 0,80 μ. καὶ τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶναι πενταπλάσιον τοῦ ἀποστήματος τοῦ τριγώνου τῆς βάσεως.

2244. (2280). Ὁ ὄγκος ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγωνικοῦ πρίσματος εἶναι 408,2 κ.ἑκ. καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του 240 τ.ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος του καὶ ἡ πλευρὰ τῆς βάσεώς του.

2245. (2281). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου, εἰς τὸν ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένη ἡ βάσις ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγωνικοῦ πρίσματος, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος αὐτοῦ εἶναι 50 κ.ἑκ. καὶ ὅτι τὸ ὕψος του εἶναι διπλάσιον τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου.

2246. (2282). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν ἡ βάσις του εἶναι ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον.

2247. (2283). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν ἡ βάσις του εἶναι ἕνα τετράγωνον.

2248. (2284). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγωνικοῦ πρίσματος, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ ὄγκος του εἶναι 45 κ.ἑκ. καὶ ὅτι τὸ ἀπόστημα τῆς βάσεώς του εἶναι 8 ἑκ.

2249. (2285). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν ἡ βάσις του εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον.

2250. (2286). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν ἡ βάσις του εἶναι ἕνα τετράγωνον.

2251. (2287). Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγωνικοῦ πρίσματος εἶναι 5 τ.μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος του, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ὕψος του εἶναι διπλάσιον τῆς πλευρᾶς τῆς βάσεώς του.

'Ασκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν ἐπὶ τοῦ Α' Κεφαλαίου

Α' 'Ομάς. **2252.** (2288). 'Η παράπλευρος ἀκμὴ ἑνὸς κανονικοῦ τετραγωνικοῦ πρίσματος εἶναι διπλασία τῆς πλευρᾶς τῆς βάσεώς του καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του εἶναι διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς τετραγώνου πλευρᾶς α. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος καὶ ὁ ὄγκος του.

2253. (2280). Μία δεξαμενὴ ἔχει τὸ σχῆμα ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγωνικοῦ πρίσματος. 'Ο πυθμὴν τῆς δεξαμενῆς εἶναι ὁριζόντιος καὶ τὸ ὕψος τοῦ νεροῦ, ποὺ περιέχει, εἶναι 0,80 μ. "Αν ρίψωμεν ἕνα κυβικὸν λίθον ἀκμῆς 0,75 μ., τὸ ἐπίπεδον τοῦ νεροῦ ὑψώνεται κατὰ 6 χιλιοστόμ. Νὰ ὑπολογισθῇ :

1ον. ὁ ὄγκος τοῦ νεροῦ, τὸ ὁποῖον ἔχει ἡ δεξαμενή.

2ον. ἡ πλευρὰ τῆς ἑξαγωνικῆς βάσεώς της.

Β' 'Ομάς. **2254.** (2290). Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν ὁλικὴν ἐπιφάνειάν του, ἴσην μὲ 108 τ.μ., τὴν διαγώνιον τῆς βάσεως ἴσην μὲ 5 μέτρα καὶ τὸ ἄθροισμα 13 μ. τῶν τριῶν διαστάσεων.

2255. (2291). Τὸ ἄθροισμα τῶν 12 ἀκμῶν ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι 68 μέτρα. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τριῶν διαστάσεών του εἶναι 109 μέτρα καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του 18 τετρ. μέτρα. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τρεῖς διαστάσεις του.

2256. (2292). Αἱ τρεῖς ἀκμαὶ ΑΒ, ΑΔ, ΑΕ ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ΑΒΓΔΕΖΗΘ, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α, εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 3, 4 καὶ 5 καὶ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνειά του εἶναι 21150 τ. ἑκ.

1ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τρεῖς ἀκμαὶ ΑΒ, ΑΔ, ΑΕ.

2ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τρεῖς πλευραὶ ΑΖ, ΖΘ, ΘΑ τοῦ τριγώνου ΑΖΘ.

2257. (2293). "Ενα πλάγιον παραλληλεπίπεδον ἔχει ὡς βάσιν ἕνα ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι 80 μέτρα· ὁ λόγος τῶν διαστάσεων τοῦ ὀρθογωνίου αὐτοῦ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τοῦ 12 πρὸς 20. 'Η παράπλευρος ἀκμὴ ΑΕ εἶναι ἴση μὲ 30 μέτρ. καὶ προβάλλεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως κατὰ τὸ ἥμισυ τῆς διαγωνίου ΑΓ.

1ον. Νὰ ὑπολογογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ΑΒΓΔ.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος καὶ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ παραλληλεπιπέδου.

2258. (2294). "Ενα ὀρθὸν πρῖσμα ἔχει βάσιν ἕνα κανονικὸν ὀκτάγωνον ἀκτῖνος R καὶ ὕψος ἴσον μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς ἕνα κύκλον τῆς αὐτῆς ἀκτῖνος. Νὰ ὑπολογισθῇ συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R:

1ον. τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος.

2ον. ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ.

3ον. τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του. Ἐφαρμογὴ διὰ R=0,28 μ.

Γ' Ὁμάς. **2259.** (2295). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ ὄγκος ἑνὸς τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου μιᾶς παραπλεύρου ἕδρας του ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν αὐτῆς τῆς ἕδρας ἀπὸ τὴν ἀπέναντι ἀκμήν.

2260. (2296). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὁ ὄγκος ἑνὸς πρίσματος, τοῦ ὁποίου ἡ κάθετος τομὴ εἶναι ἕνα πολύγωνον, περιγεγραμμένον περὶ κύκλον, εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου.

2261. (2297). Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι παράλληλοι, αἱ ὁποῖαι δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Ἐπὶ τῶν παραλλήλων αὐτῶν ὀλισθαίνουν τρία ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος ΑΒΓΑ'Β'Γ' μένουν σταθερά.

2262. (2298). Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν ἑνὸς παραλληλεπιπέδου ἀπὸ ἕνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον δὲν τέμνει τὸ παραλληλεπίπεδον, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὀκταπλάσιον τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον αὐτό.

2263. (2299). Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν προβολῶν ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ τρεῖς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι εἶναι ὀρθογώνιοι ἀνὰ δύο, εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ εὐθυγράμμου αὐτοῦ τμήματος.

2264. (2300). Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν προβολῶν ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ τρία ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα εἶναι ὀρθογώνια ἀνὰ δύο, εἶναι ἴσον μὲ τὸ διπλάσιον τετράγωνον τοῦ εὐθυγράμμου αὐτοῦ τμήματος.

2265. (2301). Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου ἀπὸ τὰς ὀκτὼ κορυφὰς ἑνὸς παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὀκταπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου αὐτοῦ ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων, ηὐξημένον κατὰ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων. (Σχολὴ Εὐελπίδων 1933).

2266. (2302). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε παραλληλεπίπεδον, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἐμβαδῶν τῶν τομῶν, ὑπὸ τῶν ἓξ διαγωνίων ἐπιπέδων, εἶναι ἴσον μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἑδρῶν.

2267. (2303). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς ἕνα κύβον: 1ον. αἱ ἀκμαὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν κλίσιν πρὸς μίαν οἱανδήποτε διαγώνιόν του.

2ον. αἱ προβολαὶ τῶν ἀκμῶν ἐπὶ μίαν τυχοῦσαν διαγώνιόν του εἶναι ἴσαι μὲ τὸ τρίτον τῆς διαγωνίου.

2268. (2304). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς ἕνα τετραγωνικὸν πρῖσμα, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δώδεκα ἀκμῶν του ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων διαγωνίων του ηὐξημένον κατὰ τὸ ὀκταπλάσιον τετράγωνον τῶν ἀποστάσεων τῶν μέσων τῶν διαγωνίων του. Τί δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, ἐὰν τὸ πρῖσμα εἶναι παραλληλεπίπεδον;

2269. (2305). Δίδεται τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔΑ'Β'Γ'Δ' καὶ μία διαγώνιός του ΑΓ'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ὁρίζουν τὰ ἄκρα τῶν ἀκμῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ Α καὶ τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ὁρίζουν

τὰ ἄκρα τῶν ἀκμῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ Γ', διαιροῦν τὴν ΑΓ' εἰς τρία ἴσα μέρη.

Δ' Ὁμάς. **2270.** (2306). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς ἕνα τετραγωνικὸν πρῖσμα:

1ον. αἱ διαγώνιοι σχηματίζουν δύο ὁμάδας εὐθειῶν τεμνομένων.

2ον. ἡ ἀπόστασις τῶν κοινῶν σημείων των ἰσοῦται μὲ τὴν ἀπόστασιν τῶν μέσων τῶν διαγωνίων τῆς βάσεως.

3ον. Νὰ χρησιμοποιηθῇ ἡ ἰδιότης αὐτὴ διὰ νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα τὸ πρῖσμα εἶναι παραλληλεπίπεδον.

2271. (2307). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς ἕνα τριγωνικὸν πρῖσμα:

1ον. ἀπέναντι ἴσων παραπλεύρων ἑδρῶν κεῖνται δίεδροι ἴσαι.

2ον· εἰς τὴν μεγαλυτέραν ἕδραν, κεῖται μεγαλυτέρα δίεδρος.

3ον. τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστης τῶν ἑδρῶν εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.

2272. (2308). Δίδεται μία πρισματικὴ ἐπιφάνεια, τῆς ὁποίας ἡ κάθετος τομὴ εἶναι ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, πλευρῶν α, β, γ. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τομῆς τὰ μήκη ΑΑ'=x, ΒΒ'=y, ΓΓ'=ω. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ x, y, ω εἰς τρόπον, ὥστε αἱ τρεῖς παράπλευροι ἕδρα τοῦ στερεοῦ ΑΒΓΑ'Β'Γ' νὰ εἶναι ἰσοδύναμοι. Νὰ διερευνηθῇ καὶ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν τὸ πρόβλημα αὐτὸ ἔχῃ 1 λύσιν, θὰ ἔχῃ ἀπειρίαν λύσεων καὶ ὅτι ὅλα τὰ ἐπίπεδα Α'Β'Γ', τὰ ὁποῖα λαμβάνομεν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, διέρχονται ἀπὸ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

2273. (2309). Δίδεται τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔΑ'Β'Γ'Δ'.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ ἐπίπεδα Α'ΓΒ', Α'ΓΓ', καὶ Α'ΓΒ τέμνουν τὸ ἐπίπεδον Δ'ΑΒ' κατὰ τὰς διαμέσους τοῦ τριγώνου Δ'ΑΒ'.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ Α'Γ τέμνει τὸ ἐπίπεδον Δ'ΑΒ' εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου Δ'ΑΒ'.

3ον. Φέρομεν τὸ ἐπίπεδον Γ'ΔΒ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ παραλληλεπίπεδον κατὰ τὸ τρίγωνον Γ'ΔΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ διάμεσοι τῶν τριγώνων Δ'ΑΒ' καὶ Γ'ΔΒ εἶναι παράλληλοι ἀνὰ δύο καὶ ὅτι τὰ ἐπίπεδα τῶν τριγώνων αὐτῶν εἶναι παράλληλα.

2274. (2310). Δίδεται ἕνα παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔΑ'Β'Γ'Δ'.

1ον. Ἐὰν δύο προσκείμεναι ἕδραι του εἶναι ἰσοδύναμοι, ἡ κάθετος τομὴ τοῦ παραλληλεπιπέδου, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν κοινὴν ἀκμήν, ἔστω τὴν ΑΑ', εἶναι ῥόμβος καὶ ἀντιστρόφως. Τὰ δύο διαγώνια ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα διέρχονται, τὸ ἕνα ἀπὸ τὴν ἀκμὴν ΑΑ' καὶ τὸ ἄλλο ἀπὸ τὴν ἀκμὴν ΒΒ', διχοτομοῦν τὰς ἀντιστοίχους διέδρους καὶ εἶναι ὀρθογώνια καὶ ἀντιστρόφως. Τὸ κέντρον τοῦ παραλληλεπιπέδου ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς τέσσαρας ἕδρας, αἱ ὁποῖαι περιέχουν τὴν ΑΑ' ἢ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν ΑΑ' καὶ ἀντιστρόφως.

2ον. Ἐὰν αἱ ἕξ ἕδραι εἶναι ἰσοδύναμοι, αἱ κάθετοι τομαί, αἱ κάθετοι ἐπὶ τὰς τρεῖς διευθύνσεις τῶν ἀκμῶν, εἶναι ῥόμβοι καὶ ἀντιστρόφως. Τὰ ἕξ διαγώνια ἐπίπεδα διχοτομοῦν τὰς ἀντιστοίχους διέδρους καὶ εἶναι ὀρθογώνια ἀνὰ δύο, καὶ ἀντιστρόφως. Τὸ κέντρον τοῦ παραλληλεπιπέδου ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς ἕξ ἕδρας καὶ ἀντιστρόφως.

Ε' Ὁμάς. **2275.** (3211). Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι Χ, Υ, Ζ ἐκ τῶν ὁποίων δύο οἱαιδήποτε δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· νὰ κατασκευασθῇ ἕνα πα-

ραλληλεπίπεδον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ μίαν ἀκμὴν ἐπὶ ἑκάστης τῶν εὐθειῶν αὐτῶν.

2276. (2312). Ἐὰν ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων ἑνὸς κύβου φέρωμεν ἕνα ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ μίαν διαγώνιον, ἡ τομὴ τοῦ κύβου, ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ, εἶναι ἕνα κανονικὸν ἑξάγωνον

2277. (2313). Νὰ τμηθῇ κύβος δι' ἐπιπέδου οὕτως, ὥστε ἡ τομή του νὰ εἶναι τετράγωνον (δύο περιπτώσεις).

2278. (2314). Νὰ τμηθῇ κύβος δι' ἐπιπέδου οὕτως, ὥστε ἡ τομή του νὰ εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον.

2279. (2315). Νὰ τμηθῇ κύβος δι' ἐπιπέδου οὕτως, ὥστε ἡ τομή του νὰ εἶναι ἰσοσκελὲς τρίγωνον.

2280. (2316). Νὰ τμηθῇ κύβος δι' ἐπιπέδου οὕτως, ὥστε ἡ τομή του νὰ εἶναι κανονικὸν ἑξάγωνον.

2281. (2317). Νὰ τμηθῇ τυχὸν τριγωνικὸν πρῖσμα δι' ἐπιπέδου εἰς τρόπον, ὥστε ἡ τομή του νὰ εἶναι ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον.

2282. (3318). Δίδεται μία πρισματικὴ ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία ἔχει ὡς κάθετον τομὴν ἕνα τετράγωνον ΑΒΓΔ. Ἐπὶ τῶν τριῶν ἀκμῶν λαμβάνομεν τὰ μήκη $AK=\alpha$, $B\Lambda=\beta$ καὶ $\Gamma M=\gamma$ καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔ. Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν α, β, γ, ἵνα ἡ τομὴ ΚΛΜΝ τῆς πρισματικῆς ἐπιφανείας ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΚΛΜ εἶναι ἕνας ῥόμβος;

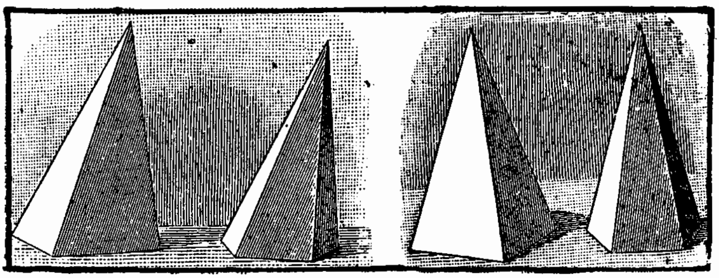
2283. (2319)· Μία πρισματικὴ ἐπιφάνεια ἔχει ὡς κάθετον τομὴν ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ πλευρᾶς α. Ἐπὶ τῶν ἀκμῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τῶν Β καὶ Γ καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ ὁρίζομεν τὰ σημεῖα Β' καὶ Γ' τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι $BB'=y$ καὶ $\Gamma\Gamma'=x$. Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν x καὶ y, ἵνα τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Γ'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

ΠΥΡΑΜΙΔΕΣ

Ὁρισμοὶ καὶ ἰδιότητες

758. Πυραμίς. Τὸ πολύεδρον ΣΑΒΓΔΕ *(Σχ. 517)*, περικλείεται ἀπὸ τὰς τριγωνικὰς ἕδρας ΣΑΒ, ΣΒΓ, . . . , αἱ ὁποῖαι ἔχουν κοινὴν κορυφὴν τὸ Σ, καὶ ἀπὸ τὴν ἕδραν ΑΒΓΔΕ, τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ εἶναι βάσεις τῶν τριγωνικῶν ἑδρῶν ΣΑΒ, ΣΒΓ, ... Τὸ πολύεδρον αὐτὸ λέγεται ***πυραμίς***.



Πυραμίδες

Σχ. 516.

Γενικῶς: ***Πυραμὶς*** *λέγεται τὸ πολύεδρον, τοῦ ὁποίου μία ἕδρα εἶναι τυχὸν πολύγωνον, τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται* ***βάσις τῆς πυραμίδος,*** *αἱ δὲ ἄλλαι ἕδραι του εἶναι τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὴν κορυφὴν κειμένην, ἐκτὸς τοῦ πολυγώνου, καὶ ὡς βάσεις ἔχουν τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου.*

Ἡ κοινὴ κορυφὴ τῶν τριγωνικῶν ἑδρῶν τῆς πυραμίδος λέγεται ***κορυφὴ τῆς πυραμίδος.***

Π.χ. τὸ στερεὸν ΣΑΒΓΔΕ *(Σχ. 517)* εἶναι μία πυραμίς· βάσις της εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ καὶ κορυφή της τὸ σημεῖον Σ.

Εἶναι φανερόν, ὅτι μία πυραμὶς δύναται νὰ προκύψῃ καὶ ἀπὸ μίαν στερεὰν πολυεδρικὴν γωνίαν, ἂν κόψωμεν αὐτὴν μὲ ἕνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον νὰ συναντᾷ ὅλας τὰς ἀκμάς της.

Τὸ μέρος τῆς στερεᾶς αὐτῆς γωνίας, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ

τῆς κορυφῆς τῆς στερεᾶς γωνίας καὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς τομῆς, εἶναι μία ***πυραμίς.***

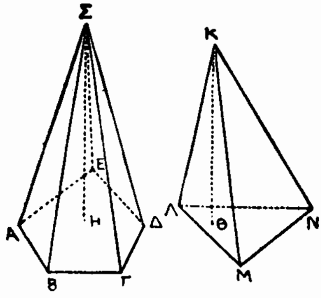
Ὕψος πυραμίδος *λέγεται ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς της ἀπὸ τὴν βάσιν της.*

Π.χ. ὕψος τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓΔΕ *(Σχ. 517)* εἶναι τὸ ΣΗ.

Αἱ ἀκμαὶ τῆς πυραμίδος, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὴν κορυφήν της, λέγονται ***παράπλευροι ἀκμαί.***

Αἱ τριγωνικαὶ ἕδραι της, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὴν κορυφήν της, λέγονται ***παράπλευροι ἕδραι της.***

Π.χ. παράπλευροι ἀκμαὶ τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓΔΕ εἶναι αἱ ἀκμαὶ ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ, ΣΔ, ΣΕ καὶ παράπλευροι ἕδραι της αἱ ΣΑΒ, ΣΒΓ, ΣΓΔ, ΣΔΕ καὶ ΣΕΑ.



Σχ. 517.

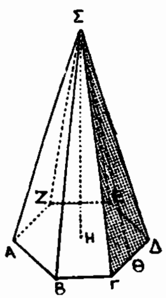
Μία πυραμὶς λέγεται ***τριγωνική, τετραγωνική, πενταγωνική*** *κλπ. ἐὰν ἡ βάσις της εἶναι ἕνα τρίγωνον, ἕνα τετράπλευρον, ἕνα πεντάγωνον κλπ.*

Μία τριγωνικὴ πυραμὶς λέγεται καὶ ***τετράεδρον*** *(Σχ. 517 β).*

Ὡς βάσιν ἑνὸς τετραέδρου δυνάμεθα νὰ λάβωμεν οἱανδήποτε ἕδραν του καὶ ὡς κορυφήν, τὴν κορυφήν, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς βάσεως.

759. Κανονικαὶ πυραμίδες. ***Μία πυραμὶς λέγεται κανονική,*** *ἐὰν ἡ βάσις της εἶναι ἕνα κανονικὸν πολύγωνον, τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον συμπίπτει μὲ τὸν πόδα τῆς καθέτου, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς πυραμίδος ἐπὶ τὴν βάσιν της.*

Π.χ. ἡ πυραμὶς ΣΑΒΓΔΕΖ *(Σχ. 518)* εἶναι κανονικὴ πυραμίς.



Σχ. 518.

Εἰς μίαν κανονικὴν πυραμίδα ὅλαι αἱ παράπλευροι ἀκμαί της εἶναι ἴσαι, ὡς πλάγιαι τῶν ὁποίων οἱ πόδες ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου.

Ἐπίσης: *ὅλαι αἱ παράπλευροι ἕδραι της εἶναι ἰσοσκελῆ τρίγωνα ἴσα μεταξύ των,* διότι ἔχουν τὰς τρεῖς πλευράς των ἴσας, μίαν πρὸς μίαν.

Τὸ ὕψος ἑνὸς ἐκ τῶν ἰσοσκελῶν αὐτῶν τριγώνων λέγεται ***ἀπόστημα*** *τῆς κανονικῆς πυραμίδος.*

Π.χ. ἀπόστημα τῆς κανονικῆς πυραμίδος ΣΑΒΓΔΕΖ εἶναι τὸ ΣΘ.

Ἀσκήσεις: 2284, 2285, 2286, 2287.

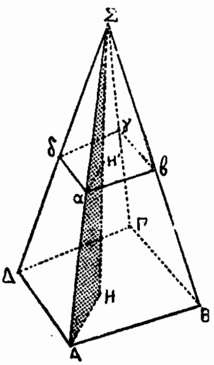
760. Θεώρημα. ***Ἐὰν μία πυραμὶς τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν της:***

1ον. Αἱ παράπλευροι ἕδραι της καὶ τὸ ὕψος της τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα.

2ον. Ἡ τομὴ εἶναι ἕνα πολύγωνον ὅμοιον πρὸς τὴν βάσιν της.

3ον. Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῆς τομῆς καὶ τῆς βάσεως εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεών των ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς πυραμίδος.

Ὑπόθεσις: Ἔστω ἡ πυραμὶς ΣΑΒΓΔ *(Σχ. 519)*· φέρομεν ἕνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν της ΑΒΓΔ τὸ ὁποῖον τέμνει τὰς παραπλεύρους ἀκμάς της εἰς τὰ σημεῖα α, β, γ, δ, καὶ τὸ ὕψος της ΣΗ εἰς τὸ σημεῖον Η'.



Σχ. 519.

1ον. Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\frac{\Sigma\alpha}{\Sigma A} = \frac{\Sigma\beta}{\Sigma B} = \frac{\Sigma\gamma}{\Sigma\Gamma} = \frac{\Sigma\delta}{\Sigma\Delta} = \frac{\Sigma H'}{\Sigma H}.$$

Ἀπόδειξις: Αἱ εὐθεῖαι αβ καὶ ΑΒ εἶναι παράλληλοι, ὡς τομαὶ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων αβγδ καὶ ΑΒΓΔ ὑπὸ τοῦ τρίτου ἐπιπέδου ΣΑΒ. Τὰ τρίγωνα λοιπὸν Σαβ καὶ ΣΑΒ εἶναι ὅμοια καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι

$$\frac{\Sigma\alpha}{\Sigma A} = \frac{\Sigma\beta}{\Sigma B} = \frac{\alpha\beta}{AB} \qquad (1)$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι τὰ τρίγωνα Σβγ καὶ ΣΒΓ, εἶναι ὅμοια· ἐπίσης ὅτι τὰ τρίγωνα Σγδ καὶ ΣΓΔ, εἶναι ὅμοια.

Ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων Σβγ καὶ ΣΒΓ ἔχομεν

$$\frac{\Sigma\beta}{\Sigma B} = \frac{\Sigma\gamma}{\Sigma\Gamma} = \frac{\beta\gamma}{B\Gamma} \qquad (2)$$

Ἐπίσης ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων Σγδ καὶ ΣΓΔ ἔχομεν

$$\frac{\Sigma\gamma}{\Sigma\Gamma} = \frac{\Sigma\delta}{\Sigma\Delta} = \frac{\gamma\delta}{\Sigma\Gamma} \qquad (3)$$

καὶ τέλος ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων Σδα καὶ ΣΔΑ ἔχομεν

$$\frac{\Sigma\delta}{\Sigma\Delta} = \frac{\Sigma\alpha}{\Sigma A} = \frac{\delta\alpha}{\Delta A} \qquad (4)$$

Τὸ ἐπίπεδον ΣΑΗ τέμνει τὰ παράλληλα ἐπίπεδα αβγδ καὶ ΑΒΓΔ κατὰ τὰς παραλλήλους εὐθείας αΗ' καὶ ΑΗ. Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΣαΗ' καὶ ΣΑΗ εἶναι ὅμοια καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι

$$\frac{\Sigma\alpha}{\Sigma A} = \frac{\Sigma H'}{\Sigma H} \qquad (5)$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις (1), (2), (3), (4), (5) συνάγομεν, ὅτι

$$\frac{\Sigma\alpha}{\Sigma A}=\frac{\Sigma\beta}{\Sigma B}=\frac{\Sigma\gamma}{\Sigma\Gamma}=\frac{\Sigma\delta}{\Sigma\Delta}=\frac{\Sigma H'}{\Sigma H}.$$

2ον. Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ πολύγωνα αβγδ καὶ ΑΒΓΔ εἶναι ὅμοια.

Ἀπόδειξις: Τὰ πολύγωνα αὐτὰ ἔχουν τὰς ὁμολόγους πλευράς των παραλλήλους, ὅπως ἐδείχθη ἀνωτέρω, καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς· ἄρα αἱ ὁμόλογοι γωνίαι τῶν πολυγώνων αὐτῶν εἶναι ἴσαι. Ἐξ ἄλλου ἀπὸ τὰς σχέσεις (1), (2), (3), (4), (5) συνάγομεν, ὅτι

$$\frac{\alpha\beta}{AB}=\frac{\beta\gamma}{B\Gamma}=\frac{\gamma\delta}{\Gamma\Delta}=\frac{\delta\alpha}{\Delta A}.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ πολύγωνα αβγδ καὶ ΑΒΓΔ ἔχουν τὰς ὁμολόγους γωνίας ἴσας καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους· ἄρα εἶναι ὅμοια.

3ον. Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\frac{\text{ἐμβ. }\alpha\beta\gamma\delta}{\text{ἐμβ. }AB\Gamma\Delta}=\frac{\overline{\Sigma H'}^2}{\overline{\Sigma H}^2}$.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα αβγδ καὶ ΑΒΓΔ εἶναι ὅμοια, ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν των εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ὁμολόγων πλευρῶν των. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$\frac{\text{ἐμβ. }\alpha\beta\gamma\delta}{\text{ἐμβ. }AB\Gamma\Delta}=\frac{\overline{\alpha\beta}^2}{\overline{\Sigma H}^2} \qquad (6)$$

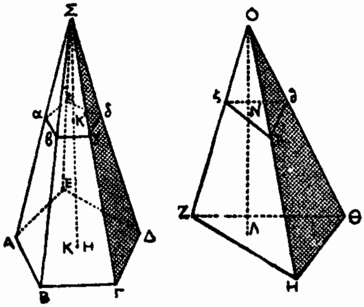
Ἐπειδὴ $\frac{\alpha\beta}{AB}=\frac{\Sigma\alpha}{\Sigma A}=\frac{\Sigma H'}{\Sigma H}$, ὁπότε θὰ εἶναι καὶ $\frac{\overline{\alpha\beta}^2}{\overline{AB}^2}=\frac{\overline{\Sigma H'}^2}{\overline{\Sigma H}^2}$, ἡ ἰσότης (6) γράφεται $\frac{\text{ἐμβ. }\alpha\beta\gamma\delta}{\text{ἐμβ. }AB\Gamma\Delta}=\frac{\overline{\Sigma H'}^2}{\overline{\Sigma H}^2}$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν μία πυραμὶς. . . .***

761. Πόρισμα. ***Ἐὰν δύο πυραμίδες ἔχουν ἴσα ὕψη καὶ βάσεις ἰσοδυνάμους καὶ τμηθοῦν ὑπὸ ἐπιπέδων, τὰ ὁποῖα εἶναι παράλληλα πρὸς τὰς βάσεις τῶν πυραμίδων καὶ ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὰς κορυφάς των, αἱ τομαὶ τῶν δύο αὐτῶν πυραμίδων εἶναι ἰσοδύναμοι.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν δύο τυχοῦσαι πυραμίδες ΣΑΒΓΔΕ καὶ ΟΖΗΘ *(Σχ. 520)* αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰ ὕψη των ΣΚ καὶ ΟΛ ἴσα καὶ τὰς βάσεις των ΑΒΓΔΕ καὶ ΖΗΘ ἰσοδυνάμους. Ἔστωσαν ἐπίσης αἱ τομαὶ αὐτῶν αβγδε καὶ ζηθ, αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς βάσεις τῶν πυραμίδων καὶ ἀπέχουν ἀπὸ τὰς κορυφάς των ἀποστάσεις ΣΚ′ καὶ ΟΛ′ ἴσας.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ τομαὶ αβγδε καὶ ζκθ εἶναι ἰσοδύναμοι.



Σχ. 520.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ ἡ τομὴ αβγδε εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓΔΕ τῆς πυραμίδος Σ, θὰ εἶναι (§ 760, 3ον)

$$\frac{\text{ἐμβ. αβγδε}}{\text{ἐμβ. ΑΒΓΔΕ}} = \frac{\overline{ΣΚ'}^2}{\overline{ΣΚ}^2} \quad (1)$$

Ὁμοίως καὶ ἀπὸ τὴν πυραμίδα Ο ἔχομεν

$$\frac{\text{ἐμβ. ζηθ}}{\text{ἐμβ. ΖΗΘ}} = \frac{\overline{ΟΛ'}^2}{\overline{ΟΛ}^2} \quad (2)$$

Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΣΚ=ΟΛ καὶ ΣΚ'=ΟΛ', τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ἴσα καὶ τὰ πρῶτα μέλη των· δηλ. θὰ εἶναι

$$\frac{\text{ἐμβ. αβγδε}}{\text{ἐμβ. ΑΒΓΔΒ}} = \frac{\text{ἐμβ. ζηθ}}{\text{ἐμβ. ΖΗΘ}} \quad (3)$$

Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως αἱ βάσεις ΑΒΓΔΕ καὶ ΖΗΘ τῶν δύο πυραμίδων εἶναι ἰσοδύναμοι· ἄρα αἱ παρονομασταὶ τῶν ἴσων κλασμάτων τῆς σχέσεως (3) εἶναι ἴσοι καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι καὶ οἱ ἀριθμηταί των ἴσοι· δηλ. θὰ εἶναι ἐμβ. αβγδε=ἐμβ. ζηθ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν δύο πυραμίδες ἔχουν....***

Μέτρησις τῶν πυραμίδων

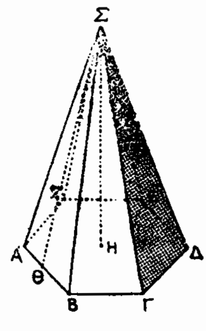
762. Ὁρισμός. ***Ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας μιᾶς πυραμίδος*** *ὀνομάζομεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν της.*

Ἐὰν εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου επιφανείας μιᾶς πυραμίδος προσθέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς της, θὰ ἔχωμεν τὸ ***ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας της.***

763. Πρόβλημα. ***Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος, συναρτήσει τῆς πλευρᾶς τῆς βάσεώς της καὶ τοῦ παραπλεύρου ὕψους της.***

Ἔστω ἡ κανονικὴ πυραμὶς ΣΑΒΓΔΕΖ *(Σχ. 521)*, τῆς ὁποίας ἡ βάσις εἶναι ἕνα κανονικὸν πολύγωνον ΑΒΓΔΕ.... μὲ ν πλευράς. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τῶν ν ἰσοσκελῶν τριγώνων (ἐδῶ ν=6), ΣΑΒ,

ΣΒΓ,...., τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας βάσεις ΑΒ, ΒΓ,.... τὰς ἴσας πλευρὰς τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος καὶ ἴσα ὕψη, τὸ παράπλευρον ὕψος ΣΘ τῆς κανονικῆς πυραμίδος. Ἐπειδὴ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ἀπὸ τὰ ἴσα αὐτὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα, π.χ. τοῦ τριγώνου ΣΑΒ, εἶναι ἴσον μὲ $\frac{ΑΒ\times ΣΘ}{2}$, τὸ ἐμβαδὸν τῶν ν ἴσων τριγώνων, δηλ. τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος, θὰ εἶναι $\frac{ΑΒ\times ΣΘ}{2}\times ν$. Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ Ε τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος Σ, θὰ εἶναι



Σχ. 521.

$$Ε=\frac{ΑΒ\times ΣΘ}{2}\times ν \quad ἤ \quad Ε=\frac{(ΑΒ\times ν)\times ΣΘ}{2} \quad (1)$$

Ἐπειδὴ ΑΒ×ν παριστάνει τὴν περίμετρον τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος καὶ ΣΘ τὸ παράπλευρον ὕψος της, ἡ ἰσότης (1) γράφεται

$$\boxed{Ε=\frac{\text{περίμετρος βάσεως}\times\text{παράπλευρον ὕψος}}{2}}$$

Ὥστε: ***Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς περιμέτρου τῆς βάσεώς της ἐπὶ τὸ παράπλευρον ὕψος της.***

Ἀσκήσεις: 2288, 2289, 2290, 2291, 2292, 2293, 2294, 2295, 2296, 2297.

764. Ὄγκος πυραμίδος. Θεώρημα. ***Δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες, αἱ ὁποῖαι ἔχουν βάσεις ἰσοδυνάμους καὶ ἴσα ὕψη εἶναι ἰσοδύναμοι.***

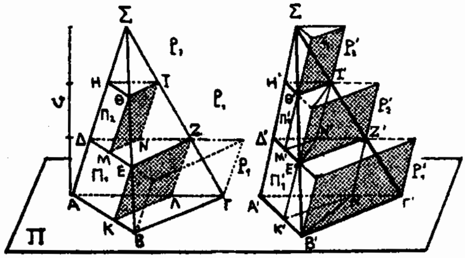
Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες ΣΑΒΓ καὶ Σ′Α′Β′Γ′, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς βάσεις των ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ ἰσοδυνάμους καὶ τὰ ὕψη των ἴσα μὲ υ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ πυραμίδες αὐταὶ εἶναι ἰσοδύναμοι.

Ἀπόδειξις: Τοποθετοῦμεν τὰς βάσεις τῶν δύο πυραμίδων Σ καὶ Σ′ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου Π. Διαιροῦμεν ἔπειτα τὸ κοινὸν ὕψος των υ εἰς ν ἴσα μέρη (ἐδῶ ν=3) καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως φέρομεν ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π. Τὰ παράλληλα αὐτὰ ἐπίπεδα θὰ διαιρέσουν τὰς παραπλεύρους ἀκμὰς τῶν πυραμίδων εἰς ν ἴσα μέρη (§ 760, 1ον), δηλ. θὰ εἶναι ΑΔ=ΔΗ=ΗΣ=Α′Δ′=Δ′Η′=Η′Σ′. Ἐπειδὴ αἱ βάσεις ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ τῶν δύο πυραμίδων εἶναι ἰσοδύ-

ναμοι καὶ αἱ τομαί των, ὑπὸ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, θὰ εἶναι ἰσοδύναμοι μία πρὸς μίαν (§ 761)· δηλ. ἡ τομὴ ΔΕΖ θὰ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν τομὴν Δ'Ε'Ζ', ἡ ΗΘΙ μὲ τὴν Ε'Θ'Ι' κ.ο.κ.

Ἀπὸ τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ φέρομεν τὰς παραλλήλους ΕΚ καὶ ΖΛ πρὸς τὴν ἀκμὴν ΣΑ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς ἀκμὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Κ καὶ Λ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΚΛ καὶ σχηματίζεται τὸ πρῖσμα ΔΕΖΑΚΛ. Ὁμοίως ἀπὸ τὰ σημεῖα Ε' καὶ Ζ' φέρομεν τὰς παραλλήλους Ε'Κ' καὶ Ζ'Λ', αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς ἀκμὰς Α'Β' καὶ Α'Γ' εἰς τὰ σημεῖα Κ' καὶ Λ'· ἐὰν φέρωμεν τὴν Κ'Λ' σχηματίζεται τὸ πρῖσμα Δ'Ε'Ζ'Α'Κ'Λ'. Τὰ δύο πρίσματα ΔΕΖΑΚΛ καὶ Δ'Ε'Ζ'Α'Κ'Λ' (τὰ ὁποῖα παριστάνομεν μὲ τὰ γράμματα $Π_1$ καὶ $Π_1'$) εἶναι ἰσοδύναμα, διότι ἔχουν τὰς βάσεις των ΔΕΖ καὶ Δ'Ε'Ζ' ἰσοδυνάμους καὶ ἴσα ὕψη.



Σχ. 522.

Ἐπίσης μὲ βάσεις τὰ τρίγωνα ΗΘΙ καὶ Η'Θ'Ι' κατασκευάζομεν, κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, τὰ δύο τριγωνικὰ πρίσματα ΗΘΙΔΜΝ καὶ Η'Θ'Ι'Δ'Μ'Ν' (ἢ $Π_2$ καὶ $Π_2'$), τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι ἰσοδύναμα, διότι ἔχουν τὰς βάσεις των ΗΘΙ καὶ Η'Θ'Ι' ἰσοδυνάμους καὶ ἴσα ὕψη.

Ἐπειδὴ τὰ πρίσματα, ποὺ κατασκευάσθησαν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, εἶναι ἰσοδύναμα ἀνὰ δύο, τὸ ἄθροισμα s_8 τῶν ***ἐγγεγραμμένων*** πρισμάτων $Π_1$, $Π_2$.... εἰς τὴν πρώτην πυραμίδα εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν πρισμάτων $Π_1'$, $Π_2'$ τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὴν δευτέραν πυραμίδα.

Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ κοινὸν αὐτὸ ἄθροισμα $s_8=Π_1+Π_2$ τῶν ἐγγεγραμμένων πρισμάτων εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὸν ὄγκον ἑκάστης ἐκ τῶν δύο πυραμίδων.

Κατασκευάζομεν τώρα τρία τριγωνικὰ πρίσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν βάσεις, ἀντιστοίχως, τὰς ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΙ καὶ παραπλεύρους ἀκμὰς τὰς ΑΔ, ΔΗ, ΗΣ, καὶ τὰ ὁποῖα παριστάνομεν μὲ τὰ $Ρ_1$, $Ρ_2$, $Ρ_3$. Αὐτὰ τὰ τρία πρίσματα, συνολικῶς, σχηματίζουν ἕνα ***περιγεγραμμένον*** στερεόν, τὸ ὁποῖον εἶναι μεγαλύτερον τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓ καὶ ἑπομένως ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ αὐτοῦ εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν ὄγκον τῆς πυραμίδος Σ.

Ἐὰν ἐργασθῶμεν ὁμοίως καὶ εἰς τὴν πυραμίδα Σ'Α'Β'Γ', θὰ λάβωμεν ἕνα περιγεγραμμένον στερεόν, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ περιγεγραμμένον εἰς τὴν πρώτην πυραμίδα στερεόν, διότι τὰ τριγωνικὰ πρίσματα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦνται τὰ δύο αὐτὰ στερεά, ἔχουν, ἀνὰ δύο, βάσεις ἰσοδυνάμους καὶ ἴσα ὕψη.

Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ κοινὸν ἄθροισμα $S_3 = P_1 + P_2 + P_3$ τῶν ὄγκων τῶν δύο αὐτῶν στερεῶν εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸν ὄγκον ἑκάστης ἐκ τῶν δύο πυραμίδων.

Ἂν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ V καὶ V' τοὺς ὄγκους τῶν δύο πυραμίδων Σ καὶ Σ', οἱ ὄγκοι αὐτοὶ V καὶ V' θὰ περιέχωνται μεταξὺ τῶν S_3 καὶ s_3 καὶ ἑπομένως ἡ διαφορὰ V—V' τῶν ὄγκων των θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς διαφορᾶς $S_3 - s_3$, δηλ. τῆς

$$(P_1 + P_2 + P_3) - (\Pi_1 + \Pi_2).$$

Ἀλλὰ τὸ πρῖσμα Π_1 εἶναι ἴσον δὲ τὸ πρῖσμα P_2, διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΔΕΖ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος $\frac{\upsilon}{3}$. Ὁμοίως τὰ πρίσματα P_3 καὶ Π_2 εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΗΘΙ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος $\frac{\upsilon}{3}$.

Ἀλλὰ τότε ἡ διαφορὰ $S_3 - s_3$ εἶναι ἴση μὲ τὸ πρῖσμα P_1 τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος εἶναι ἴσος μέ: $\text{ἐμβ.}ΑΒΓ \times \frac{\upsilon}{3}$.

Ὥστε ἡ διαφορὰ V—V' τῶν ὄγκων τῶν δύο πυραμίδων εἶναι μικροτέρα τῆς διαφορᾶς $S_3 - s_3$, δηλ. τῆς τιμῆς: $\text{ἐμβ.}ΑΒΓ \times \frac{\upsilon}{3}$.

Ἐάν, τώρα διαιρέσωμεν τὸ ὕψος υ τῆς πυραμίδος εἰς ν ἴσα μέρη, καὶ ὄχι εἰς 3 καὶ κατασκευάσωμεν εἰς ἑκάστην πυραμίδα ν—1 ἐσωτερικὰ πρίσματα καὶ ν ἐξωτερικὰ πρίσματα καὶ ἐργασθῶμεν ὡς ἀνωτέρω, ἀποδεικνύομεν ὁμοίως, ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν ὄγκων V καὶ V' τῶν δύο πυραμίδων εἶναι μικροτέρα τοῦ γινομένου: $\text{ἐμβ.}ΑΒΓ \times \frac{\upsilon}{\nu}$.

Ἀλλὰ τὸ γινόμενον αὐτὸ δύναται νὰ γίνῃ μικρότερον παντὸς ἀριθμοῦ, διότι ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴν σταθερὰν ποσότητα, ἐμβ. ΑΒΓ καὶ ἀπὸ τὴν μεταβλητὴν ποσότητα $\frac{\upsilon}{\nu}$, ἡ ὁποία δύναται νὰ γίνῃ ὅσον θέλομεν μικρά, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν τὸ ν ἀρκετὰ μεγάλο, δηλ. νὰ διαιρέσωμεν τὸ ὕψος υ εἰς πολλὰ ἴσα μέρη.

Ὅταν τὸ ν τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον, τότε ἡ μεταβλητὴ ποσότης $\frac{\upsilon}{\nu}$ τείνει πρὸς τὸ μηδὲν καὶ ἑπομένως καὶ τὸ γινόμενον $\text{ἐμβ.}ΑΒΓ \times \frac{\upsilon}{\nu}$ τείνει εἰς τὸ μηδέν. Ἀλλὰ τότε ἡ διαφορὰ V—V' τῶν ὄγκων τῶν δύο

πυραμίδων τείνει πρὸς τὸ μηδὲν καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι V—V'=0 ἢ V=V', δηλ. αἱ δύο πυραμίδες ἔχουν ἴσους ὄγκους, δηλ. εἶναι ἰσοδύναμοι.

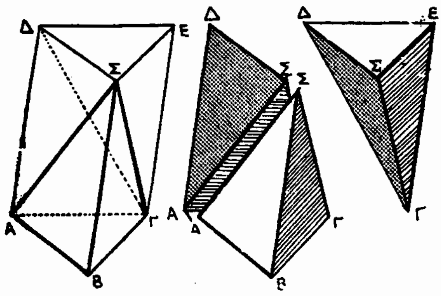
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες....***

765. Θεώρημα. ***Ὁ ὄγκος μιᾶς πυραμίδος εἶναι ἴσος μὲ τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς της ἐπὶ τὸ ὕψος της.***

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθόσον ἡ πυραμὶς εἶναι *τριγωνικὴ* ἢ *πολυγωνική*.

Ἔστω μία τριγωνικὴ πυραμὶς ΣΑΒΓ.

1η. Ὑπόθεσις: Ἀπὸ τὰς κορυφὰς Α καὶ Γ φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΔ καὶ ΓΕ ἴσας καὶ παραλλήλους πρὸς τὴν ΣΒ καὶ σχηματίζομεν ἕνα τριγωνικὸν πρῖσμα ΑΒΓΔΣΕ, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ βάσιν τὴν ΑΒΓ καὶ παράπλευρον ἀκμὴν τὴν ΣΒ. Τὸ πρῖσμα αὐτὸ ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὴν πυραμίδα.



Σχ. 523.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι ἡ πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον τοῦ πρίσματος αὐτοῦ.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν ἀποκόψωμεν ἀπὸ τὸ πρῖσμα αὐτὸ τὴν πυραμίδα ΣΑΒΓ, θὰ μείνῃ ἡ τετραγωνικὴ πυραμὶς ΣΑΓΕΔ, ἡ ὁποία ἔχει βάσιν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓΕΔ καὶ κορυφὴν τὸ Σ. Φέρομεν τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Δ, Σ, Γ· τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ διαιρεῖ τὴν τετραγωνικὴν πυραμίδα εἰς δύο τριγωνικὰς πυραμίδας ΣΔΑΓ καὶ ΣΔΕΓ. Αἱ δύο αὐταὶ πυραμίδες εἶναι ἰσοδύναμοι μεταξύ των, διότι ἔχουν ἴσας βάσεις, τὰ ἴσα τρίγωνα ΔΑΓ καὶ ΔΕΓ, ὡς ἡμίση τοῦ αὐτοῦ παραλληλογράμμου ΔΑΓΕ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, τὴν κάθετον, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Σ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΓΕΔ.

Ἀλλὰ ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ΣΔΕΓ δύναταί νὰ θεωρηθῇ, ὅτι ἔχει βάσιν τὸ τρίγωνον ΔΣΕ καὶ κορυφὴν τὸ σημεῖον Γ· ἀλλὰ τότε ἡ πυραμὶς αὐτὴ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν πυραμίδα ΣΑΒΓ, διότι αἱ βάσεις των ΔΣΕ καὶ ΑΒΓ εἶναι ἴσαι, ὡς ἀπέναντι βάσεις τοῦ πρίσματος, καὶ ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος, τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος.

Τὸ πρῖσμα λοιπὸν ΑΒΓΔΣΕ ἀποτελεῖται ἀπὸ τρεῖς πυραμίδας, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἰσοδύναμοι μὲ τὴν πυραμίδα ΣΑΒΓ· ἄρα ἡ πυραμὶς

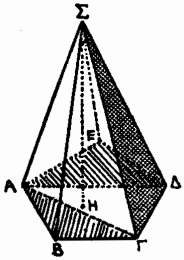
ΣΑΒΓ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ πρίσματος αὐτοῦ.

Ἐπειδὴ ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος ΑΒΓΔΣΕ εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του ΑΒΓ ἐπὶ τὸ ὕψος του υ, ἕπεται ὅτι ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓ εἶναι ἴσος μὲ $\frac{1}{3}$ ἐμβ.ΑΒΓ×υ.

2α. *Ὑπόθεσις: Ἔστω μία πολυγωνικὴ πυραμὶς ΣΑΒΓΔΕ (Σχ. 524),* ἡ ὁποία ἔχει βάσιν τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ καὶ ὕψος τὸ ΣΗ.

Συμπέρασμα: Ἂν παραστήσωμεν μὲ V τὸν ὄγκον τῆς πυραμίδος αὐτῆς, θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$V=\frac{1}{2}\text{ ἐμβ.ΑΒΓΔΕ}\times\text{ΣΗ}.$$



Σχ. 524.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὰς διαγωνίους ΑΓ, ΑΔ τῆς βάσεως ΑΒΓΔΕ καὶ τὰ ἐπίπεδα ΣΑΓ καὶ ΣΑΔ. Τὰ ἐπίπεδα αὐτὰ χωρίζουν τὴν δοθεῖσαν πυραμίδα εἰς τὰς τριγωνικὰς πυραμίδας ΣΑΒΓ, ΣΑΓΔ καὶ ΣΑΔΕ, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ὡς ὕψος τὸ ὕψος ΣΗ τῆς δοθείσης πυραμίδος. Ὁ ὄγκος V τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓΔΕ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸν ὄγκον τῶν τριῶν αὐτῶν τριγωνικῶν πυραμίδων, δηλ. εἶναι

$$V=\text{ὄγκ. ΣΑΒΓ}+\text{ὄγκ. ΣΑΓΔ}+\text{ὄγκ. ΣΑΔΕ} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν εἶναι

$$\text{ὄγκ.ΣΑΒΓ}=\frac{1}{3}\text{ ἐμβ.ΑΒΓ}\times\text{ΣΗ},$$

$$\text{ὄγκ.ΣΑΓΔ}=\frac{1}{3}\text{ ἐμβ.ΑΓΔ}\times\text{ΣΗ}$$

καὶ

$$\text{ὄγκ.ΣΑΔΕ}=\frac{1}{3}\text{ ἐμβ.ΑΔΕ}\times\text{ΣΗ}$$

ἡ ἰσότης (1) γίνεται

$$V=\frac{1}{2}\text{ἐμβ.ΑΒΓ}\times\text{ΣΗ}+\frac{1}{3}\text{ἐμβ.ΑΓΔ}\times\text{ΣΗ}+\frac{1}{2}\text{ἐμβ.ΑΔΕ}\times\text{ΣΗ}$$

ἢ $V=\frac{1}{2}(\text{ἐμβ.ΑΒΓ}+\text{ἐμβ.ΑΓΔ}+\text{ἐμβ.ΑΔΕ})\times\text{ΣΗ}$

ἢ $\boxed{V=\frac{1}{3}\textbf{ἐμβ.ΑΒΓΔΕ}\times\textbf{ΣΗ}}$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ὁ ὄγκος μιᾶς πυραμίδος....***

766. Πορίσματα. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Β τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως μιᾶς πυραμίδος, μὲ υ τὸ ὕψος της καὶ μὲ V τὸν ὄγκον της, θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον $\boxed{V=\frac{1}{3}\text{B}.\upsilon}$.

Ἔχοντες ὑπ᾽ ὄψει τὸν τύπον αὐτὸν συνάγομεν:

I. Δύο πυραμίδες, αἱ ὁποῖαι ἔχουν βάσεις ἰσοδυνάμους καὶ ἴσα ὕψη, εἶναι ἰσοδύναμοι.

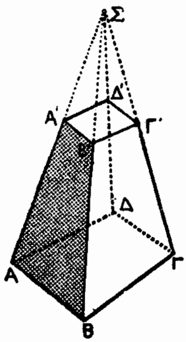
II. Δύο πυραμίδες, αἱ ὁποῖαι ἔχουν βάσεις ἰσοδυνάμους, ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν ὑψῶν του.

III. Δύο πυραμίδες, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἴσα ὕψη, ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν βάσεών των.

Ἀσκήσεις: *2298, 2299, 2300, 2301, 2302, 2303, 2304, 2305, 2306, 2307, 2308, 2309, 2310, 2311, 2312, 2313, 2314.*

Κόλουρος πυραμὶς

767. Κόλουρος πυραμίς. Ἔστω ἡ πυραμὶς ΣΑΒΓΔ *(Σχ. 525)* καὶ Α΄Β΄Γ΄Δ΄ ἡ τομή της ὑπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν της. Τὸ πολύεδρον ΑΒΓΔΑ΄Β΄Γ΄Δ΄ λέγεται ***κόλουρος πυραμίς.***



Σχ. 525.

Γενικῶς: ***Κόλουρος πυραμὶς*** *λέγεται τὸ μέρος τῆς πυραμίδος τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῆς βάσεώς της καὶ τῆς τομῆς της ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν.*

Ἡ βάσις μιᾶς πυραμίδος καὶ ἡ τομή της ὑπὸ τοῦ παραλλήλου ἐπιπέδου λέγονται ***βάσεις*** *τῆς κολούρου πυραμίδος.*

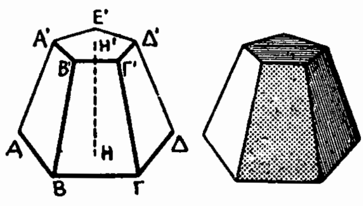
Π.χ. αἱ ΑΒΓΔ καὶ Α΄Β΄Γ΄Δ΄ *(Σχ. 525)* εἶναι αἱ βάσεις τῆς κολούρου πυραμίδος ΑΒΓΔΑ΄Β΄Γ΄Δ΄.

Αἱ βάσεις μιᾶς κολούρου πυραμίδος εἶναι πολύγωνα ὅμοια (§ 760, 2ον).

Αἱ ἄλλαι ἕδραι τῆς κολούρου πυραμίδος, ἐκτὸς τῶν δύο βάσεων λέγονται ***παράπλευροι ἕδραι*** της.

Αἱ παράπλευροι ἕδραι κολούρου πυραμίδος εἶναι τραπέζια.

Π.χ. παράπλευραι ἕδραι τῆς κολούρου πυραμίδος ΑΒΓΔΑ΄Β΄Γ΄Δ΄ εἶναι αἱ ΑΒΒ΄Α΄, ΒΓΓ΄Β΄, ΓΔΔ΄Γ΄, ΔΑΑ΄Δ΄.



Κόλουρος πυραμὶς

Σχ. 526.

Ὕψος μιᾶς κολούρου πυραμίδος *λέγεται ἡ ἀπόστασις τῶν δύο βάσεών της.*

Μία ***κόλουρος πυραμίς εἶναι κανονική***, *ἂν προκύπτῃ ἀπὸ κανονικὴν πυραμίδα.*

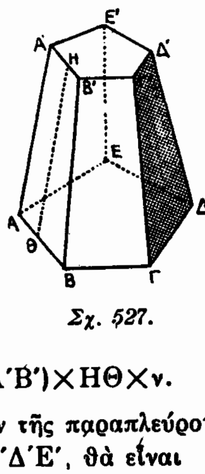
Αἱ παράπλευροι ἕδραι μιᾶς κανονικῆς κολούρου πυραμίδος εἶναι ἰσοσκελῆ τραπέζια ἴσα μεταξύ των.

Τὸ ὕψος ἑνὸς ἐκ τῶν ἴσων τραπεζίων λέγεται ***ἀπόστημα ἢ παράπλευρον ὕψος τῆς κολούρου πυραμίδος.***

768. Ὁρισμός. ***Ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας μιᾶς κολούρου πυραμίδος*** *ὀνομάζομεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν της.*

769. Πρόβλημα. ***Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας μιᾶς κανονικῆς κολούρου πυραμίδος συναρτήσει τῶν πλευρῶν τῶν βάσεών της καὶ τοῦ παραπλεύρου ὕψους της.***

Ἔστω μία κανονικὴ κόλουρος πυραμὶς ΑΒΓΔΕΑ΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄, τῆς ὁποίας αἱ βάσεις εἶναι κανονικὰ πολύγωνα μὲ ν πλευράς, ἐδῶ ν=5. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς κολούρου αὐτῆς πυραμίδος ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ν ἴσων τραπεζίων ΑΒΒ΄Α΄, ΒΓΓ΄Β΄....., τὰ ὁποῖα ἔχουν βάσεις τὰς πλευρὰς τῶν βάσεων τῆς κολούρου πυραμίδος καὶ ὕψη ἴσα, μὲ τὸ παράπλευρον ὕψος ΗΘ.



Σχ. 527.

Ἐπειδὴ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ἀπὸ τὰ ἴσα αὐτὰ τραπέζια, π.χ. τοῦ τραπεζίου, ΑΒΒ΄Α΄, εἶναι ἴσον μὲ $\frac{1}{2}(AB+A'B')\times H\Theta$, τὸ ἐμβαδὸν τῶν ν ἴσων τραπεζίων, δηλ. τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς κολούρου πυραμίδος, θὰ εἶναι $\frac{1}{2}(AB+A'B')\times H\Theta\times \nu$.

Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ Ε τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς κολούρου πυραμίδος ΑΒΓΔΕΑ΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄, θὰ εἶναι

$$E=\frac{1}{2}(AB+A'B')\times H\Theta\times \nu \quad \text{ἢ} \quad E=\frac{1}{2}(AB.\nu+A'B.\nu)\times H\Theta \quad (1)$$

Ἐπειδὴ ΑΒ.ν καὶ Α΄Β΄.ν παριστάνουν τὰς περιμέτρους τῶν βάσεων τῆς κολούρου αὐτῆς πυραμίδος καὶ ΗΘ τὸ παράπλευρον ὕψος της ἕπεται ὅτι, ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Π καὶ Π΄ τὰς περιμέτρους τῶν βάσεών της, θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον

$$\boxed{E=\frac{1}{2}(\Pi+\Pi')\times H\Theta}.$$

Ὥστε: ***Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας μιᾶς κανο-***

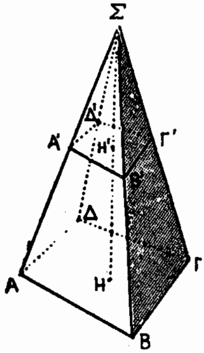
νικῆς κολούρου πυραμίδος εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν περιμέτρων τῶν βάσεών της ἐπὶ τὸ παράπλευρον ὕψος της.

770. Ἐμβαδὸν ὁλικῆς ἐπιφανείας κολούρου πυραμίδος. *Ἐὰν εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας μιᾶς κολούρου πυραμίδος προσθέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεών της, θὰ ἔχωμεν τὸ* ***ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας της.*** Δηλ. εἶναι

ἐμβ. ὁλ. ἐπιφ. κολ. πυρ. = ἐμβ. παρ. ἐπιφ. + ἐμβ· 2 βάσεων

Ἀσκήσεις: 2315, 2316, 2317, 2318.

771. Ὄγκος κολούρου πυραμίδος. Πρόβλημα. ***Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος μιᾶς κολούρου πυραμίδος.***



Σχ. 528.

Ἔστωσαν Β, β αἱ βάσεις *(Σχ. 528)* μιᾶς κολούρου πυραμίδος ΑΒΓΔΕΑ'Β'Γ'Δ'Ε'. Ἡ κόλουρος αὐτὴ πυραμὶς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς διαφορὰ τῶν δύο πυραμίδων ΣΑΒΓΔΕ καὶ ΣΑ'Β'Γ'Δ'Ε'. Ἐὰν ΣΗ καὶ ΣΗ' εἶναι τὰ ὕψη τῶν πυραμίδων αὐτῶν, τὸ ὕψος τῆς κολούρου πυραμίδος θὰ εἶναι

$$ΣΗ - ΣΗ' = Η'Η = υ.$$

Ἂν καλέσωμεν V τὸν ὄγκον τῆς κολούρου αὐτῆς πυραμίδος, τότε:

$$V = \text{ὄγκ.πυρ.}ΣΑΒΓΔΕ - \text{ὄγκ.πυρ.}ΣΑ'Β'Γ'Δ'Ε'$$

$$\text{ἢ} \quad V = \frac{1}{3}Β.ΣΗ - \frac{1}{3}β.ΣΗ' \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ (§ 760, 3ον) $\frac{β}{Β} = \frac{ΣΗ'^2}{ΣΗ^2}$, θὰ εἶναι $\frac{\sqrt{β}}{\sqrt{Β}} = \frac{ΣΗ'}{ΣΗ}$

$$\text{ἢ} \quad \frac{ΣΗ}{\sqrt{Β}} = \frac{ΣΗ'}{\sqrt{β}}.$$

Κατὰ γνωστὴν ἰδιότητα τῶν ἴσων κλασμάτων, ἡ προηγουμένη σχέσις γράφεται $\frac{ΣΗ}{\sqrt{Β}} = \frac{ΣΗ'}{\sqrt{β}} = \frac{ΣΗ - ΣΗ'}{\sqrt{Β} - \sqrt{β}} = \frac{υ}{\sqrt{Β} - \sqrt{β}}.$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν λαμβάνομεν

$$ΣΗ = \frac{υ.\sqrt{Β}}{\sqrt{Β} - \sqrt{β}} \quad \text{καὶ} \quad ΣΗ' = \frac{υ.\sqrt{β}}{\sqrt{Β} - \sqrt{β}} \qquad (2)$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὰ ὕψη ΣΗ καὶ ΣΗ' μὲ τὰ ἴσα των, ποὺ δίδουν αἱ ἰσότητες (2) καὶ ἔχομεν

$$V = \frac{1}{3}Β.\frac{υ\sqrt{Β}}{\sqrt{Β} - \sqrt{β}} - \frac{1}{3}β.\frac{υ\sqrt{β}}{\sqrt{Β} - \sqrt{β}} \quad \text{ἢ} \quad V = \frac{1}{3}υ\frac{Β\sqrt{Β} - β\sqrt{β}}{\sqrt{Β} - \sqrt{β}} \qquad (3)$$

Ἐπειδὴ τὸ πηλίκον τοῦ $B\sqrt{B}-\beta\sqrt{\beta}$ διὰ τοῦ $\sqrt{B}-\sqrt{\beta}$ εἶναι $B+\sqrt{B\beta}+\beta$, ἡ ἰσότης (3) γράφεται $V=\frac{1}{3}\upsilon(B+\sqrt{B\beta}+\beta)$.

Δηλ. εἶναι **Ὄγκ.κολ.πυρ.** $=\frac{1}{3}\upsilon(B+\beta+\sqrt{B\beta})$.

Ὁ τελευταῖος τύπος γράφεται

$$\text{ὄγκ. κολ. πυρ.}=\frac{1}{3}B\upsilon+\frac{1}{3}\beta\upsilon+\frac{1}{3}\sqrt{B\beta}.\upsilon \qquad (4)$$

Ἐπειδὴ τὸ $\sqrt{B\beta}$ παριστάνει τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν δύο βάσεων B καὶ β, ὁ τύπος (4) ἐκφράζει, ὅτι :

Ὁ ὄγκος μιᾶς κολούρου πυραμίδος εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τριῶν πυραμίδων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ὡς ὕψος τὸ ὕψος τῆς κολούρου πυραμίδος καὶ ὡς βάσεις ἡ μὲν μία τὴν κάτω βάσιν τῆς κολούρου πυραμίδος, ἡ ἄλλη τὴν ἄνω βάσιν αὐτῆς καὶ ἡ τρίτη τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν δύο αὐτῶν βάσεων.

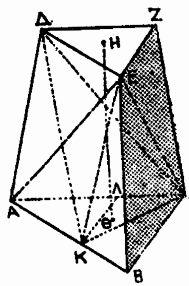
Ὁ ἀνωτέρω τύπος, ποὺ δίδει τὸν ὄγκον μιᾶς κολούρου πυραμίδος, προκύπτει καὶ γεωμετρικῶς ὡς φαίνεται εἰς τὸ κατωτέρω θεώρημα:

772. Θεώρημα. ***Μία κόλουρος πυραμὶς εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τριῶν πυραμίδων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ὡς ὕψος τὸ ὕψος τῆς κολούρου πυραμίδος καὶ ὡς βάσεις, ἡ μὲν μία τὴν κάτω βάσιν τῆς κολούρου πυραμίδος, ἡ ἄλλη τὴν ἄνω βάσιν αὐτῆς καὶ ἡ τρίτη τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν δύο αὐτῶν βάσεων.***

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθόσον ἡ *κόλουρος πυραμὶς εἶναι τριγωνικὴ* ἢ *πολυγωνική*.

1η. Ὑπόθεσις: Ἔστω ἡ τριγωνικὴ κόλουρος πυραμὶς ΑΒΓΔΕΖ *(Σχ. 529)*.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ κόλουρος αὐτὴ πυραμὶς εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸ ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων....



Σχ. 529.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὸ ἐπίπεδον ΑΕΓ· τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ χωρίζει τὴν κόλουρον πυραμίδα εἰς δύο πυραμίδας: εἰς τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα ΕΑΒΓ καὶ εἰς τὴν τετραγωνικὴν πυραμίδα ΕΑΔΖΓ.

Ἐὰν φέρωμεν τὸ ἐπίπεδον ΔΕΓ, ἡ τετραγωνικὴ πυραμὶς ΕΑΔΖΓ χωρίζεται εἰς τὰς δύο τριγωνικὰς πυραμίδας ΕΔΖΓ καὶ ΕΔΑΓ.

Οὕτω ἡ κόλουρος πυραμὶς ΑΒΓΔΕΖ εἶναι *ἄθροισμα τῶν τριῶν* πυραμίδων ΕΑΒΓ, ΕΔΖΓ καὶ ΕΔΑΓ.

Ἡ πρώτη πυραμὶς ΕΑΒΓ ἔχει κορυφὴν τὸ Ε καὶ βάσιν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ· ἐπομένως τὸ ὕψος της εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὕψος τῆς κολούρου πυραμίδος καὶ ἡ βάσις της εἶναι ἡ κάτω βάσις ΑΒΓ τῆς κολούρου πυραμίδος.

Ἡ δευτέρα πυραμὶς ΕΔΖΓ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μία πυραμίς, ἡ ὁποία ἔχει κορυφὴν τὸ σημεῖον Γ καὶ βάσιν τὸ τρίγωνον ΔΕΖ· ἀλλὰ τότε ἡ πυραμὶς αὐτὴ ἔχει ὡς βάσιν τὴν ἄνω βάσιν τῆς κολούρου πυραμίδος καί, ὡς ὕψος τὸ ὕψος τῆς κολούρου.

Ἂς ἐξετάσωμεν τώρα τὴν τρίτην πυραμίδα ΕΔΑΓ. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Ε φέρομεν μίαν παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΔΑ, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Κ· ἐὰν φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν ΔΚ, παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ πυραμίδες ΕΔΑΓ καὶ ΚΑΔΓ εἶναι ἰσοδύναμοι, διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν, τὸ τρίγωνον ΑΔΓ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, διότι αἱ κορυφαί των Ε καὶ Κ κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ΕΚ παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν. Ἀλλὰ ἡ πυραμὶς ΚΑΔΓ δύναται νὰ θεωρηθῇ, ὅτι ἔχει κορυφὴν τὸ σημεῖον Δ καὶ ὡς βάσιν τὸ τριγωνον ΑΚΓ· μένει λοιπὸν τώρα νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΚΓ εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῶν δύο βάσεων τῆς κολούρου πυραμίδος.

Πρὸς τοῦτο ἀπὸ τὸ σημεῖον Κ φέρομεν μίαν εὐθεῖαν ΚΛ παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν ΑΓ εἰς τὸ σημεῖον Λ. Τὸ σχηματισθὲν τρίγωνον ΑΚΛ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, διότι ἔχουν τὰς πλευρὰς ΑΚ καὶ ΔΕ ἴσας, ὡς παραλλήλους περιεχομένας μεταξὺ παραλλήλων καὶ τὰς ὁμολόγους γωνίας των ἴσας, διότι αἱ πλευραί των εἶναι παράλληλοι καὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν.

Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΚΓ ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος, τὴν ἀπόστασιν τῆς κοινῆς κορυφῆς Γ ἀπὸ τὰς βάσεις των ΑΒ καὶ ΑΚ· ἄρα ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν βάσεών των· δηλ. εἶναι

$$\frac{ΑΒΓ}{ΑΚΓ} = \frac{ΑΒ}{ΑΚ} \qquad (1)$$

Ὁμοίως τὰ τρίγωνα ΑΚΓ καὶ ΑΚΛ ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος, τὴν ἀπόστασιν τῆς κοινῆς κορυφῆς των Κ ἀπὸ τὰς βάσεις των ΑΓ καὶ ΑΛ· ἄρα θὰ ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν βάσεών των· δηλ. θὰ εἶναι

$$\frac{ΑΚΓ}{ΑΚΛ} = \frac{ΑΓ}{ΑΛ} \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ ἡ ΚΛ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, θὰ εἶναι

$$\frac{ΑΒ}{ΑΚ} = \frac{ΑΓ}{ΑΛ}.$$

'Από τὴν ἰσότητα αὐτὴν συνάγομεν, ὅτι τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) εἶναι ἴσα· ἄρα θὰ εἶναι ἴσα καὶ τὰ πρῶτα μέλη των, δηλ. θὰ εἶναι

$$\frac{ΑΒΓ}{ΑΚΓ} = \frac{ΑΚΓ}{ΑΚΓ} \qquad (3)$$

'Επειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΚΛ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, ἡ ἰσότης (3) γράφεται

$$\frac{ΑΒΓ}{ΑΚΓ} = \frac{ΑΚΓ}{ΔΕΖ}.$$

Ἡ τελευταία ἰσότης δεικνύει, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΚΓ εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ.

Ὥστε ἡ βάσις τῆς τρίτης πυραμίδος εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν δύο βάσεων τῆς κολούρου πυραμίδος.

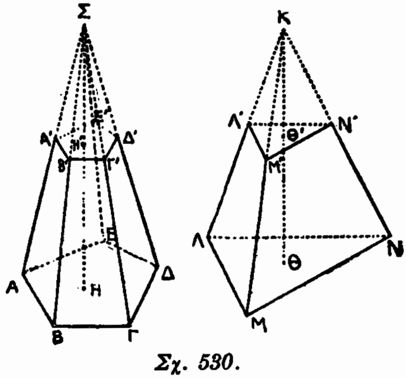
'Εδείχθη λοιπόν, ὅτι ἡ κόλουρος πυραμὶς ΑΒΓΔΕΖ ἀποτελεῖται ἀπὸ τρεῖς πυραμίδας, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος, τὸ ὕψος τῆς κολούρου πυραμίδος καὶ ὡς βάσεις: ἡ πρώτη τὴν κάτω βάσιν ΑΒΓ, ἡ δευτέρα τὴν ἄνω βάσιν ΔΕΖ καὶ ἡ τρίτη τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν δύο αὐτῶν βάσεων.

2α. Ὑπόθεσις: Ἔστω ἡ πολυγωνικὴ κόλουρος πυραμὶς ΑΒΓΔΕΑ'Β'Γ'Δ'Ε' *(Σχ. 530).*

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ κόλουρος αὐτὴ πυραμὶς εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸ ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων....

Ἀπόδειξις: Ἡ κόλουρος αὐτὴ πυραμὶς εἶναι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν πυραμίδων ΣΑΒΓΔΕ καὶ ΣΑ'Β'Γ'Δ'Ε'.

'Επὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως ΑΒΓΔΕ λαμβάνομεν ἕνα τρίγωνον ΛΜΝ ἰσοδύναμον μὲ τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ καὶ κατασκευάζομεν τὴν πυραμίδα ΚΛΜΝ, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ βάσιν τὸ τρίγωνον αὐτὸ καὶ ὕψος ἴσον μὲ τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓΔΕ.



Σχ. 530.

Αἱ δύο πυραμίδες ΣΑΒΓΔΕ καὶ ΚΛΜΝ εἶναι ἰσοδύναμοι, διότι ἔχουν βάσεις ἰσοδυνάμους καὶ ὕψη ἴσα. (§ 764).

Τὸ ἐπίπεδον Α'Β'Γ'Δ'Β', προεκτεινόμενον ὁρίζει ἐπὶ τῆς πυραμίδος ΚΛΜΝ μίαν τομὴν Λ'Μ'Ν', ἡ ὁποία εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸ πολύγωνον Α'Β'Γ'Δ'Ε' καὶ ἑπομένως αἱ δύο πυραμίδες ΚΛ'Μ'Ν' καὶ ΣΑ'Β'Γ'Δ'Ε' εἶναι ἰσοδύναμοι. 'Αλλὰ τότε αἱ δύο κόλουροι πυραμί-

δες ΛΜΝΛ'Μ'Ν' καὶ ΑΒΓΔΕΑ'Β'Γ'Δ'Ε' εἶναι ἰσοδύναμοι, ὡς διαφορὰ ἰσοδυνάμων, ἀντιστοίχως, πυραμίδων. Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ δύο αὗται κόλουροι πυραμίδες ἔχουν ἴσα ὕψη καὶ αἱ βάσεις των εἶναι ἀντιστοίχως ἰσοδύναμοι· ἑπομένως τὸ θεώρημα, τὸ ὁποῖον ἀπεδείχθη διὰ τὴν κόλουρον τριγωνικὴν πυραμίδα, ἐπεκτείνεται καὶ εἰς τὴν κόλουρον πυραμίδα μὲ πολυγωνικὰς βάσεις.

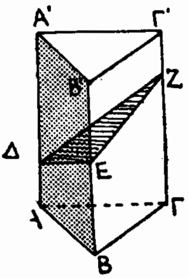
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Μία κόλουρος πυραμὶς εἶναι. . . .***

Ἀσκήσεις: 2319, 2320, 2321, 2322, 2323, 2324, 2325.

Κολοβὸν πρῖσμα

773. Κολοβὸν πρῖσμα. Ἔστω ἕνα πρῖσμα ΑΒΓΑ'Β'Γ' *(Σχ.531)* καὶ ΔΕΖ μία τομὴ αὐτοῦ, ἡ ὁποία δὲν εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις του. Τὰ πολύεδρα ΑΒΓΔΕΖ καὶ Α'Β'Γ'ΔΕΖ λέγονται ***κολοβὰ πρίσματα.***

Γενικῶς: ***Κολοβὸν πρῖσμα*** *λέγεται τὸ στερεόν, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ μιᾶς πρισματικῆς ἐπιφανείας καὶ δύο τομῶν αὐτῆς, αἱ ὁποῖαι δὲν εἶναι παράλληλοι καὶ δὲν ἔχουν κανένα κοινὸν σημεῖον.*



Σχ. 531.

Αἱ δύο αὗται τομαὶ λέγονται ***βάσεις τοῦ κολοβοῦ πρίσματος.***

Π.χ. Εἰς τὸ κολοβὸν πρῖσμα ΑΒΓΔΕΖ βάσεις του εἶναι αἱ ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ.

Ἕνα ***κολοβὸν πρῖσμα λέγεται ὀρθόν,*** *ἐὰν αἱ παράπλευροι ἀκμαί του εἶναι κάθετοι, ἐπὶ τὴν μίαν βάσιν του.*

774. Θεώρημα. ***Ἕνα κολοβὸν τριγωνικὸν πρῖσμα εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν κοινὴν βάσιν, τὴν μίαν ἀπὸ τὰς βάσεις τοῦ κολοβοῦ πρίσματος καὶ ὡς κορυφὰς ἀντιστοίχως, τὰς τρεῖς κορυφὰς τῆς ἄλλης βάσεώς του.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ κολοβὸν πρῖσμα ΑΒΓΔΕΖ *(Σχ. 532).*

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ κολοβὸν αὐτὸ πρῖσμα εἶναι ἰσοδύναμον με τὸ ἄθροισμα τῶν πυραμίδων Δ.ΑΒΓ, Ε.ΑΒΓ, Ζ.ΑΒΓ.

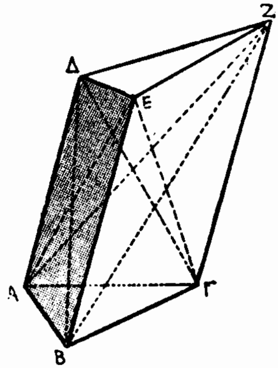
Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὸ ἐπίπεδον ΑΕΓ· τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ χωρίζει τὸ κολοβὸν πρῖσμα εἰς δύο πυραμίδας: εἰς τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα ΕΑΒΓ καὶ εἰς τὴν τετραγωνικὴν πυραμίδα ΕΑΓΖΔ.

Ἐὰν φέρωμεν τὸ ἐπίπεδον ΔΕΓ, ἡ τετραγωνικὴ πυραμὶς ΕΑΓΖΔ χωρίζεται εἰς τὰς δύο τριγωνικὰς πυραμίδας ΕΔΑΓ καὶ ΕΔΖΓ. Οὕτω

τὸ κολοβὸν πρῖσμα εἶναι ἄθροισμα τῶν τριῶν πυραμίδων ΕΑΒΓ, ΕΔΑΓ καὶ ΕΔΖΓ.

Ἡ πρώτη πυραμὶς ΕΑΒΓ ἔχει, ὡς βάσιν τὴν βάσιν ΑΒΓ τοῦ κολοβοῦ πρίσματος καὶ ὡς κορυφὴν τὴν κορυφὴν Ε τῆς ἄλλης βάσεώς του.

Ἐὰν φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν ΔΒ, ἡ δευτέρα πυραμὶς ΕΔΑΓ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν πυραμίδα ΒΔΑΓ, διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΔΑΓ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, διότι αἱ κορυφαί των Ε καὶ Β κεῖνται ἐπὶ εὐθείας ΕΒ παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν· ἀλλὰ ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ΒΔΑΓ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μία πυραμίς, ἡ ὁποία ἔχει βάσιν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ὡς κορυφὴν τὸ σημεῖον Δ.



Σχ. 532.

Ἐὰν φέρωμεν τὰς εὐθείας ΖΒ καὶ ΖΑ, ἡ τρίτη πυραμὶς ΕΔΖΓ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν ΒΔΖΓ, διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΔΖΓ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, διότι αἱ κορυφαί των Ε καὶ Β κεῖνται ἐπὶ εὐθείας ΕΒ παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν. Ἀλλὰ ἡ πυραμὶς ΒΔΖΓ δύναται νὰ θεωρηθῇ, ὅτι ἔχει βάσιν τὴν ΒΖΓ καὶ κορυφὴν τὸ Δ· ἀλλὰ τότε ἡ πυραμὶς αὐτὴ ΔΒΖΓ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν πυραμίδα ΑΒΖΓ, διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΖΓ καὶ αἱ κορυφαί των Δ καὶ Α κεῖνται ἐπὶ εὐθείας ΔΑ παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν ΒΖΓ. Ἀλλὰ ἡ τελευταία πυραμὶς ΑΒΖΓ δύναται νὰ θεωρηθῇ, ὅτι ἔχει βάσιν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ κορυφὴν τὸ Ζ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι τὸ κολοβὸν πρῖσμα ΑΒΓΔΕΖ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν κοινὴν βάσιν τὴν ΑΒΓ καὶ ὡς κορυφάς, ἀντιστοίχως, τὰς κορυφὰς Δ, Ε, Ζ τῆς ἄλλης βάσεως.

775. Ὄγκος ἑνὸς ὀρθοῦ κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος. Ἐὰν τὸ κολοβὸν πρῖσμα εἶναι ὀρθόν, ὡς πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓ, αἱ ἀκμαὶ ΔΑ, ΕΒ, ΖΓ εἶναι τὰ ὕψη τῶν τριῶν πυραμίδων, ἀπὸ τὰς ὁποίας ἀποτελεῖται τὸ κολοβὸν πρῖσμα. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ ὄγκος V τοῦ κολοβοῦ πρίσματος θὰ εἶναι:

$$V = \text{ὄγκ. πυρ.}\,ΔΑΒΓ + \text{ὄγκ. πυρ.}\,ΕΑΒΓ + \text{ὄγκ. πυρ.}\,ΖΑΒΓ$$

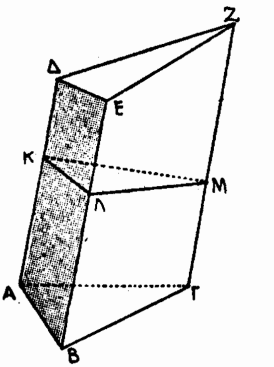
$$= \frac{1}{3}\,\text{ἐμβ.}ΑΒΓ \times ΔΑ + \frac{1}{3}\,\text{ἐμβ.}ΑΒΓ \times ΕΒ + \frac{1}{3}\,\text{ἐμβ.}ΑΒΓ \times ΖΓ$$

ἢ

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\,\text{ἐμβ.}\,ΑΒΓ \times (ΔΑ + ΕΒ + ΖΓ)}\,.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι:

Ὁ ὄγκος ἑνὸς ὀρθοῦ κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἕνα τρίτον τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς παραπλεύρους ἀκμάς του, ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν παραπλεύρων ἀκμῶν του.



Σχ. 533.

776. Ὄγκος ἑνὸς πλαγίου κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος. Ἔστω ἕνα πλάγιον κολοβὸν τριγωνικὸν πρῖσμα ΑΒΓΔΕΖ *(Σχ. 533)* καὶ ΚΛΜ μία κάθετος τομή του. Ἡ κάθετος τομὴ ΚΛΜ χωρίζει τὸ κολοβὸν τριγωνικὸν πρῖσμα εἰς δύο ὀρθὰ τριγωνικὰ πρίσματα ΚΛΜΑΒΓ καὶ ΚΛΜΔΕΖ. Ἑπομένως ὁ ὄγκος V τοῦ δοθέντος κολοβοῦ πρίσματος εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν δύο αὐτῶν ὀρθῶν κολοβῶν πρισμάτων. Δηλ. εἶναι

$$V = \text{ὀγκ.}ΚΛΜΑΒΓ + \text{ὄγκ.}ΚΛΜΔΕΖ \qquad (1)$$

ἢ $$V = \frac{1}{2}\text{ἐμβ.}ΚΛΜ \times (ΚΑ+ΛΒ+ΜΓ) + \frac{1}{3}\text{ἐμβ.}ΚΛΜ \times (ΚΔ+ΛΕ+ΜΖ)$$

ἢ $$V = \frac{1}{3}\text{ἐμβ.}ΚΛΜ \times (ΚΑ+ΛΒ+ΜΓ+ΚΔ+ΛΕ+ΜΖ) \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ $ΚΑ+ΚΔ=ΑΔ$, $ΛΒ+ΛΕ=ΒΕ$, $ΜΖ+ΜΓ=ΓΖ$, ἡ ἰσότης (2) γίνεται $V = \frac{1}{3}\text{ ἐμβ.}ΚΛΜ \times (ΑΔ+ΒΕ+ΓΖ)$.

Ὥστε: ***Ὁ ὄγκος ἑνὸς πλαγίου τριγωνικοῦ κολοβοῦ πρίσματος εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἕνα τρίτον τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς καθέτου τομῆς του ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν του.***

777. Ὄγκος πολυγωνικοῦ κολοβοῦ πρίσματος. *Ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον ἑνὸς κολοβοῦ πολυγωνικοῦ πρίσματος, χωρίζομεν αὐτὸ εἰς τριγωνικὰ κολοβὰ πρίσματα καὶ προσθέτομεν τοὺς ὄγκους των.*

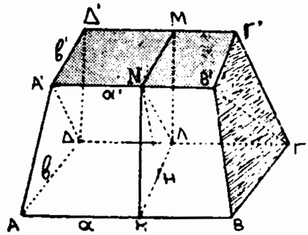
Ἀσκήσεις: 2327, 2328, 2329.

778. Ἐφαρμογή. Κυβισμὸς σωροῦ ἄμμου. Πρόβλημα. ***Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος ἑνὸς κολοβοῦ τετραγωνικοῦ πρίσματος ΑΒΓΔΑ′Β′Γ′Δ′, τοῦ ὁποίου δύο ἕδραι εἶναι ὀρθογώνια, τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι ὅμοιά, καὶ τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι παράλληλοι ἀντιστοίχως.***

Ἔστωσαν ΑΒΓΔ καὶ Α'Β'Γ'Δ' *(Σχ. 534)* αἱ βάσεις τοῦ κολοβοῦ πρίσματος ΑΓ'. Αἱ ἄλλαι τέσσαρες παράπλευροι ἕδραι του εἶναι τραπέζια.

Φέρομεν ἕνα ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὰς ἀκμὰς ΑΒ, ΓΔ, Α'Β', Γ'Δ'. Τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ ὁρίζει ἕνα τραπέζιον ΚΛΜΝ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ κάθετος τομὴ τοῦ στερεοῦ ΑΓ'.

Φέρομεν ἐπίσης ἕνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὰς ἀκμὰς Α'Β' καὶ ΔΓ καὶ τὸ ὁποῖον διαιρεῖ τὸ στερεὸν εἰς δύο κολοβὰ τριγωνικὰ πρίσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν, ὡς καθέτους τομάς, τὸ πρῶτον τὸ τρίγωνον ΚΛΝ καὶ τὸ δεύτερον τὸ τρίγωνον ΛΜΝ.



Σχ. 534.

Ὁ ὄγκος τοῦ κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ΑΔΑ'ΒΓΒ' εἶναι (§ 701) ἴσος μὲ

$$\frac{1}{3}\text{ ἐμβ.}ΚΛΜ\times(ΑΒ+ΓΔ+Α'Β')$$

καὶ ὁ ὄγκος τοῦ Α'ΔΔ'Β'ΓΓ' εἶναι ἴσος μὲ

$$\frac{1}{3}\text{ ἐμβ.}ΛΜΝ\times(Α'Β'+ΔΓ+Δ'Γ').$$

Ἑπομένως ὁ ὄγκος V ὁλοκλήρου τοῦ στερεοῦ εἶναι ἴσος μὲ

$$V=\text{ἐμβ.}ΚΛΜ\times\frac{ΑΒ+ΓΔ+Α'Β'}{3}+\text{ἐμβ.}ΛΜΝ\times\frac{Α'Β'+ΓΔ+Δ'Γ'}{3} \quad (1).$$

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ α καὶ β τὰς διαστάσεις ΑΒ καὶ ΑΔ τῆς βάσεως ΑΒΓΔ, μὲ α', β' τὰς διαστάσεις Α'Β' καὶ Α'Δ' τῆς ἄνω βάσεως καὶ μὲ υ τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ. δηλ. τὴν ἀπόστασιν ΝΗ τῶν παραλλήλων βάσεων ΑΒΓΔ καὶ Α'Β'Γ'Δ', θὰ εἶναι :

$$\text{ἐμβ.}ΚΛΜ=\frac{1}{2}ΚΛ\times ΝΗ=\frac{1}{2}βυ \quad \text{ἢ} \quad \text{ἐμβ }ΛΜΝ=\frac{1}{2}ΜΝ\times ΝΗ=\frac{1}{2}β'υ.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὰ ἐμβ.ΚΛΜ κλπ.... μὲ τὰς τιμάς των καὶ ἔχομεν

$$V=\frac{βυ}{2}\times\frac{α+α+α'}{3}+\frac{β'υ}{2}\times\frac{α'+α'+α}{3}$$

ἢ

$$V=\frac{βυ}{2}\times\frac{2α+α'}{3}+\frac{β'υ}{2}\times\frac{2α'+α}{3}$$

ἢ

$$\boxed{V=\frac{υ}{6}[β(2α+α')+β'(2α'+α)]}$$

Σημ. Ὁ ἀνωτέρω τύπος χρησιμοποιεῖται, εἰς τὴν πρᾶξιν, διὰ τὸν κυβισμὸν τοῦ σωροῦ τῆς ἄμμου ἢ τῶν χαλικίων.

779. Πρισματοειδῆ πολύεδρα. Πρισματοειδὲς πολύεδρον.

Πρισματοειδὲς *λέγεται τὸ κυρτὸν πολύεδρον, τοῦ ὁποίου δύο ἕδραι (βάσεις) εἶναι τυχόντα πολύγωνα, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ παραλλήλων ἐπιπέδων καὶ αἱ ἄλλαι ἕδραι (παράπλευροι ἕδραι) εἶναι τρίγωνα ἢ τραπέζια, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ὡς κορυφὰς τὰς κορυφὰς ἑκάστης βάσεως.*

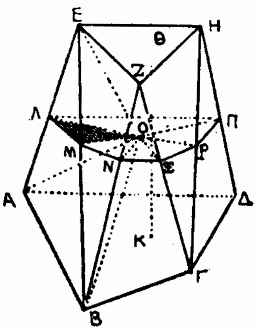
Π.χ. τὸ πολύεδρον ΑΒΓΔΕΒΗ *(Σχ. 535)* εἶναι πρισματοειδές· αἱ βά-

σεις του εἶναι τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ τὸ τρίγωνον ΕΖΗ· αἱ παράπλευροι ἕδραι του εἶναι τὰ τρίγωνα ΕΑΒ, ΒΖΕ, ΖΒΓ, ΓΖΗ, ΗΓΔ καὶ τὸ τραπέζιον ΑΔΗΕ.

Ἡ ἀπόστασις ΘΚ τῶν παραλλήλων βάσεων τοῦ πρισματοειδοῦς λέγεται ὕψος αὐτοῦ.

780. Θεώρημα. ***Ὁ ὄγκος ἑνὸς πρισματοειδοῦς εἶναι ἴσος μὲ $\frac{\upsilon}{6}(B+B'+4B'')$, ὅπου υ παριστάνει τὸ ὕψος τοῦ πρισματοειδοῦς, Β καὶ Β′ τὰ ἐμβαδὰ τῶν δύο βάσεών του καὶ Β″ τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς τοῦ πρισματοειδοῦς ὑπὸ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον εἶναι παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις του καὶ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ αὐτάς.***

Ἔστω τὸ πρισματοειδὲς πολύεδρον ΑΒΓΔΕΖΗ καὶ ΛΜΝΞΡΠ ἡ τομή του ὑπὸ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον εἶναι παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις του ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗ καὶ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ αὐτάς. Ἔστω, ὅτι ἐμβ.ΑΒΓ=Β καὶ ἐμβ.ΕΖΗ=Β′. Εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς τομῆς λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Ο καὶ φέρομεν τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὸ σημεῖον Ο μὲ τὰς κορυφὰς τοῦ στερεοῦ. Τὸ πρισματοειδὲς χωρίζεται εἰς πυραμίδας, αἱ ὁποῖαι ἔχουν κοινὴν κορυφὴν τὸ Ο καὶ βάσεις τὰς διαφόρους ἕδρας τοῦ πρισματοειδοῦς.



Σχ. 535.

Δύο ἐκ τῶν πυραμίδων αὐτῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν, ὡς βάσεις, τὰς βάσεις ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗ ἔχουν ὕψη ἴσα μὲ $\frac{\upsilon}{2}$ καὶ ἐπομένως ἔχουν ὄγκους ἀντιστοίχως, ἴσους μὲ $\frac{B\upsilon}{6}$ καὶ $\frac{B'\upsilon}{6}$. Μένει τώρα νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι ὅλαι αἱ ἄλλαι πυραμίδες, αἱ ὁποῖαι ἔχουν βάσεις τὰς παραπλεύρους ἕδρας τοῦ πρισματοειδοῦς ἔχουν ὄγκον ἴσον μὲ $\frac{4B''\upsilon}{6}$.

Ἔστω ἡ πυραμὶς ΟΑΒΕ, ἡ ὁποία ἔχει βάσιν τὸ τρίγωνον ΕΑΒ, τὴν μίαν ἀπὸ τὰς ἕδρας τοῦ πολυέδρου καὶ ἔστω ΛΜ ἡ τομὴ τοῦ τριγώνου αὐτοῦ ὑπὸ τῆς τομῆς ΛΜΝ. . . . Π. Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Λ καὶ Μ εἶναι τὰ μέσα τῶν ἀκμῶν ΕΑ καὶ ΕΒ, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΕΛΜ εἶναι τὸ τέταρτον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ΕΑΒ.

Ἐὰν συγκρίνωμεν τώρα τὰ τετράεδρα ΟΕΑΒ καὶ ΟΕΛΜ παρατηροῦμεν, ὅτι ἔχουν κοινὴν κορυφὴν τὸ Ο καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ΕΑΒ τοῦ πρώτου εἶναι τετραπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως ΕΛΜ τοῦ δευτέρου. Ἑπομένως ὁ ὄγκος τῆς πρώτης πυραμίδος θὰ εἶναι τετραπλάσιος τοῦ ὄγκου τῆς δευτέρας πυραμίδος, δηλ. θὰ εἶναι

$$\text{ὄγκ. ΟΕΑΒ} = 4 \times \text{ὄγκ. ΟΕΛΜ} \qquad (1)$$

Ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν, ὅτι τὸ τετράεδρον ΟΕΛΜ ἔχει κο-

ρυφὴν τὸ Ε καὶ βάσιν τὴν ΟΛΜ, ὁπότε τὸ ὕψος του θὰ εἶναι $\frac{υ}{2}$ καὶ ἑπομένως ὁ ὄγκος του θὰ εἶναι $\frac{1}{3}\cdot\frac{υ}{2}$ ἐμβ.ΟΛΜ· δηλ. θὰ εἶναι

$$ὄγκ.\ ΟΕΛΜ = \frac{υ}{6}\ ἐμβ.ΟΛΜ.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὸν ὄγκ. ΟΕΛΜ μὲ τὴν τιμήν του καὶ ἔχομεν

$$ὄγκ.\ ΟΕΑΒ = 4.ἐμβ.\ ΟΛΜ \times \frac{υ}{6}.$$

Ἐργαζόμενοι ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

$$ὄγκ.\ ΟΒΕΖ = 4\ ἐμβ.\ ΟΜΝ \times \frac{υ}{6}.$$

. . . .

Ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων ὅλων τῶν πυραμίδων, ποὺ ἔχουν κορυφὴν τὸ Ο καὶ βάσεις τὰς παραπλεύρους ἕδρας τοῦ πρισματοειδοῦς, θὰ εἶναι ἴσον μὲ $4\times\frac{υ}{6}(ἐμβ.ΟΛΜ + ἐμβ.ΟΜΝ + \cdots)$ ἢ $4\times\frac{υ}{6}\times B''$.

Ἑπομένως ὁ ὄγκος V ὁλοκλήρου τοῦ πρισματοειδοῦς θὰ εἶναι ἴσος μὲ

$$V = \frac{Bυ}{6} + \frac{B'υ}{6} + \frac{4.υB''}{6} \quad ἢ \quad \boxed{V = \frac{υ}{6}(B + B' + 4B'')}$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ὁ ὄγκος ἑνὸς πρισματοειδοῦς....***

Σημ. Διὰ τὰς παραπλεύρους ἕδρας, αἱ ὁποῖαι εἶναι τραπέζια, ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἡ αὐτή, διότι δυνάμεθα νὰ φέρωμεν μίαν διαγώνιόν του, ὁπότε χωρίζεται τὸ τραπέζιον εἰς δύο τρίγωνα.

Ἀσκήσεις: 2330, 2331, 2332, 2333, 2334.

Ἀσκήσεις

2284. (2320). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος μιᾶς κανονικῆς ἑξαγωνικῆς πυραμίδος καὶ τὸ ἀπόστημά της (παράπλευρον ὕψος), ἐὰν ἡ πλευρὰ τῆς βάσεώς της εἶναι α καὶ ἡ παράπλευρος ἀκμή της λ.

2285. (2321). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν ἡ κανονικὴ πυραμὶς εἶναι τριγωνική.

2286. (2322). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν ἡ κανονικὴ πυραμὶς εἶναι τετραγωνική.

2287. (2323). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ κανονικῆς πυραμίδος ἔχουν τὴν αὐτὴν κλίσιν πρὸς τὴν βάσιν της.

2288. (2324). Ἡ βάσις μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος εἶναι ἕνα τετράγωνον πλευρᾶς 0,40 μ. καὶ ἡ παράπλευρος ἀκμή της 0,70 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας της.

2289. (2325). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς στέγης, ἡ ὁποία ἔχει τὸ σχῆμα κανονικῆς πενταγωνικῆς πυραμίδος, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ ἀκμὴ τῆς βάσεώς της εἶναι 1,40 καὶ ἡ παράπλευρος ἀκμή της εἶναι 8,40 μ.

2290. (2326). Ἡ βάσις μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος εἶναι ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον. Τὸ ἀπόστημα τῆς πυραμίδος αὐτῆς εἶναι 1,20 μ. καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της 1,84 τ.μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ τῆς βάσεώς της.

2291. (2327). Ἡ βάσις μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος εἶναι ἕνα κανονικὸν ἑξάγωνον πλευρᾶς 15 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἀπόστημά της (παράπλευρον ὕψος),

ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας της εἶναι 15 τ. δεκατόμετρα.

2292. (2328). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος μιᾶς κανονικῆς ἑξαγωνικῆς πυραμίδος, ἐὰν ἡ ἀκμὴ τῆς βάσεώς της εἶναι α καὶ ἡ παράπλευρος ἐπιφάνειά της Ε.

2293. (2329). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν ἡ κανονικὴ πυραμὶς εἶναι τριγωνική.

2294. (2330). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν ἡ κανονικὴ πυραμὶς εἶναι τετραγωνική.

2295. (2331). Ἡ βάσις μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος εἶναι ἕνα τετράγωνον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως αὐτῆς, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἀπόστημα τῆς πυραμίδος εἶναι 10 ἑκ. καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της 168 τ. ἑκ.

2296. (2332). Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας μιᾶς κανονικῆς ἑξαγωνικῆς πυραμίδος εἶναι 3,20 τ.μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράπλευρος ἀκμή της, ἐὰν τὸ ἀπόστημά της εἶναι 0,80 μ.

2297. (2333). Ἡ βάσις μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος εἶναι ἕνα ἑξάγωνον πλευρᾶς 3 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἔχῃ ἡ πυραμὶς αὐτή, ἵνα τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της εἶναι δεκαπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς της.

2298. (2334). Ἡ μεγαλυτέρα πυραμὶς τῆς Αἰγύπτου ἔχει βάσιν ἕνα τετράγωνον πλευρᾶς 234 μ. καὶ τὸ ὕψος της εἶναι 146 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος της·

2299. (2335). Ἡ βάσις μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος εἶναι ἕνα ἑξάγωνον πλευρᾶς 8 ἑκ καὶ τὸ ὕψος της 5 δεκατόμ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της, τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας της καὶ ὁ ὄγκος της.

2300. (2336). Ἡ βάσις μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος εἶναι τετράγωνον πλευρᾶς 0,40 μ. καὶ ἡ παράπλευρος ἀκμή της 1,10 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος καὶ ὁ ὄγκος της.

2301. (2337). Εἰς ἕνα κύκλον ἀκτῖνος 1 μ ἐγγράφομεν ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος μιᾶς πυραμίδος, ἡ ὁποία ἔχει ὕψος 3 μ. καὶ βάσιν τὸ ἰσόπλευρον αὐτὸ τρίγωνον.

2302. (2338). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν ἡ βάσις εἶναι τὸ ἐγγεγραμμένον κανονικὸν ἑξάγωνον.

2303. (2339). Ἡ βάσις μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος εἶναι ἕνα ἑξάγωνον πλευρᾶς α, καὶ τὸ ὕψος της υ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παράπλευροι ἀκμαί της, τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της καὶ ὁ ὄγκος της. Ἐφαρμογή: α=2 μ., υ=10 μ.

2304. (2340). Μία κανονικὴ ἑξαγωνικὴ πυραμὶς ἔχει ὄγκον 1 κ.μ. καὶ τὸ ὕψος της εἶναι 0,50 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ τῆς βάσεώς της.

2305. (2341). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος μιᾶς πυραμίδος, ἡ ὁποία ἔχει ὄγκον 650 κ. δεκατόμ. καὶ τῆς ὁποίας ἡ βάσις εἶναι ἕνα τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι 50 ἑκ. καὶ τὸ ὕψος του 0,26 μ.

2306. (2342). Μία κανονικὴ πυραμὶς ἔχει βάσιν ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς 7 ἑκ. καὶ ὄγκον 75 κ. ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος της.

2307. (2343). Μία κανονικὴ πυραμὶς ἔχει βάσιν ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α. Αἱ παράπλευροι ἀκμαί της σχηματίζουν γωνίαν 60° μὲ τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος, ἡ παράπλευρος ἐπιφάνειά της καὶ ὁ ὄγκος της. Ἐφαρμογή: α=12 ἑκ.

2308. (2344). Μία τετραγωνικὴ πυραμὶς ἔχει τὸν αὐτὸν ὄγκον, τὸν ὁποῖον ἔχει ἕνα ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶναι 2,40 μ., τὸ πλάτος 1,45 μ. καὶ τὸ ὕψος 1,60 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ὕψος της εἶναι 5 μ.

2309. (2345). Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας μιᾶς κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος εἶναι πενταπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς της, καὶ ἡ πλευρὰ τῆς βάσεώς της εἶναι 4,25 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος της.

2310. (2346). Μία κανονικὴ πυραμὶς ἔχει βάσιν ἕνα τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ διαγώνιος ἔχει μῆκος α. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας καὶ ὁ ὄγκος της, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ παράπλευρος ἀκμὴ εἶναι ἴση μὲ α.

2311. (2347). Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κανονικοῦ τετραέδρου ἀκμῆς α. Ἐφαρμογή: α=8 ἑκ.

2312. (2348). Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κανονικοῦ τετραέδρου, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶναι υ. Ἐφαρμογή: υ=0,50 μ.

2313. (2349). Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τοῦ ὄγκου κύβου πρὸς τὸν ὄγκον κανονικοῦ τετραέδρου, τὸ ὁποῖον κατασκευάζεται μὲ τὴν διαγώνιον μιᾶς τῶν ἑδρῶν τοῦ κύβου.

2314. (2350). Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων μιᾶς κανονικῆς ἑξαγωνικῆς πυραμίδος, τῆς ὁποίας ἡ πλευρὰ τῆς βάσεως εἶναι α καὶ τὸ ὕψος α, πρὸς ἕνα κανονικὸν τετράεδρον ἀκμῆς α.

2315. (2351). Αἱ βάσεις μιᾶς κανονικῆς κολούρου πυραμίδος εἶναι τετράγωνα πλευρῶν 80 ἑκ. καὶ 60 ἑκ. καὶ τὸ παράπλευρον ὕψος της εἶναι 1 μετρ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας της.

2316. (2352). Αἱ βάσεις μιᾶς κανονικῆς κολούρου πυραμίδος εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα πλευρῶν 1,20 μ. καὶ 0,95 καὶ ἡ παράπλευρος ἀκμή της 1,40 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας της.

2317. (2353). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν αἱ βάσεις εἶναι τετράγωνα.

2318. (2354). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν αἱ βάσεις εἶναι κανονικὰ ἑξάγωνα.

2319. (2354΄). Αἱ βάσεις μιᾶς κανονικῆς κολούρου πυραμίδος εἶναι ἑξάγωνα πλευρῶν 0,35 μ. καὶ 0,28 μ. καὶ τὸ ὕψος της εἶναι 1,80 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος της.

2320. (2355). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν αἱ βάσεις της εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα.

2321. (2356). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν αἱ βάσεις της εἶναι τετράγωνα.

2322. (2357). Αἱ βάσεις μιᾶς κανονικῆς κολούρου πυραμίδος εἶναι τετράγωνα πλευρῶν 70 ἑκ. καὶ 60 ἑκ. καὶ ἡ παράπλευρος ἀκμή της εἶναι 64,7 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος της.

2323. (2358). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν αἱ βάσεις της εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα.

2324. (2359). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν αἱ βάσεις της εἶναι κανονικὰ ἑξάγωνα.

2325. (2360). Ἡ κάτω βάσις μιᾶς κανονικῆς κολούρου πυραμίδος εἶναι ἕνα τετράγωνον πλευρᾶς 2,40 μ. τὸ παράπλευρον ὕψος της εἶναι 1,10 μ. καὶ ἡ παράπλευρος ἀκμή της εἶναι 1,30 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της, τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας της καὶ ὁ ὄγκος της.

2326. (2361). Αἱ βάσεις μιᾶς κολούρου πυραμίδος εἶναι τετράγωνα πλευ-

ρῶν 0,75 μ. καὶ 0,30 μ. ὁ ὄγκος της εἶναι 5 κ.μ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος της.

2327. (2362). Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος ἑνὸς κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ κάθετος τομή του εἶναι ἕνα τρίγωνον, τοῦ ὁποίου. ἡ βάσις εἶναι 64 ἑκ. καὶ τὸ ὕψος του 65 ἑκ. καὶ ὅτι αἱ παράπλευροι ἀκμαί του εἶναι 1,20 μέτρα, 1,35 μέτρα καὶ 1,44 μέτρα.

3328. (2363). Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος ἑνὸς κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος, ἐὰν αἱ παράπλευροι ἀκμαί του εἶναι 1,15 μέτρα, 1,24 μέτρα καὶ 1,30 μέτρα καὶ ἡ κάθετος τομὴ εἶναι ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι 2,10 μέτρα καὶ ἡ ἄνισος πλευρά του 0,50 μέτρα.

2329. (2364). Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος ἑνὸς κολοβοῦ πρίσματος, ἐὰν αἱ παράπλευροι ἀκμαί του εἶναι 1,40 μέτρα, 1,52 μέτρα καὶ 1,55 μέτρα καὶ ἡ κάθετος τομή του εἶναι ἕνα ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 0,72 μέτρα.

2330. (2365). Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος ἑνὸς σωροῦ ἄμμου 0,80 μέτρ. ὕψους καὶ τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις τῆς κάτω βάσεως εἶναι 2,40 μέτρα, 1,80 μέτρα καὶ τῆς ἄνω βάσεως εἶναι 1,40 μέτρα καὶ 0,90 μέτρα.

2331. (2366). Μία ὁδὸς πρέπει νὰ στρωθῇ μὲ 500 κυβ. μέτρα χαλίκια. Πόσους δρόμους θὰ κάμωμεν, διὰ νὰ μεταφέρωμεν τὰ χαλίκια αὐτά, μὲ μίαν χειράμαξαν, τῆς ὁποίας τὸ βάθος εἶναι 0,30 μ. καὶ αἱ διαστάσεις τοῦ πυθμένος εἶναι 0,80 μ. καὶ 0,50 μ. καὶ τοῦ ἀνοικτοῦ μέρους της εἶναι 0,90 μ. καὶ 0,70 μ.;

2332. (2367). Μία τάφρος ἔχει βάθος 0,70 μ. καὶ περιέχει νερὸ ὕψους 0,35 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ νεροῦ, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι αἱ διαστάσεις τοῦ πυθμένος εἶναι 6 μ. καὶ 0,50 μ. καὶ τοῦ ἀνοίγματός της εἶναι 6,30 μ. καὶ 0,64 μ.

2333. (2368). Ἔχομεν σκάψει μίαν τάφρον βάθους 0,60 μ. Τὸ ἄνοιγμά της ἔχει μῆκος 3,50 μέτρα καὶ πλάτος 0,80 μέτρα καὶ ὁ πυθμήν της ἔχει μῆκος 2,90 μέτρα καὶ πλάτος 0,60 μέτρα. Πόσους δρόμους θὰ κάμωμεν διὰ νὰ μεταφέρωμεν τὸ χῶμα τῆς τάφρου αὐτῆς μὲ μίαν χειράμαξαν, τῆς ὁποίας τὸ βάθος εἶναι 0,40 μ. καὶ αἱ διαστάσεις τοῦ μὲν πυθμένος της εἶναι 0,70 μ. καὶ 0,50 μ. καὶ τοῦ ἀνοικτοῦ μέρους της εἶναι 0,80 μ. καὶ 0,60 μ., ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι, κατὰ τὴν ἐξαγωγήν, τὸ χῶμα ὑφίσταται μίαν ἐξόγκωσιν ἴσην μὲ 1/10 τοῦ ὄγκου του.

2334. (2369). Δύο ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' κεῖνται ἐπὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων εἰς τρόπον, ὥστε αἱ κορυφαὶ τοῦ ἑνὸς καὶ οἱ πόδες τῶν καθέτων, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὰς κορυφὰς τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ πρώτου, εἶναι κορυφαὶ ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγώνου ΑβΒ'Γα'Βγ'. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΒ', ΑΓ', ΒΓ', ΒΑ', ΓΑ', ΓΒ' καὶ ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ ΑΒΓΑ'Β'Γ'.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν ἐπὶ τοῦ Β' Κεφαλαίου

Α' Ὁμάς. **2335.** (2370). Μία κανονικὴ πυραμὶς ἔχει βάσιν ἕνα ἑξάγωνον πλευρᾶς 2 μ. Τὸ ὕψος της εἶναι 12 μ. Νὰ ὑπολογισθοῦν :

1ον ἡ παράπλευρος ἀκμή της.
2ον. τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της.
3ον. τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας της.
4ον. ὁ ὄγκος της.

5ον. τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς τῆς πυραμίδος ὑπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον ἀπέχει 4 μέτρα ἀπὸ τὴν κορυφήν της.

6ον. αἱ παράπλευραι ἀκμαὶ καὶ ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος, ἡ ὁποία περιέχεται μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς κορυφῆς της.

2336. (2371). Ἡ βάσις μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος εἶναι ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον, ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον ἀκτῖνος 1,7 μ. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος αὐτῆς εἶναι διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς της. Νὰ ὑπολογισθῇ:

1ον. ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος.

2ον. τὸ βάρος ἑνὸς κύβου μεταλλικοῦ, ὁ ὁποῖος ἔχει διαγώνιον τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος. Τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ μετάλλου εἶναι 7,49.

2337. (2372). Δίδεται ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ πλευρᾶς α. Φέρομεν τὴν διάμετρον ΑΔ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον κύκλου καὶ ἀπὸ τὸ Δ ὑψοῦμεν κάθετον ΔΣ=α ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος Σ.ΑΒΓ.

Β' Ὁμάς. **2338.** (2373). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας μιᾶς κολούρου πυραμίδος μὲ βάσεις τετράγωνα, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ πλευρὰ τῆς μεγάλης βάσεως εἶναι 2,10 μέτρα, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς μικρᾶς βάσεως εἶναι τὸ ἕνα τρίτον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς μεγάλης βάσεως καὶ ὅτι τὸ παράπλευρον ὕψος της εἶναι 3,50 μέτρα.

2339. (2374). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν ἡ μικρὰ βάσις εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς 45 ἑκ., ἡ μεγάλη βάσις εἶναι διπλασία τῆς μικρᾶς καὶ τὸ παράπλευρον ὕψος της εἶναι 1,30 μ.

2340 (2375). Ἕνας ὀβελίσκος ἔχει τὸ σχῆμα μιᾶς κολούρου πυραμίδος μὲ βάσιν τετράγωνον· ἡ πλευρὰ τῆς κάτω βάσεώς του εἶναι 1,50 μέτρα, τῆς ἄνω βάσεώς του εἶναι 0,80 μέτρα καὶ τὸ ὕψος του εἶναι 15 μέτρα. Ἡ κόλουρος αὐτὴ πυραμὶς καταλήγει εἰς μίαν πυραμίδα, τῆς ὁποίας αἱ παράπλευροι ἕδραι της εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ ὀβελίσκου αὐτοῦ.

2341. (2376). Δίδεται μία κανονικὴ πυραμίς, ἡ ὁποία ἔχει ὕψος υ καὶ ἡ βάσις της εἶναι ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α. Ἡ πυραμὶς αὐτὴ τέμνεται ὑπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν της καὶ τὸ ὁποῖον διαιρεῖ τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος εἰς δύο ἴσα μέρη. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τῆς κολούρου πυραμίδος, ἡ ὁποία θὰ προκύψῃ.

2342. (2377). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν ἡ βάσις τῆς πυραμίδος εἶναι τετράγωνον.

2343. (2378). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν ἡ βάσις τῆς πυραμίδος εἶναι κανονικὸν ἑξάγωνον.

2344. (2379). Μία κανονικὴ πυραμὶς ἔχει βάσιν ἕνα ἑξάγωνον πλευρᾶς α=2 ἑκ. καὶ ὕψος υ=10 ἑκ.

1ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παράπλευροι ἀκμαί της, ἡ παράπλευρος ἐπιφάνειά της καὶ ὁ ὄγκος της.

2ον. Τέμνομεν τὴν πυραμίδα αὐτὴν δι' ἑνὸς ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ τὴν κορυφὴν υ'=4 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς, τὸ μῆκος τῶν ἀκμῶν της καὶ ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος, ἡ ὁποία κεῖται ἄνω τοῦ ἐπιπέδου τῆς τομῆς.

***Γ' Ὁμάς.* 2345.** (2380). Δίδεται ἕνας ρόμβος ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ ἔχουν μήκη ΑΓ=2α, ΒΔ=2β. Ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Γ φέρομεν, πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ρόμβου, τὰς καθέτους ΑΕ=υ καὶ ΓΖ=υ' ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ρόμβου. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου ΔΕΒΖ.

2346. (2381). Τέμνομεν μίαν κόλουρον πυραμίδα μὲ ἕνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις της καὶ τοῦ ὁποίου ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς βάσεις της εἶναι ἴσος μὲ μ : ν. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς, ἐὰν γνωρίζωμεν τὰ ἐμβαδὰ Β καὶ β τῶν βάσεών της.

2347. (2382) Δίδεται μία κανονικὴ πυραμίς, τῆς ὁποίας ἡ βάσις εἶναι ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α· τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος εἶναι 2α.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος.

2ον. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς πρέπει νὰ φέρωμεν ἕνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν, ἵνα τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως; Νὰ ὑπολογισθῇ ἔπειτα ὁ ὄγκος τῆς κολούρου πυραμίδος, ἡ ὁποία θὰ προκύψῃ. Ἐφαρμογὴ α=5 μ.

2348. (2383). Δίδεται τὸ κανονικὸν τετράεδρον ΑΒΓΔ ἀκμῆς α.

1ον. Συνδέομεν τὴν κορυφὴν Α μὲ τὸ μέσον Ε τῆς ἀκμῆς ΓΔ· νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος ΑΕ.

2ον. Διὰ τῆς ΑΕ φέρομεν ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ΒΔ εἰς ἕνα σημεῖον Ζ, τοιοῦτον, ὥστε ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος ΑΔΕΖ νὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ὄγκου τῆς πυραμίδος ΑΒΓΕΖ. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη τῶν ΔΖ, ΑΖ.

***Δ' Ὁμάς.* 2349.** (2384). Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔΑ'Β'Γ'Δ'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου ΑΒ'ΓΔ' εἶναι ἴσος μὲ τὸ τρίτον τοῦ ὄγκου τοῦ παραλληλεπιπέδου (τὸ τετράεδρον ΑΒ'ΓΔ' λέγεται ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ παραλληλεπίπεδον).

2350. (2385). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ ὄγκος ἑνὸς τετραέδρου ΑΒΓΔ εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἕκτον τοῦ γινομένου τῆς μικροτέρας ἀποστάσεως τῶν δύο ἀπέναντι ἀκμῶν ΑΒ καὶ ΓΔ ἐπὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι πρὸς τὰς ἀκμὰς αὐτάς.

2351. (2386). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ ὄγκος ἑνὸς τετραέδρου εἶναι ἴσος μὲ τὸ τρίτον τοῦ γινομένου μιᾶς ἀκμῆς του ἐπὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου προβολῆς τοῦ στερεοῦ ἐπὶ ἕνα ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν αὐτήν.

2352. (2387). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε κανονικὸν τετράεδρον τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου κειμένου εἰς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ ἀπὸ τὰς τέσσαρας ἕδρας του εἶναι σταθερόν.

2353. (2388). Ἐὰν μία πυραμὶς ἔχῃ βάσιν ἕνα τραπέζιον, ὁ ὄγκος της εἶναι ἴσος μὲ τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τοῦ ἀθροίσματος τῶν βάσεων τοῦ τραπεζίου ἐπὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, κατὰ τὸ ὁποῖον προβάλλεται ἡ πυραμὶς ἐπὶ ἕνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν βάσιν τοῦ τραπεζίου.

2354. (2389). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο τετραέδρων, τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν τρίεδρον γωνίαν ἴσην, εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν γινομένων τῶν τριῶν ἀκμῶν τῶν τριέδρων αὐτῶν.

2355. (2390). Δίδεται ἡ πυραμὶς ΣΑΒΓΔ, τῆς ὁποίας ἡ βάσις ΑΒΓΔ εἶναι τετράγωνον πλευρᾶς α καὶ τῆς ὁποίας τὸ ὕψος εἶναι 2α. Φέρομεν ἕνα ἐπίπεδον Π διερχόμενον διὰ τῆς πλευρᾶς ΒΓ καὶ διὰ τοῦ μέσου Ε τῆς ἀκμῆς ΣΑ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ἀκμὴν ΣΔ εἰς τὸ σημεῖον Ζ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ τομὴ ΕΒΓΖ εἶναι ἕνα τραπέζιον.

2ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παράπλευροι ἀκμαί του.

3ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ΕΒΓΖ.

2356. (2391). Δίδεται ἕνα τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α. Ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Γ φέρομεν καθέτους Ax καὶ Γy ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τετραγώνου καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτοῦ καὶ λαμβάνομεν ἐπ᾿ αὐτῶν μήκη ΑΕ ἴσον μὲ τὴν διαγώνιον τοῦ τετραγώνου καὶ ΓΖ ἴσον μὲ τὰ 3/2 τῆς διαγωνίου αὐτῆς.

1ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ τοῦ τραπεζίου ΑΓΖΕ.

2ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ΒΕ καὶ ΒΖ καὶ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΒΕΖ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Ε.

3ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΕΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΕΔ καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος, ἡ ὁποία ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα Ζ, Ε, Β, Δ. Ἐφαρμογή: α=4,20 μ.

2357. (2392). Δίδεται ἕνα τετράγωνον ΑΒΓΔ· ἀπὸ τὰς ἀπέναντι κορυφὰς Α καὶ Γ τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ φέρομεν, πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τετραγώνου, τὰς καθέτους ΑΚ καὶ ΓΛ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τετραγώνου. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΑΚ ἕνα σημεῖον Α΄, τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ τετραγώνου νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου καὶ ἐπὶ τῆς ΓΛ ἕνα σημεῖον Γ΄, τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὸ σημεῖον Α΄ νὰ εἶναι διπλασία τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ Α΄Γ΄ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΔΑ΄.

2ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν, συναρτήσει τῆς πλευρᾶς α τοῦ τετραγώνου, οἱ ὄγκοι τῶν τετραέδρων Α΄ΑΒΔ, Γ΄ΓΒΔ, Γ΄Α΄ΒΔ.

2358. (2393). Ἡ βάσις ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι ἕνας ρόμβος ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ ἔχουν μήκη 2α καὶ α. Ἐπὶ τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν του λαμβάνομεν μήκη ΑΑ΄=3α, ΒΒ΄=4α, ΓΓ΄=α.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον Β΄Α΄Γ΄ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ὅτι τὸ ἐπίπεδον Α΄Β΄Γ΄ διέρχεται ἀπὸ τὸ Δ.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ ΑΒΓΔΑ΄Β΄Γ΄Δ΄.

3ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ στερεοῦ αὐτοῦ.

Ε΄ Ὁμάς. **2359**. (2394). Ἐπὶ τῶν ἀκμῶν μιᾶς τρισορθογωνίου στερεᾶς γωνίας Ο, λαμβάνομεν μήκη ΟΑ=α, ΟΒ=β, ΟΓ=γ. Νὰ ὑπολογισθῇ:

1ον. ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου ΟΑΒΓ.

2ον. τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

3ον. ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου Ο ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ.

2360. (2395). Δίδεται ἡ τρίεδρος στερεὰ γωνία Σ, τῆς ὁποίας ἑκάστη ἕδρα εἶναι ἴση μὲ 60^0. Ἐπὶ μιᾶς ἀκμῆς της λαμβάνομεν μῆκος ΣΑ=α καὶ ἐκ τοῦ Α φέρομεν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν ΣΑ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὰς ἄλλας ἀκμὰς τῆς τριέδρου εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. Νὰ ὑπολογισθοῦν:

1ον. αἱ ἀκμαὶ τοῦ τετραέδρου ΣΑΒΓ

2ον. ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνειά του.

3ον. ὁ ὄγκος του.

4ον. τὸ ὕψος του ΑΗ, τὸ ὁποῖον ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α.

2361. (2396). Ἀπὸ τὰ μέσα τῶν τριῶν ἀκμῶν ἑνὸς κύβου, αἱ ὁποῖαι καταλήγουν εἰς τὴν αὐτὴν κορυφήν, φέρομεν ἕνα ἐπίπεδον:

1ον. Νὰ ἀναγνωρισθῇ ἡ φύσις τῶν στερεῶν, τὰ ὁποῖα χωρίζει τὸ ἐπίπεδον.

2ον. Ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν δύο αὐτῶν στερεῶν.

3ον. Ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν τῶν στερεῶν αὐτῶν, μὴ συμπεριλαμβανομένης τῆς ἐπιφανείας τῆς τομῆς.

4ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ μικροτέρου στερεοῦ, καὶ τὸ ὕψος του, τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς τομῆς, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ ἀκμὴ τοῦ κύβου εἶναι 0,24 μ.

2362. (2397). Αἱ ἀκμαὶ ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ ἑνὸς τετραέδρου ΟΑΒΓ εἶναι κάθετοι ἀνὰ δύο. Φέρομεν τὸ ὕψος ΟΗ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΑΒ καὶ τὴν εὐθεῖαν ΓΗ. Ἐὰν ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ τετραέδρου εἶναι ἴση μὲ 680 τ. ἑκ. καὶ αἱ ἀκμαὶ ΟΑ καὶ ΟΒ εἶναι 15 ἑκ. καὶ 20 ἑκ., νὰ ὑπολογισθοῦν:

1ον. τὸ μῆκος ΟΗ.

2ον. τὸ μῆκος ΟΓ=x.

2363. (2398). Μία τριγωνικὴ πυραμὶς ΚΑΒΓ ἔχει ὡς βάσιν ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α, καὶ ὡς κορυφὴν ἕνα σημεῖον Κ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Α ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ. Ἡ ὑποτείνουσα ΒΓ εἶναι ἴση μὲ 25 μ. Αἱ προβολαὶ ΒΔ καὶ ΓΔ τῶν καθέτων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν, ἔχουν διαφορὰν 7 μέτρα. Τὸ ὕψος ΚΑ τῆς πυραμίδος εἶναι ἴσον μὲ ΑΒ+ΑΓ. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος καὶ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος.

2364. (2399). Νὰ ἀποδειχθῇ ὁ ὄγκος μιᾶς κολούρου πυραμίδος, ἡ ὁποία ἔχει ὕψος υ, βάσεις Β καὶ β δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $V=\frac{υ}{6}(Β+β+4β')$, ὅπου β' παριστάνει τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς τῆς πυραμίδος ὑπὸ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὰ μέσα τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν της. (Σχολὴ Δοκίμων 1935).

2365 (2400). Μία πυραμὶς Σ.ΑΒΓΔ ἔχει ὡς βάσιν ἕνα τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α καὶ ὡς παραπλεύρους ἕδρας ἰσόπλευρα τρίγωνα.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας της.

2ον. Ἐπὶ τῶν ἀκμῶν ΣΑ καὶ ΣΒ λαμβάνομεν μήκη ΣΑ΄=ΣΒ΄=x καὶ ἐπὶ τῶν ἀκμῶν ΣΓ, ΣΔ τὰ μήκη ΣΓ΄=ΣΔ΄=y. Νὰ ὑπολογισθοῦν συναρτήσει τῶν x καὶ y αἱ πλευραὶ τοῦ τραπεζίου Α΄Β΄Γ΄Δ΄, τὸ ὕψος του καὶ τὸ ἐμβαδόν του.

2366. (2401). Δίδεται μία πυραμὶς Σ.ΑΒΓΔ, τῆς ὁποίας ἡ βάσις εἶναι τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α. Ἡ ἀκμὴ ΣΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως καὶ ἔχει μῆκος υ. Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Κ τῆς ΣΔ φέρομεν ἕνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν πυραμίδα κατὰ τὸ τετράγωνον ΚΛΜΝ. Κατασκευάζομεν τὸ ὀρθὸν πρῖσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς μίαν βάσιν του τὸ ΚΛΜΝ καὶ τοῦ ὁποίου ἡ ἄλλη βάσις κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔ. Θέτομεν ΣΚ=x.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος συναρτήσει τῶν α, υ καὶ x.

2ον. Νὰ ἐξετασθῇ, ἐὰν τὸ ἐμβαδὸν αὐτὸ ἔχει ἕνα μέγιστον.

2367. (2402). Δύο ὀρθὰ πρίσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡς βάσεις κανονικὰ πολύγωνα ν πλευρῶν ἔχουν ἀποστήματα α καὶ α΄ καὶ ὕψη υ καὶ υ΄. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν ὁλικῶν ἐπιφανειῶν των εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν ὄγκων των, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν $\frac{1}{υ}-\frac{1}{υ'}=\frac{1}{α'}-\frac{1}{α}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'

ΟΜΟΙΑ ΠΟΛΥΕΔΡΑ

---

781. Όμοια πολύεδρα. *Όμοια **πολύεδρα** λέγονται τὰ πολύεδρα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς ἕδρας των ὁμοίας, μίαν πρὸς μίαν, καὶ ὁμοίως κειμένας καὶ τὰς στερεὰς γωνίας των ἴσας, μίαν πρὸς μίαν.*

*Αἱ στερεαὶ γωνίαι δύο ὁμοίων πολυέδρων, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ὑπὸ ὁμοίων ἑδρῶν, λέγονται **ὁμόλογοι στερεαὶ γωνίαι.***

*'**Ομόλογοι κορυφαὶ** δύο ὁμοίων πολυέδρων εἶναι αἱ κορυφαὶ τῶν ὁμολόγων στερεῶν γωνιῶν κλπ.*

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τῶν ὁμοίων πολυέδρων συνάγομεν, ὅτι :

I. Αἱ ὁμόλογοι δίεδροι γωνίαι δύο ὁμοίων πολυέδρων εἶναι ἴσαι· διότι αἱ δίεδραι αὗται γωνίαι εἶναι δίεδροι γωνίαι στερεῶν γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ ἐφαρμόσουν.

II. Αἱ ὁμόλογοι ἀκμαὶ δύο ὁμοίων πολυέδρων εἶναι ἀνάλογοι· διότι αἱ ὁμόλογοι ἀκμαὶ δύο ὁμοίων πολυέδρων εἶναι πλευραὶ ὁμοίων πολυγώνων τὰ ὁποῖα συνδέονται μεταξύ των μὲ κοινὰς πλευρὰς καὶ ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον ὁμοιότητος· ἑπομένως ὁ λόγος δύο τυχουσῶν ὁμολόγων ἀκμῶν εἶναι σταθερός.

*'Ο σταθερὸς λόγος τῶν ὁμολόγων ἀκμῶν δύο ὁμοίων πολυέδρων λέγεται **λόγος τῆς ὁμοιότητος τῶν πολυέδρων.***

782. Θεώρημα. ***Ἐὰν μία πυραμὶς τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν της, σχηματίζεται μία δευτέρα πυραμίς, ἡ ὁποία εἶναι ὅμοια πρὸς τὴν πρώτην.***

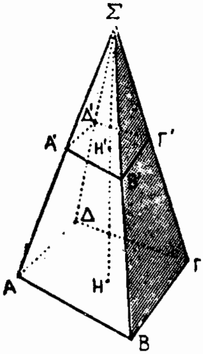
'Υπόθεσις: Ἔστω ἡ πυραμὶς Σ ΑΓΔ *(Σχ. 536)* καὶ Α'Β'Γ'Δ' ἡ τομή της ὑπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν της ΑΒΓΔ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ πυραμίδες Σ Α'Β'Γ'Δ καὶ Σ ΑΒΓΔ εἶναι ὅμοιαι.

'Απόδειξις: Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ δύο αὗται πυραμίδες ἔχουν τὰς ὁμολόγους ἕδρας των ὁμοίας, μίαν πρὸς μίαν, καὶ τὰς ὁμολόγους στερεὰς γωνίας των ἴσας, μίαν πρὸς μίαν.

Πράγματι· ἡ τομὴ Α'Β'Γ'Δ', ὡς παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓΔ, εἶναι ὁμοία πρὸς αὐτὴν (§ 760. 2^{ov}).

Ἐπειδὴ ἡ Α'Β' εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ, ὡς τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τρίτου, τὰ τρίγωνα ΣΑ'Β' καὶ ΣΑΒ εἶναι ὅμοια. Αἱ παράπλευροι λοιπὸν ἕδραι ΣΑ'Β' καὶ ΣΑΒ εἶναι ὅμοιαι. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι αἱ παράπλευροι ἕδραι ΣΒ'Γ', ΣΓ'Δ', ΣΔ'Α' τῆς πυραμίδος ΣΑ'Β'Γ' εἶναι ὅμοιαι, ἀντιστοίχως, πρὸς τὰς παραπλεύρους ἕδρας ΣΒΓ, ΣΓΔ, ΣΔΑ τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓΔ.



Σχ. 536.

Ἡ στερεὰ γωνία Σ εἶναι κοινὴ καὶ εἰς τὰς δύο πυραμίδας. Αἱ τρίεδροι γωνίαι Α' καὶ Α εἶναι ἴσαι (§ 720), διότι ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμὸν καὶ αἱ τρεῖς ἕδραι των εἶναι, ἀντιστοίχως, ἴσαι μία πρὸς μίαν, ὡς γωνίαι ὁμοίων πολυγώνων· δηλ. εἶναι

$$\Sigma\widehat{A'}B'=\Sigma\widehat{A}B,\ \Sigma\widehat{A'}\Delta'=\Sigma\widehat{A}\Delta,\ \Delta'\widehat{A'}B'=\Delta\widehat{A}B.$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ αἱ στερεαὶ γωνίαι Β', Γ', Δ' εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς στερεὰς γωνίας Β, Γ, Δ.

Ὥστε αἱ δύο πυραμίδες ΣΑ'Β'Γ'Δ' καὶ ΣΑΒΓΔ ἔχουν τὰς ὁμολόγους ἕδρας των ὁμοίας, μίαν πρὸς μίαν, καὶ τὰς ὁμολόγους στερεὰς γωνίας των ἴσας καὶ ἑπομένως εἶναι ὅμοιαι.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν μία πυραμὶς. . . .***

783. Πόρισμα. ***Ἐὰν δύο πυραμίδες εἶναι ὅμοιαι, ὁ λόγος τῶν ὑψῶν των εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον δύο ὁμολόγων ἀκμῶν των.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν ΣΗ καὶ ΣΗ' τὰ ὕψη τῶν ὁμοίων πυραμίδων ΣΑΒΓΔ καὶ ΣΑ'Β'Γ'Δ'.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\frac{\Sigma H'}{\Sigma H}=\frac{\Sigma A'}{\Sigma A}=\frac{AB}{A'B'}=\cdots$

Ἀπόδειξις: Τὸ ἐπίπεδον ΑΣΗ τέμνει τὰς βάσεις τῶν δύο πυραμίδων κατὰ τὰς εὐθείας ΑΗ καὶ Α'Η'. Αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι παράλληλοι, ὡς τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τρίτου. Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΣΑ'Η' καὶ ΣΑΗ εἶναι ὅμοια καὶ ἑπομένως ἔχομεν

$$\frac{\Sigma H'}{\Sigma H}=\frac{\Sigma A'}{\Sigma A}\qquad(1)$$

Ἀλλὰ $$\frac{\Sigma A'}{\Sigma A}=\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'\Gamma'}{B\Gamma}=\cdots\qquad(\S\ 760.\ 1^{ον}).$$

Ἑπομένως ἡ ἰσότης (1) γίνεται $\frac{\Sigma H'}{\Sigma H}=\frac{\Sigma A'}{\Sigma A}=\frac{A'B'}{AB}=\cdots$

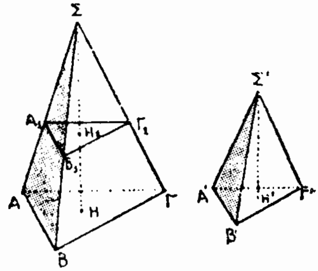
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν δύο πυραμίδες. . . .***

Σημ. Εἰς τὸ σχῆμα ν' ἀχθοῦν αἱ εὐθεῖαι ΑΗ καὶ Α'Η'.

784. Θεώρημα. ***Δύο τετράεδρα εἶναι ὅμοια, ἐὰν ἔχουν δύο ἕδρας ὁμοίας μίαν πρὸς μίαν καὶ ὁμοίως κειμένας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην δίεδρον γωνίαν ἴσην.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν τὰ τετράεδρα ΣΑΒΓ καὶ Σ'Α'Β'Γ' *(Σχ. 537)*, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς διέδρους ΣΑ καὶ Σ'Α' ἴσας καὶ τὰς δύο ἕδρας ΣΑΒ καὶ ΣΑΓ ὁμοίας ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ἕδρας Σ'Α'Β' καὶ Σ'Α'Γ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ τετράεδρα αὐτὰ εἶναι ὅμοια.



Σχ. 537.

Ἀπόδειξις: Θέτομεν, νοερῶς, τὸ τετράεδρον Σ'Α'Β'Γ' ἐπὶ τοῦ ΣΑΒΓ οὕτως, ὥστε ἡ δίεδρος Σ'Α' νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης της διέδρου ΣΑ καὶ ἔστω, ὅτι θὰ λάβῃ τὴν θέσιν $ΣA_1$. Ἐπειδὴ ἡ γωνία Α'Σ'Β' εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΣΒ, ἡ ἀκμὴ Σ'Β' θὰ λάβῃ τὴν διεύθυνσιν τῆς ΣΒ καὶ τὸ σημεῖον Β' θὰ ἔλθῃ εἰς τὸ B_1. Ὁμοίως, ἐπειδὴ ἡ γωνία Α'Σ'Γ' εἶναι ἴση μὲ τὴν ΑΣΓ, ἡ ἀκμὴ Σ'Γ' θὰ λάβῃ τὴν διεύθυνσιν τῆς ΣΓ καὶ τὸ σημεῖον Γ' θὰ ἔλθῃ εἰς τὸ $Γ_1$. Οὕτω τὸ τετράεδρον Σ'Α'Β'Γ' θὰ λάβῃ τὴν θέσιν $ΣA_1B_1Γ_1$ καὶ ἑπομένως τὰ τετράεδρα Σ'Α'Β'Γ' καὶ $ΣA_1B_1Γ_1$ εἶναι ἴσα. Ἀλλὰ ἐπειδὴ ἡ γωνία $ΣA_1B_1$ ἢ ἡ Σ'Α'Β' εἶναι ἴση μὲ τὴν ΣΑΒ, ἡ εὐθεῖα A_1B_1 εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ. Ὁμοίως ἐπειδὴ ἡ γωνία $ΣA_1Γ_1$ ἢ ἡ Σ'Α'Γ' εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν ΣΑΓ, ἡ εὐθεῖα $A_1Γ_1$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ. Οὕτω, αἱ πλευραὶ τῆς γωνίας $Γ_1A_1B_1$ εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας ΓΑΒ καὶ κατὰ συνέπειαν τὰ ἐπίπεδά των $A_1B_1Γ_1$ καὶ ΑΒΓ εἶναι παράλληλα (§ 635). Ἑπομένως κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα (§ 782) ἡ πυραμὶς $ΣA_1B_1Γ_1$ ἢ ἡ ἴση τῆς Σ'Α'Β'Γ' εἶναι ὁμοία πρὸς τὴν πυραμίδα ΣΑΒΓ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Δύο τετράεδρα εἶναι. . . .***

785. Θεώρημα. ***Δύο ὅμοια πολύεδρα δύναται νὰ χωρισθοῦν εἰς ἰσάριθμα τετράεδρα ὅμοια, ἕνα πρὸς ἕνα, καὶ ὁμοίως κείμενα.***

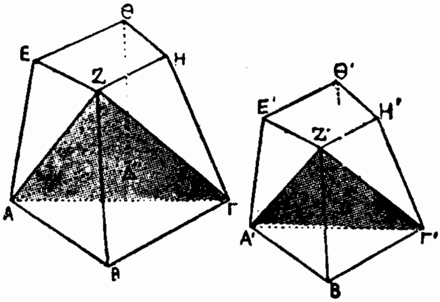
Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν τὰ ὅμοια πολύεδρα ΑΗ καὶ Α'Η' *(Σχ.538)*. Φέρομεν τὰ ἐπίπεδα ΑΖΓ καὶ Α'Ζ'Γ'. Τὰ ἐπίπεδα αὐτὰ ἀποκόπτουν, ἀπὸ τὰ δύο αὐτὰ πολύεδρα, τὰ τετράεδρα ΖΑΒΓ καὶ Ζ'Α'Β'Γ'.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν ὅτι τὰ τετράεδρα αὐτὰ εἶναι ὅμοια.

Ἀπόδειξις: Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ τετράεδρα αὐτὰ ἔχουν δύο

ἕδρας ὁμοίας, μίαν πρὸς μίαν καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας διέδρους γωνίας ἴσας.

Πράγματι τὰ τετράεδρα Ζ ΑΒΓ καὶ Ζ' Α'Β'Γ' ἔχουν τὰς διέδρους γωνίας ΖΒ καὶ Ζ'Β' ἴσας, διότι εἶναι ὁμόλογοι δίεδροι γωνίαι τῶν ὁμοίων πολυέδρων ΑΗ καὶ Α'Η'. Ἐπίσης ἔχουν τὰς ἕδρας ΖΑΒ καὶ Ζ'Α'Β' ὁμοίας καὶ ὁμοίως κειμένας, διότι εἶναι τρίγωνα ὅμοια, εἰς τὰ ὁποῖα ἐχωρίσθησαν τὰ ὅμοια τετράπλευρα ΑΒΖΕ καὶ Α'Β'Ζ'Ε' ὑπὸ τῶν ὁμολόγων διαγωνίων ΑΖ καὶ Α'Ζ' καὶ τέλος ἔχουν τὰς ἕδρας ΖΒΓ καὶ Ζ'Β'Γ' ὁμοίας καὶ ὁμοίως κειμένας, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον. Ἄρα (§ 784) τὰ τετράεδρα αὐτὰ εἶναι ὅμοια.



Σχ. 538.

Ἐὰν ἀποκόψωμεν ἀπὸ τὰ ὅμοια πολύεδρα ΑΗ καὶ Α'Η' τὰ ὅμοια τετράεδρα ΖΑΒΓ καὶ Ζ' Α'Β'Γ', τὰ ἀπομένοντα πολύεδρα εἶναι ὅμοια. Πράγματι· αἱ νέαι ἕδραι των ΖΑΓ καὶ Ζ'Α'Γ' εἶναι ὅμοιαι, ὡς ὁμόλογοι ἕδραι τῶν ὁμοίων τετραέδρων Ζ ΑΒΓ καὶ Ζ' Α'Β'Γ' Ἐπίσης αἱ νέαι ἕδραι ΖΕΑ καὶ Ζ'Ε'Α' εἶναι ὅμοιαι, διότι εἶναι μέρη ὁμοίων πολυγώνων ΑΒΖΕ καὶ Α'Β'Ζ'Ε', τὰ ὁποῖα ἐχωρίσθησαν εἰς ὅμοια τρίγωνα ὑπὸ τῶν διαγωνίων ΑΕ καὶ Α'Ζ'. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ αἱ νέαι ἕδραι ΖΗΓ καὶ Ζ'Η'Γ' καθὼς καὶ αἱ ἕδραι ΑΔΓ καὶ Α'Δ'Γ' εἶναι ὅμοιαι καὶ ὁμοίως κείμεναι. Ὥστε αἱ νέαι ἕδραι τῶν πολυέδρων, ποὺ ἀπομένουν, εἶναι ἀντιστοίχως ὅμοιαι.

Τὰ ἀπομένοντα πολύεδρα ἔχουν καὶ τὰς στερεὰς γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν.

Πράγματι· αἱ νέαι στερεαὶ γωνίαι Ζ καὶ Ζ' εἶναι ἴσαι, ὡς ὑπόλοιπα τῶν ἴσων στερεῶν γωνιῶν Ζ καὶ Ζ' τῶν πολυέδρων ΑΗ καὶ Α'Η' ἀπὸ τὰς ὁποίας ἀφηρέθησαν αἱ ἴσαι τρίεδροι γωνίαι Ζ καὶ Ζ' τῶν ὁμοίων τετραέδρων Ζ ΑΒΓ καὶ Ζ' Α'Β'Γ'. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ αἱ νέαι στερεαὶ γωνίαι Α καὶ Α', καθὼς αἱ Γ καὶ Γ' τῶν πολυέδρων, ποὺ μένουν, εἶναι ἴσαι. Ὥστε τὰ πολύεδρα τὰ ὁποῖα μένουν, μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν δύο ὁμοίων τετραέδρων, ἔχουν τὰς στερεὰς γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τὰς ὁμολόγους ἕδρας των ὁμοίας καὶ ἑπομένως εἶναι ὅμοια.

Ἐὰν ἐπαναλάβωμεν τὴν αὐτὴν ἐργασίαν ἐπὶ τῶν νέων πολυέδρων ΖΔ καὶ Ζ'Δ', θὰ ἀποσπάσωμεν δύο ἄλλα τετράεδρα ὅμοια καὶ θὰ μείνουν δύο στερεά, τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι ὅμοια. Συνεχίζομεν ἔπειτα τὴν ἐργασίαν αὐτὴν μέχρις, ὅτου τὰ ἀπομένοντα στερεὰ γίνουν δύο τετράεδρα.

Ὥστε τὰ ἀρχικὰ πολύεδρα ΑΗ καὶ Α'Η' δύνανται νὰ χωρισθοῦν εἰς ἰσάριθμα τετράεδρα ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Δύο ὅμοια πολύεδρα....***

786. Θεώρημα. *(Ἀντίστροφον).* ***Ἐὰν δύο πολύεδρα ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἰσάριθμα τετράεδρα, ὅμοια ἕνα πρὸς ἕνα καὶ ὁμοίως κείμενα, τὰ πολύεδρα αὐτὰ εἶναι ὅμοια.***

Ἀπόδειξις: Αἱ στερεαὶ γωνίαι τῶν δύο πολυέδρων θὰ εἶναι ἴσαι, διότι θὰ ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὸ αὐτὸ πλῆθος διέδρων γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι θὰ εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως καὶ θὰ κεῖνται ὁμοίως· αἱ ἕδραι τῶν δύο πολυέδρων θὰ εἶναι ὅμοιαι, μία πρὸς μίαν, διότι ἀποτελοῦνται ἀντιστοίχως ἀπὸ ὅμοια τρίγωνα καὶ ὁμοίως κείμενα.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἐὰν δύο πολύεδρα....***

787. Θεώρημα. ***Ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο ὁμοίων πολυέδρων εἶναι ἴσος μὲ τὸν κύβον τοῦ λόγου τῆς ὁμοιότητός των.***

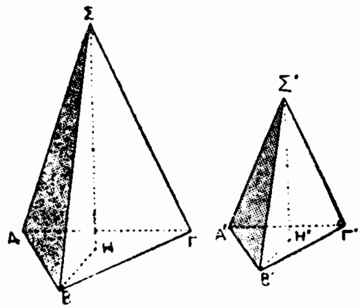
Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθόσον τὰ ὅμοια πολύεδρα εἶναι τετράεδρα ἢ τυχόντα πολύεδρα.

Ι. Τὰ ὅμοια πολύεδρα εἶναι τετράεδρα.

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν τὰ ὅμοια τετράεδρα Σ ΑΒΓ καὶ Σ' Α'Β'Γ'

Συμπέρασμα: Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ V καὶ V' τοὺς ὄγκους των καὶ μὲ k τὸν λόγον τῆς ὁμοιότητός των, θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\frac{V}{V'} = k^3.$$



Σχ. 539.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Β τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ΑΒΓ τῆς πυραμίδος Σ ΑΒΓ καὶ μὲ υ τὸ ὕψος της θὰ εἶναι (§ 766).

$$V = \frac{1}{3} B\upsilon \qquad (1)$$

Ὁμοίως, ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Β' τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως Α'Β'Γ' τῆς πυραμίδος Σ' Α'Β'Γ' καὶ μὲ υ' τὸ ὕψος της Σ'Η', θὰ εἶναι

$$V' = \frac{1}{3} B'\upsilon' \qquad (2)$$

Διαιροῦμεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\frac{V}{V'}=\frac{B\upsilon}{B'\upsilon'} \quad ἤ \quad \frac{V}{V'}=\frac{B}{B'}\times\frac{\upsilon}{\upsilon'} \qquad (3)$$

Ἐπειδὴ αἱ βάσεις ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι ὅμοιαι, ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν των Β καὶ Β' εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν τετραγώνων δύο ὁμολόγων πλευρῶν ἢ μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου τῆς ὁμοιότητός των· δηλ. θὰ εἶναι

$$\frac{B}{B'}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}=k^2.$$

Ἐπίσης ἐπειδὴ τὰ τετράεδρα εἶναι ὅμοια, τὰ ὕψη των θὰ ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον δύο ὁμολόγων ἀκμῶν των (§ 783)· δηλ. θὰ εἶναι

$$\frac{\upsilon}{\upsilon'}=\frac{AB}{A'B'}=k.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (3) τοὺς λόγους $\frac{B}{B'}$ καὶ $\frac{\upsilon}{\upsilon'}$ διὰ τῶν ἴσων των καὶ ἔχομεν $\frac{V}{V'}=k^2\cdot k$ ἢ $\frac{V}{V'}=k^3.$

II. Τὰ ὅμοια πολύεδρα εἶναι τυχόντα.

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν δύο ὅμοια πολύεδρα Π καὶ Π'.

Συμπέρασμα: Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ V καὶ V' τοὺς ὄγκους των καὶ μὲ k τὸν λόγον τῆς ὁμοιότητός των, θὰ δείξωμεν πάλιν, ὅτι

$$\frac{V}{V'}=k^3..$$

Ἀπόδειξις: Γνωρίζομεν, ὅτι δύο ὅμοια πολύεδρα δύνανται νὰ χωρισθοῦν εἰς ἰσάριθμα τετράεδρα, ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα· ἔστωσαν λοιπὸν $T, T_1, T_2 \ldots$ οἱ ὄγκοι τῶν τετραέδρων εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται τὸ πρῶτον πολύεδρον Π καὶ $T', T_1', T_2', \ldots$ οἱ ὄγκοι τῶν ὁμοίων τετραέδρων, εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται τὸ δεύτερον πολύεδρον Π'. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ k τὸν λόγον τῆς ὁμοιότητος τῶν πολυέδρων Π καὶ Π', ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητος τῶν ὁμοίων τετραέδρων θὰ εἶναι ὁ αὐτὸς k (§ 781 II).

Ἐπειδὴ ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο ὁμοίων τετραέδρων εἶναι ἴσος μὲ τὸν κύβον τοῦ λόγου τῆς ὁμοιότητός των, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{T}{T'}=k^3, \quad \frac{T_1}{T_1'}=k^3, \quad \frac{T_2}{T_2'}=k^3, \ldots$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας αὐτὰς συνάγομεν

$$\frac{T}{T'}=\frac{T_1}{T_1'}=\frac{T_2}{T_2'}\cdots=k^3 \qquad (1)$$

Κατὰ τὴν ἰδιότητα τῶν ἴσων κλασμάτων ἡ σχέσις (1) γράφεται

$$\frac{T+T_1+T_2+\cdots}{T'+T_1'+T_2'+\cdots}=k^3 \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $T+T_1+T_2+\cdots$ παριστάνει τὸν ὄγκον V τοῦ πολυέδρου Π καὶ τὸ ἄθροισμα $T'+T_1'+T_2'\cdots$ παριστάνει τὸν ὄγκον V′ τοῦ πολυέδρου Π′, ἡ ἰσότης (2) γράφεται $\frac{V}{V'}=k^3$.

Ὥστε καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις εἶναι $\boxed{\frac{V}{V'}=k^3}$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ὁ λόγος τῶν ὄγκων....***

788. Παρατήρησις. Εἶναι φανερόν, ὅτι: ***Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν ὁλικῶν ἐπιφανειῶν δύο ὁμοίων πολυέδρων εἶναι ἴσος μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου τῆς ὁμοιότητός των.***

Ἀσκήσεις

Α′ Ὁμάς. **2368.** (2403). Αἱ ὁμόλογοι ἀκμαὶ δύο ὁμοίων πολυέδρων ἔχουν λόγον 3:4. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἐπιφανειῶν των καὶ ὁ λόγος τῶν ὄγκων των.

2369. (2404). Ἐὰν ἡ ἀκμὴ μιᾶς πυραμίδος εἶναι x, ποία εἶναι ἡ ὁμόλογος ἀκμὴ ἄλλης πυραμίδος, ὁμοίας πρὸς τὴν πρώτην:

1ον. ἐὰν ἔχῃ διπλασίαν ἐπιφάνειαν;

2ον. ἐὰν ἔχῃ διπλάσιον ὄγκον;

2370. (2405). Κύβος ἔχει ἀκμὴν α μέτρα. Πόση εἶναι ἡ ἀκμὴ τριπλασίου κύβου;

2371. (2406). Τὸ ὕψος κανονικῆς ἑξαγωνικῆς πυραμίδος εἶναι υ, ἡ δὲ πλευρὰ τῆς βάσεώς της α. Ποῖαι αἱ διαστάσεις, ὁμοίας πυραμίδος πρὸς αὐτήν, καὶ τῆς ὁποίας ὁ ὄγκος εἶναι τὸ 1/ν τῆς πρώτης; Ἐφαρμογή: υ=6 μ., α=4 μ. καὶ ν=10.

Ὁμὰς Β′. **2372.** (2407). Ἡ παράπλευρος ἀκμὴ μιᾶς πυραμίδος εἶναι λ. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς πρέπει νὰ τμηθῇ ἡ ἀκμὴ αὐτὴ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν της, ὥστε νὰ χωρίζῃ τὴν πυραμίδα:

1ον. εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα.

2ον. εἰς δύο μέρη ἔχοντα λόγον k. Ἐφαρμογή: λ=4 μ. καὶ k=3:4.

2373. (2408). Κατὰ ποῖον λόγον πρέπει νὰ τμηθοῦν αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ μιᾶς κολούρου πυραμίδος ὑπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις, ἵνα ἡ παράπλευρος ἐπιφάνειά της διαιρεθῇ εἰς δύο μέρη ἔχοντα λόγον μ πρὸς ν.

2374. (2409). Ἡ ἀκμὴ ΣΑ μιᾶς πυραμίδος εἶναι λ καὶ ὁ ὄγκος της V. Ἐπὶ τῆς ἀκμῆς ΣΑ λαμβάνομεν ἕνα μῆκος ΣΑ′=λ′ καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον Α′ φέρομεν ἕνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν της. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τῆς κολούρου πυραμίδος, ποὺ θὰ προκύψῃ. Ἐφαρμογή: λ=10 μ., V=8 κ.μ. καὶ λ′=6 μ.

2375. (2410). Αἱ βάσεις μιᾶς κολούρου πυραμίδος εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα πλευρῶν α καὶ β· τέμνομεν τὸ στερεὸν αὐτὸ μὲ ἕνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις του καὶ λαμβάνομεν μίαν τομὴν πλευρᾶς γ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν

ὄγκων τῶν δύο κολούρων πυραμίδων, ποὺ θὰ προκύψουν. Ἐφαρμογή: α=3 μ., β=1 μ., γ=2,30 μ.

2376. (2411). Τὸ ὕψος μιᾶς κολούρου πυραμίδος εἶναι υ καὶ αἱ βάσεις της δύο κανονικὰ ἑξάγωνα πλευρῶν α καὶ β. Ἂν φέρωμεν ἕνα ἐπίπεδον, παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις της, ἡ τομή της εἶναι ἕνα κανονικὸν ἑξάγωνον πλευρᾶς γ·

1ον. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς ἄνω βάσεως πρέπει νὰ κεῖται τὸ τέμνον ἐπίπεδον;

2ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν δύο κολούρων πυραμίδων.

2377. (2412). Δίδεται μία πυραμὶς ΣΑΒΓ···· καὶ τὸ ὕψος της ΣΟ· ἐπὶ τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν λαμβάνομεν $ΣΑ'=\frac{ΣΑ}{3}$, $ΣΒ'=\frac{ΣΒ}{3}$,···· καὶ ἐπὶ τοῦ ὕψους καὶ ἀπὸ τὸν πόδα Ο καὶ πρὸς τὴν φορὰν ΟΣ λαμβάνομεν τμῆμα $ΟΣ'=\frac{ΟΣ}{3}$. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν ὁλικῶν ἐπιφανειῶν τῶν πυραμίδων Σ Α'Β'Γ'···· καὶ ΣΑΒΓ···· καὶ ὁ λόγος τῶν ὄγκων των.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΕΙΣ ΤΟΝ ΧΩΡΟΝ

789. Συμμετρία εἰς τὸν χῶρον. Εἰς τὸν χῶρον διακρίνομεν τρία εἴδη συμμετρίας:

Τὴν συμμετρίαν πρὸς μίαν εὐθεῖαν.

Τὴν συμμετρίαν πρὸς ἕνα σημεῖον, καὶ

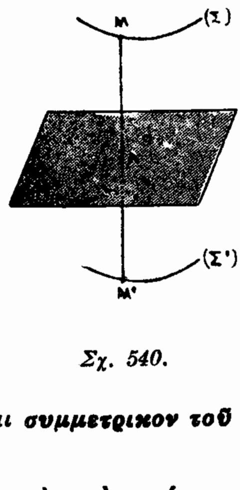
Τὴν συμμετρίαν πρὸς ἕνα ἐπίπεδον.

Περὶ τῆς συμμετρίας πρὸς εὐθεῖαν (πρὸς ἄξονα) καὶ πρὸς σημεῖον (κέντρον συμμετρίας) ἐκάμαμεν λόγον εἰς τὰς § 151—159 τῆς ἐπιπεδομετρίας. Οἱ ὁρισμοὶ καὶ ἰδιότητες, τὰς ὁποίας ἐγνωρίσαμεν ἐκεῖ, ἰσχύουν καὶ διὰ τὰ σχήματα, ποὺ δὲν ἔχουν τὰ σημεῖα των ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Περὶ τῆς συμμετρίας πρὸς ἐπίπεδον θὰ κάμωμεν λόγον κατωτέρω.

790. Συμμετρία πρὸς ἐπίπεδον. *Δύο σημεῖα Μ καὶ Μ' λέγονται* ***συμμετρικὰ πρὸς ἕνα ἐπίπεδον Π****, ἐὰν τὸ ἐπίπεδον Π εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΜΜ', ἡ ὁποία συνδέει τὰ σημεῖα αὐτὰ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς.*

Τὸ ἐπίπεδον Π λέγεται ***ἐπίπεδον συμμετρίας.***



Σχ. 540.

Ἐὰν τὸ σημεῖον Μ (Σχ. 540) γράφῃ ἕνα σχῆμα (Σ), τὸ συμμετρικόν του σημεῖον Μ', θὰ γράψῃ ἕνα σχῆμα (Σ'), τὸ ὁποῖον λέγεται ***συμμετρικον τοῦ Σ πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π.***

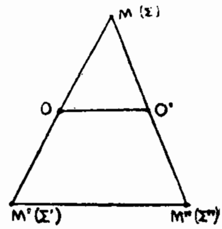
791. Θεώρημα. ***Δύο σχήματα συμμετρικὰ πρὸς τρίτον, ὡς πρὸς δύο διάφορα κέντρα, εἶναι ἴσα.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν δύο σχήματα Σ' καὶ Σ'', τὰ ὁποῖα εἶναι συμμετρικὰ τοῦ αὐτοῦ σχήματος Σ πρὸς κέντρα συμμετρίας τὰ Ο καὶ Ο' ἀντιστοίχως *(Σχ. 541).*

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ σχήματα Σ' καὶ Σ'' εἶναι ἴσα.

Ἀπόδειξις: Ἔστω Μ ἕνα τυχὸν σημεῖον τοῦ σχήματος (Σ) καὶ

Μ′, Μ″ τὰ συμμετρικὰ τοῦ Μ πρὸς τὰ δύο κέντρα Ο καὶ Ο′. Ἐὰν φέρωμεν τὰς εὐθείας ΟΟ′ καὶ ΜΜ″, ἡ εὐθεῖα Μ′Μ″ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΟΟ′ καὶ διπλασία τῆς ΟΟ′ (§ 221). Ἐὰν λοιπὸν μεταθέσωμεν τὸ σχῆμα (Σ′) εἰς τρόπον, ὥστε τὰ σημεῖα του νὰ γράφουν ἕνα τμῆμα παράλληλον πρὸς τὸ ΟΟ′ καὶ διπλάσιον τοῦ ΟΟ′, τὸ σημεῖον Μ′ θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Μ″ καὶ συνεπῶς τὸ σχῆμα (Σ′) θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ σχήματος (Σ″). Ἄρα τὰ σχήματα (Σ′) καὶ (Σ″) εἶναι ἴσα.



Σχ. 541.

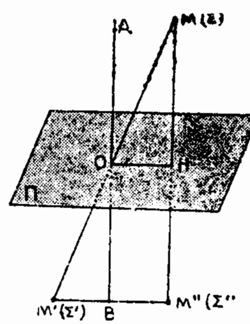
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Δύο σχήματα συμμετρικά...***

792. Θεώρημα. ***Δύο σχήματα συμμετρικὰ πρὸς τρίτον, τὸ μὲν ἕνα πρὸς κέντρον, τὸ δὲ ἄλλο πρὸς ἐπίπεδον, εἶναι ἴσα μεταξύ των.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν δύο σχήματα (Σ′) καὶ (Σ″) *(Σχ. 542)*, τὰ ὁποῖα εἶναι συμμετρικὰ τοῦ αὐτοῦ σχήματος (Σ), τὸ μὲν πρῶτον πρὸς τὸ σημεῖον Ο, τὸ δὲ δεύτερον πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ σχήματα Σ′ καὶ Σ″ εἶναι ἴσα.

Ἀπόδειξις: Ἔστωσαν Μ ἕνα σημεῖον τοῦ σχήματος (Σ) καὶ Μ′ καὶ Μ″ τὰ συμμετρικὰ τοῦ Μ πρὸς τὸ σημεῖον Ο καὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π ἀντιστοίχως.



Σχ. 542.

Ἐπειδὴ τὰ συμμετρικὰ σχήματα πρὸς δοθὲν τρίτον σχῆμα, ὡς πρὸς δύο διάφορα κέντρα, εἶναι ἴσα (§ 791), δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν, ὅτι τὸ σημεῖον Ο κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π.

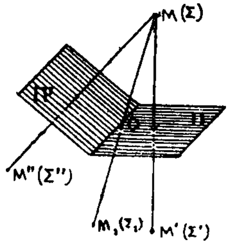
Ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο φέρομεν τὴν κάθετον ΑΟΒ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π. Τὸ ἐπίπεδον ΜΜ′Μ″ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π, διότι διέρχεται ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν ΜΜ″, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ Π, ἐξ ὑποθέσεως· ἄρα τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ θὰ περιέχῃ καὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΟΒ. Αἱ εὐθεῖαι ΜΜ″ καὶ ΑΒ εἶναι παράλληλοι, διότι κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ΜΜ″Ο καὶ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον Π. Εἰς τὸ τρίγωνον ΜΜ′Μ″, ἡ εὐθεῖα ΟΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΜΜ″ καὶ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον Ο τῆς πλευρᾶς ΜΜ′· ἄρα ἡ ΟΒ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς τρίτης πλευρᾶς τοῦ

τριγώνου, δηλ. εἶναι M'B=BM''· παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ σημεῖα M' καὶ M'' εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν εὐθεῖαν AOB. Ἐπειδὴ τὰ τυχόντα σημεῖα M' καὶ M'' τῶν σχημάτων (Σ') καὶ (Σ'') εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν εὐθεῖαν AB καὶ τὰ σχήματα αὐτὰ (Σ') καὶ (Σ'') εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσα (§ 155).

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Δύο σχήματα συμμετρικά....***

793. Πόρισμα. ***Δύο σχήματα (Σ') καὶ (Σ'') συμμετρικὰ πρὸς τρίτον σχῆμα, πρὸς δύο διάφορα ἐπίπεδα Π καὶ Π', εἶναι ἴσα μεταξύ των.***

Ἀπόδειξις: Διότι τὰ δύο αὐτὰ σχήματα εἶναι ἴσα μὲ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Σ πρὸς τυχὸν σημεῖον O τῆς τομῆς τῶν δύο ἐπιπέδων Π καὶ Π'.



Σχ. 543.

Σημ. Ἐὰν τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Π' εἶναι παράλληλα, λαμβάνομεν ἕνα τρίτον ἐπίπεδον P, τὸ ὁποῖον νὰ τέμνῃ τὰ Π καὶ Π' Ἐὰν τὸ συμμετρικὸν σχῆμα τοῦ (Σ) πρὸς τὸ τρίτον αὐτὸ ἐπίπεδον εἶναι τὸ (Σ'''), θὰ εἶναι κατὰ τὸ ἀνωτέρω πόρισμα, (Σ')=(Σ''') καὶ (Σ'')=(Σ'''). Ἀπὸ τὰς ἰσότητας αὐτὰς συνάγομεν, ὅτι (Σ')=(Σ'').

794. Σπουδαία παρατήρησις. Ἀπὸ τὰ δύο προηγούμενα θεωρήματα συνάγομεν, ὅτι: *Ὅλα τὰ σχήματα τὰ συμμετρικὰ πρὸς δοθὲν σχῆμα, εἴτε πρὸς τυχόντα σημεῖα, εἴτε πρὸς τυχόντα ἐπίπεδα, εἶναι ἴσα μεταξύ των καὶ μόνον κατὰ τὴν θέσιν διαφέρουν.*

Αὐτὴ ἡ παρατήρησις μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ἐκλέγωμεν, κατὰ βούλησιν, τὸ εἶδος τῆς συμμετρίας, διὰ νὰ ἀποδείξωμεν μίαν τυχοῦσαν ἰδιότητα δύο συμμετρικῶν σχημάτων.

795. Θεώρημα. ***Τὸ συμμετρικὸν σχῆμα ἑνὸς ἐπιπέδου σχήματος εἶναι ἕνα ἐπίπεδον σχῆμα, ἴσον μὲ τὸ πρῶτον.***

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τὸ θεώρημα αὐτὸ λαμβάνομεν, ὡς ἐπίπεδον συμμετρίας, τὸ ἐπίπεδον τοῦ σχήματος, ὁπότε τὸ σχῆμα αὐτὸ συμπίπτει μὲ τὸ συμμετρικόν του.

Ἰδιαίτεραι περιπτώσεις:

Τὸ συμμετρικὸν σχῆμα μιᾶς εὐθείας εἶναι μία εὐθεῖα.

Τὸ συμμετρικὸν σχῆμα ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος εἶναι ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα, ἴσον μὲ τὸ δοθέν.

Τὸ συμμετρικὸν σχῆμα μιᾶς γωνίας εἶναι μία γωνία, ἴση μὲ τὴν δοθεῖσαν.

Τὸ συμμετρικὸν σχῆμα ἑνὸς ἐπιπέδου εἶναι ἕνα ἐπίπεδον.

Τὸ συμμετρικὸν σχῆμα μιᾶς διέδρου γωνίας εἶναι μία δίεδρος γωνία, ἴση μὲ τὴν δοθεῖσαν.

Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς διέδρου γωνίας λαμβάνομεν, ὡς ἐπίπεδον συμμετρίας, μίαν ἕδραν τῆς διέδρου γωνίας.

796. Θεώρημα. ***Δύο πολύεδρα συμμετρικὰ ἔχουν τὰς ὁμολόγους ἕδρας των ἴσας καὶ τὰς ὁμολόγους διέδρους γωνίας των ἴσας.***

Ἀπόδειξις: Αἱ ὁμόλογοι ἕδραι εἶναι ἐπίπεδα σχήματα συμμετρικὰ καὶ ἑπομένως ἴσα. Αἱ ὁμόλογοι δίεδροι γωνίαι, τῶν δύο πολυέδρων εἶναι ἴσαι, διότι σχηματίζονται, ἀντιστοίχως, ἀπὸ ἐπίπεδα συμμετρικά. Ἐξ ἄλλου τὸ συμμετρικὸν σχῆμα μιᾶς διέδρου γωνίας εἶναι μία δίεδρος γωνία, ἴση μὲ αὐτήν. Ἀλλὰ τὰ δύο αὐτὰ πολύεδρα δὲν δύνανται νὰ ἐφαρμόσουν, διότι αἱ ὁμόλογοι δίεδροι γωνίαι δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμόν.

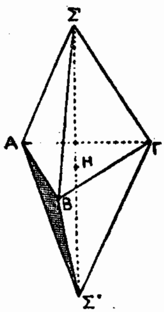
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Δύο πολύεδρα συμμετρικά. . . .***

797. Θεώρημα. ***Δύο συμμετρικὰ πολύεδρα εἶναι ἰσοδύναμα.***

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

I. Τὰ δοθέντα πολύεδρα εἶναι πυραμίδες.

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν κατ' ἀρχὰς δύο συμμετρικαὶ πυραμίδες Σ ΑΒΓ καὶ Σ' ΑΒΓ.



Σχ. 544.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ πυραμίδες αὗται εἶναι ἰσοδύναμοι.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν λάβωμεν, ὡς ἐπίπεδον συμμετρίας, τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως ΑΒΓ, αἱ δύο πυραμίδες Σ ΑΒΓ καὶ Σ' ΑΒΓ ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΒΓ καὶ ἴσα ὕψη, τὰ ὕψη ΣΗ καὶ Σ'Η, διότι αἱ κορυφαὶ των Σ καὶ Σ' εἶναι συμμετρικαὶ πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓ· ἄρα αἱ πυραμίδες αὐταὶ εἶναι ἰσοδύναμοι.

II. Τὰ δοθέντα πολύεδρα εἶναι τυχόντα.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι δύο συμμετρικὰ πολύεδρα εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἀπόδειξις: Τὰ συμμετρικὰ πολύεδρα δύνανται νὰ χωρισθοῦν εἰς ἰσαρίθμους συμμετρικὰς πυραμίδας. Ἐπειδὴ αἱ συμμετρικαὶ πυραμίδες εἶναι ἰσοδύναμοι, μία πρὸς μίαν καὶ ὁλόκληρα τὰ πολύεδρα θὰ εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Δύο συμμετρικὰ πολύεδρα. . . .***

798. Κέντρον συμμετρίας ἑνὸς σχήματος. *Λέγομεν, ὅτι ἕνα σημεῖον Ο εἶναι* ***κέντρον συμμετρίας ἑνὸς σχήματος,*** *ὅταν τὰ σημεῖα τοῦ σχήματος αὐτοῦ εἶναι, ἀνὰ δύο, συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Ο.*

799. Ἐπίπεδον συμμετρίας ἑνὸς σχήματος. *Λέγομεν, ὅτι ἕνα ἐπίπεδον Π εἶναι* ***ἐπίπεδον συμμετρίας ἑνὸς σχήματος,*** *ὅταν τὰ σημεῖα τοῦ σχήματος αὐτοῦ εἶναι, ἀνὰ δύο, συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π.*

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ὁρίζομεν καὶ τὸν ***ἄξονα συμμετρίας*** ἑνὸς σχήματος.

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. **2378.** (2413). Δύο εὐθεῖαι συμμετρικαὶ πρὸς ἐπίπεδον ἔχουν ἴσας κλίσεις πρὸς τὸ ἐπίπεδον.

2379. (2414). Ἂν δύο ἐπίπεδα εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τρίτον, ἡ δίεδρος γωνία τῶν δύο πρώτων διχοτομεῖται ὑπὸ τοῦ τρίτου.

2380. (2415). 1ον. Ἐὰν ἕνα σχῆμα Σ εἶναι συμμετρικὸν πρὸς ἐπίπεδον Π καὶ πρὸς σημεῖον Ο, εἶναι συμμετρικὸν καὶ πρὸς ἄξονα xy.

2ον. Ἐὰν ἕνα σχῆμα Σ εἶναι συμμετρικὸν πρὸς ἐπίπεδον Π καὶ πρὸς ἄξονα xy, εἶναι συμμετρικὸν καὶ πρὸς σημεῖον Ο.

3ον. Ἐὰν ἕνα σχῆμα Σ εἶναι συμμετρικὸν πρὸς σημεῖον Ο καὶ πρὸς ἄξονα xy, εἶναι συμμετρικὸν καὶ πρὸς ἐπίπεδον.

2381. (2416). Ὅταν ἕνα σχῆμα Σ ἔχῃ ἕνα ἐπίπεδον συμμετρίας Π καὶ ἕνα ἄξονα συμμετρίας Χ, ὁ ὁποῖος δὲν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτό, θὰ ἔχῃ ἕνα δεύτερον ἄξονα συμμετρίας, συμμετρικὸν τοῦ πρώτου πρὸς τὸ ἐπίπεδον.

2382. (2417). Ἐὰν ἕνα σχῆμα εἶναι συμμετρικὸν πρὸς τὰς τρεῖς ἕδρας μιᾶς τρισορθογωνίου τριέδρου γωνίας, θὰ εἶναι συμμετρικὸν πρὸς τὰς ἀκμὰς καὶ πρὸς τὴν κορυφὴν τῆς τριέδρου αὐτῆς.

Β' Ὁμάς. **2383.** (2418). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἕνα κανονικὸν τετράεδρον ἔχει ἓξ ἐπίπεδα συμμετρίας καὶ τρεῖς ἄξονας συμμετρίας.

2384. (2419). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἕνας κύβος ἔχει ἕνα κέντρον συμμετρίας, ἐννέα ἐπίπεδα συμμετρίας καὶ ἐννέα ἄξονας συμμετρίας.

2385. (2420). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν ἕνα τετράεδρον ἔχῃ ἕνα ἄξονα συμμετρίας, θὰ ἔχῃ δύο ζεύγη ἀπέναντι ἀκμῶν ἴσα καὶ ἀντιστρόφως.

2386. (2421). Ἕνα τετράεδρον, τὸ ὁποῖον ἔχει δύο ἄξονας συμμετρίας, ἔχει τὰς ἀπέναντι ἀκμὰς ἴσας εἰς ἕκαστον τῶν τριῶν ζευγῶν· ἐπίσης ἔχει ἕνα τρίτον ἄξονα συμμετρίας καὶ οἱ τρεῖς αὐτοὶ ἄξονες τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ εἶναι κάθετοι ἀνὰ δύο. Ἀντιστρόφως, ἐὰν ἕνα τετράεδρον ἔχῃ τὰς ἀπέναντι ἀκμὰς ἴσας, αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν, εἶναι τρεῖς ἄξονες συμμετρίας τοῦ στερεοῦ καὶ οἱ ἄξονες αὐτοὶ εἶναι κάθετοι ἀνὰ δύο.

2387. (2422). Ἐὰν ἕνα κυρτὸν πολύεδρον ἔχῃ ἕνα κέντρον συμμετρίας,

κάθε ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον αὐτό, διαιρεῖ τὸ πολύεδρον εἰς δύο στερεὰ ἰσοδύναμα καὶ ἀντιστρόφως.

Γ' Ὁμάς. **2388.** (2423). Ἐὰν δύο σχήματα (Σ_1) καὶ (Σ_2) εἶναι συμμετρικὰ ἑνὸς τρίτου σχήματος (Σ), τὸ μὲν ἕνα ὡς πρὸς ἐπίπεδον, τὸ δὲ ἄλλο ὡς πρὸς ἄξονα κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτό, θὰ εἶναι συμμετρικὰ μεταξύ των ὡς πρὸς σημεῖον.

2389. (2424). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι δύο σχήματα (Σ_1) καὶ (Σ_2) συμμετρικὰ τοῦ αὐτοῦ σχήματος (Σ), τὸ μὲν πρῶτον πρὸς ἄξονα ΟΖ, τὸ δὲ δεύτερον πρὸς σημεῖον Ο τοῦ ἄξονος αὐτοῦ, εἶναι συμμετρικὰ μεταξύ των πρὸς ἐπίπεδον.

2390. (2425). Νά ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν ἕνα σχῆμα ἔχῃ δύο κέντρα συμμετρίας, θὰ ἔχῃ ἄπειρα τοιαῦτα, τὰ ὁποῖα θὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας, τὴν ὁποίαν ὁρίζουν τὰ δύο πρῶτα.

2391. (2426). Ἐὰν ἕνα σχῆμα Σ ἔχῃ δύο ἐπίπεδα συμμετρίας Π' καὶ Π'' κάθετα μεταξύ των, θὰ ἔχῃ καὶ ἕνα ἄξονα συμμετρίας, τὴν τομὴν xy τῶν ἐπιπέδων Π' καὶ Π''· καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν ἕνα σχῆμα Σ ἔχῃ ἕνα ἐπίπεδον συμμετρίας Π' καὶ ἕνα ἄξονα συμμετρίας xy, ὁ ὁποῖος κεῖται ἐπὶ τοῦ Π, θὰ ἔχῃ καὶ ἕνα ἐπίπεδον Π'' συμμετρίας, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὴν xy καὶ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ Π'.

2392. (2427). Νὰ κατασκευασθοῦν τὰ τετράεδρα, τὰ ὁποῖα ἔχουν:

1ον. Ἕνα ἐπίπεδον συμμετρίας.

2ον. Δύο ἐπίπεδα συμμετρίας.

3ον. Τρία ἐπίπεδα συμμετρίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

ΓΕΝΙΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ

---

800. Σχέσις μεταξὺ τοῦ πλήθους τῶν ἑδρῶν, τῶν ἀκμῶν καὶ τῶν κορυφῶν ἑνὸς πολυέδρου. Εἰς κάθε πολύεδρον διακρίνομεν τὰς ***ἕδρας*** του, αἱ ὁποῖαι εἶναι εὐθύγραμμα ἐπίπεδα σχήματα, τὰς ***ἀκμάς*** του, αἱ ὁποῖαι εἶναι εὐθύγραμμα τμήματα καὶ τὰς ***κορυφάς*** του, αἱ ὁποῖαι εἶναι αἱ κορυφαὶ τῶν στερεῶν γωνιῶν τοῦ πολυέδρου. Ἐπειδὴ αἱ ἀκμαὶ ἑνὸς πολυέδρου εἶναι πλευραὶ τῶν ἑδρῶν του καὶ αἱ κορυφαί του εἶναι τὰ ἄκρα τῶν ἀκμῶν του, οἱ ἀριθμοὶ Ε, Α, Κ, οἱ ὁποῖοι παριστάνουν, ἀντιστοίχως, τὸ πλῆθος τῶν ἑδρῶν, τῶν ἀκμῶν καὶ τῶν κορυφῶν ἑνὸς πολυέδρου, δὲν εἶναι ἀνεξάρτητοι μεταξύ των. Ἡ ἀξιοσημείωτος σχέσις, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἑδρῶν, τῶν ἀκμῶν καὶ τῶν κορυφῶν ἑνὸς πολυέδρου, ἐκφράζεται ὑπὸ τοῦ κατωτέρω θεωρήματος, τὸ ὁποῖον ὀφείλεται εἰς τὸν Euler.

801. Θεώρημα τοῦ Euler. ***Εἰς κάθε πολύεδρον τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἑδρῶν του καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν κορυφῶν του εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀκμῶν του καὶ τοῦ ἀριθμοῦ 2.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω Ε τὸ πλῆθος τῶν ἑδρῶν ἑνὸς πολυέδρου, Κ τὸ πλῆθος τῶν κορυφῶν του, καὶ Α τὸ πλῆθος τῶν ἀκμῶν του.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $Ε+Κ=Α+2$.

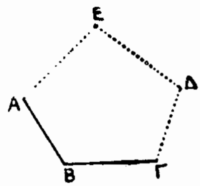
Ἀπόδειξις: Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ δοθὲν πολύεδρον πρῶτον μίαν ἕδραν του, ἔπειτα μίαν δευτέραν ἕδραν, ἡ ὁποία νὰ συνάπτεται μὲ τὴν πρώτην, ἔπειτα μίαν τρίτην ἕδραν, ἡ ὁποία νὰ συνάπτεται μὲ τὴν δευτέραν κ.ο.κ. μέχρις, ὅτου ἀφαιρεθῇ καὶ ἡ τελευταία ἕδρα τοῦ πολυέδρου. Κατὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ἑδρῶν του, διαδοχικῶς, τὸ ἀπομένον στερεὸν εἶναι ἕνα συνεχές, ἀλλὰ ***ἀνοικτὸν*** στερεόν.

Εἶναι φανερόν, ὅτι, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ πολύεδρον τὴν πρώτην ἕδραν του, δὲν θὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸ πολύεδρον, οὔτε ἀκμή, οὔτε κορυφή· ἑπομένως ἡ ἀπομένουσα πολυεδρικὴ ἐπιφάνεια θὰ ἔχῃ τόσας ἀκμὰς καὶ κορυφάς, ὅσας εἶχε τὸ ἀρχικὸν πολύεδρον, ἀλλὰ μίαν ἕδραν ὀλιγώτερον. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ $α_1$ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀκμῶν (πλευρῶν) τῆς πρώτης ἕδρας καὶ μὲ $κ_1$ τὸν ἀριθμὸν τῶν κορυφῶν της, θὰ εἶναι

$$α_1=κ_1 \quad ἤ \quad α_1-κ_1=0 \qquad (1)$$

Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ πολύεδρον μίαν ἄλλην ἕδραν του, τὴν δευτέραν ἢ τὴν τρίτην κλπ., ἐκτὸς τῆς τελευταίας ἕδρας του, ἡ ἀπομένουσα πολυεδρικὴ ἐπιφάνεια χάνει μίαν ἀκμὴν περισσότερον ἀπὸ ὅσας κορυφὰς

χάνει. Διότι, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὴν ἕδραν ΑΒΓΔΕ *(Σχ. 545)* ἡ ὁποία συνάπτεται μὲ τὴν ἀπομένουσαν πολυεδρικὴν ἐπιφάνειαν μὲ τὰς ἀκμὰς ΑΒ, ΒΓ, εἶναι φανερὸν ὅτι, ἐὰν ἀφαιρεθῇ ἡ ἕδρα αὐτή, θὰ ἀφαιρεθοῦν ἀπὸ τὴν πολυεδρικὴν ἐπιφάνειαν ***τρεῖς ἀκμαί***, αἱ ΑΕ, ΕΔ, ΔΓ καὶ μόνον ***δύο κορυφαί***, αἱ Ε καὶ Δ.



Σχ. 545.

Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \ldots$ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀκμῶν (πλευρῶν) τῆς δευτέρας, τρίτης, τετάρτης.... ἕδρας καὶ μὲ $\kappa_2, \kappa_3, \kappa_4 \ldots$ τὸν ἀριθμὸν τῶν κορυφῶν των, ἀντιστοίχως, θὰ εἶναι

$$\alpha_2 - \kappa_2 = 1 \quad (2)$$

$$\alpha_3 - \kappa_3 = 1 \quad (3)$$

$$\alpha_4 - \kappa_4 = 1 \quad (4)$$

. . . .

Ἐὰν τέλος ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ πολύεδρον καὶ τὴν τελευταίαν ἕδραν του, θὰ ἀφαιρεθοῦν τόσαι ἀκμαί, ὅσαι καὶ κορυφαί· ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ α_ν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀκμῶν τῆς τελευταίας ἕδρας τοῦ πολυέδρου καὶ μὲ κ_ν τὸν ἀριθμὸν τῶν κορυφῶν της, θὰ εἶναι

$$\alpha_\nu - \kappa_\nu = 0 \quad (5)$$

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (1), (2), (3), (4).... (5) κατὰ μέλη καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψει, ὅτι εἰς τὸ δεύτερον μέλος ὑπάρχουν τόσαι μονάδες 1, ὡς προσθετέοι, ὅσον εἶναι τὸ πλῆθος Ε τῶν ἑδρῶν τοῦ πολυέδρου πλὴν δύο μονάδες, δηλ. τὸ ἄθροισμα τῶν δευτέρων μελῶν τῶν ἰσοτήτων αὐτῶν εἶναι Ε—2, θὰ ἔχωμεν

$$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\cdots+\alpha_\nu)-(\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3+\kappa_4+\cdots\kappa_\nu)=E-2 \quad (6)$$

Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_\nu$ παριστάνει τὸ πλῆθος ὅλων τῶν ἀκμῶν τοῦ πολυέδρου, δηλ. τὸν ἀριθμὸν Α, καὶ τὸ ἄθροισμα $\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3+\cdots\kappa_\nu$ παριστάνει τὸ πλῆθος ὅλων τῶν κορυφῶν τοῦ πολυέδρου, δηλ. τὸν ἀριθμὸν Κ· ἑπομένως ἡ ἰσότης (6) γράφεται

$$A-K=E-2 \quad \text{ἢ} \quad K+E=A+2.$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Εἰς κάθε πολύεδρον....***

802. Κανονικὰ πολύεδρα. *Ἕνα πολύεδρον λέγεται **κανονικόν**, ὅταν ὅλαι αἱ στερεαὶ γωνίαι του εἶναι ἴσαι καὶ ὅλαι αἱ ἕδραι του εἶναι ἴσα κανονικὰ πολύγωνα.*

Ὁ κύβος, τὸ κανονικὸν τετράεδρον, εἶναι κανονικὰ πολύεδρα.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν κανονικῶν πολυέδρων συνάγομεν, ὅτι: ***Ὅλαι αἱ ἀκμαὶ ἑνὸς κανονικοῦ πολυέδρου εἶναι ἴσαι· ὁμοίως ὅλαι αἱ δίεδροι γωνίαι του εἶναι ἴσαι.***

803 Εἴδη καὶ πλῆθος κανονικῶν πολυέδρων. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἕνα κανονικὸν πολύεδρον ἔχει Ε ἕδρας καὶ Κ στερεὰς γωνίας.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ x τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν ἑκάστης ἕδρας τοῦ πολυέδρου, αἱ Ε ἕδραι του θὰ ἔχουν xE πλευράς· ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ αὗται συνάπτονται ἀνὰ δύο καὶ σχηματίζουν μίαν ἀκμὴν τοῦ πολυέδρου, ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς τῶν ἀκμῶν Α τοῦ πολυέδρου θὰ εἶναι

$$xE:2, \quad \text{δηλ. θὰ εἶναι} \quad A=\frac{xE}{2}.$$

Ἐπειδὴ κάθε ἕδρα ἔχει x γωνίας, ὅσος δηλ. εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν της, αἱ Ε ἕδραι θὰ ἔχουν xE γωνίας. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ y τὸν ἀριθμὸν τῶν γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι συνέρχονται εἰς ἑκάστην κορυφήν, διὰ νὰ σχηματίσουν μίαν στερεὰν γωνίαν του, αἱ xE γωνίαι θὰ σχηματίσουν τόσας σεερεὰς γωνίας, ὅσας φορὰς ὁ y χωρεῖ εἰς τὸν ἀριθμὸν xE, δηλ. θὰ σχηματίσουν $\frac{xE}{y}$ στερεὰς γωνίας· ἀλλὰ τότε θὰ εἶναι $K=\frac{xE}{y}$.

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸν τύπον $K+E=A+2$, τὰ Κ καὶ Α μὲ τὰς τιμάς των, λαμβάνομεν

$$\frac{xE}{y}+E=\frac{xE}{2}+2 \quad \text{ἢ} \quad E=\frac{4y}{2(x+y)-xy} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ Ε, x, y πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιοι καὶ θετικοί, πρέπει νὰ εἶναι

$$2(x+y)-xy>0 \qquad (2)$$

Λύοντες τὴν ἀνισότητα αὐτήν, ὡς πρὸς y, λαμβάνομεν

$$y<\frac{2x}{x-2} \quad \text{ἢ} \quad y<2+\frac{4}{x-2} \qquad (3)$$

Διὰ νὰ εἶναι θετικὸν τὸ κλάσμα $\frac{4}{x-2}$ πρέπει νὰ εἶναι $x\geqslant 3$.

Ἐὰν $x\geqslant 3$, ἡ ἀνισότης (3) δίδει $y<6$· ὥστε ὁ y πρέπει νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ 6.

Ἂν λύσωμεν τὴν ἀνισότητα (2), ὡς πρὸς x, εὑρίσκομεν, κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὅτι ὁ ἀριθμὸς x πρέπει νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ 6.

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι δὲν ὑπάρχουν κυρτὰ πολύεδρα, τῶν ὁποίων ἑκάστη ἕδρα νὰ ἔχῃ περισσοτέρας τῶν πέντε πλευρῶν καὶ τῶν ὁποίων ἑκάστη στερεὰ γωνία νὰ σχηματίζεται ἀπὸ περισσοτέρας τῶν πέντε ἑδρῶν (γωνιῶν).

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω δὲν δυνάμεθα νὰ δώσωμεν εἰς τὸν x καὶ y ἄλλας τιμὰς ἐκτὸς τῶν τιμῶν 3, 4, 5.

Ι. Ἐὰν λάβωμεν $x=3$, ἡ ἰσότης (1) δίδει $E=\frac{4y}{6-y}$ (4)

Διὰ $y=3, 4, 5$, ἡ (4) δίδει $E=4, 8, 20$.

Ὥστε μὲ $x=3$, δηλ. μὲ ***ἰσόπλευρα τρίγωνα***, δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν τρία κανονικὰ πολύεδρα: τὸ ***τετράεδρον***, τὸ ***ὀκτάεδρον***, καὶ τὸ ***εἰκοσάεδρον***.

ΙΙ. Ἐὰν λάβωμεν $x=4$, ἡ ἰσότης (1) δίδει $E=\frac{2y}{4-y}$ (5)

Ἐδῶ δὲν δυνάμεθα νὰ δώσωμεν εἰς τὸν y ἄλλην τιμὴν ἐκτὸς $y=3$. Ἑπομένως διὰ $y=3$, ἡ ἰσότης (5) δίδει $E=6$.

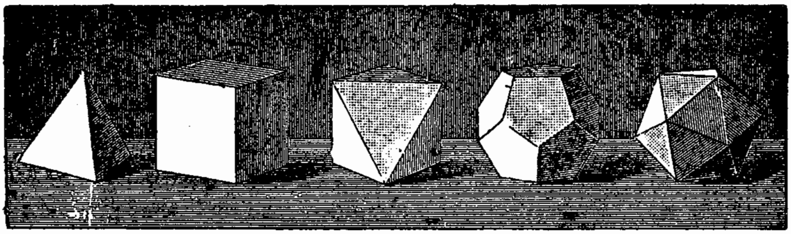
Ὥστε μὲ $x=4$, δηλ. μὲ ***τετράγωνα***, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἕνα μόνον κανονικὸν πολύεδρον, τὸν ***κύβον***.

ΙΙΙ. Ἐὰν λάβωμεν $x=5$, ἡ ἰσότης (1) δίδει $E=\frac{4y}{10-3y}$ (6)

Ἐδῶ δὲν δυνάμεθα νὰ δώσωμεν εἰς τὸν y ἄλλην τιμὴν ἐκτὸς τῆς τιμῆς $y=3$· ἑπομένως διὰ $y=3$, ἡ ἰσότης (6) δίδει $E=12$.

Ὥστε μὲ $x=5$, δηλ. μὲ ***κανονικὰ πεντάγωνα***, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν μόνον ἕνα κανονικὸν πολύεδρον, τὸ ***δωδεκάεδρον***.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι: ***πέντε μόνον κανονικὰ πολύεδρα ὑπάρχουν*** : τὸ ***τετράεδρον***, τὸ ***ἑξάεδρον*** (ὁ κύβος), τὸ ***ὀκτάεδρον***, τὸ ***δωδεκάεδρον*** καὶ τὸ ***εἰκοσάεδρον*** *(Σχ. 546).*



Καν. Τετράεδρον, Ἑξάεδρον, Ὀκτάεδρον, Δωδεκάεδρον, Εἰκοσάεδρον

Σχ. 546.

Ὁ κάτωθι πίναξ δίδει τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῶν Ε, Κ, Α, x, y τῶν πέντε κανονικῶν πολυέδρων.

Κανονικὰ πολύεδρα	*E*	*K*	*A*	*x*	*y*
Τετράεδρον	4	4	6	3	3
Ἑξάεδρον (κύβος) . . .	6	8	12	4	3
Ὀκτάεδρον	8	6	12	3	4
Δωδεκάεδρον	12	20	30	5	3
Εἰκοσάεδρον.	20	12	30	3	5

Ἀσκήσεις

2393. (2428). Τὰ μέσα τῶν ἀκμῶν κανονικοῦ τετραέδρου ἀκμῆς α εἶναι κορυφαὶ ἑνὸς κανονικοῦ ὀκταέδρου. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκμὴ τοῦ ὀκταέδρου.

2394. (2429). Αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰς ἀπέναντι κορυφὰς κανονικοῦ ὀκταέδρου εἶναι ἴσαι καὶ κάθετοι μεταξύ των (ἄξονες ὀκταέδρου).

2395. (2430). Κάθε τομὴ κανονικοῦ ὀκταέδρου, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ δύο ἄξονάς του, εἶναι τετράγωνον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις δύο ἀπέναντι κορυφῶν του.

Ἀσκήσεις πρὸς γενικὴν ἐπανάληψιν ἐπὶ τοῦ τετάρτου βιβλίου

Α' Ὁμάς. **2396.** (2431). Ὁ ὄγκος ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι V, αἱ δὲ διαστάσεις του ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν λ, μ, ν. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις του. Ἐφαρμογή: V=3,84 κ. μέτρα λ=3, μ=4, ν=5.

2397. (2432). Δίδεται ἕνα κανονικὸν τετράεδρον ΣΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκμὴ ἔχει μῆκος α καὶ ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ :

1ον. ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου αὐτοῦ.

2ον. τὸ μῆκος τῆς εὐθείας ΜΝ, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα τῶν δύο ἀπέναντι ἀκμῶν ΣΑ καὶ ΒΓ.

3ον. εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς Σ πρέπει νὰ ἀχθῇ ἕνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓ, ἵνα τὸ στερεὸν διαιρεθῇ εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη; Ἐφαρμογή: $\alpha=2$ μ.

2398. (2433). Εἰς μίαν τριγωνικὴν πυραμίδα ΣΑΒΓ, αἱ ἕδραι ΣΒΓ καὶ ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα πλευρᾶς 2α καὶ σχηματίζουν μεταξύ των μίαν γωνίαν 60°.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος συναρτήσει τοῦ α.

2ον. Συνδέομεν τὸ μέσον Μ τῆς ΣΑ μὲ τὸ μέσον Ν τῆς ΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΜΝ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΣΑ καὶ ἐπὶ τὴν ΒΓ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ΜΝ

2399. (2434). Ἐπὶ τῶν ἀκμῶν μιᾶς τριέδρου γωνίας Σ, τῆς ὁποίας αἱ τρεῖς ἕδραι εἶναι ἴσαι μὲ 60° ἑκάστη, λαμβάνομεν τὰ μήκη $ΣΑ=\alpha$, $ΣΒ=\beta$, $ΣΓ=\gamma$. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου ΣΑΒΓ.

2400. (2435). Μία πενταγωνικὴ πυραμὶς εἶναι τοιαύτη, ὥστε αἱ παράπλευροι ἀκμαί της εἶναι ἴσαι μὲ τὴν πλευρὰν τῆς βάσεως. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος της συναρτήσει τῆς ἀκμῆς της.

2401. (2436). Μία κόλουρος κανονικὴ πυραμὶς ἔχει βάσεις κανονικὰ ὀκτάγωνα πλευρῶν α καὶ β· αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ ἔχουν ἕνα μῆκος γ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας καὶ ὁ ὄγκος τῆς κολούρου αὐτῆς πυραμίδος.

2402. (2437). Τέμνομεν ἕνα κύβον ἀκμῆς α μὲ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα διέρχονται ἀπὸ τὰ μέσα τῶν ἀκμῶν, αἱ ὁποῖαι καταλήγουν εἰς ἑκάστην κορυφὴν καὶ λαμβάνομεν τὸ στερεόν, τὸ ὁποῖον μένει, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τὰς ὀκτὼ πυραμίδας, αἱ ὁποῖαι θὰ προκύψουν οὕτω. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀκμαί, τὸ ἐμβαδὸν καὶ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ αὐτοῦ.

2403. (2438). Δίδεται ἕνα παραλληλεπίπεδον καὶ τὸ ὀκτάεδρον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς κορυφὰς τὰ κέντρα τῶν ἑδρῶν τοῦ παραλληλεπιπέδου. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν δύο αὐτῶν στερεῶν.

2404. (2439). Ποῖαι σχέσεις ὑπάρχουν μεταξὺ ἑνὸς τετραέδρου ΣΑΒΓ, τοῦ ὀκταέδρου, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ μέσα Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Ι τῶν ἓξ ἀκμῶν καὶ τοῦ παραλληλεπιπέδου ΣΑΒΓσαβγ, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν, ἐὰν φέρωμεν ἀπὸ κάθε ἀκμὴν τοῦ τετραέδρου ἕνα παράλληλον ἐπίπεδον πρὸς τὴν ἀπέναντι ἀκμήν;

2405. (2440). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις μιᾶς κορυφῆς ἑνὸς τετραέδρου ἀπὸ τὰ μέσα τῶν διαφόρων ἑδρῶν του καὶ ἀκμῶν του.

2406. (2441). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα διὰ τὸ κανονικὸν ἑξάεδρον.

***Β' Ὁμάς*. 2407.** (2442). Κατὰ ποῖον λόγον πρέπει νὰ τμηθοῦν αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ μιᾶς πυραμίδος ὑπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν, ἵνα ἡ παράπλευρος ἐπιφάνειά της διαιρεθῇ εἰς δύο μέρη, τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν λόγον $\mu:\nu$. Ἐφαρμογὴ $\mu=2$, $\nu=3$.

2408. (2443). Δίδεται μία κόλουρος πυραμίς, τῆς ὁποίας μία παράπλευρος ἀκμὴ εἶναι 5 μ. Νὰ διαιρεθῇ ἡ κόλουρος αὐτὴ πυραμὶς εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη ὑπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις της, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι

δύο ὁμόλογοι πλευραὶ τῶν βάσεως ἔχουν μήκη 3 μετρ. καὶ 2 μέτρα.

2409. (2444). Νὰ διαιρεθῇ ἡ προηγουμένη κόλουρος πυραμὶς εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη.

2410. (2445). Νὰ διαιρεθῇ ἡ προηγουμένη κόλουρος πυραμὶς εἰς δύο μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ 3.

2411. (2446). Νὰ διαιρεθῇ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια μιᾶς κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδος εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα ὑπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον νὰ διέρχεται ἀπὸ μίαν πλευρὰν τῆς βάσεώς της. (Πολυτεχνεῖον).

2412. (2447). Ἡ βάσις μιᾶς πυραμίδος εἶναι ἕνα παραλληλόγραμμον. Νὰ χωρισθῇ ὁ ὄγκος της εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα μὲ ἕνα ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον νὰ διέρχεται ἀπὸ μίαν πλευρὰν τῆς βάσεώς της.

2413. (2448). Νὰ τμηθῇ μία κόλουρος πυραμὶς μὲ ἕνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις της εἰς τρόπον, ὥστε αἱ ὁλικαὶ ἐπιφάνειαι τῶν δύο κολούρων πυραμίδων, ποὺ θὰ προκύψουν, νὰ εἶναι ἴσαι.

2414. (2449). Δίδεται μία κόλουρος τριγωνικὴ πυραμίς. Νὰ ἀχθῇ ἀπὸ μίαν ἀκμὴν τῆς βάσεώς της ἕνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον νὰ χωρίζῃ τὴν κόλουρον αὐτὴν πυραμίδα εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα.

2415. (2450). Νὰ ἀχθῇ ἀπὸ μίαν παράπλευρον ἀκμὴν ἑνὸς τριγωνικοῦ κολοβοῦ πρίσματος ἕνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον νὰ χωρίζῃ τὸν ὄγκον του εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

2416. (2451). 1ον. Νὰ τμηθῇ ἕνα τετράεδρον οὕτως, ὥστε ἡ τομή του νὰ εἶναι ἕνα παραλληλόγραμμον· ὑπάρχουν τρεῖς διευθύνσεις ἐπιπέδων.

2ον. Νὰ εὑρεθῇ διὰ καθεμίαν ἀπὸ τὰς διευθύνσεις αὐτὰς τὸ παραλληλόγραμμον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸ μέγιστον ἐμβαδόν.

3ον. Νὰ τμηθῇ τὸ τετράεδρον δι' ἑνὸς ἐπιπέδου οὕτως, ὥστε ἡ τομὴ νὰ εἶναι ἕνας ρόμβος καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ τοῦ ρόμβου συναρτήσει τῶν ἀκμῶν τοῦ τετραέδρου.

Γ' Ὁμάς. **2417.** (2452). Δίδεται ἕνα τετράεδρον ΣΑΒΓ καὶ τὰ σημεῖα Α', Β' ἐπὶ τῶν ἀκμῶν ΣΑ καὶ ΣΒ ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ἀκμῆς ΣΓ ἕνα σημεῖον Γ' τοιοῦτον, ὥστε ὁ λόγος τῶν ὄγκων τοῦ ΣΑ'Β'Γ' πρὸς τὸν ὄγκον τοῦ ΣΑΒΓ νὰ εἶναι ἴσος μὲ $\mu : \nu$.

2418. (2453). Νὰ εὑρεθῇ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ἑνὸς τετραέδρου ἕνα σημεῖον, τοιοῦτον ὥστε, ἂν τὸ συνδέσωμεν δι' εὐθειῶν μὲ τὰς τέσσαρας κορυφάς, τὸ τετράεδρον νὰ διαιρῆται εἰς τέσσαρα ἰσοδύναμα τετράεδρα.

2419. (2454). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράεδρον, ἂν γνωρίζωμεν τὰς ἀποστάσεις τῶν μέσων τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν καὶ τὰς γωνίας, τὰς ὁποίας σχηματίζουν μεταξύ των αἱ τρεῖς αὐταὶ εὐθεῖαι.

2420. (2455). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράεδρον, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὰ μέσα τεσσάρων ἀκμῶν του εἶναι τὰ σημεῖα Κ, Λ, Μ, Ν, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

2421. (2456). Νὰ κατασκευασθῇ τὸ παραλληλεπίπεδον, τὸ περιγεγραμμένον περὶ ἕνα τετράεδρον, δηλ. νὰ εἶναι τοιοῦτον, ὥστε αἱ ἕδραι τοῦ παραλληλεπιπέδου νὰ περιέχουν ἑκάστην ἀκμὴν τοῦ τετραέδρου.

2422. (2457). Ἐὰν κόψωμεν ἕνα τετράεδρον μὲ ἕνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς δύο ἀπέναντι ἀκμάς του, ἡ τομὴ εἶναι ἕνα παραλληλόγραμμον. Νὰ σπου-

δασθῇ ἡ μεταβολὴ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ παραλληλογράμμου αὐτοῦ.

Δ' Ὁμάς. 2423. (2458). Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν ἑνὸς τετραέδρου ἀπὸ ἕνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον δὲν τέμνει τὸ τετράεδρον, εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετραπλάσιον τῆς ἀποστάσεως τοῦ μέσου τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος, τὸ ὁποῖον συνδέει τὰ μέσα δύο ἀπέναντι ἀκμῶν του, ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον αὐτό.

2424. (2459). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τετράεδρον αἱ τρεῖς εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ μέσον ἑκάστης ἐξ αὐτῶν.

2425. (2460). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τετράεδρον τὰ ἓξ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα ἄγονται ἀπὸ μίαν ἀκμὴν καὶ ἀπὸ τὸ μέσον τῆς ἀπέναντι ἀκμῆς, τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο.

2426. (2461). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τετράεδρον αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουν κάθε κορυφήν του μὲ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τῆς ἀπέναντι ἕδρας, τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὸ τέταρτον ἑκάστης τῶν εὐθειῶν αὐτῶν ἀπὸ τῆς ἕδρας· (τὸ σημεῖον Ο λέγεται ***κέντρον βάρους*** τοῦ ὄγκου τοῦ τετραέδρου).

2427. (2462). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα διχοτομοῦν τὰς διέδρους γωνίας ἑνὸς τετραέδρου, τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

2428. (2463). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα εἶναι κάθετα εἰς τὰ μέσα τῶν ἀκμῶν ἑνὸς τετραέδρου, τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

2429. (2464). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τετράεδρον τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα ἄγονται ἀπὸ τὰ μέσα τῶν ἀκμῶν του, καθέτως ἐπὶ τὰς ἀπέναντι ἀκμάς, τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

2430. (2465). Αἱ κάθετοι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται, ἐπὶ ἑκάστην ἕδραν ἑνὸς τετραέδρου, ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ ἑκάστην ἕδραν, τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

2431. (2466). Τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διχοτομεῖ μίαν δίεδρον γωνίαν ἑνὸς τετραέδρου, χωρίζει τὴν ἀπέναντι ἀκμὴν εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἑδρῶν, αἱ ὁποῖαι πρόσκεινται εἰς τὴν δίεδρον αὐτήν.

2432. (2467). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ προβολαὶ τῆς κορυφῆς Α ἑνὸς τετραέδρου ΑΒΓΔ ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα διχοτομοῦν ἐσωτερικῶς καὶ ἐξωτερικῶς τὰς διέδρους ΒΓ, ΓΔ, ΔΒ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

2433 (2468). Ἐὰν ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν ΔΕ, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα τῶν δύο ἀπέναντι ἀκμῶν ΣΑ καὶ ΒΓ ἑνὸς τετραέδρου ΣΑΒΓ φέρωμεν ἕνα τυχὸν ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ΣΒ εἰς τὸ Ζ καὶ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Θ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τμῆμα ΖΘ διαιρεῖται ὑπὸ τῆς ΔΕ εἰς δύο ἴσα μέρη.

2434. (2469). Εἰς ἕνα τετράεδρον, ἵνα αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουν κάθε κορυφήν του μὲ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν ἀπέναντι ἕδραν, τέμνωνται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὰ τρία γινόμενα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν νὰ εἶναι ἴσα.

2435. (2470). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς ἕνα κανονικὸν τετράεδρον ΣΑΒΓ, κάθε πλευρὰ τῆς βάσεως ΑΒΓ φαίνεται ἀπὸ τὸ μέσον Μ τοῦ ὕψους ΣΗ, ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν.

2436. (2471). Ἐὰν ἀπὸ τὰ τρία ζεύγη ἀπέναντι ἀκμῶν ἑνὸς τετραέδρου, δύο ζεύγη εἶναι ὀρθογώνια, τότε θὰ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ τὸ τρίτον ζεῦγος.

(Ἕνα τοιοῦτον τετράεδρον λέγεται *ὀρθογώνιον τετράεδρον*).

2437. (2472). Ἐὰν αἱ ἀπέναντι ἀκμαὶ ἑνὸς τετραέδρου εἶναι ὀρθογώνιοι, οἱ πόδες τῶν ὑψῶν τοῦ τετραέδρου εἶναι τὰ ὀρθόκεντρα τῶν ἑδρῶν των.

2438. (2473). Ἐὰν εἰς ἕνα τετράεδρον ὁ ποὺς ἑνὸς ὕψους του εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τῆς ἀντιστοίχου ἕδρας, τὸ τετράεδρον ἔχει τὰς ἀπέναντι ἀκμάς του ὀρθογωνίους· ἐξ αὐτοῦ συνάγομεν τὴν κατασκευὴν τῶν τετραέδρων, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς ἀπέναντι ἀκμὰς ὀρθογωνίους.

2439. (2474). Εἰς κάθε τετράεδρον, τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι ἀκμαὶ εἶναι ὀρθογώνιαι:

1ον. τὰ τέσσαρα ὕψη του τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ ἀντιστρόφως.

2ον. αἱ κοιναὶ κάθετοι ἐπὶ τὰς ἀπέναντι ἀκμὰς διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον.

2440. (2475). Εἰς ἕνα τετράεδρον ΑΒΓΔ:

1ον. ἐὰν δύο ὕψη συναντῶνται, τότε θὰ συναντῶνται καὶ τὰ δύο ἄλλα.

2ον. ἐὰν τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ ὕψη του συναντᾷ δύο ἄλλα, τότε τὰ τέσσαρα ὕψη διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον. (Ἀνωτ. Γεωπονικὴ Σχολὴ 1945).

2441. (2476). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι κάθε τετράεδρον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς τέσσαρας τριέδρους γωνίας ἴσας, ἔχει τὰς ἀπέναντι ἀκμάς του ἴσας.

2442. (2477). Κάθε ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὰ μέσα δύο ἀπέναντι ἀκμῶν ἑνὸς τετραέδρου, χωρίζει τὸ τετράεδρον εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

2443. (2478). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τετράεδρον:

1ον. τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν δύο ζευγῶν εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν τοῦ τρίτου ζεύγους, ηὐξημένον κατὰ τὸ τετραπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως τῶν μέσων τῶν δύο τελευταίων ἀκμῶν.

2ον. τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν 6 ἀκμῶν εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν τριῶν εὐθυγράμμων τμημάτων, τὰ ὁποῖα συνδέουν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν.

2444. (2479). Εἰς κάθε κανονικὸν τετράεδρον ΣΑΒΓ:

1ον. αἱ ἀπέναντι ἀκμαὶ ΣΑ καὶ ΒΓ εἶναι ὀρθογώνιοι.

2ον. ἐὰν ἀπὸ τὴν κορυφὴν Σ φέρωμεν τὴν ΣΕ ἴσην καὶ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ καὶ τὴν ΣΖ ἴσην καὶ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ, τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΣΖ, διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Γ καὶ Ε.

2445. (2480). Ἐὰν ἀπὸ τὴν κορυφὴν Σ ἑνὸς τετραέδρου ΣΑΒΓ φέρωμεν μίαν εὐθεῖαν ΣΔ, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν βάσιν εἰς τὸ Δ καὶ ἡ ὁποία σχηματίζει ἴσας γωνίας μὲ τὰ ἐπίπεδα ΣΑΒ, ΣΒΓ καὶ ΣΓΑ καὶ συνδέσωμεν τὰς κορυφὰς τῆς βάσεως ΑΒΓ μὲ τὸ σημεῖον Δ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων ΔΑΒ, ΔΒΓ καὶ ΔΑΓ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰς προκειμένας ἕδρας τοῦ τετραέδρου.

2446. (2481). Ὅταν ἡ κάθετος τομὴ ἑνὸς πρίσματος εἶναι ἕνα ἰσόπλευρον πολύγωνον, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἑνὸς σημείου, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ στερεοῦ, ἀπὸ τὰς παραπλεύρους ἕδρας του καὶ ἀπὸ τὰς βάσεις του, εἶναι σταθερόν.

2447. (2482). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ μέσα τῶν ἀκμῶν ἑνὸς τετραέδρου εἶναι κορυφαὶ ἑνὸς ὀκταέδρου, τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ὄγκου τοῦ τετραέδρου.

2448. (2483). Δίδονται τρεῖς παράλληλοι εὐθεῖαι X, Y, Z, αἱ ὁποῖαι δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· ἐπὶ τῆς X λαμβάνομεν ἕνα τμῆμα ΑΒ=λ, ἐπὶ τῆς Y ἕνα σημεῖον Γ καὶ ἐπὶ τῆς Z ἕνα σημεῖον Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ μένει σταθερός, ὅταν τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ ὀλισθαίνουν ἐπὶ τῶν παραλλήλων, ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται, καὶ ὅτι ὁ ὄγκος του εἶναι ἀνάλογος τοῦ λ.

2449. (2484). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι κάθε τετράεδρον ἔχει ἕνα περιγεγραμμένον παραλληλεπίπεδον· ἀλλὰ κάθε παραλληλεπίπεδον ἔχει δύο ἐγγεγραμμένα τετράεδρα, τὰ ὁποῖα λέγονται *συζυγῆ*. Ἐὰν δίδεται τὸ ἕνα ἐξ αὐτῶν τῶν τετραέδρων, νὰ κατασκευασθῇ τὸ ἄλλο.

2450. (2485). Εἰς μίαν κόλουρον τριγωνικὴν πυραμίδα, αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰς κορυφὰς μιᾶς βάσεως μὲ τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τῆς ἄλλης βάσεως, τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

2451. (2486). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ τέσσαρες διαγώνιοι μιᾶς κολούρου πυραμίδος, τῆς ὁποίας αἱ βάσεις εἶναι παραλληλόγραμμα, τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

2452. (2487). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ ὄγκος ἑνὸς κολοβοῦ πρίσματος, τοῦ ὁποίου ἡ κάθετος τομὴ εἶναι ἕνα παραλληλόγραμμον, εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς καθέτου τομῆς ἐπὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἀθροίσματος τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν του.

2453. (2488). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ ὄγκος ἑνὸς κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς καθέτου τομῆς του ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τῶν κέντρων βάρους τῶν δύο βάσεων.

2454. (2489). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ ὄγκος, ἑνὸς κολοβοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο παραλλήλων ἑδρῶν του ἐπὶ τὴν ἀπόστασίν των.

2455. (2490). Εἰς ἕνα τριγωνικὸν κολοβὸν πρῖσμα, τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν καὶ τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῶν πλευρῶν τῶν βάσεών του, προεκτεινομένων, κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

2456. (2491). Ἐὰν ἀπὸ ἕνα σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν μέρος τῆς βάσεως ΑΒΓ ἑνὸς τετραέδρου ΣΑΒΓ, φέρωμεν τὰς παραλλήλους ΟΑ', ΟΒ', ΟΓ' πρὸς τὰς ἀκμὰς ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ μέχρις, ὅτου συναντήσουν τὰς ἕδρας ΣΒΓ, ΣΓΑ, ΣΑΒ, θὰ εἶναι $\frac{ΟΑ'}{ΣΑ}+\frac{ΟΒ'}{ΣΒ}+\frac{ΟΓ'}{ΣΓ}=1.$

2457. (2492). Εἰς ἕνα τρισορθογώνιον τετράεδρον:

1ον. τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἕδρας τῆς τρισορθογωνίου τριέδρου εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῆς ὑποτεινούσης ἕδρας καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς προβολῆς της ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ἕδραν.

2ον. τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἑδρῶν τῆς τρισορθογωνίου τριέδρου εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ὑποτεινούσης ἕδρας.

3ον. ἐὰν α, β, γ εἶναι αἱ τρεῖς ἀκμαὶ τῆς τρισορθογωνίου τριέδρου καὶ υ τὸ ὕψος τοῦ τετραέδρου ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν, θὰ εἶναι

$$\frac{1}{υ^2}=\frac{1}{α^2}+\frac{1}{β^2}+\frac{1}{γ^2}.$$

2458. (2493). Δίδεται ἕνα τετράεδρον ΑΒΓΔ καὶ ἕνα σημεῖον Ο εἰς τὸ

ἐσωτερικὸν τοῦ τετραέδρου. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΟ, ΒΟ, ΓΟ, ΔΟ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς ἀπέναντι ἕδρας εἰς τὰ σημεῖα Α', Β', Γ', Δ'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\frac{ΟΑ'}{ΑΑ'}+\frac{ΟΒ'}{ΒΒ'}+\frac{ΟΓ'}{ΓΓ'}+\frac{ΟΔ'}{ΔΔ'}=1.$$

2459. (2494). Δίδεται μία κανονικὴ τριγωνικὴ πυραμὶς ΣΑΒΓ. Ἐὰν ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Ο' τοῦ ὕψους της ΣΟ φέρωμεν ἕνα τυχὸν ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὰς ἀκμὰς τῆς τριέδρου γωνίας Σ εἰς τὰ σημεῖα Α', Β', Γ', θὰ εἶναι

$$\frac{1}{ΣΑ'}+\frac{1}{ΣΒ'}+\frac{1}{ΣΓ'}=\text{σταθερόν}.$$

2460. (2495). Δίδεται μία κανονικὴ πυραμὶς ΣΑΒΓΔ, τὸ ὕψος της ΣΟ καὶ ἕνα σημεῖον Ο' ἐπὶ τοῦ ΣΟ· φέρομεν ἕνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὸ Ο' καὶ τέμνει τὰς παραπλεύρους ἀκμάς της εἰς τὰ σημεῖα Α', Β', Γ', Δ'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ ἀθροίσματα $\frac{1}{ΣΑ'}+\frac{1}{ΣΓ'}$, $\frac{1}{ΣΒ'}+\frac{1}{ΣΔ'}$ εἶναι ἴσα καὶ μένουν σταθερά, ὅταν ἡ διεύθυνσις τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου μεταβάλλεται.

Ε' Ὁμάς. **2461**. (2496). Τὸ ἄθροισμα τῶν διέδρων, τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ παράπλευροι ἕδραι ἑνὸς τριγωνικοῦ πρίσματος μὲ μίαν ἀπὸ τὰς βάσεις του, περιέχεται μεταξὺ δύο ὀρθῶν καὶ τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν.

2462. (2497). Δίδεται ἕνα κανονικὸν τετράεδρον ΑΒΓΔ καὶ τὸ ὕψος του ΑΑ'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ τρίεδρος γωνία, ἡ ὁποία ἔχει κορυφὴν τὸ μέσον Ο τῆς ΑΑ' καὶ τῆς ὁποίας αἱ ἀκμαὶ διέρχονται ἀπὸ τὰ Β, Γ, Δ εἶναι τρισορθογώνιος. (Πολυτεχνεῖον).

2463. (2498). Δίδεται ἕνα κανονικὸν τετράεδρον ΑΒΓΔ καὶ κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον Β'Γ'Δ', τὸ ὁποῖον ἔχει, ὡς μέσα τῶν πλευρῶν του, τὰς κορυφὰς Β, Γ καὶ Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράεδρον ΑΒ'Γ'Δ' εἶναι τρισορθογώνιον.

2464. (2499). Δίδεται ἕνα τετράεδρον ΣΑΒΓ, τρισορθογώνιον εἰς τὸ Σ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ προβολαὶ τοῦ ὕψους ΣΔ ἐπὶ τὰς ἀκμὰς τῆς τριέδρου Σ, εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἑδρῶν ΣΒΓ, ΣΓΑ, ΣΑΒ τῆς τριέδρου αὐτῆς.

2465. (2500). Δίδεται ἕνα τετράεδρον ΣΑΒΓ καὶ τὰ μέσα Α', Β', Γ' τῶν ἀκμῶν του ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν τὸ τετράεδρον αὐτὸ εἶναι τρισορθογώνιον εἰς τὸ Σ, τὸ τετράεδρον ΣΑ'Β'Γ' ἔχει τὰς ἀπέναντι ἀκμὰς ἴσας καὶ ἀντιστρόφως. Ἐφαρμόζοντες τὴν ἰδιότητα αὐτήν, νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράεδρον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ τὰς ἀπέναντι ἀκμάς του ἴσας, ἂν γνωρίζωμεν τὰ μήκη α, β, γ τῶν ἀκμῶν αὐτῶν καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος του. (Σχολὴ Εὐελπίδων 1934).

2466. (2501). Αἱ τρεῖς πλευραὶ τῆς βάσεως ἑνὸς τετραέδρου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀπέναντι τῆς βάσεως στερεὰ γωνία εἶναι τρισορθογώνιος, ἔχουν μήκη α, β, γ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τρεῖς ἄλλαι ἀκμαὶ τοῦ τετραέδρου καὶ ὁ ὄγκος του.

ΣΤ' Ὁμάς. **2467.** (2502). Δίδεται ἕνα τετράεδρον ΑΒΓΔ καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων Μ τοιούτων, ὥστε νὰ εἶναι

$$\overline{ΜΑ}^2+\overline{ΜΒ}^2=\overline{ΜΓ}^2+\overline{ΜΔ}^2.$$

2468. (2503). Ἕνα τετράεδρον τέμνεται ὑπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον στρέφεται περὶ μίαν ἀκμήν του. Νὰ εὑρεθῇ :

1ον. ὁ τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τῆς τομῆς.

2ον. ὁ τόπος τῶν ποδῶν τῶν ὕψῶν τῆς τομῆς αὐτῆς·

2469. (2504). Ἕνα κινητὸν ἐπίπεδον τέμνει μίαν τρίεδρον Σ κατὰ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ κέντρου βάρους Θ τοῦ τριγώνου:

1ον. ὅταν ἡ κορυφὴ Α μένῃ σταθερά.

2ον. ὅταν ἡ πλευρὰ ΑΒ μένῃ σταθερά.

2470. (2505). Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Ο καὶ αἱ ὁποῖαι διαπεροῦν τὰς ἕδρας μιᾶς δοθείσης διέδρου γωνίας εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ τοιαῦτα, ὥστε ΟΑ : ΟΒ=σταθερόν.

***Ζ' Ὁμάς.* 2471.** (2506). Δίδεται ἡ τρίεδρος γωνία Σyxz εἰς τὴν ὁποίαν εἶναι:

$$y\widehat{\Sigma}x=60^{\circ}, \qquad y\widehat{\Sigma}z=z\widehat{\Sigma}x=45^{\circ}.$$

Ἐπὶ τῆς ἀκμῆς Σz λαμβάνομεν τμῆμα ΣΑ=α καὶ ἀπὸ τὸ Α φέρομεν ἕνα ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΣΑ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν Σx εἰς τὸ Β καὶ τὴν Σy εἰς τὸ Γ.

1ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τρεῖς πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Νὰ ὁρισθῇ τὸ εἶδος τοῦ τριγώνου αὐτοῦ καὶ τὸ εἶδος τῆς τριέδρου, ἡ ὁποία ἔχει κορυφὴν τὸ Α.

2ον. Ἀπὸ τὸ Α φέρομεν κάθετον ΑΔ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΣΓ· νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ΑΔ.

2472. (2507). Μία κανονικὴ πυραμίς, μὲ βάσιν ὀκτάγωνον, τέμνεται ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν. Ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ ἀπόστημα (παράπλευρον ὕψος) α τῆς βάσεως καὶ τὸ ὕψος υ τῆς πυραμίδος καὶ ὅτι ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τῆς προκυπτούσης μικρᾶς πυραμίδος εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς βάσεως τῆς μεγάλης πυραμίδος, ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ:

1ον. εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς μεγάλης πυραμίδος διέρχεται τὸ τέμνον ἐπίπεδον.

2ον. ὁ ὄγκος τῆς μεγάλης πυραμίδος. Ἐφαρμογή: α=υ=1 μ.

2473. (2508). Κύβος ἀκμῆς α στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἕδρας ΑΒΓΔ. Αἱ παράπλευροι ἀκμαί του εἶναι ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ', ΔΔ'. Τέμνομεν τὸν κύβον αὐτὸν μὲ ἕνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὰς κορυφὰς Β, Γ', Δ.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος ἑκάστης τῶν δύο πυραμίδων ΑΑ'Β'Δ' καὶ Γ'ΒΓΔ καὶ ὁ ὄγκος τοῦ μέρους τοῦ κύβου τοῦ περιλαμβανομένου μεταξὺ τῶν δύο τεμνόντων ἐπιπέδων. Πρὸς ποίους ἀκεραίους ἀριθμοὺς οἱ τρεῖς αὐτοὶ ὄγκοι εἶναι ἀνάλογοι.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τῶν τριῶν αὐτῶν στερεῶν.

3ον. Νὰ ἀποδειχθῇ: α) ὅτι τὰ δύο τέμνοντα ἐπίπεδα ΑΒ'Δ' καὶ ΒΓ'Δ εἶναι παράλληλα· β) ὅτι εἶναι κάθετα ἐπὶ τὴν διαγώνιον Α'Γ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διαγώνιος αὐτὴ διαιρεῖται εἰς τρία ἴσα μέρη ἀπὸ τὰ δύο αὐτὰ ἐπίπεδα.

2474. (2509). Μία τριγωνικὴ πυραμὶς ΣΑΒΓ ἔχει βάσιν ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α καὶ ἡ κορυφή της Σ κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ Γ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ἀκμὴ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΣ καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΣΑΓ. Ποία εἶναι ἡ τιμὴ τῆς ἐπιπέδου γωνίας, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν δίεδρον, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὰς ἕδρας ΣΑΒ καὶ ΣΑΓ.

2ον. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ φέρομεν ἕνα ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν

ΣΒ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ΣΑ εἰς τὸ Α′ καὶ τὴν ΣΒ εἰς τὸ Β′. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΓΑ′ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΣΑΒ.

3ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ ΓΑ′Β′ΑΒ, ἐὰν εἶναι ΑΒ=ΑΓ=ΣΓ=α.

2475. (2510). Δίδεται ἡ τρισορθογώνιος στερεὰ γωνία Οxyz. Εἰς τὸ ἐπίπεδον yOx κατασκευάζομεν ἕνα τεταρτοκύκλιον Ο ἀκτῖνος α. Ἔστω Γ τὸ σημεῖον τῆς Οz τοιαῦτον, ὥστε ΟΓ=α. Φέρομεν μίαν ἐφαπτομένην ΑΒ εἰς τὸ τεταρτοκύκλιον.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\frac{1}{\mathrm{OA}^2}+\frac{1}{\mathrm{OB}^2}=\frac{1}{\mathrm{OM}^2}$, ἔνθα Μ εἶναι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς.

2ον. Ἐὰν ΟΒ=2α, νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου Ο ΑΒΓ.

3ον. Ἐὰν Η εἶναι ὁ πούς τῆς καθέτου, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ Ο ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ, νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου αὐτοῦ Η, ὅταν ἡ ΑΒ κινῆται εἰς τὸ ἐπίπεδον xOy καὶ μένει πάντοτε ἐφαπτομένη τοῦ τεταρτοκυκλίου.

2476. (2511). Ἐπὶ τῶν τριῶν ἀκμῶν μιᾶς τρισορθογωνίου τριέδρου στερεᾶς γωνίας λαμβάνομεν μήκη ΟΑ=4α, ΟΒ=ΟΓ=$3\alpha\sqrt{2}$.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου ΟΑΒΓ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς Ο ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου.

3ον. Ἔστω Η τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον συναντᾷ τὴν βάσιν ΑΒΓ, τὸ ὕψος ΟΗ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΑΗ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ.

4ον. Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Μ τῆς ΟΑ τοιοῦτον, ὥστε ΜΑ=x φέρομεν ἕνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ ΒΟΓ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ν καὶ καὶ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ρ. Νὰ προσδιορισθῇ τὸ x, ἵνα ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος ΑΜΝΡ εἶναι τὸ 1/8 τοῦ ὄγκου τοῦ τετραέδρου ΟΑΒΓ.

2477. (2512). Δίδεται μία τριγωνικὴ πυραμὶς ΟΑΒΓ, τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ Ο εἶναι τρισορθογώνιος. Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. ὅτι ἡ προβολὴ Η τῆς κορυφῆς Ο ἐπὶ τὴν βάσιν ΑΒΓ εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

2ον. ὅτι κάθε παράπλευρος ἕδρα τῆς πυραμίδος εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς βάσεως καὶ τῆς προβολῆς της ἐπὶ τὴν βάσιν αὐτήν.

3ον. ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν.

4ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος, ἂν γνωρίζωμεν ὅτι ΟΑ=α, ΟΒ=β, ΟΓ=γ καὶ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος ΟΗ=υ συναρτήσει τῶν α, β, γ.

2478. (2513). Μία κανονικὴ πυραμὶς ΣΑΒΓΔ ἔχει βάσιν ἕνα τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α καὶ ὕψος ΣΟ=$\frac{\alpha}{2}$.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος καὶ αἱ ἀκμαί της.

2ον. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ δίεδροι γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ παράπλευροι ἕδραι, μὲ τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως.

3ον. Λαμβάνομεν τὰ συμμετρικὰ σημεῖα Α′, Β′, Γ′, Δ′ τῶν σημείων Α, Β, Γ, Δ πρὸς τὴν κορυφὴν Σ. Ποῖον εἶναι τὸ στερεόν, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς

τὰς Α, Β, Γ, Δ, Α', Β', Γ', Δ'. Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ αὐτοῦ καὶ ὁ λόγος του πρὸς τὸν ὄγκον τῆς πυραμίδος.

2479. (2514). Ἡ βάσις μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος ΣΑΒΓΔ εἶναι τετράγωνον πλευρᾶς α, ἡ δὲ παράπλευρος ἀκμή της ΣΒ εἶναι ἴση μὲ β.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος καὶ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνειά της.

2ον. Κόπτομεν τὴν πυραμίδα αὐτὴν μὲ ἕνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν της, τὸ ὁποῖον ἄγεται ἀπὸ τὸ μέσον τοῦ ὕψους της· νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος καὶ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τῆς κολούρου πυραμίδος, ἡ ὁποία προκύπτει·

2480. (2515). Δίδεται τὸ ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, (ΑΒ=ΑΓ=α). Ἀπὸ τὸ Β φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς τμῆμα $ΒΟ=α\sqrt{2}$ καὶ φέρομεν τὰς ΟΑ καὶ ΟΓ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὅλαι αἱ ἕδραι τοῦ τετραέδρου ΟΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνια τρίγωνα.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΓΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΟΒΑ καὶ ὅτι τὸ ὕψος ΒΗ τοῦ τριγώνου ΑΒΟ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΟΑΓ.

3ον. Νὰ ὑπολογισθῇ, συναρτήσει τοῦ α, ὁ ὄγκος καὶ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τετραέδρου ΟΑΒΓ.

2481. (2516). Δίδεται ἕνα τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς 20 ἑκ. Ἀπὸ τὰς κορυφὰς τοῦ τετραγώνου φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτοῦ καὶ ἐπὶ τῶν καθέτων αὐτῶν λαμβάνομεν τμήματα ΑΑ'=30 ἑκ., ΒΒ'=10 ἑκ. καὶ ΓΓ'=40 ἑκ. Τὸ ἐπίπεδον Α'Β'Γ' τέμνει τὴν κάθετον, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Δ εἰς τὸ σημεῖον Δ'.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ Α'Β'Γ'Δ' εἶναι ἕνα παραλληλόγραμμον, ὅτι τὸ κέντρον του προβάλλεται εἰς τὸ κέντρον τοῦ τετραγώνου καὶ ὅτι ἡ ΒΔ εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς τὴν Α'Γ'.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ΔΔ' καὶ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ Α'Β'Γ'Δ'ΑΒΓΔ.

3ον. Τὸ ἐπίπεδον Α'Β'Γ' κινεῖται περὶ τὴν διαγώνιον Α'Γ', ἡ ὁποία εἶναι ὡρισμένη. Νὰ προσδιορισθῇ τὸ Β' εἰς τρόπον, ὥστε τὸ τετράπλευρον Α'Β'Γ'Δ' νὰ εἶναι α') ὀρθογώνιον, β') ρόμβος. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ΒΒ' καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις.

2482. (2517). Δίδεται ἕνα τετράεδρον ΣΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι

$$\widehat{ΑΣΒ}=\widehat{ΒΣΓ}=\widehat{ΓΣΑ}=30^0 \quad καὶ \quad ΣΑ=ΣΒ=ΣΓ=λ:$$

1ον. Νὰ προσδιορισθοῦν τὰ σημεῖα Β' ἐπὶ τῆς ΣΒ καὶ Γ' ἐπὶ τῆς ΣΓ εἰς τρόπον, ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΒ'Γ' νὰ εἶναι ἐλάχιστον;

2ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν δύο μερῶν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ τετραέδρου, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται αὕτη ὑπὸ τοῦ τριγώνου ΑΒ'Γ'.

Η' Ὁμάς. **2483.** (2518). Ποῖον εἶναι τὸ μέγιστον πρῖσμα, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ ἀποσπάσωμεν ἀπὸ μίαν πυραμίδα δι' ἑνὸς ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν της.

2484. (2519). Δίδεται ἕνα τετράεδρον ΑΒΓΔ· νὰ εὑρεθῇ ἕνα σημεῖον Μ, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ τὰς τέσσαρας κορυφάς του, νὰ εἶναι ἐλάχιστον.

2485. (2520). Ἐπὶ τῶν ἀκμῶν μιᾶς τριέδρου Ο, τῆς ὁποίας αἱ ἕδραι εἶναι ἴσαι, λαμβάνομεν μήκη ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ=λ. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ κοινὴ τιμὴ τῶν ἑδρῶν αὐτῶν, ἵνα:

1ον. τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ τετραέδρου ΟΑΒΓ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν βάσιν τὴν ΑΒΓ, εἶναι μέγιστον;

2ον. ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου αὐτοῦ εἶναι μέγιστος;

2486. (2521). Δίδεται μία τρισορθογώνιος τρίεδρος Οxyz καὶ ἕνα σημεῖον Κ ἐντὸς αὐτῆς καὶ τοιοῦτον, ὥστε αἱ ἀποστάσεις του ἀπὸ τὰς ἕδρας Οyz, Οzx, Οxy εἶναι α, β, γ. Ἀπὸ τὸ Κ φέρομεν ἕνα ἐπίπεδον Π, τὸ ὁποῖον τέμνει τὰς ἀκμὰς Οx, Οy, Οz εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\frac{\alpha}{\mathrm{OA}} + \frac{\beta}{\mathrm{OB}} + \frac{\gamma}{\mathrm{O\Gamma}} = 1$, καὶ ἀντιστρόφως.

2ον. Πῶς πρέπει νὰ ἐκλεγῇ τὸ ἐπίπεδον Π, ἵνα ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου ΟΑΒΓ εἶναι ἐλάχιστος;

2487. (2522). Διὰ τῶν πλευρῶν, μήκους α, ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ φέρομεν 6 καθέτους ἕδρας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ἑξαγώνου, τὰς ΑΒΑ'Β', ΒΓΒ'Γ',...., καὶ λαμβάνομεν τρεῖς ἀκμὰς ΑΑ'=ΓΓ'=ΕΕ'=β. Ἔπειτα ἀπὸ τὸ σημεῖον Σ τοῦ ἄξονος τοῦ ἑξαγώνου, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς βάσεως, μεγαλυτέραν τῆς β καὶ ἀπὸ ἑκάστην τῶν εὐθειῶν Α'Γ', Γ'Ε', Ε'Α' φέρομεν ἐπίπεδα. Τὰ τρία ἐπίπεδα ΣΑ'Γ', ΣΓ'Ε', ΣΕ'Α' τέμνουν εἰς τὰ σημεῖα Β', Δ', Ζ', τὰς ἀκμὰς ΒΒ', ΔΔ', ΖΖ' καὶ ὁρίζουν οὕτω ἕνα στερεόν.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ δεκαέδρου αὐτοῦ εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς θέσεως τοῦ Σ ἐπὶ τοῦ ἄξονος.

2ον. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ θέσις τοῦ Σ, ἵνα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ δεκαέδρου εἶναι ἐλαχίστη, (παραδεχόμεθα ὅτι τὰ α καὶ β ἔχουν ὁρισθῆ εἰς τρόπον, ὥστε νὰ ὑπάρχῃ ἐλάχιστον).

ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ

ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ - ΚΩΝΟΣ - ΣΦΑΙΡΑ

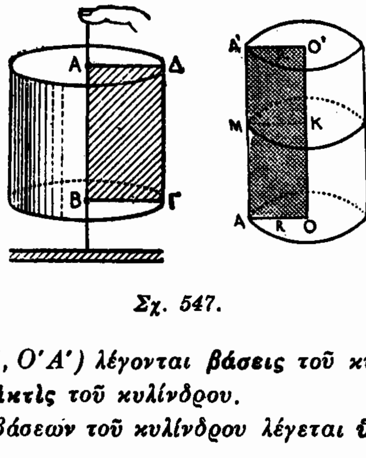
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ

Ὁρισμοὶ καὶ ἰδιότητες

804. Κύλινδρος. ***Κύλινδρος*** *λέγεται τὸ στερεόν, τὸ ὁποῖον παράγεται ἀπὸ ἕνα ὀρθογώνιον ΑΟΟ΄Α΄, τὸ ὁποῖον στρέφεται περὶ μίαν πλευράν του, ἔστω τὴν ΟΟ΄, κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, μέχρις ὅτου ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικήν του θέσιν.*

Ἡ πλευρὰ ΟΟ΄ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΟΟ΄Α΄, περὶ τὴν ὁποίαν γίνεται ἡ στροφή του*, πρέπει νὰ μένῃ ἀμετάθετος κατὰ τὴν στροφὴν τοῦ ὀρθογωνίου καὶ λέγεται ***ἄξων τοῦ κυλίνδρου.***



Σχ. 547.

Κατὰ τὴν στροφὴν τοῦ ὀρθογωνίου, αἱ ἴσαι πλευραὶ ΟΑ καὶ Ο΄Α΄ μένουν κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα ΟΟ΄ καὶ σταθεραὶ κατὰ τὸ μέγεθος· διὰ τοῦτο γράφουν κύκλους ἴσους καὶ καθέτους ἐπὶ τὸν ἄξονα ΟΟ΄ *Οἱ κύκλοι αὐτοὶ (Ο, ΟΑ) καὶ (Ο΄, Ο΄Α΄) λέγονται* ***βάσεις*** *τοῦ κυλίνδρου καὶ ἡ ἀκτίς των R λέγεται* ***ἀκτὶς*** *τοῦ κυλίνδρου.*

Ἡ ἀπόστασις ΟΟ΄ τῶν δύο βάσεων τοῦ κυλίνδρου λέγεται ***ὕψος*** *αὐτοῦ.*

Ἡ τετάρτη πλευρὰ ΑΑ΄, κατὰ τὴν κίνησιν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΟΟ΄Α΄, *μένει παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα ΟΟ΄ καὶ γράφει μίαν καμπύλην ἐπιφάνειαν, ἡ ὁποία λέγεται* ***κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου.*** *Ἡ πλευρὰ αὐτὴ ΑΑ΄, ἡ ὁποία γράφει τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου λέγεται* ***γενέτειρα.***

---

* Ὅπου ἀναφέρονται στερεὰ ἐκ περιστροφῆς πρέπει νὰ θεωρῆται, ὅτι ἡ εὐθεῖα περὶ τὴν ὁποίαν γίνεται ἡ στροφή, εἶναι ἀμετάθετος.

805. Κάθετος τομὴ κυλίνδρου. ***Κάθετος τομὴ ἑνὸς κυλίνδρου*** *λέγεται ἡ τομὴ τοῦ κυλίνδρου ὑπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονά του.*

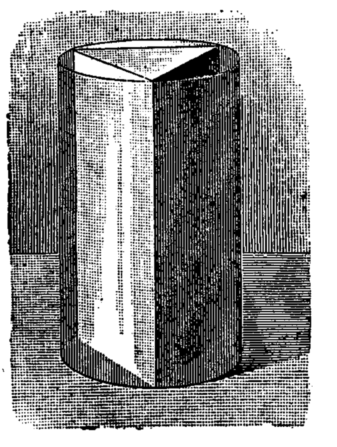
Εἶναι φανερόν, ὅτι: ***Ἡ κάθετος τομὴ ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι κύκλος ἴσος καὶ παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις του.***

Πράγματι· ἐὰν ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς γενετείρας ΑΑ′ *(Σχ. 547)* τοῦ κυλίνδρου, φέρωμεν κάθετον ΜΚ ἐπὶ τὸν ἄξονά του ΟΟ′, ἡ ΜΚ παράγει, κατὰ τὴν στροφὴν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΟΟ′Α′, ἕνα ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα καὶ ἑπομένως παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου· ἐπειδὴ δὲ ἡ ΚΜ μένει σταθερά, καὶ ἴση μὲ ΟΑ=R, τὸ σημεῖον Μ γράφει, εἰς τὸ ἐπίπεδον αὐτό, μιαν περιφέρειαν κύκλου, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν ἀκτῖνα R τοῦ κυλίνδρου.

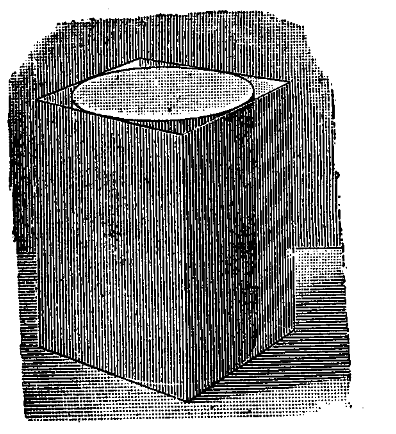
Σημ. Ἐὰν φέρωμεν ἕνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον νὰ διέρχεται ἀπὸ τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ τομὴ τοῦ κυλίνδρου, ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ, εἶναι ἕνα ὀρθογώνιον διπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου ΑΟΟ′Α′, τὸ ὁποῖον παράγει τὸν κύλινδρον.

Ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυλίνδρου

806. Ἐγγεγραμμένα καὶ περιγεγραμμένα ὀρθὰ πρίσματα εἰς κύλινδρον. *Ἕνα ὀρθὸν πρῖσμα λέγεται* ***ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα***



Ἐγγεγραμμένον πρῖσμα
Σχ. 548.



Περιγεγραμμένον πρῖσμα
Σχ. 549.

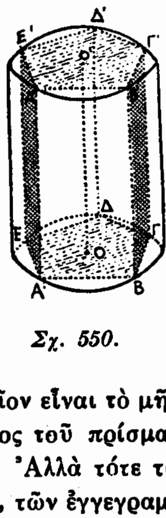
κύλινδρον, *ἐὰν αἱ βάσεις του εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου (Σχ. 548).*

*Ἕνα ὀρθὸν πρῖσμα λέγεται **περιγεγραμμένον περὶ κύλινδρον**, ἐὰν αἱ βάσεις του εἶναι περιγεγραμμέναι περὶ τὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου (Σχ. 549).*

807. Ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυλίνδρου. ***Ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυλίνδρου*** *ὀνομάζομεν τὸ ὅριον πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ἑνὸς ὀρθοῦ κανονικοῦ πρίσματος, ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύλινδρον, ὅταν ὁ ἀ ρ ι θ μ ὸ ς τῶν πλευρῶν τῶν βάσεών του διπλασιάζεται ἀπεριορίστως.*

808. Πρόβλημα. *Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυλίνδρου, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεώς του καὶ τὸ ὕψος του.*

Κατὰ τὸν ὁρισμόν, ποὺ ἐδώσαμεν εἰς τὴν § 807, πρέπει νὰ εὕρωμεν *τὸ ὅριον πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ἑνὸς ὀρθοῦ κανονικοῦ πρίσματος ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύλινδρον.*



Σχ. 550.

Πρὸς τοῦτο ἐγγράφομεν εἰς τὸν κύλινδρον ΑΔ' *(Σχ. 550)* ἕνα κανονικὸν ὀρθὸν πρῖσμα ΑΒΓΔΕΑ'Β'Γ'Δ'Ε'.

Γνωρίζομεν (§ 731) ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ἑνὸς πρίσματος εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του· δηλ. εἶναι

ἐμβ. παραπλ. ἐπιφ. πρίσμ. = περίμετρ. βάσεως × ὕψος.

Ἐὰν διπλασιάζωμεν ἀπεριορίστως τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τῶν βάσεων τοῦ πρίσματος αὐτοῦ, ἡ περίμετρος τῆς βάσεώς του τείνει πρὸς ἕνα ὅριον, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου· τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος μένει σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου. Ἀλλὰ τότε τὸ ἐμβαδὸν τῶν παραπλεύρων ἐπιφανειῶν τῶν πρισμάτων, τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν κύλινδρον αὐτόν, ἔχει ἕνα ὅριον ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τῆς περιφερείας τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Ἀλλὰ αὐτὸ τὸ ὅριον εἶναι, ἐξ ὁρισμοῦ, τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου· δηλ. θὰ εἶναι:

ἐμβ. κυρτ. ἐπιφ. κυλίνδρ. = μῆκος περιφερ. βάσ. × ὕψος

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι:

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τῆς περιφερείας τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ R τὴν ἀκτῖνα τοῦ κυλίνδρου, μὲ υ τὸ ὕψος του, τότε τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του θὰ εἶναι $2\pi R$ καὶ τὸ ἐμβαδὸν ε τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του θὰ εἶναι $\boxed{\varepsilon = 2\pi R \upsilon}$.

809. Ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυλίνδρου. *Ἐὰν εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυλίνδρου προσθέσωμεν τὰ ἐμβαδὰ τῶν δύο βάσεών του, δηλ. $2.\pi R^2$, θὰ ἔχωμεν τὸ* ***ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου.***

Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ Ε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυλίνδρου, θὰ ἔχωμεν

$$E = 2\pi R\upsilon + 2\pi R^2 \quad \text{ἢ} \quad \boxed{E = 2\pi R(\upsilon + R)}.$$

Ἀσκήσεις: 2488, 2489, 2490, 2491, 2492, 2493, 2494, 2495, 2496.

Ὄγκος κυλίνδρου

810. Ὄγκος κυλίνδρου. ***Ὄγκον ἑνὸς κυλίνδρου*** *ὀνομάζομεν τὸ ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ὁ ὄγκος ἑνὸς ὀρθοῦ κανονικοῦ πρίσματος, ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύλινδρον, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῶν βάσεών του διπλασιάζεται ἀπεριορίστως.*

811. Πρόβλημα. ***Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος ἑνὸς κυλίνδρου, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεώς του καὶ τὸ ὕψος του.***

Κατὰ τὸν ὁρισμόν, ποὺ ἐδώσαμεν εἰς τὴν § 810, πρέπει νὰ εὕρωμεν *τὸ ὅριον πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ὁ ὄγκος ἑνὸς κανονικοῦ πρίσματος ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύλινδρον, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῶν βάσεών του διπλασιάζεται ἀπεριορίστως.*

Πρὸς τοῦτο ἐγγράφομεν εἰς τὸν κύλινδρον ἕνα κανονικὸν πρῖσμα ΑΒΓΔΕΑ'Β'Γ'Δ'Ε' *(Σχ. 550).*

Γνωρίζομεν, ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος αὐτοῦ εἶναι ἴσος μὲ

ἐμβ.ΑΒΓΔΕ × ὕψος.

Ἐὰν διπλασιάζωμεν ἀπεριορίστως τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τῶν βάσεων τοῦ πρίσματος αὐτοῦ, τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ΑΒΓΔΕ ἔχει ὅριον τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου Ο, ὁ ὁποῖος εἶναι ἡ βάσις τοῦ κυλίνδρου,

τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος μένει σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου· ἑπομένως ὁ ὄγκος τῶν πρισμάτων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν κύλινδρον αὐτὸν ἔχει ἕνα ὅριον, ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Ἀλλὰ αὐτὸ τὸ ὅριον εἶναι, ἐξ ὁρισμοῦ, ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου· δηλ. θὰ εἶναι: **ὄγκος κυλίνδρου=ἐμβ. βασ. κυλίνδρου×ὕψος**.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι:

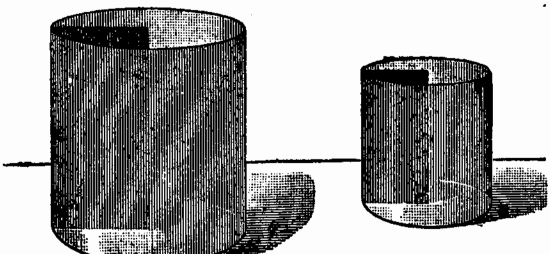
Ὁ ὄγκος ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ R τὴν ἀκτῖνα τοῦ κυλίνδρου καὶ μὲ υ τὸ ὕψος του, τότε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του θὰ εἶναι πR^2 καὶ ἑπομένως ὁ ὄγκος του V θὰ εἶναι ἴσος μὲ $\boxed{V=\pi R^2 \upsilon}$.

Ἀσκήσεις: 2497, 2498, 2499, 2500, 2501, 2502, 2503, 2504, 2505, 2506, 2507, 2508.

812. Ὅμοιοι κύλινδροι. ***Δύο κύλινδροι λέγονται ὅμοιοι, ἐὰν παράγωνται ἀπὸ ὅμοια ὀρθογώνια (Σχ. 551).***

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὰ ὕψη τῶν ὁμοίων κύλινδρων ἔχουν



Σχ. 551.

λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων των, διότι τὰ ὕψη καὶ αἱ ἀκτῖνες εἶναι αἱ διαστάσεις δύο ὁμοίων ὀρθογωνίων.

813. Θεώρημα. ***Τὰ ἐμβαδὰ τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν ἢ τῶν ὁλικῶν ἐπιφανειῶν δύο ὁμοίων κυλίνδρων ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ὑψῶν των ἢ μὲ τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ἀκτίνων των.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν ε καὶ ε′ τὰ ἐμβαδὰ τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν δύο ὁμοίων κυλίνδρων, υ, υ′ τὰ ὕψη των καὶ R, R′ αἱ ἀκτῖνες των ἀντιστοίχως.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν ὅτι $\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}=\frac{R^2}{R'^2}=\frac{\upsilon^2}{\upsilon'^2}$.

Ἀπόδειξις: Γνωρίζομεν ὅτι $\varepsilon=2\pi R\upsilon$ καὶ $\varepsilon'=2R'\upsilon'$. Διαιροῦμεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}=\frac{2\pi R\upsilon}{2\pi R'\upsilon'} \quad ἢ \quad \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}=\frac{R}{R'}\cdot\frac{\upsilon}{\upsilon'} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ τὰ ὀρθογώνια, τὰ ὁποῖα παράγουν τοὺς ὁμοίους κυλίνδρους εἶναι ὅμοια, θὰ εἶναι $\frac{R}{R'}=\frac{\upsilon}{\upsilon'}$ (2)

ἑπομένως ἡ ἰσότης (1) γράφεται $\boxed{\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}=\frac{R^2}{R'^2}=\frac{\upsilon^2}{\upsilon'^2}}$.

Ὁμοίως, ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Ε καὶ Ε′ τὰ ἐμβαδὰ τῶν ὁλικῶν ἐπιφανειῶν των, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{E}{E'}=\frac{2\pi R(\upsilon+R)}{2\pi R'(\upsilon'+R')} \quad ἢ \quad \frac{E}{E'}=\frac{R}{R'}\cdot\frac{\upsilon+R}{\upsilon'+R'} \qquad (3)$$

Κατὰ τὴν ἰδιότητα τῶν ἴσων κλασμάτων ἡ σχέσις (2) γράφεται

$$\frac{R}{R'}=\frac{\upsilon}{\upsilon'}=\frac{R+\upsilon}{R'+\upsilon'} \qquad (4)$$

Ἂν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἰσότητα (3) τὸ $\frac{\upsilon+R}{\upsilon'+R'}$ μὲ τὰ ἴσα του, ποὺ δίδει ἡ σχέσις (4), λαμβάνομεν $\boxed{\frac{E}{E'}=\frac{R^2}{R'^2}=\frac{\upsilon^2}{\upsilon'^2}}$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Τὰ ἐμβαδὰ τῶν κυρτῶν. . . .***

814. Θεώρημα. ***Οἱ ὄγκοι δύο ὁμοίων κυλίνδρων ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν κύβων τῶν ἀκτίνων των ἢ μὲ τὸν λόγον τῶν κύβων τῶν ὑψῶν των.***

Ὑπόθεσις: Παριστῶμεν μὲ V καὶ V′ τοὺς ὄγκους δύο ὁμοίων κυλίνδρων, μὲ υ, υ′ τὰ ὕψη των καὶ μὲ R, R′ τὰς ἀκτῖνας των.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν ὅτι $\frac{V}{V'}=\frac{R^3}{R'^3}=\frac{\upsilon^3}{\upsilon'^3}$.

Ἀπόδειξις: Γνωρίζομεν ὅτι: $V=\pi R^2\upsilon$ καὶ $V=\pi R'^2\upsilon'$.

Ἐὰν διαιρέσωμεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχωμεν

$$\frac{V}{V'}=\frac{\pi R^2\upsilon}{\pi R'^2\upsilon'} \quad ἢ \quad \frac{V}{V'}=\frac{R^2}{R'^2}\cdot\frac{\upsilon}{\upsilon'} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ $\frac{R}{R'}=\frac{\upsilon}{\upsilon'}$, διότι οἱ κύλινδροι εἶναι ὅμοιοι, ἡ ἰσότης (1) γίνεται $\boxed{\frac{V}{V'}=\frac{R^3}{R'^3}=\frac{\upsilon^3}{\upsilon'^3}}$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Οἱ ὄγκοι δύο ὁμοίων. . . .***

Ἀσκήσεις: 2509, 2510.

Ἀσκήσεις

2488. (2523). Θέλομεν νὰ βάψωμεν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν μιᾶς κυλινδρικῆς στήλης, ἡ ὁποία ἔχει ὕψος 6,60 μ. καὶ διάμετρον βάσεως 0,55 μ. Πόσον θὰ πληρώσωμεν, πρὸς 12,50 δρ. τὸ τετρ. μέτρον.

2489. (2524). Μία κυλινδρική στήλη ἔχει ὕψος 7,40 μ. καὶ ἡ περιφέρεια τῆς βάσεώς της ἔχει μῆκος 1,44 μέτρ. Πόσα μέτρα χάρτου πλάτους 1,20 μ. θὰ χρειασθῶμεν διὰ νὰ καλύψωμεν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειάν της;

2490. (2525). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυλίνδρου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεώς του εἶναι 0,30 μ. καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του 5,60 τετρ. μέτρα.

2491. (2526). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυλίνδρου, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶναι 1,50 μέτρα καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του 10 τετρ. μέτρα.

2492. (2527). Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως μιᾶς κυλινδρικῆς δεξαμενῆς, τῆς ὁποίας τὸ βάθος εἶναι 0,80 μ. καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας της 6,28 τετρ. μέτρα;

2493. (2528). Νὰ ὑπολογισθοῦν ἡ ἀκτὶς καὶ τὸ ὕψος ἑνὸς κυλίνδρου, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ ἀκτίς του εἶναι διπλασία τοῦ ὕψους του καὶ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου ἀκτῖνος 5 μέτρων.

2494. (2529). Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι 6 τετρ. μέτρα καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεώς του 0,40 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος του.

2495. (2530). Τὰ ἐμβαδὰ τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν δύο κυλίνδρων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἴσα ὕψη, ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων των.

2496. (2531). Τὰ ἐμβαδὰ τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν δύο κυλίνδρων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἴσας βάσεις, ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν ὑψῶν των.

2497. (2532). Τὸ ὕψος ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι 3,4 μ. καὶ ἡ διάμετρος τῆς βάσεώς του 0,90 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του καὶ ὁ ὄγκος του;

2498. (2533). Ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι 3,768 μ. καὶ τὸ ὕψος του 3,20 μ. Πόση εἶναι ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνειά του καὶ ὁ ὄγκος του.

2499. (2534). Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος ἑνὸς κυλινδρικοῦ δοχείου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειάς του εἶναι 6,20 τετρ. μέτρα καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεώς του 0,60 μέτρ.

2500. (2535). Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κύκλου ἀκτῖνος 2 μ. καὶ τὸ ὕψος του εἶναι 2,40 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου.

2501. (2536). Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος ἑνὸς κυλίνδρου, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του εἶναι 226,08 τετρ. δεκατομ. καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του 326,56 τετρ. δεκατ.

2502. (2537). Ἕνας κύλινδρος, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα του, ἔχει ὄγκον 392 τετρ. δεκατ. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος του καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του;

2503. (2538). Μία δεξαμενὴ ἔχει σχῆμα κυλίνδρου, τοῦ ὁποίου ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως εἶναι 6,28 μέτρα. Ἡ δεξαμενὴ εἶναι γεμάτη κατὰ τὰ 4/5 καὶ

περιέχει 12,5564 κ. μέτρα νεροῦ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ βάθος τῆς δεξαμενῆς.

2504. (2539). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος ἑνὸς κυλινδρικοῦ δοχείου ἀκτῖνος 45 ἑκ., ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἐχρειάσθημεν 3,50 τετρ. μέτρα ψευδαργύρου διὰ νὰ τὸ κατασκευάσωμεν· (τὸ δοχεῖον ἔχει μίαν μόνον βάσιν).

2505. (2540). Θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν μίαν κυλινδρικὴν δεξαμενήν, ἡ ὁποία νὰ χωρῇ 25 κυβ. μέτρ. νερό. Πόσον πρέπει νὰ εἶναι τὸ βάθος της, ἐὰν τὸ ἄνοιγμά της εἶναι περιφέρεια κύκλου μήκους 3,20 μέτρων.

2506. (2541). Ἡ ἐσωτερικὴ ἀκτὶς ἑνὸς κυλινδρικοῦ πύργου εἶναι 1,40 μέτρα· τὸ πάχος τῶν τοίχων του εἶναι 0,60 μέτρα καὶ ὁ ὄγκος τῶν τοίχων του εἶναι 90 κυβ. μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος τοῦ πύργου.

2507. (2542). Τί γίνεται ὁ ὄγκος ἑνὸς κυλίνδρου:

1ον. Ἐὰν διπλασιάσωμεν τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεώς του;

2ον. Ἐὰν διπλασιάσωμεν τὸ ὕψος του;

2508. (2543). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ ὄγκος ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος του.

2509. (2544). Ἕνας κύλινδρος ἔχει 4 μέτρα ὕψος καὶ ἀκτῖνα βάσεως 2 μ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις ἑνὸς κυλίνδρου, ὁμοίου πρὸς τὸν πρῶτον, τοῦ ὁποίου ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια εἶναι τὸ ἕνα τρίτον τῆς ἐπιφανείας τοῦ πρώτου.

2510. (2545)· Ἔχομεν ἕνα κυλινδρικὸν δοχεῖον ἀκτῖνος 20 ἑκ. καὶ βάθους 30 ἑκ. Θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν ἕνα ἄλλο δοχεῖον ὅμοιον πρὸς τὸ πρῶτον, τοῦ ὁποίου ὅμως ἡ χωρητικότης νὰ εἶναι τριπλασία. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις τοῦ δευτέρου δοχείου.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν ἐπὶ τοῦ Α' Κεφαλαίου

Α' Ὁμάς. **2511.** (2546). Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι ε καὶ ὁ ὄγκος του V. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος του καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεώς του.

2512. (2547). Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι Ε καὶ τὸ ὕψος του ἴσον μὲ τὴν διάμετρον τῆς βάσεώς του. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος του.

2513. (2548). Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι Ε καὶ ἡ περιφέρεια τῆς βάσεώς του ἔχει μῆκος Γ. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος του.

2514. (2549). Ὁ ὄγκος ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι V καὶ τὸ ὕψος του υ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του.

2515. (2550). Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι Ε καὶ τὸ ὕψος του υ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς του καὶ ὁ ὄγκος του.

Β' Ὁμάς. **2516.** (2551). Ἕνα τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α στρέφεται περὶ μίαν πλευράν του ΒΓ καὶ παράγει ἕνα κύλινδρον· φέρομεν μίαν εὐθεῖαν ΜΝ παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα ΒΓ καὶ ἐξετάζομεν τὸν κύλινδρον, ποὺ παράγει τὸ ὀρθογώνιον ΜΒΓΝ, ὅταν στραφῇ περὶ τὴν ΒΓ.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ΜΒ κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου, ποὺ παράγει τὸ ΑΒΓΔ νὰ εἶναι διπλάσιος ἀπὸ τὸν ὄγκον τοῦ κυλίνδρου, ποὺ παράγει τὸ ΜΒΓΝ.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ΜΒ οὕτως, ὥστε ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου,

ποὺ παράγει τὸ ΑΒΓΔ νὰ εἶναι διπλασία τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας, ποὺ παράγει τὸ ΜΒΓΝ. Νὰ ἐξετασθῇ καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις, ἂν αἱ ἀριθμητικαὶ τιμαὶ τῆς ΜΒ παριστάνουν ἕνα γεωμετρικὸν σχῆμα καὶ νὰ κατασκευασθοῦν γεωμετρικῶς αἱ τιμαὶ τῆς ΜΒ.

2517. (2552). Ἕνα ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ στρέφεται περὶ μίαν εὐθεῖαν ΧΥ, ἡ ὁποία κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὀρθογωνίου καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ ἡ ὁποία δὲν τέμνει τὸ ὀρθογώνιον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας καὶ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, ποὺ παράγει κατὰ τὴν στροφήν του, εἶναι ἀντιστοίχως ἴσα μὲ τὰ γινόμενα τῆς περιφερείας, τὴν ὁποίαν γράφει τὸ κέντρον τοῦ ὀρθογωνίου ἐπὶ τὴν περίμετρον ἢ ἐπὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου αὐτοῦ.

2518. (2553). Δίδεται μία ὀρθὴ γωνία ΧΟΥ καὶ ἕνα σημεῖον Σ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτῆς καὶ τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀποστάσεις 2ν ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας· ἀπὸ τὸ Σ φέρομεν μίαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν πλευρὰν ΟΧ εἰς τὸ Α καὶ τὴν ΟΥ εἰς τὸ Β καὶ κατασκευάζομεν τὸ ὀρθογώνιον ΟΑΓΒ. Νὰ ὑπολογισθῇ, συναρτήσει τοῦ ν, ὁ λόγος τοῦ ὄγκου πρὸς τὴν ὁλικὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος παράγεται ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον αὐτό, ὅταν στραφῇ περὶ τὴν ΟΥ.

2519. (2554). Νὰ τμηθῇ κύλινδρος, δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν οὕτως, ὥστε ἡ βάσις τοῦ κυλίνδρου νὰ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν δύο μερῶν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται αὕτη ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου.

2520. (2555). Ἕνας κῆπος ἔχει σχῆμα ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου· ἡ περίμετρός του εἶναι 180 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι σχηματίζουν ἀριθμητικὴν πρόοδον. Θέλομεν νὰ ἀνοίξωμεν ἕνα πηγάδι κυλινδρικόν, τοῦ ὁποίου ὁ ἄξων νὰ ἀπέχῃ ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὰς τρεῖς κορυφὰς τοῦ τριγώνου. Πόση θὰ εἶναι αὐτὴ ἡ ἀπόστασις; Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἔξοδα τοῦ πηγαδιοῦ, ἐὰν τὸ βάθος του εἶναι 15 μέτρα, ἡ διάμετρός του 1 μέτρ. καὶ ὁ τοῖχος του ἔχει 0,40 μέτρ. πάχος. Γνωρίζομεν, ὅτι διὰ τὸ κτίσιμον πληρώνομεν 70 δρχ. κατὰ κυβικὸν μέτρον καὶ διὰ τὴν ἐξαγωγὴν τοῦ χώματος 45 δραχμ. τὸ κυβικὸν μέτρον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'

ΚΩΝΟΣ ΚΑΙ ΚΟΛΟΥΡΟΣ ΚΩΝΟΣ

Ὁρισμοὶ καὶ ἰδιότητες

815. Κῶνος. ***Κῶνος*** *λέγεται τὸ στερεόν, τὸ ὁποῖον παράγεται ἀπὸ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΣΟΑ (Σχ. 551), τὸ ὁποῖον στρέφεται περὶ μίαν κάθετον πλευράν του, ἔστω τὴν ΣΟ, κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, μέχρις ὅτου ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικήν του θέσιν.*



Σχ. 551.

Ἡ πλευρὰ ΣΟ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΣΟΑ περὶ τὴν ὁποίαν γίνεται ἡ στροφή του, πρέπει νὰ μένῃ ἀμετάθετος κατὰ τὴν στροφὴν τοῦ τριγώνου καὶ λέγεται ***ἄξων τοῦ κώνου.***

Τὸ σημεῖον Σ λέγεται ***κορυφὴ τοῦ κώνου.***

Κατὰ τὴν στροφὴν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ἡ πλευρὰ ΟΑ μένει κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα ΣΟ καὶ σταθερὰ κατὰ τὸ μέγεθος· διὰ τοῦτο γράφει ἕνα κύκλον, ὁ ὁποῖος εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα· *ὁ κύκλος αὐτὸς (Ο, ΟΑ) λέγεται* ***βάσις τοῦ κώνου*** *καὶ ἡ ἀκτίς του ΟΑ λέγεται* ***ἀκτὶς τοῦ κώνου.***

Ἡ ὑποτείνουσα ΣΑ τοῦ ὀρθ. τριγώνου γράφει μίαν καμπύλην ἐπιφάνειαν, ἡ ὁποία λέγεται ***κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου.***

Ἡ ὑποτείνουσα ΣΑ λέγεται ***γενέτειρα*** *τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου ἢ καὶ* ***πλευρὰ*** *τοῦ κώνου ἢ καὶ* ***ἀπόστημα*** *αὐτοῦ.*

Ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου ἀπὸ τὴν βάσιν του λέγεται ***ὕψος τοῦ κώνου***· π.χ. ὕψος τοῦ κώνου ΣΑΑ' εἶναι τὸ ΣΟ.

816. Κάθετος τομὴ κώνου. ***Κάθετος τομὴ ἑνὸς κώνου*** *λέγεται ἡ τομὴ τοῦ κώνου ὑπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονά του.*

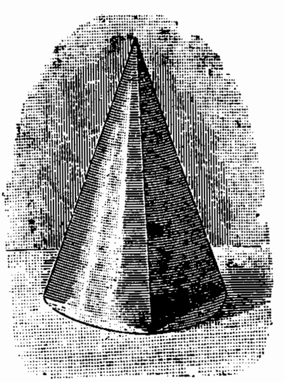
Εἶναι φανερόν, ὅτι: ***Ἡ κάθετος τομὴ ἑνὸς κώνου εἶναι ἕνας κύκλος παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν του.***

Πράγματι· ἐὰν ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Μ *(Σχ. 551)* τῆς πλευρᾶς ΣΑ τοῦ κώνου Σ φέρωμεν τὴν κάθετον ΜΚ ἐπὶ τὸν ἄξονά του, ἡ ΚΜ παράγει, κατὰ τὴν στροφὴν τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΣΟΑ, ἕνα ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα ΣΟ καὶ ἑπομένως παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κώνου· ἐπειδὴ δὲ ἡ ΚΜ μένει σταθερά, κατὰ τὴν στροφήν, τὸ σημεῖον Μ γράφει, εἰς τὸ ἐπίπεδον αὐτό, μίαν περιφέρειαν κύκλου, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τὸ Κ.

Σημ. Ἐὰν φέρωμεν ἕνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον νὰ διέρχεται ἀπὸ τὸν ἄξονα τοῦ κώνου, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ τομὴ τοῦ κώνου ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ εἶναι ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον, διπλάσιον τοῦ ὀρθογ. τριγώνου, τὸ ὁποῖον παράγει τὸν κῶνον.

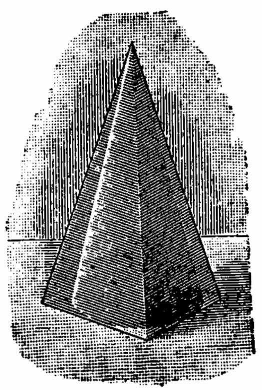
Ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κώνου

817. Ἐγγεγραμμέναι καὶ περιγεγραμμέναι πυραμίδες εἰς κῶνον. ***Μία πυραμὶς λέγεται ἐγγεγραμμένη εἰς κῶνον*** *(Σχ. 552)*



Ἐγγεγραμμένη πυραμὶς

Σχ. 552.



Περιγεγραμμένη πυραμὶς

Σχ. 553.

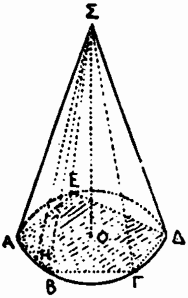
ἐὰν ἡ πυραμὶς αὐτὴ ἔχῃ κοινὴν κορυφὴν μὲ τὸν κῶνον καὶ ἡ βάσις της εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὴν βάσιν τοῦ κώνου.

Μία πυραμὶς λέγεται περιγεγραμμένη περὶ κῶνον, *ἐὰν ἡ πυραμὶς αὐτὴ ἔχῃ κοινὴν κορυφὴν μὲ τὸν κῶνον καὶ ἡ βάσις της εἶναι περιγεγραμμένη περὶ τὴν βάσιν τοῦ κώνου (Σχ. 553).*

818. Ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κώνου. ***Ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κώνου*** *ὀνομάζομεν τὸ ὅριον πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος, ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κῶνον, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεώς της, διπλασιάζεται ἀπεριορίστως.*

819. Πρόβλημα. ***Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κώνου, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεώς του καὶ τὴν πλευράν του.***

Ἔστω ὁ κῶνος ΣΑΔ *(Σχ. 554)*· κατὰ τὸν ὁρισμόν, ποὺ ἐδώσαμεν εἰς τὴν § 818, πρέπει νὰ εὕρωμεν *τὸ ὅριον πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος, ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κῶνον αὐτόν, ὅταν ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεώς της διπλασιάζεται ἀπεριορίστως.*



Σχ. 554.

Πρὸς τοῦτο ἐγγράφομεν εἰς τὸν κῶνον μίαν κανονικὴν πυραμίδα ΣΑΒΓΔΕ *(Σχ. 554)*. Γνωρίζομεν (§ 773) ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς περιμέτρου τῆς βάσεώς της ἐπὶ τὸ ἀπόστημά της (παράπλευρον ὕψος). Ἐὰν ΣΗ εἶναι τὸ παράπλευρον ὕψος τῆς κανονικῆς πυραμίδος, θὰ εἶναι :

$$\text{ἐμβ. παρ. ἐπιφ. πυρ.} = \frac{1}{2}\,\text{περιμέτρου βάσεως} \times \Sigma H.$$

Ἐὰν διπλασιάζωμεν ἀπεριορίστως τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος, ἡ περίμετρος τῆς βάσεως αὐτῆς τείνει πρὸς ἕνα ὅριον, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τῆς βάσεως τοῦ κώνου· τὸ παράπλευρον ὕψος ΣΗ τείνει πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου· ἀλλὰ τότε τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος ἔχει ἕνα ὅριον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τοῦ μήκους τῆς περιφερείας τῆς βάσεως τοῦ κώνου ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου· ἀλλὰ αὐτὸ τὸ ὅριον εἶναι, ἐξ ὁρισμοῦ, τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, δηλ. εἶναι :

$$\text{ἐμβ. κυρτ. ἐπιφ. κώνου} = \frac{1}{2}\,\text{μήκ. περιφερείας βάσ.} \times \text{πλευράν.}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι :

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τοῦ μήκους τῆς περιφερείας τῆς βάσεώς του ἐπὶ πλευράν του.

Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ R τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως ἑνὸς κώνου καὶ μὲ λ τὴν πλευράν του, τότε τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του θὰ εἶναι 2πR καὶ τὸ ἐμβαδὸν ε τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του θὰ εἶναι

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\cdot 2\pi R\cdot\lambda \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\varepsilon = \pi R\lambda}.$$

820. Ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κώνου. *Ἐὰν εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κώνου προσθέσωμεν καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του, δηλ. τὸ πR^2, θὰ ἔχωμεν τὸ* ***ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου.***

Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ E τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κώνου, θὰ ἔχωμεν

$$E = \pi R\lambda + \pi R^2 \quad \text{ἢ} \quad \boxed{E = \pi R(\lambda + R)}.$$

Ἀσκήσεις: 2521, 2522, 2523, 2524, 2525, 2526, 2527, 2528, 2529.

Ὄγκος κώνου

821. Ὄγκος κώνου. ***Ὄγκον ἑνὸς κώνου*** *ὀνομάζομεν τὸ ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ὁ ὄγκος μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος, ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κῶνον, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεώς της διπλασιάζεται ἀπεριορίστως.*

822. Πρόβλημα. ***Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος ἑνὸς κώνου, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεώς του καὶ τὸ ὕψος του.***

Ἔστω ὁ κῶνος ΣΑΔ *(Σχ. 554)*· κατὰ τὸν ὁρισμόν, ποὺ ἐδώσαμεν εἰς τὴν § 820, πρέπει *νὰ εὕρωμεν τὸ ὅριον πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ἡ ὄγκος μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος, ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κῶνον, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν της διπλασιάζεται ἀπεριορίστως.*

Πρὸς τοῦτο ἐγράφομεν εἰς τὸν κῶνον αὐτὸν μίαν κανονικὴν πυραμίδα ΣΑΒΓΔΕ *(Σχ. 554).*

Γνωρίζομεν, ὅτι ὁ ὄγκος μιᾶς πυραμίδος εἶναι ἴσος μὲ

$$\frac{1}{3}\,\text{ἐμβ. βασ. ΑΒΓΔΕ} \times \text{ὕψος}.$$

Ἐὰν διπλασιάζωμεν ἀπεριορίστως τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος αὐτῆς, τότε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς της θὰ ἔχῃ ἕνα ὅριον, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου Ο, ὁ ὁποῖος εἶναι ἡ βάσις τοῦ κώνου· τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος μένει σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ τὸ ὕψος τοῦ κώνου. Ἑπομένως ὁ ὄγκος τῶν πυραμίδων, τῶν

ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν κῶνον, ἔχει ἕνα ὅριον ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ τρίτου τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως τοῦ κώνου ἐπὶ τὸ ὕψος του· ἀλλὰ αὐτὸ τὸ ὅριον εἶναι, ἐξ ὁρισμοῦ, ὁ ὄγκος τοῦ κώνου· δηλ. εἶναι

$$\text{ὄγκ. κώνου} = \frac{1}{3}\,\text{ἐμβ. βάσεως} \times \text{ὕψος}.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι:

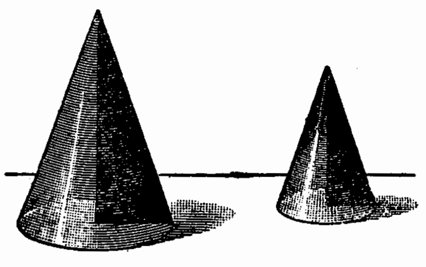
Ὁ ὄγκος ἑνὸς κώνου εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἕνα τρίτον τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ R τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως τοῦ κώνου καὶ μὲ υ τὸ ὕψος του, τότε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του εἶναι ἴσον μὲ πR^2 καὶ ἑπομένως εἶναι

$$\boxed{\text{ὄγκ. κώνου} = \frac{1}{3}\pi R^2 υ}.$$

Ἀσκήσεις: *2530, 2531, 2532, 2533, 2534, 2535, 2536, 2537, 2538, 2539, 2540, 2541, 2542, 2543, 2544, 2545, 2546, 2547, 2548.*

823. Ὅμοιοι κῶνοι. ***Δύο κῶνοι λέγονται ὅμοιοι,*** *ἐὰν παράγωνται ἀπὸ ὅμοια ὀρθογώνια τρίγωνα, τὰ ὁποῖα στρέφονται περὶ ὁμολόγους καθέτους πλευράς.*



Σχ. 555.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν: ***Τὰ ὕψη τῶν ὁμοίων κώνων ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων των, ἢ μὲ τὸν λόγον τῶν πλευρῶν των.***

Διότι εἶναι, ἀντιστοίχως, αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ τῶν ὁμοίων τριγώνων, τὰ ὁποῖα παράγουν τοὺς κώνους.

824. Θεώρημα. ***Τὰ ἐμβαδὰ τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν ἢ τὰ ἐμβαδὰ τῶν ὁλικῶν ἐπιφανειῶν δύο ὁμοίων κώνων ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν των ἢ μὲ τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ἀκτίνων των.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν ε καὶ ε′ τὰ ἐμβαδὰ τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν δύο ὁμοίων κώνων, Ε καὶ Ε′ τὰ ἐμβαδὰ τῶν ὁλικῶν ἐπιφανειῶν των, R, R′ αἱ ἀκτῖνες των καὶ λ, λ′ αἱ πλευραί των, ἀντιστοίχως.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν ὅτι: $\frac{ε}{ε'} = \frac{E}{E'} = \frac{R^2}{R'^2} = \frac{λ^2}{λ'^2}$.

Ἀπόδειξις: α΄) Γνωρίζομεν ὅτι: $\varepsilon=\pi R\lambda$ καὶ $\varepsilon'=\pi R'\lambda'$.
Διαιροῦμεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}=\frac{\pi R\lambda}{\pi R'\lambda'} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}=\frac{R}{R'}\cdot\frac{\lambda}{\lambda'} \qquad (1).$$

Ἐπειδὴ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα, τὰ ὁποῖα παράγουν τοὺς κώνους, εἶναι ὅμοια, θὰ εἶναι: $\frac{R}{R'}=\frac{\lambda}{\lambda'}$ (2).

ἑπομένως ἡ ἰσότης (1) γράφεται $\boxed{\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}=\frac{R^2}{R'^2}=\frac{\lambda^2}{\lambda'^2}}$.

β΄) Γνωρίζομεν ὅτι:

$$E=\pi R(R+\lambda) \quad \text{καὶ} \quad E'=\pi R'(R'+\lambda').$$

Διαιροῦμεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\frac{E}{E'}=\frac{\pi R(R+\lambda)}{\pi R'(R'+\lambda')} \quad \text{ἢ} \quad \frac{E}{E'}=\frac{R}{R'}\cdot\frac{R+\lambda}{R'+\lambda'} \qquad (3).$$

Κατὰ τὴν ἰδιότητα τῶν ἴσων κλασμάτων ἡ ἰσότης (2) γράφεται

$$\frac{R}{R'}=\frac{\lambda}{\lambda'}=\frac{R+\lambda}{R'+\lambda'}.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (3) τὸ $\frac{R+\lambda}{R'+\lambda'}$ μὲ τὰ ἴσα του, ποὺ δίδει ἡ σχέσις (4) καὶ ἔχομεν $\boxed{\frac{E}{E'}=\frac{R^2}{R'^2}=\frac{\lambda^2}{\lambda'^2}}$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Τὰ ἐμβαδὰ τῶν κυρτῶν....***

825. Θεώρημα. ***Οἱ ὄγκοι δύο ὁμοίων κώνων ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν κύβων τῶν ἀκτίνων των ἢ τῶν ὑψῶν των.***

Ὑπόθεσις: Παριστῶμεν μὲ V καὶ V΄ τοὺς ὄγκους δύο ὁμοίων κώνων, μὲ R, R΄ τὰς ἀκτῖνας των καὶ μὲ υ, υ΄ τὰ ὕψη των.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν ὅτι $\frac{V}{V'}=\frac{R^3}{R'^3}=\frac{\upsilon^3}{\upsilon'^3}$.

Ἀπόδειξις: Γνωρίζομεν ὅτι:

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2\upsilon \quad \text{καὶ} \quad V'=\frac{1}{3}\pi R'^2\upsilon'.$$

Διαιροῦμεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\frac{V}{V'}=\frac{\pi R^2\upsilon}{\pi R'^2\upsilon'} \quad \text{ἢ} \quad \frac{V}{V'}=\frac{R^2}{R'^2}\cdot\frac{\upsilon}{\upsilon'} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ $\frac{R}{R'}=\frac{\upsilon}{\upsilon'}$, ἡ ἰσότης (1) γράφεται $\boxed{\frac{V}{V'}=\frac{R^3}{R'^3}=\frac{\upsilon^3}{\upsilon'^3}}$.

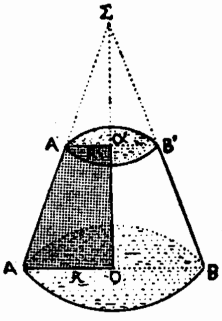
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Οἱ ὄγκοι δύο ὁμοίων....***

Ἀσκήσεις: 2549, 2550, 2551, 2552.

Κόλουρος κῶνος

826. Κόλουρος κῶνος. ***Κόλουρος κῶνος*** *λέγεται τὸ μέρος ἑνὸς κώνου, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῆς βάσεως τοῦ κώνου καὶ ἑνὸς ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν του (Σχ. 556).*

Οἱ δύο παράλληλοι κύκλοι, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ἕνας κόλουρος κῶνος, δηλ. ἡ βάσις ΑΒ τοῦ κώνου καὶ ἡ τομὴ Α΄Β΄ αὐτοῦ, ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν του, *λέγονται* ***βάσεις τοῦ κολούρου κώνου.***



Σχ. 556.

Αἱ ἀκτῖνες τῶν δύο βάσεων αὐτῶν λέγονται ***ἀκτῖνες τοῦ κολούρου κώνου.***

Ἡ ἀπόστασις ΟΟ΄ τῶν δύο βάσεων ἑνὸς κολούρου κώνου λέγεται ***ὕψος αὐτοῦ.***

Κυρτὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς κολούρου κώνου *λέγεται τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας του, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν δύο βάσεων.*

Πλευρὰ κολούρου κώνου *λέγεται τὸ μέρος τῆς πλευρᾶς τοῦ ἀρχικοῦ κώνου, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν δύο βάσεών του.*

Π.χ. πλευρὰ τοῦ κολούρου κώνου ΑΒΒ΄Α΄ εἶναι ἡ Α΄Α.

Ὁ κόλουρος κῶνος δύναται νὰ παραχθῇ καὶ ἀπὸ ἕνα ὀρθογώνιον τραπέζιον, π.χ. τὸ ΑΟΟ΄Α΄ *(Σχ. 556)*, ἂν αὐτὸ στραφῇ περὶ τὸ ὕψος του ΟΟ΄, κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, μέχρις ὅτου ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικήν του θέσιν.

Κατὰ τὴν στροφὴν τοῦ τραπεζίου, αἱ βάσεις του ΟΑ καὶ Ο΄Α΄ παράγουν τὰς βάσεις τοῦ κολούρου κώνου καὶ ἡ πλευρὰ ΑΑ΄ τοῦ τραπεζίου γράφει τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κολούρου κώνου.

Ἡ τομὴ κολούρου κώνου, ἡ ὁποία εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις του καὶ ἡ ὁποία ἀπέχει ἴσον ἀπὸ αὐτάς, λέγεται ***μέση τομὴ τῆς κολούρου κώνου.***

827. Ἐγγεγραμμέναι καὶ περιγεγραμμέναι κόλουροι πυραμίδες εἰς κόλουρον κῶνον. *Μία κόλουρος πυραμὶς λέγεται* ***ἐγγεγραμμένη εἰς ἕνα κόλουρον κῶνον,*** *ἐὰν αἱ βάσεις της εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὰς βάσεις τοῦ κολούρου κώνου.*

Μία κόλουρος πυραμὶς λέγεται ***περιγεγραμμένη περὶ ἕνα κόλουρον κῶνον,*** *ἐὰν αἱ βάσεις της εἶναι περιγεγραμμέναι περὶ τὰς βάσεις τοῦ κολούρου κώνου.*

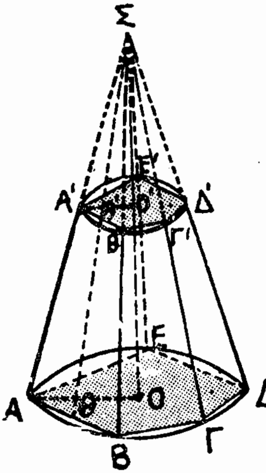
828. Ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κολούρου κώνου. ***Ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κολούρου κώνου*** *ὀνομάζομεν τὸ ὅριον πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας μιᾶς κανονικῆς κολούρου πυραμίδος, ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κόλουρον κῶνον, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῶν βάσεών της διπλασιάζεται ἀπεριορίστως.*

829. Πρόβλημα. ***Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κολούρου κώνου, ἐὰν γνωρίζωμεν τὰς ἀκτῖνας τῶν βάσεών του καὶ τὴν πλευράν του.***

Ἐγγράφομεν εἰς τὸν κόλουρον κῶνον μίαν κανονικὴν κόλουρον πυραμίδα ΑΒΓΔΕΑ′Β′Γ′Δ′Ε′ *(Σχ. 557)*.

Γνωρίζομεν (§ 769) ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας μιᾶς κολούρου πυραμίδος εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν περιμέτρων τῶν δύο βάσεών της ἐπὶ τὸ ἀπόστημά της (παράπλευρον ὕψος). Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ Π καὶ Π′ τὰς περιμέτρους τῶν δύο βάσεων τῆς κολούρου πυραμίδος ΑΔ′ καὶ ἐὰν ΘΘ′ εἶναι τὸ παράπλευρον ὕψος της, θὰ εἶναι :

$$\text{ἐμβ.παραπλ.ἐπιφ.κολ.πυρ.} = \frac{1}{2}(\Pi+\Pi')\times\Theta\Theta'$$



Σχ. 557.

Ἐὰν διπλασιάζωμεν ἀπεριορίστως τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τῶν βάσεων τῆς κολούρου αὐτῆς πυραμίδος, τότε αἱ περίμετροί των Π καὶ Π′ τείνουν πρὸς ὅρια, τὰ ὁποῖα εἶναι, ἀντιστοίχως τὰ μήκη τῶν περιφερειῶν τῶν βάσεων τῆς κολούρου πυραμίδος· τὸ παράπλευρον ὕψος ΘΘ′ τείνει πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ κολούρου κώνου. Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς κολούρου πυραμίδος ἔχει ἕνα ὅριον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν μηκῶν τῶν περιφερειῶν τῶν βάσεων τοῦ κολούρου κώνου ἐπὶ τὴν πλευράν του· ἀλλὰ αὐτὸ τὸ ὅριον εἶναι, ἐξ ὁρισμοῦ, τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου· ὥστε :

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν μηκῶν τῶν περιφερειῶν τῶν βάσεών του ἐπὶ τὴν πλευράν του.

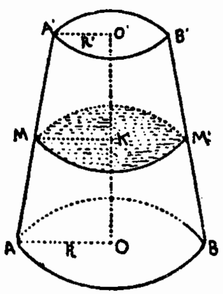
Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ R καὶ R′ τὰς ἀκτῖνας τῶν δύο

βάσεων τοῦ κολούρου κώνου καὶ μὲ λ τὴν πλευράν του, τότε τὸ μῆκος τῶν περιφερειῶν τῶν δύο βάσεών του θὰ εἶναι 2πR καὶ 2πR′ καὶ τὸ ἐμβαδὸν ε τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του θὰ εἶναι:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(2\pi R + 2\pi R')\times\lambda \quad \text{ἢ}$$

Ἐμβ. κυρ. ἐπιφ. κολ. κών. $=\pi(R+R')\lambda$

830. Πόρισμα. Ἐὰν ἀπὸ τὸ μέσον Μ τῆς πλευρᾶς ΑΑ *(Σχ. 558)* φέρομεν ἕνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις τοῦ κολούρου κώνου ΑΒΒ′Α′, τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ θὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τὰς βάσεις καὶ θὰ τέμνῃ τὸν κόλουρον κῶνον κατὰ ἕνα κύκλον ΜΜ′, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς θὰ εἶναι ἡ ΚΜ· ἀλλὰ ἡ ἀκτὶς αὐτὴ ΚΜ εἶναι διάμεσος τοῦ τραπεζίου ΑΟΟ′Α′ καὶ ἑπομένως εἶναι ἴση μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν βάσεών του R καὶ R′· δηλ. εἶναι $KM=\frac{R+R'}{2}$ ἢ $2KM=R+R$



Σχ. 558.

Ἐὰν εἰς τὴν ἰσότητα $\varepsilon=\pi(R+R')\lambda$ ἀντικαταστήσωμεν τὸ ἄθροισμα $R+R'$ μὲ τὸ ἴσον του 2ΚΜ λαμβάνομεν $\varepsilon=2KM.\pi.\lambda$.

Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον 2ΚΜ.π παριστάνει τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ΜΜ′, δηλ. τῆς μέσης τομῆς τοῦ κολούρου κώνου ΑΒΒ′Α′ συνάγομεν, ὅτι:

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τῆς περιφερείας τῆς μέσης τομῆς αὐτοῦ ἐπὶ τὴν πλευράν του.

831. Ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κολούρου κώνου. *Ἐὰν εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κολούρου κώνου προσθέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεών του, θὰ ἔχωμεν τὸ* ***ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου.***

Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ Ε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κολούρου κώνου, θὰ ἔχωμεν

Ἐμβ. ὁλ. ἐπιφ. κολ. κώνου $=\pi(R+R')\lambda+\pi R^2+\pi R'^2$

Ἀσκήσεις: 2553, 2554, 2555, 2556, 2557, 2558.

832. Ὄγκος κολούρου κώνου. ***Ὄγκον κολούρου κώνου*** *ὀνομάζομεν τὸ ὅριον πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ὁ ὄγκος μιᾶς κανονικῆς κολούρου πυραμίδος, ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κόλουρον κῶνον, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῶν βάσεών της διπλασιάζεται ἀπεριορίστως.*

Εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ ὄγκος ἑνὸς κολούρου κώνου ΑΔΔ'Α' δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς διαφορὰ τῶν ὄγκων τῶν κώνων ΣΑΔ καὶ ΣΑ'Δ' *(Σχ. 557)*.

833. Πρόβλημα. ***Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος ἑνὸς κολούρου κώνου, ἐὰν γνωρίζωμεν τὰς ἀκτῖνας τῶν βάσεών του καὶ τὸ ὕψος του.***

Ἔστω ὁ κόλουρος κῶνος ΑΔ' *(Σχ. 557)*, τοῦ ὁποίου αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεών του εἶναι R καὶ R' καὶ τὸ ὕψος του υ. Ἐγγράφομεν εἰς τὸν κόλουρον αὐτὸν κῶνον μίαν κανονικὴν κόλουρον πυραμίδα ΑΒΓΔΕΑ'Β'Γ'Δ'Ε'.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Β καὶ β τὰ ἐμβαδὰ τῶν δύο βάσεων τῆς κολούρου αὐτῆς πυραμίδος καὶ μὲ υ τὸ ὕψος της, ὁ ὄγκος της θὰ εἶναι ἴσος μὲ $\frac{1}{3}\upsilon(B+\beta+\sqrt{B\beta})$, δηλ. θὰ εἶναι

$$\text{ὄγκ. κολ. πυραμ.} = \frac{1}{3}B\upsilon + \frac{1}{3}\beta\upsilon + \frac{1}{3}\upsilon\sqrt{B\beta}.$$

Ἐὰν διπλασιάζωμεν ἀπεριορίστως τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τῶν δύο βάσεων τῆς κολούρου αὐτῆς πυραμίδος, τότε τὸ ἐμβαδὸν Β τῆς βάσεώς της ΑΒΓΔΕ θὰ ἔχῃ ὅριον τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου Ο, ὁ ὁποῖος εἶναι ἡ μεγάλη βάσις τοῦ κολούρου κώνου καὶ τῆς ὁποίας τὸ ἐμβαδὸν εἶναι πR^2· τὸ ἐμβαδὸν β τῆς μικρᾶς βάσεως Α'Β'Γ'Δ'Ε' τῆς κολούρου πυραμίδος θὰ ἔχῃ ὅριον το ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου Ο', ὁ ὁποῖος εἶναι ἡ μικρὰ βάσις τοῦ κολούρου κώνου καὶ τῆς ὁποίας τὸ ἐμβαδὸν εἶναι $\pi R'^2$· τὸ ὕψος υ τῆς κολούρου πυραμίδος μένει σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ τὸ ὕψος τοῦ κολούρου κώνου.

Ἑπομένως ὁ ὄγκος τῶν κολούρων πυραμίδων, τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν κόλουρον κῶνον, θὰ ἔχῃ ἕνα ὅριον ἴσον μὲ

$$\frac{1}{3}\pi R^2.\upsilon + \frac{1}{3}\pi R'^2.\upsilon + \frac{1}{3}\upsilon\sqrt{\pi R^2.\pi R'^2}$$

$$\text{ἢ} \qquad \frac{1}{3}\pi R^2\upsilon + \frac{1}{3}\pi R'^2\upsilon + \frac{1}{3}\pi RR'.$$

Ἀλλὰ αὐτὸ τὸ ὅριον, ἐξ ὁρισμοῦ, εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου· δηλ. θὰ εἶναι:

$$\text{ὄγκ. κολ. κών.} = \frac{1}{3}\pi R^2\upsilon + \frac{1}{3}\pi R'^2\upsilon + \frac{1}{3}\pi RR'\upsilon \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ τὸ $\frac{1}{3}\pi R^2\upsilon$ παριστάνει τὸν ὄγκον ἑνὸς κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει βάσιν τὴν κάτω βάσιν τοῦ κολούρου κώνου καὶ ὕψος υ, τὸ $\frac{1}{3}\pi R'^2$ παριστάνει τὸν ὄγκον ἑνὸς κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει βάσιν τὴν ἄνω βάσιν τοῦ κολούρου κώνου καὶ ὕψος υ καὶ τὸ $\frac{1}{3}\pi RR'\upsilon$ παριστάνει

τὸν ὄγκον ἑνὸς κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει βάσιν τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν δύο βάσεων, πR^2 καὶ $\pi R'^2$, τοῦ κολούρου κώνου καὶ ὕψος υ, συνάγομεν, ὅτι:

Ὁ ὄγκος ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τριῶν κώνων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν, ὡς ὕψος τὸ κοινὸν ὕψος τοῦ κολούρου κώνου καὶ ὡς βάσεις ὁ μὲν πρῶτος τὴν ἄνω βάσιν τοῦ κολούρου κώνου, ὁ δεύτερος τὴν κάτω βάσιν αὐτοῦ καὶ ὁ τρίτος τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν δύο αὐτῶν βάσεων.

Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ V τὸν ὄγκον τοῦ κολούρου κώνου, ἡ ἰσότης (2) γράφεται: $\boxed{V = \frac{1}{3}\pi\upsilon(R^2 + R'^2 + RR)}$.

834. Μέθοδος ἀλγεβρική. Ὁ ὄγκος ἑνὸς κολούρου κώνου, π.χ. τοῦ ΑΔΔ'Α' *(Σχ. 557)* (ὅπως καὶ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνειά του) δύναται νὰ εὑρεθῇ ἀπ' εὐθείας, ἂν θεωρήσωμεν τὸ στερεὸν αὐτό, ὡς διαφορὰν τῶν κώνων ΣΑΔ καὶ ΣΑ'Δ'.

Πράγματι· ἔστωσαν ΟΑ=R, Ο'Α'=R' αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων τοῦ κολούρου κώνου, ΣΟ τὸ ὕψος τοῦ κώνου ΣΑΔ καὶ ΣΟ' τὸ ὕψος τοῦ κώνου ΣΑ'Δ'· τότε τὸ ὕψος υ τοῦ κολούρου κώνου θὰ εἶναι ΣΟ—ΣΟ'=υ. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ V τὸν ὄγκον τοῦ κολούρου κώνου ΑΔΔ'Α' θὰ εἶναι

$$V = \text{ὄγκ. κών. } ΣΑΔ - \text{ὄγκ. κών. } ΣΑ'Δ'$$

ἢ
$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 . ΣΟ - \frac{1}{3}\pi R'^2 . ΣΟ' \qquad (1)$$

Ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΣΟΑ καὶ ΣΟ'Α' ἔχομεν $\frac{ΣΟ}{R} = \frac{ΣΟ'}{R'}$.

Κατὰ τὴν ἰδιότητα τῶν ἴσων κλασμάτων, ἡ προηγουμένη σχέσις γράφεται
$$\frac{ΣΟ}{R} = \frac{ΣΟ'}{R'} = \frac{ΣΟ - ΣΟ'}{R - R'} = \frac{\upsilon}{R - R'}.$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν λαμβάνομεν
$$ΣΟ = \frac{R\upsilon}{R - R'} \quad \text{καὶ} \quad ΣΟ' = \frac{R'\upsilon}{R - R}.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὰ ΣΟ καὶ ΣΟ' μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν
$$V = \frac{1}{2}\pi R^2 . \frac{R\upsilon}{R - R'} - \frac{1}{3}\pi R'^2 . \frac{R'\upsilon}{R - R'} \quad \text{ἢ} \quad V = \frac{1}{3}\pi\upsilon . \frac{R^3 - R'^3}{R - R'} \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ τὸ πηλίκον τοῦ $R^3 - R'^3$ διὰ τοῦ $R - R'$ εἶναι ἴσον μὲ $R^2 + RR' + R'^2$, ἡ ἰσότης (2) γράφεται $V = \frac{1}{2}\pi(R^2 + R'^2 + RR')$.

Δηλ. εὑρήκαμεν τὸν αὐτὸν τύπον τῆς § 833.

Ἀσκήσεις: 2559, 2560, 2561, 2562, 2563, 2564.

Ἀσκήσεις

2521. (2556). Πόσα μέτρα ὑφάσματος πλάτους 1,40 θὰ χρειασθῶμεν διὰ νὰ κατασκευάσωμεν μίαν κωνικὴν σκηνήν, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον βάσεως 2,50 μ. καὶ πλευρὰν 2,60 μ. ;

2522. (2557). Ἡ πλευρὰ λ ἑνὸς κώνου εἶναι ἴση μὲ τὴν διάμετρον τῆς βάσεώς του. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του.

2523. (2558). Ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως ἑνὸς κώνου εἶναι 5,40 μ. καὶ ἡ πλευρά του εἶναι διπλασία τῆς διαμέτρου του. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του.

2524. (2559). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κώνου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι 18 ἐκ. καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του εἶναι 1,35 τ.μ.

2525. (2560). Ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως ἑνὸς κώνου εἶναι 0,60 μέτρα καὶ τὸ ὕψος του 2,5 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου.

2526. (2561). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ ἑνὸς κώνου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτίς του εἶναι 0,50 μ. καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του 5 τ.μ.

2527. (2562). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διάμετρος τῆς βάσεως ἑνὸς κώνου, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του εἶναι 1 τ.μ. καὶ ἡ πλευρά του διπλασία τῆς διαμέτρου του.

2528. (2563). Ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κώνου εἶναι R καὶ τὸ ὕψος του $υ$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του.

2529. (2564). Ἑνὸς κώνου δίδεται τὸ ὕψος του $υ=4$ μέτρ. καὶ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνειά του $ε=15π$ τετρ. μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς του.

2530. (2565). Ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κώνου εἶναι 0,45 μ. καὶ τὸ ὕψος του εἶναι 0,95 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του;

2531. (2566). Ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κώνου εἶναι 40,70 ἐκ. καὶ ἡ πλευρά του 2 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος του, τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του καὶ ὁ ὄγκος του.

2532. (2567). Τὸ ὕψος ἑνὸς κώνου εἶναι 5,5 μ. καὶ ἡ πλευρά του 7,3 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεώς του, τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του καὶ ὁ ὄγκος του.

2533. (2568). Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι 62,3520 τ.μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει ὡς βάσιν τὸν κύκλον τὸν ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ τρίγωνον αὐτὸ καὶ ὡς ὕψος τὴν πλευρὰν τοῦ τριγώνου.

2534. (2569). Ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως ἑνὸς κώνου εἶναι 5,40 μέτρ. καὶ ἡ πλευρά του σχηματίζει μὲ τὴν βάσιν του γωνίαν 60°. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου καὶ ὁ ὄγκος του.

2535. (2570). Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κώνου εἶναι $E=8$ τ.μ. καὶ ἡ πλευρά του $λ=2$ μέτρ. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος του.

2536. (2571). Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κώνου εἶναι E καὶ ἡ πλευρά του εἶναι ἴση μὲ τὴν διάμετρον τῆς βάσεώς του. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος του.

2537. (2572). Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κώνου εἶναι ἴσον μὲ

τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κύκλου ἀκτῖνος α. Νὰ ὑπολογισθῇ:

1ον. ὁ ὄγκος τοῦ κώνου, ἐὰν ἡ ἀκτίς του εἶναι R.

2ον. ὁ ὄγκος τοῦ κώνου αὐτοῦ, ἐὰν εἶναι α=1 μ. καὶ R=2/3.

2538. (2573). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς καὶ τὸ ὕψος ἑνὸς κώνου, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ ὄγκος του εἶναι 1 κ.μ. καὶ ὅτι τὸ ὕψος του εἶναι πενταπλάσιον τῆς ἀκτῖνος του.

2539. (2574). Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος ἑνὸς κώνου, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως εἶναι 3,768 τ.μ. καὶ ἡ πλευρά του 2,4 μέτρα.

2540. (2575). Τὸ ὕψος ἑνὸς κώνου εἶναι 4 μ. καὶ ὁ ὄγκος του 12,5 κ.μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρά του.

2541. (2576). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος ἑνὸς κώνου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι 1,05 μ. καὶ ὁ ὄγκος του ἴσος μὲ τὸν ὄγκον μιᾶς πυραμίδος, ἡ ὁποία ἔχει βάσιν ἕνα τετράγωνον πλευρᾶς 1,50 μ. καὶ ὕψος 8,10 μ.

2542. (2577). Τὸ ὕψος ἑνὸς κώνου εἶναι 12 μ. καὶ ὁ ὄγκος του 80 κ.μ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του.

2543. (2578). Τὸ ὕψος ἑνὸς κώνου εἶναι ἴσον μὲ τὴν διάμετρον τῆς βάσεώς του. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του.

2544. (2579). Πόσος γίνεται ὁ ὄγκος ἑνὸς κώνου:

1ον. ἂν διπλασιασθῇ τὸ ὕψος του;

2ον. ἂν διπλασιασθῇ ἡ ἀκτίς του;

2545. (2580). Ἡ ἀκμὴ κύβου εἶναι α=3 μ. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος ἰσοδυνάμου κώνου ἀκτῖνος R=2 μ.;

2546. (2581). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ ὄγκος ἑνὸς κώνου εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, τὸ ὁποῖον παράγει τὸν κῶνον ἐπὶ τὴν περιφέρειαν, τὴν ὁποίαν γράφει τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου αὐτοῦ.

2547. (2582). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ ὄγκος ἑνὸς κώνου εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του ἐπὶ τὸ ἕνα τρίτον τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου τῆς βάσεώς του ἀπὸ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου.

2548. (2583). Ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ στρέφεται πρῶτον περὶ τὴν πλευρὰν ΑΓ καὶ ἔπειτα περὶ τὴν πλευρὰν ΑΒ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τοῦ πρώτου παραγομένου στερεοῦ πρὸς τὸ δεύτερον.

2549. (2584). Νὰ χωρισθῇ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς κώνου, ὑπὸ ἐπιπέδου ἢ ἐπιπέδων παραλλήλων πρὸς τὰς βάσεις του:

1ον. εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα.

2ον. εἰς δύο μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ 3.

3ον. εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη.

2550. (2585). Ὁ ὄγκος ἑνὸς κώνου εἶναι 6 κ.μ. καὶ τὸ ὕψος του 4 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς τοῦ κώνου, ὑπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν του, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου 3 μέτρα.

2551. (2586). Ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κώνου εἶναι R καὶ ἡ πλευρά του λ. Νὰ διαιρεθῇ ὁ κῶνος ὑπὸ ἐπιπέδου ἢ ἐπιπέδων παραλλήλων πρὸς τὴν βάσιν του:

1ον. εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

2ον. εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν μ καὶ ν.

3ον. εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη.

4ον. εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4.

2552. (2587). Ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κώνου εἶναι R καὶ τὸ ὕψος του υ.

1ον. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς πρέπει νὰ φέρωμεν ἕνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν του, ἵνα ὁ κῶνος διαιρεθῇ εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

2ον. Τί δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν ἀπὸ τὸν εὑρεθέντα τύπον, σχετικῶς μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κώνου;

3ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ζητουμένη ἀπόστασις κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς χιλιοστοῦ, ἐὰν τὸ ὕψος τοῦ κώνου εἶναι 1 μέτρ.

2553. (2588). Ἡ διάμετρος τῆς κάτω βάσεως ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι 0,60 μ. καὶ τῆς μικρᾶς βάσεως 0,15 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ πλευρά του εἶναι 0,21 μ.

2554. (2589). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κολούρου κώνου, τοῦ ὁποίου ἡ περιφέρεια τῆς μέσης τομῆς εἶναι 50 ἑκ. καὶ ἡ πλευρά του 32 ἑκ.

2555. (2590). Τὸ ὕψος ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι 30 ἑκ. καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεών του 72 ἑκ. καὶ 40 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του.

2556. (2591). Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι 0,3454 τ.μ. καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεών του 40 ἑκ. καὶ 15 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρά του καὶ τὸ ὕψος του.

2557 (2592). Αἱ περιφέρειαι τῶν βάσεων ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι 1,20 μ. καὶ 0,80 μ. καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του 5 τ.μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρά του.

2558. (2593). Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι 60 τ.μ. Ἡ ἀκτὶς τῆς μιᾶς βάσεώς του εἶναι 3 μ., καὶ ἡ πλευρά του 2 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς ἄλλης βάσεως καὶ τὸ ὕψος του.

2559. (2594). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ χωρητικότης μιᾶς δεξαμενῆς, ἡ ὁποία ἔχει σχῆμα κολούρου κώνου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι αἱ διάμετροι τῶν βάσεών της εἶναι 5 μέτρα καὶ 3,60 μέτρα καὶ τὸ βάθος της 6,20 μέτρα.

2560. (2595). Αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι R καὶ R′ καὶ ἡ πλευρά του λ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος του, τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του καὶ ὁ ὄγκος του. Ἐφαρμογή; R=40 ἑκ., R′=20 ἑκ., λ=29 ἑκ.

2561. (2596). Ἑνὸς κολούρου κώνου δίδονται ἡ ἀκτὶς R=2 μέτρα τῆς μεγάλης βάσεως, τὸ ὕψος του υ=1,5 κ.μ. καὶ ὁ ὄγκος του V=3,5π κ. μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς R′ τῆς μικρᾶς βάσεώς του.

2562. (2597) Μία καπνοδόχος, ἡ ὁποία ἔχει σχῆμα κολούρου κώνου, ἔχει ὕψος 24 μέτρα. Ἡ ἐξωτερικὴ περιφέρεια ἔχει μῆκος 19 μέτρα κάτω καὶ 9,50 μέτρα ἄνω. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ λιθοκτίστου στερεοῦ, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ πάχος τῶν τοίχων εἶναι 0,80 μέτρα.

2563. (2598). Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀκτῖνες τῶν δύο βάσεων ἑνὸς κολούρου κώνου, ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ ὕψος του υ=1,2 μέτρα, τὴν πλευράν του λ=1,5 μέτρα καὶ τὸν ὄγκον του V=7,284π κυβ. μέτρα.

2564. (2599). Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀκτῖνες τῶν δύο βάσεων ἑνὸς κολού-

ρου κώνου, τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ πλευρὰ λ, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ πλευρὰ αὐτὴ σχηματίζει γωνίαν 60° μὲ τὴν κάτω βάσιν του καὶ ὅτι ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ κολούρου κώνου εἶναι ἴση μὲ $\pi\lambda^2$.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν ἐπὶ τοῦ Α' καὶ Β' Κεφαλαίου

Α' Ὁμάς. **2565.** (2600). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ ὄγκος ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του ἐπὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἁρμονικοῦ μέσου τῆς ἀκτῖνος καὶ τοῦ ὕψους του. (Ἁρμονικὸς μέσος δύο ἀριθμῶν λέγεται ὁ ἀντίστροφος τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου τῶν ἀντιστρόφων τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν).

2566. (2601). Δίδεται ἕνα κύλινδρος, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι 4 μ. καὶ τὸ ὕψος του 3. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς x καὶ τὸ ὕψος y ἑνὸς κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος νὰ ἔχῃ τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν ὁλικῆς ἐπιφανείας καὶ τὸν αὐτὸν ὄγκον μὲ τὸν πρῶτον·

2567. (2602). Ἕνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα ἑνὸς κυλίνδρου τέμνει τὴν βάσιν τοῦ κυλίνδρου κατὰ χορδὴν τεταρτημορίου. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τοῦ μεγαλυτέρου πρὸς τὸ μικρότερον μέρος, εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται ὁ κύλινδρος.

Β' Ὁμάς. **2568.** (2603). Ἡ διάμετρος τῆς βάσεως ἑνὸς κώνου εἶναι 40 ἑκ. καὶ τὸ ὕψος του 50 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος ἑνὸς ἰσοδυνάμου πρίσματος, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι τετράγωνον πλευρᾶς 35 ἑκ.

2569. (2604). Αἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι 5 μ., 6 μ., 8 μ.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος ἰσοδυνάμου κώνου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι 5 μ.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ ἰσοδυνάμου κώνου, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶναι 6 μέτρα.

2570. (2605). Τὸ ὕψος ἑνὸς κώνου εἶναι υ καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεώς του R. Ἐγγράφομεν εἰς τὸν κῶνον αὐτὸν μίαν κανονικὴν πυραμίδα ἑξαγωνικήν. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου καὶ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος.

2571. (2606). Ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα R ἑνὸς κώνου. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος τοῦ κώνου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι αἱ κυρταὶ ἐπιφάνειαί των εἶναι ἰσοδύναμοι καὶ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου εἶναι R.

2572. (2607). Δίδεται ἕνας κῶνος καὶ ἕνας κύλινδρος, ἐγγεγραμμένος εἰς αὐτόν. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸν κῶνον ἕνας δεύτερος κύλινδρος, ἰσοδύναμος μὲ τὸν πρῶτον.

2573. (2608). Ἕνας κόλουρος κῶνος καὶ ἕνας κύλινδρος ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος $\upsilon=3$ μ. καὶ μίαν κοινὴν βάσιν ἀκτῖνος $R=2$ μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς δευτέρας βάσεως τοῦ κολούρου κώνου, ἵνα ὁ ὄγκος του εἶναι ἴσος μὲ τὰ δύο πέμπτα τοῦ ὄγκου τοῦ κυλίνδρου.

2574. (2609). Κύλινδρος καὶ κόλουρος κῶνος ἔχουν κοινὴν μίαν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Ποῖος πρέπει νὰ εἶναι ὁ λόγος τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεων τοῦ κολούρου κώνου, ἵνα ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὄγκου τοῦ κυλίνδρου.

2575. (2610). Αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι R καὶ R' καὶ τὸ ὕψος του υ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν ὄγκων τοῦ κολούρου αὐτοῦ κώνου καὶ τοῦ κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος ἔχει βάσιν τὴν μέσην τομὴν τοῦ κολούρου κώνου καὶ ὕψος υ. Ἐφαρμογή: $R=50$ ἐκ., $R'=40$ ἐκ., $υ=24$ ἐκ.

2576. (2611). Αἱ ἀκτῖνες τῶν δύο βάσεων ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι $R=3$ μέτρ. καὶ $R'=2$ μέτρ. καὶ τὸ ὕψος του $υ=4$ μέτρ. Νὰ ὁρισθῇ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοῦ κολούρου κώνου ἕνα σημεῖον M τοιοῦτον, ὥστε αἱ δύο κῶνοι, οἱ ὁποῖοι ἔχουν κορυφὴν τὸ σημεῖον M καὶ βάσεις ἀντιστοίχως τὰς δύο βάσεις τοῦ κολούρου κώνου νὰ ἔχουν:

1ον. ἰσοδυνάμους κυρτὰς ἐπιφανείας.

2ον. νὰ εἶναι ἰσοδύναμοι.

2577. (2612). Νὰ ἐπαληθευθῇ, ὅτι ὁ ὄγκος ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων ἑνὸς κώνου καὶ ἑνὸς κυλίνδρου, οἱ ὁποῖοι ἔχουν κοινὸν ὕψος, τὸ ὕψος τοῦ κολούρου κώνου καὶ ὡς ἀκτῖνας, ὁ μὲν κύλινδρος τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεων τοῦ κολούρου κώνου καὶ ὁ κῶνος τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν ἀκτίνων αὐτῶν.

2578. (2613). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι οἱ ὄγκοι τοῦ κυλίνδρου, τοῦ κώνου καὶ τοῦ κολούρου κώνου δίδονται ὑπὸ τοῦ τύπου $V=\frac{υ}{6}(B+β+4B')$, ὅπου υ παριστάνει τὸ ὕψος των, B, β τὰ ἐμβαδὰ τῶν βάσεων καὶ B' τὸ ἐμβαδὸν τῆς μέσης τομῆς των.

Γ' Ὁμάς. **2579.** (2614). Δίδεται ἕνας κῶνος ἀκτῖνος $R=2$ καὶ ὕψους $υ=5$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπίκεντρος γωνία τοῦ κυκλικοῦ τομέως, ὁ ὁποῖος δύναται νὰ καλύψῃ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου.

2580. (2615). Ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κώνου εἶναι 2,5 μ. καὶ ὁ ὄγκος του 30 κ.μ. Νὰ ὑπολογισθῇ:

1ον. τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του.

2ον. ἡ ἐπίκεντρος γωνία τοῦ κυκλικοῦ τομέως, τὸν ὁποῖον λαμβάνομεν ἂν ἀναπτύξωμεν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου.

2581. (2616). Ἕνα κωνικὸν δοχεῖον ἐσχηματίσθη μὲ ἕνα κυκλικὸν τομέα ψευδαργύρου 80^0 καὶ ἀκτῖνος 50 ἐκ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ χωρητικότης τοῦ δοχείου.

2582. (2617). Τὸ ἀνάπτυγμα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κώνου εἶναι ἕνας κυκλικὸς τομεὺς ἀκτῖνος $α=5$ ἐκ. καὶ τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι 216^0. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως, τὸ ὕψος, τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας καὶ ὁ ὄγκος τοῦ κώνου.

2583. (2618). Θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν ἕνα ἀμπαζούρ, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ σχῆμα κολούρου κώνου, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος νὰ εἶναι 9 ἐκ. καὶ αἱ διάμετροι τῶν ἀνοικτῶν βάσεών του νὰ εἶναι 32 ἐκ. καὶ 8 ἐκ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις τοῦ ἀναπτύγματος τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας· δηλ. ἡ γωνία τῶν κυκλικῶν τομέων, καὶ αἱ ἀκτῖνες των.

2584. (2619). Τὸ ἀνάπτυγμα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν κυκλικῶν τομέων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὴν αὐτὴν ἐπίκεντρον γωνίαν $ω=288^0$ καὶ τῶν ὁποίων αἱ ἀκτῖνες εἶναι $α=37$ ἐκ. καὶ $β=1$ ἐκ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων καὶ τὸ ὕψος τοῦ κολούρου κώνου.

2585. (2620). Θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν ἕνα δοχεῖον, ποὺ νὰ ἔχῃ σχῆμα κολούρου κώνου ABB'A' καὶ τὸ ὁποῖον νὰ χωρῇ 4 λίτρα νεροῦ καὶ τοῦ ὁποίου

ἡ διάμετρος τῆς μεγάλης βάσεώς του νὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ὕψος καὶ ἡ διάμετρος τῆς μικρᾶς βάσεως ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους του. Νὰ ὑπολογισθῇ :

1ον. ἡ ἀκτὶς τῆς μεγάλης βάσεώς του·

2ον. αἱ ἀκτῖνες τῶν τόξων τοῦ κυκλικοῦ τομέως, τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ κόψωμεν διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ δοχείου·

3ον. ἡ γωνία τοῦ κυκλικοῦ αὐτοῦ τομέως.

Δ' Ὁμάς. 2586. (2621). Τὸ ὕψος ἑνὸς κώνου εἶναι υ καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεώς του R. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου πρέπει νὰ κόψωμεν τὸν κῶνον μὲ ἕνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν του οὕτως, ὥστε ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ μικροῦ κώνου νὰ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ δοθέντος κώνου. (Λάβετε ὡς ἄγνωστον τὸ ὕψος τοῦ μικροῦ κώνου). Ἐφαρμογή : $υ=4$ μ., $R=3$ μ.

2587. (2622). Τὸ ὕψος ἑνὸς κώνου ΟΑΒ εἶναι $υ=5$ μέτρα. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς του Ο πρέπει νὰ τμηθῇ οὗτος ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν του, ἵνα ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου ΑΒΔΓ, ποὺ θὰ προκύψῃ, εἶναι μέσος ἀνάλογος μεταξὺ τοῦ δοθέντος κώνου καὶ τοῦ κώνου ΟΓΔ, ὁ ὁποῖος κεῖται ἄνωθεν τοῦ κολούρου κώνου.

2588. (2623). Αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι $R=5$ μ., καὶ $R'=2$ μ. Τὸ ὕψος του εἶναι $υ=4$ μ. Νὰ χωρισθῇ ὁ κόλουρος αὐτὸς κῶνος ὑπὸ ἐπιπέδου ἢ ἐπιπέδων παραλλήλων πρὸς τὰς βάσεις του :

1ον. εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

2ον. εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν μ καὶ ν.

3ον. εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη.

4ον. εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν k, μ, ν.

5ον. εἰς δύο μέρη ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἕνα νὰ ἔχῃ ὄγκον 3 κυβ. μέτρα.

2589. (2624). Αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι $R=4$ μ. καὶ $R'=1$ μ. καὶ τὸ ὕψος του $υ=3$ μ. Νὰ χωρισθῇ ὁ κόλουρος κῶνος ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις του, εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ μέρος, τὸ ὁποῖον πρόσκειται εἰς τὴν μεγάλην βάσιν νὰ εἶναι ὀκταπλάσιον τοῦ ἄλλου.

2590. (2625). Αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι R καὶ R' καὶ τὸ ὕψος του υ. Νὰ ὁρισθοῦν αἱ ἀκτῖνες τῶν δύο τομῶν, αἱ ὁποῖαι χωρίζουν τὸ ὕψος εἰς τρία ἴσα μέρη καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου, ὁ ὁποῖος περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν δύο τομῶν.

2591. (2626). Ἀπὸ κῶνον, ὁ ὁποῖος ἔχει πλευρὰν 60 ἑκ. καὶ ἀκτῖνα 20 ἑκ. ἀποκόπτεται κῶνος, δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν του, μὲ πλευρὰν 12 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας καὶ ὁ ὄγκος τοῦ προκύπτοντος κολούρου κώνου.

2592. (2627). Αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι 50 ἑκ. καὶ 10 ἑκ. καὶ τὸ ὕψος του 42 ἑκ. Ἀπὸ τὸ μέσον τοῦ ὕψους του φέρομεν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις του. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας καὶ ὁ ὄγκος τῶν δύο κολούρων κώνων εἰς τοὺς ὁποίους χωρίζεται ὁ δοθεὶς κόλουρος κῶνος.

2593. (2628). Αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι R καὶ R' καὶ τὸ ὕψος του υ. Φέρομεν ἕνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις του, τὸ ὁποῖον χωρίζει τὸ στερεὸν εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος τοῦ κάτω κολούρου κώνου.

2ον. Νὰ εὑρεθῇ εἰς ποῖον σημεῖον τέμνει τὸ ὕψος του τὸ ἐπίπεδον αὐτό.

3ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς.

2594. (2629). Αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι 4 μ. καὶ 3 μ. καὶ ἡ πλευρά του 5 μ. Εἰς ποῖον σημεῖον τῆς πλευρᾶς του πρέπει νὰ φέρωμεν ἕνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις του, τὸ ὁποῖον νὰ διαιρῇ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειάν του:

1ον. εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

2ον. εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν μ καὶ ν.

3ον. εἰς τρία μέρη ἀνάλογα τῶν λ, μ, ν.

Ε' 'Ομάς. **2595.** (2630). Ἕνα ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ στρέφεται περὶ ἄξονα xy, ὁ ὁποῖος κεῖται ἐκτὸς τοῦ ὀρθογωνίου, εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ καὶ ἀπέχει αὐτῆς ἀπόστασιν γ. Νὰ ὑπολογισθῇ, ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ, ἐὰν εἶναι ΑΒ=α καὶ ΒΓ=β.

2596. (2631). Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος, τὸν ὁποῖον παράγει ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α, ἂν στραφῇ περὶ μίαν ἀπὸ τὰς πλευράς του.

2597. (2632). Ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ πλευρᾶς α στρέφεται περὶ ἄξονα xy παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν του ΒΓ καὶ διερχόμενον διὰ τῆς κορυφῆς Α. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ.

2598. (2633). Δίδεται ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ πλευρᾶς α. Προεκτείνομεν τὴν ΒΓ κατὰ μῆκος ΓΔ=α καὶ φέρομεν τὴν ΔΧ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΔ. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, τὸ ὁποῖον παράγει τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ὅταν τοῦτο στραφῇ περὶ τὴν ΔΧ κατὰ ὁλόκληρον στροφήν.

2599. (2634). Δίδεται ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ πλευρᾶς α. Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΒΓ κατὰ ἕνα μῆκος ΓΔ=x καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον Δ φέρομεν, εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου, μίαν εὐθεῖαν ΧΥ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ. Στρέφομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ περὶ τὴν ΧΥ κατὰ ὁλόκληρον στροφήν.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ x οὕτως, ὥστε ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, τὸ ὁποῖον παράγει τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, νὰ εἶναι ἴσος μὲ $\frac{4}{3}\pi\alpha^3$

2ον. Ἀπὸ τὸ μέσον Μ τοῦ ὕψους ΑΗ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν ἕνα ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΧΥ. Κατὰ ποῖον λόγον, τὸ ἐπίπεδον αὐτό, χωρίζει τὸν ὄγκον τοῦ στερεοῦ, ποὺ παράγει τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

2600. (2635). Ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ πλευρᾶς α στρέφεται περὶ μίαν εὐθεῖαν xy παράλληλον πρὸς τὴν πλευράν του ΒΓ, κατὰ ὁλόκληρον στροφήν. Ἡ εὐθεῖα xy ἀπέχει ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΒΓ ἀπόστασιν ἴσην μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ τριγώνου. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος, τὸν ὁποῖον παράγει, κατὰ τὴν στροφήν του, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

2601. (2636). Ἕνα κανονικὸν ἑξάγωνον στρέφεται περὶ μίαν πλευράν του κατὰ ὁλόκληρον στροφήν. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ.

2602. (2637). Ἕνα τετράγωνον πλευρᾶς α στρέφεται περὶ μίαν διαγώνιόν του. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν καὶ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, ποὺ παράγει.

2603. (2638). Ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον στρέφεται διαδοχικῶς περὶ τὰς

τρεῖς πλευράς του. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι οἱ ὄγκοι, τοὺς ὁποίους παράγει, εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν πλευρῶν περὶ τὰς ὁποίας στρέφεται.

2604. (2639). Ἕνα κανονικὸν ἑξάγωνον πλευρᾶς α στρέφεται περὶ μίαν διάμετρόν του. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν καὶ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, ποὺ παράγει.

2605. (2640). Ἕνας ῥόμβος, ὁ ὁποῖος ἔχει διαγωνίους ἴσας μὲ 2α καὶ 2β, στρέφεται διαδοχικῶς περὶ τὰς διαγωνίους αὐτάς. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν στερεῶν, ποὺ παράγει.

2606. (2641). Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν στερεῶν, ποὺ παράγει ἕνα παραλληλόγραμμον, ἂν στραφῇ διαδοχικῶς περὶ τὰς δύο προσκειμένας πλευράς του.

2607. (2642). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ κώνου, ποὺ παράγει ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅταν στραφῇ περὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν του, εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου αὐτοῦ τριγώνου ἐπὶ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας, τὴν ὁποίαν γράφει τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου.

2608. (2643). Εἰς ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΒ' φέρομεν τὸ ὕψος ΑΓ, τὸν ἐγγεγραμμένον κύκλον Ο καὶ τὴν ἐφαπτομένην ΑΔΕ' τοῦ κύκλου Ο εἰς τὸ σημεῖον Δ, ὅπου τὸ ὕψος ΑΓ τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο. Στρέφομεν τὸ σχῆμα περὶ τὴν ΑΓ:

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας καὶ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, τὸ ὁποῖον παράγει τὸ σχῆμα ΒΕΕ'Β', ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου Ο εἶναι R=1,20 μ.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπίκεντρος γωνία τοῦ κυκλικοῦ τομέως, ὁ ὁποῖος εἶναι τὸ ἀνάπτυγμα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ στερεοῦ, ὁ ὁποῖος παράγει τὸ τρίγωνον ΒΑΒ'.

ΣΤ' Ὁμάς. **2609.** (2644). Δίδεται ἕνας κῶνος ὁ ὁποῖος ἔχει κορυφὴν Σ, ὕψος ΣΟ=υ καὶ βάσιν ἕνα κύκλον Ο ἀκτῖνος R. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ χορδὴ ΑΒ τῆς βάσεως Ο οὕτως, ὥστε τὸ τρίγωνον ΣΑΒ νὰ ἔχῃ ἐμβαδὸν μ^2. Διερεύνησις.

2610. (2645). Νὰ περιγραφῇ κῶνος ἐκ περιστροφῆς περὶ δοθεῖσαν τρίεδρον.

2611. (2646). Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ V_α, V_β, V_γ τοὺς ὄγκους, ποὺ παράγει ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α, ἂν στραφῇ διαδοχικῶς περὶ τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν $\frac{1}{V_\alpha^2}=\frac{1}{V_\beta^2}+\frac{1}{V_\gamma^2}$.

Ζ' Ὁμάς. **2612.** (2647). Αἱ ἀκτῖνες ἑνὸς ξυλίνου κολούρου κώνου εἶναι R καὶ R' καὶ υ τὸ ὕψος του. Βυθίζομεν τὸ στερεὸν αὐτὸ κατακορύφως μέσα εἰς καθαρὸ νερό. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος τοῦ μέρους τοῦ στερεοῦ, τὸ ὁποῖον εἶναι βυθισμένον εἰς τὸ νερὸ καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς τομῆς τοῦ κολούρου κώνου ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὑγροῦ. Τὸ εἰδ. βάρος τοῦ στερεοῦ εἶναι 0,728. Ἐφαρμογή: R=8 ἑκ., R'=5 ἑκ. καὶ υ=15 ἑκ.

2613. (2648) Μία δεξαμενή, ἡ ὁποία ἔχει τὸ σχῆμα ἀνεστραμμένου κώνου καὶ τῆς ὁποίας τὸ ὕψος εἶναι 4 μέτρα δέχεται τὰ νερὰ τῆς βροχῆς, ἡ ὁποία πίπτει ἐπὶ μιᾶς ὁριζοντίου στέγης 250 τ.μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ ἀνοί-

γματος τῆς δεξαμενῆς αὐτῆς, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι μετὰ μίαν συνεχῆ βροχὴν 5 ὡρῶν, τὸ νερὸ ἔφθασε εἰς ὕψος 3,50 μ. μέσα εἰς τὴν δεξαμενήν. Γνωρίζομεν, ὅτι τὸ ὕψος τοῦ νεροῦ, ποὺ πίπτει ἐπὶ τῆς στέγης, φθάνει εἰς τὸ 1/12 τοῦ χιλιοστομέτρου κατὰ λεπτὸν τῆς ὥρας.

2614. (2649). Ἕνας κάδος ἀπὸ ψευδάργυρον ἔχει σχῆμα ἑνὸς κολούρου κώνου. Ἡ μεγάλη βάσις του εἶναι ἀνοικτὴ καὶ ἔχει διάμετρον δ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διάμετρος τῆς μικρᾶς βάσεως, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ κάδου εἶναι ἴσος μὲ τὰ 7/16 τοῦ ὄγκου κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος ἔχει βάσιν τὴν μεγάλην βάσιν τοῦ κάδου καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος; Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ κάδου καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ψευδαργύρου, ἡ ὁποία εἶναι ἀναγκαία διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ κάδου.

2615. (2650). Εἰς ἕνα κόλουρον κῶνον ΑΒΒ'Α', αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων εἶναι ΟΑ=R καὶ Ο'Α'=R' καὶ τὸ ὕψος του ΟΟ'=υ.

1ον. Δίδεται ἕνα σημεῖον Ο'', τὸ ὁποῖον διαιρεῖ τὸ ὕψος κατὰ δοθέντα λόγον $\frac{O''O'}{OO'} = \mu$, μικρότερον τῆς μονάδος. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς Ο'Γ=x τῆς τομῆς τοῦ κολ. κώνου ὑπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις του·

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν τὸ Ο'' εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου ΟΑ'Β' καὶ παραστήσωμεν μὲ Β τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ΑΟΒ καὶ μὲ Ε τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τὸ Ο'', ὁ ὄγκος τοῦ κολ. κώνου δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὑπὸ τοῦ τύπου $V = \frac{1}{4}\upsilon(B+3E)$.

2616. (2651). Εἰς ἕνα κύκλον Ο ἀκτῖνος R ἐγγράφομεν ἕνα κανονικὸν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΒΖ καὶ ΑΓ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Μ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου ΟΗ ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΑΒ. Νὰ ὑπολογισθῇ συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R:

1ον. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου ΜΑΒ καὶ ὁ ὄγκος του.

2ον. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου ΜΖΓ καὶ ὁ ὄγκος του.

3ον. Νὰ ἐπαληθευθοῦν τὰ ἐξαγόμενα μὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν παραγομένων στερεῶν.

Η' Ὁμάς. **2617.** (2652). Δίδεται ἕνας κύκλος Ο ἀκτῖνος R καὶ δύο διάμετροι ΑΒ καὶ ΓΔ κάθετοι μεταξύ των. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ἕνα σημεῖον Σ τοιοῦτον, ὥστε, ἂν φέρωμεν τὰς καθέτους ΜΕ καὶ ΜΖ ἐπὶ τὰς διαμέτρους αὐτάς, τὸ ὀρθογώνιον ΟΕΜΖ, στρεφόμενον περὶ μίαν ἀπὸ τὰς πλευράς του, νὰ παράγῃ ἕνα κύλινδρον, τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος νὰ εἶναι μέγιστος.

2618. (2653). Μεταξὺ τῶν κυλίνδρων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν ὁλικῆς ἐπιφανείας $2\pi\alpha^2$, ποῖος ἔχει τὸν μέγιστον ὄγκον; τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι οἱ κύλινδροι αὐτοὶ εἶναι ἀνοικτοὶ κατὰ μίαν βάσιν.

2619. (2654). Μεταξὺ ὅλων τῶν κυλίνδρων, οἱ ὁποῖοι εἶναι ἰσοδύναμοι, ποῖος ἔχει τὸ ἐλάχιστον ἐμβαδὸν ὁλικῆς ἐπιφανείας;

2620. (2655). Μεταξὺ ὅλων τῶν κυλίνδρων, τῶν ὁποίων ὁ λόγος τοῦ ὄγκου πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας των, ἔχουν τὴν αὐτὴν τιμὴν k, ποῖος ἔχει τὸν ἐλάχιστον ὄγκον;

2621. (2656). Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθέντα κῶνον, ἕνας κύλινδρος, τοῦ ὁποίου ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια νὰ εἶναι μεγίστη.

2622. (2657). Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθέντα κῶνον ἕνας κύλινδρος, τοῦ ὁποίου ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια νὰ εἶναι μεγίστη.

2623. (2658). Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθέντα κῶνον ἕνας κύλινδρος, τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος νὰ εἶναι μέγιστος.

2624. (2659). Νὰ περιγραφῇ περὶ δοθέντα κύλινδρον ἕνας κῶνος, τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος νὰ εἶναι ἐλάχιστος.

2625. (2660). Ἀπὸ ὅλους τοὺς κυλίνδρους, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὴν αὐτὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν, ποῖος ἔχει τὸν μέγιστον ὄγκον ;

2626. (2661). Ἀπὸ ὅλους τοὺς κώνους, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν κυρτῆς ἐπιφανείας $\pi\alpha^2$, ποῖος ἔχει τὸν μέγιστον ὄγκον ;

2627. (2662). Ἀπὸ ὅλους τοὺς κώνους, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας, ποῖος ἔχει τὸν μέγιστον ὄγκον ;

2628. (2663). Ποῖος εἶναι ὁ μέγιστος ὄγκος ἑνὸς κώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι δοθεῖσα ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄

ΣΦΑΙΡΑ

Ὁρισμοὶ καὶ ἰδιότητες

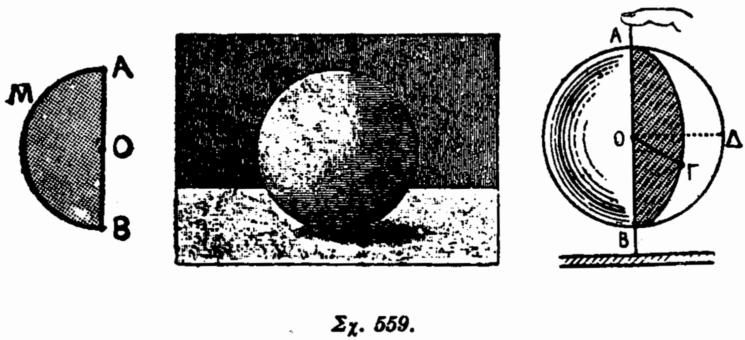
835. Ὁρισμοί. ***Σφαῖρα*** *λέγεται τὸ στερεόν, τοῦ ὁποίου ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας του ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ ἕνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς τοῦ στερεοῦ καὶ τὸ ὁποῖον λέγεται* ***κέντρον.***

Ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὸ κέντρον τῆς σφαίρας μὲ ἕνα σημεῖον τῆς ἐπιφανείας της, λέγεται ***ἀκτίς.***

Μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει δύο σημεῖα τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας καὶ διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον της, λέγεται ***διάμετρος.***

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς σφαίρας συνάγομεν, ὅτι :

Ὅλαι αἱ ἀκτῖνες τῆς αὐτῆς σφαίρας εἶναι ἴσαι καὶ μία διάμετρός της εἶναι διπλασία τῆς ἀκτῖνος της.



Σχ. 559.

Εἶναι φανερόν, ὅτι: ***Δύο σφαῖραι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα εἶναι ἴσαι.***

Μία σφαῖρα δύναται νὰ παραχθῇ καὶ ἀπὸ ἕνα ἡμικύκλιον ΑΜΒΟΑ *(Σχ. 559)*, ἂν τοῦτο στραφῇ κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, περὶ τὴν διάμετρόν του ΑΟΒ, μέχρις ὅτου ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικήν του θέσιν. Κατὰ τὴν στροφὴν ἡ ἡμιπεριφέρεια ΑΜΒ τοῦ ἡμικυκλίου γράφει τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας.

Εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς σφαίρας, εἶναι *ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ κέντρον της.*

*Λέγομεν, ὅτι ἕνα σημεῖον κεῖται εἰς τὸ **ἐσωτερικὸν μιᾶς σφαίρας,** ἐὰν ἡ ἀπόστασίς του ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας εἶναι μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος.*

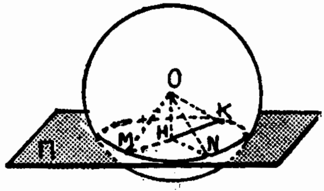
*Ἐπίσης λέγομεν, ὅτι ἕνα σημεῖον κεῖται **ἐκτὸς σφαίρας,** ἐὰν ἡ ἀπόστασίς του ἀπὸ τὸ κέντρον της εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀκτῖνος.*

Ἐπίπεδοι τομαὶ μιᾶς σφαίρας

836. Θεώρημα. ***Κάθε ἐπίπεδος τομὴ μιᾶς σφαίρας εἶναι κύκλος.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω Π ἕνα τυχὸν ἐπίπεδον *(Σχ. 560),* τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν σφαῖραν Ο καὶ Κ, Μ, Ν διάφορα σημεῖα τῆς τομῆς τοῦ ἐπιπέδου Π καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ τομὴ αὐτὴ εἶναι κύκλος.



Σχ. 560.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὴν κάθετον ΟΗ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π, τὰς ἀκτῖνας ΟΚ, ΟΜ, ΟΝ καὶ τὰς εὐθείας ΗΚ, ΗΜ, ΗΝ. Ἐπειδὴ αἱ πλάγιαι ΟΚ, ΟΜ, ΟΝ εἶναι ἴσαι, ὡς ἀκτῖνες τῆς σφαίρας Ο, θὰ εἶναι ΗΚ=ΗΜ=ΗΝ. Τὰ κοινὰ λοιπὸν σημεῖα Κ, Μ, Ν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ἐπιπέδου Π ἀπέχουν ἀπὸ τὸ σημεῖον Η ἀποστάσεις ἴσας καὶ ἑπομένως κεῖνται ἐπὶ περιφερείας κύκλου. Ἡ τομὴ λοιπὸν τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ἐπιπέδου Π εἶναι ἕνας κύκλος.

Διερεύνησις: Ἔστω R ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας Ο, ϱ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου τομῆς καὶ δ ἡ ἀπόστασις ΟΗ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον Π. Ἀπὸ τὸ ὀρθ. τρίγωνον ΟΗΜ ἔχομεν:

$$\overline{MH}^2=\overline{OM}^2-\overline{OH}^2 \quad \text{ἢ} \quad \varrho=\sqrt{R^2-\delta^2} \qquad (1).$$

Διὰ νὰ τέμνῃ τὸ ἐπίπεδον Π τὴν σφαῖραν Ο, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $\delta < R$.

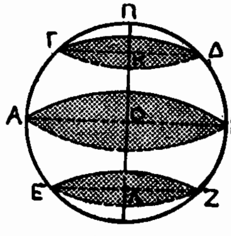
1ον. Ἐὰν δ=0, δηλ. ἐὰν τὸ τέμνον ἐπίπεδον διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, ἡ (1) δίδει ϱ=R, δηλ. ἡ ἀκτὶς τῆς τομῆς εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι *ἡ τομὴ τῆς σφαίρας ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ἕνας* ***μέγιστος κύκλος.***
Π.χ. ὁ κύκλος ΑΒ εἶναι μέγιστος *(Σχ. 561).*

Ἐὰν $\delta \neq 0$, *ἀλλὰ* $< R$, δηλ. ἐὰν τὸ τέμνον ἐπίπεδον δὲν διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, ἡ ἀκτὶς ρ τῆς τομῆς εἶναι μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος R τῆς σφαίρας.

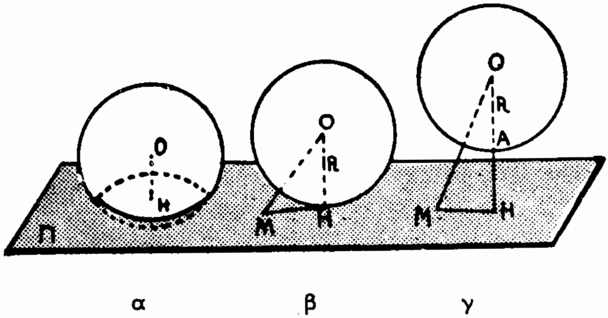
Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι *ἡ τομὴ τῆς σφαίρας ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ἕνας μικρὸς κύκλος τῆς σφαίρας.*

Π.χ. ὁ κύκλος ΓΔ εἶναι μικρὸς κύκλος *(Σχ. 561).*



Σχ. 561.

2ον. *Ἐὰν* $\delta = R$, τότε ἡ (1) δίδει $\rho = 0$ καὶ τὸ ἐπίπεδον Π ἔχει ἕνα μόνον κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν σφαῖραν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, *ὅτι τὸ ἐπίπεδον* ***ἐφάπτεται τῆς σφαίρας*** καὶ *τὸ κοινὸν σημεῖον λέγεται* ***σημεῖον ἐπαφῆς*** *(Σχ. 562 β).*



Σχ. 562.

3ον. *Ἐὰν* $\delta > R$, τὸ ἐπίπεδον καὶ ἡ σφαῖρα δὲν ἔχουν κανένα κοινὸν σημεῖον.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, *ὅτι τὸ ἐπίπεδον Π* ***κεῖται ἐκτὸς τῆς σφαίρας*** *(Σχ. 562 γ).*

837. Πορίσματα : I. Ἐπειδὴ ἡ ἀκτὶς κάθε μεγίστου κύκλου σφαίρας εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας συνάγομεν, ὅτι :

Οἱ μέγιστοι κύκλοι μιᾶς σφαίρας εἶναι ἴσοι.

II. Ἐπειδὴ τὰ ἐπίπεδα τῶν μεγίστων κύκλων διέρχονται ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, οἱ μέγιστοι κύκλοι τέμνονται κατὰ διάμετρον· ὥστε:

Οἱ μέγιστοι κύκλοι μιᾶς σφαίρας διχοτομοῦνται.

III. ***Τὸ ἐπίπεδον ἑνὸς μεγίστου κύκλου σφαίρας χωρίζει τὴν σφαῖραν εἰς δύο ἴσα μέρη.***

Πράγματι· τὰ δύο μέρη δύνανται νὰ συμπέσουν, ὅταν θέσωμεν (νοερῶς)τὸ ἕνα ἐπὶ τοῦ ἄλλου. Τὰ δύο αὐτὰ ἴσα μέρη λέγονται ***ἡμισφαίρια.***

IV. ***Δύο μικροὶ κύκλοι, ἴσον ἀπέχοντες ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, εἶναι ἴσοι καὶ ἀντιστρόφως.***

Διότι ἔχουν ἴσας ἀκτῖνας.

838. Παράλληλοι κύκλοι. *Αἱ τομαὶ σφαίρας ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων λέγονται* ***παράλληλοι κύκλοι*** *(Σχ. 561).*

839. Τομὴ μιᾶς εὐθείας καὶ μιᾶς σφαίρας. Θεώρημα. ***Μία εὐθεῖα δὲν δύναται νὰ συναντᾷ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας παρὰ μόνον εἰς δύο σημεῖα.***

Ἀπόδειξις: Κάθε ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν καὶ τέμνει τὴν σφαῖραν τέμνει τὴν ἐπιφάνειάν της κατὰ μίαν περιφέρειαν. Τὰ κοινὰ λοιπὸν σημεῖα τῆς εὐθείας καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας εἶναι τὰ αὐτὰ μὲ τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου τῆς τομῆς. Ἀλλὰ μία εὐθεῖα δὲν δύναται νὰ συναντᾷ μίαν περιφέρειαν παρὰ εἰς δύο μόνον σημεῖα.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι : ***Μία εὐθεῖα δὲν δύναται. . . .***

840. Πορίσματα: I. ***Διὰ τριῶν σημείων Α Β, Γ τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας διέρχεται ἕνας καὶ μόνος κύκλος.***

Ἀπόδειξις: Τὰ τρία αὐτὰ σημεῖα δὲν κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καὶ ἑπομένως ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδον· τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ ἕνα κύκλον, ὁ ὁποῖος διέρχεται ἀπὸ τὰ τρία σημεῖα Α, Β, Γ.

II. ***Διὰ δύο σημείων Α καὶ Β τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας μὴ κειμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς διαμέτρου, δυνάμεθα νὰ φέρωμεν μίαν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου καὶ μίαν καὶ μόνον.***

Ἀπόδειξις: Τὰ δύο σημεῖα Α καὶ Β καὶ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ὁρίζουν γενικῶς ἕνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ ἕνα μέγιστον κύκλον, ὁ ὁποῖος διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β.

Σημ. Ἐὰν τὰ δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β εἶναι τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου τῆς σφαίρας, κάθε ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὴν διάμετρον ΑΒ, διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας καὶ συνεπῶς τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ μέγιστον κύκλον. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὑπάρχουν ἄπειροι μέγιστοι κύκλοι, οἱ ὁποῖοι διέρχονται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β.

Ἀσκήσεις: *2629, 2630, 2631, 2632, 2633, 2634.*

'Εφαπτόμεναι εὐθεῖαι καὶ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα σφαίρας

841. Εὐθεῖα ἐφαπτομένη σφαίρας. *Λέγομεν, ὅτι **μία εὐθεῖα εἶναι ἐφαπτομένη εἰς μίαν σφαῖραν,** ὅταν ἡ εὐθεῖα αὐτὴ ἔχῃ ἕνα μόνον κοινὸν σημεῖον μὲ τὴ σφαῖραν.*

*Αὐτὸ τὸ κοινὸν σημεῖον λέγεται **σημεῖον ἐπαφῆς**.*

'Από τὴν διερεύνησιν τῆς § 839 συνάγομεν, ὅτι:

Κάθε εὐθεῖα, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ μίαν ἀκτῖνα σφαίρας, εἰς τὸ ἄκρον της, εἶναι ἐφαπτομένη τῆς σφαίρας καὶ ἀντιστρόφως.

842. 'Επίπεδον ἐφαπτόμενον σφαίρας. ***Ἕνα ἐπίπεδον λέγεται ἐφαπτόμενον εἰς μίαν σφαῖραν,** ὅταν τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ ἔχῃ ἕνα μόνον κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν σφαῖραν.*

*Τὸ κοινὸν αὐτὸ σημεῖον λέγεται **σημεῖον ἐπαφῆς** τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου καὶ τῆς σφαίρας.*

'Από τὴν διερεύνησιν τῆς § 836 συνάγομεν, ὅτι:

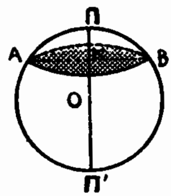
Κάθε ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον ἐπὶ μίαν ἀκτῖνα σφαίρας εἰς τὸ ἄκρον της, εἶναι ἐφαπτόμενον εἰς τὴν σφαῖραν.

Κάθε ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον εἰς μίαν σφαῖραν εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα, ἡ ὁποία καταλήγει εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς.

843. Παρατήρησις. Τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ἐφάπτεται μιᾶς σφαίρας εἰς ἕνα σημεῖον της Μ, ὡς κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΜ, περιέχει ὅλας τὰς εὐθείας τὰς ἐφαπτομένας τῆς σφαίρας εἰς τὸ σημεῖον Μ, δηλ. εἶναι *ὁ τόπος ὅλων τῶν εὐθειῶν τῶν ἐφαπτομένων τῆς σφαίρας εἰς τὸ σημεῖον Μ.*

Πόλοι

844. Πόλοι. Ἔστω ΑΒ *(Σχ. 563)*, ἕνας κύκλος μιᾶς σφαίρας Ο καὶ ΠΚΠ' μία διάμετρος τῆς σφαίρας κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου. Τὰ ἄκρα Π καὶ Π' τῆς διαμέτρου αὐτῆς λέγονται ***πόλοι τοῦ κύκλου ΑΒ.***



Σχ. 563.

Οἱ πόλοι Π, Π' ἑνὸς μικροῦ κύκλου ΑΒ, τὸ κέντρον Κ τοῦ κύκλου αὐτοῦ καὶ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς.

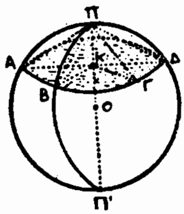
'Η διάμετρος ΠΠ' τῆς σφαίρας Ο, ἡ ὁποία περιέχει τοὺς πόλους ἑνὸς κύκλου, λέγεται *ἄξων αὐτοῦ.* Ὥστε:

Πόλοι κύκλου σφαίρας *λέγονται τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου.*

Ἄξων κύκλου μιᾶς σφαίρας *λέγεται ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου αὐτοῦ.*

845. Θεώρημα. ***Κάθε πόλος ἑνὸς κύκλου ἀπέχει ἴσον ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας του.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν Π καὶ Π' οἱ πόλοι ἑνὸς κύκλου Κ τῆς σφαίρας Ο *(Σχ. 564)*. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΠΑ, ΠΒ, ΠΓ,. . . . , αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὸν πόλον Π μὲ τὰ διάφορα σημεῖα Α, Β, Γ. . . . τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου Κ.



Σχ. 564.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι

ΠΑ=ΠΒ=ΠΓ=· · · ·

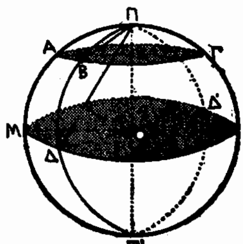
Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ ὁ ἄξων ΠΠ' τοῦ κύκλου αὐτοῦ, διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον Κ τοῦ κύκλου αὐτοῦ, αἱ ἀκτῖνες του ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ· · · · εἶναι ἴσαι· ἄρα αἱ ΠΑ, ΠΒ, ΠΓ· · · · εἶναι ἴσαι, ὡς πλάγιαι τῶν ὁποίων οἱ πόδες ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὸν πόδα Κ τῆς καθέτου ΠΚ.

Σημ. Ὅταν ἀναφέρωμεν ἁπλῶς: *ὁ πόλος τοῦ κύκλου ΑΒΓ*, θὰ ἐννοοῦμεν τὸν πλησιέστερον πόλον Π πρὸς τὸν κύκλον αὐτόν.

846. Παρατηρήσεις: Ι. Τὰ τόξα ΠΑ, ΠΒ, ΠΓ,... τῶν μεγιστων κύκλων, τὰ ὁποῖα συνδέουν τὸν πόλον Π μὲ τὰ διάφορα σημεῖα Α, Β, Γ τοῦ κύκλου Κ, εἶναι ἴσα, διότι εἶναι τόξα ἴσων χόρδων ἴσων κύκλων.

ΙΙ. Τὸ προηγούμενον θεώρημα ἰσχύει καὶ ὅταν ὁ μικρὸς κύκλος ΑΒΓ, γίνῃ μέγιστος κύκλος ΜΔΝ *(Σχ. 565)*. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ ὀρθαὶ γωνίαι ΠΟΜ, ΠΟΔ,.... εἶναι ἐπίκεντροι γωνίαι τῶν μεγίστων κύκλων ΠΜΠ', ΠΔΠ',... καὶ ἑπομένως τὰ τόξα ΠΜ, ΠΔ, . . . εἶναι *τεταρτημόρια μεγίστων κύκλων.*

847. Πολικὴ ἀπόστασις. ***Πολικὴ ἀπόστασις ἑνὸς κύκλου,*** *ὁ ὁποῖος ἔχει γραφῇ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας, λέγεται ἡ σταθερὰ ἀπόστασις τοῦ πόλου της ἀπὸ τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου αὐτοῦ.*



Σχ. 565.

Π. χ. πολικὴ ἀπόστασις τοῦ κύκλου Κ *(Σχ. 565)* εἶναι τὸ μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΠΒ.

Τὸ τόξον τοῦ μεγίστου κύκλου μιᾶς σφαίρας, τὸ ὁποῖον συνδέει

τὸν πόλον ἑνὸς κύκλου αὐτῆς μὲ τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου αὐτοῦ, λέγεται ***σφαιρικὴ ἀκτὶς τοῦ κύκλου.***

Π.χ. τὸ τόξον ΠΒ *(Σχ. 565)* τοῦ μεγίστου κύκλου ΠΒΠ' λέγεται σφαιρικὴ ἀκτὶς τοῦ κύκλου Κ.

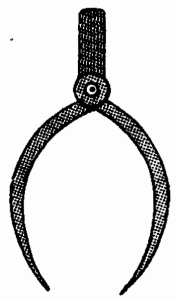
Ἡ σφαιρικὴ ἀκτὶς ἑνὸς μεγίστου κύκλου μιᾶς σφαίρας εἶναι ἕνα τεταρτημόριον τῆς περιφερείας του καὶ ἡ πολικὴ ἀπόστασίς του εἶναι ἴση μὲ τὴν χορδὴν τοῦ τόξου αὐτοῦ, δηλ. μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου, τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν μέγιστον αὐτὸν κύκλον.

Π.χ. τοῦ μεγίστου κύκλου ΜΝ *(Σχ. 565)* τῆς σφαίρας Ο, σφαιρικὴ ἀκτὶς εἶναι τὸ τόξον ΠΒΔ καὶ πολικὴ ἀπόστασις ἡ χορδὴ ΠΔ.

Γραφικαὶ ἐφαρμογαὶ

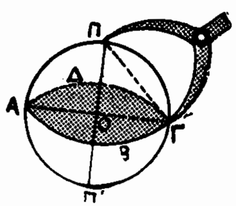
848. Σφαιρικὸς διαβήτης. Διὰ νὰ γράψωμεν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας, περιφερείας κύκλων, χρησιμοποιοῦμεν τὸν *σφαιρικὸν διαβήτην (Σχ. 566)*, δηλ. ἕνα διαβήτην, τοῦ ὁποίου τὰ σκέλη εἶναι καμπυλωμένα καὶ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

Στηρίζομεν τὸ ἄκρον τοῦ ἑνὸς σκέλους του εἰς ἕνα σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τὸ ὁποῖον ἔχομεν ἐκλέξει ὡς πόλον, καὶ περιστρέφομεν τὸ ἄλλο σκέλος του οὕτως, ὥστε τὸ ἄκρον του νὰ ἐγγίζῃ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, ἐπὶ τῆς ὁποίας γράφει μίαν περιφέρειαν κύκλου.



Σχ. 566.

Μὲ πόλον τυχὸν σημεῖον Π τῆς σφαίρας Ο *(Σχ. 567)* δυνάμεθα νὰ γράψωμεν μίαν ἀπειρίαν κύκλων, τῶν ὁποίων τὰ ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα, ὡς κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον ΠΠ'. Διὰ νὰ γράψωμεν ἕνα μέγιστον κύκλον τῆς σφαίρας Ο, πρέπει νὰ λάβωμεν, ὡς ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου, τὴν χορδὴν ἑνὸς τεταρτημορίου ἑνὸς μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας, δηλ. $R\sqrt{2}$. Εἶναι ἀνάγκη λοιπὸν νὰ γνωρίζωμεν τὴν ἀκτῖνα R τῆς σφαίρας

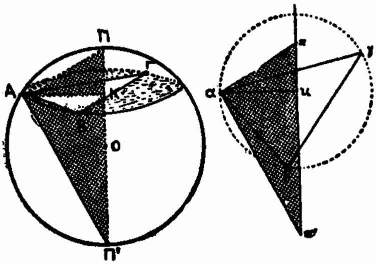


Σχ. 567.

849. Πρόβλημα. ***Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς μιᾶς σφαίρας.***

Μὲ πόλον τυχὸν σημεῖον Π *(Σχ. 568)* τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας Ο καὶ μὲ ἕνα αὐθαίρετον ἄνοιγμα τοῦ σφαιρικοῦ διαβήτου, γράφομεν ἕνα κύκλον Κ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. Ἐπὶ τῆς περι-

φερείας τοῦ κύκλου Κ λαμβάνομεν τρία τυχόντα σημεῖα Α, Β, Γ καὶ μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαβήτου προσδιορίζομεν τὰ μήκη τῶν χορδῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ. Κατασκευάζομεν ἔπειτα ἐπὶ ἑνὸς φύλλου χάρτου ἕνα τρίγωνον αβγ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ εἶναι ἴσαι μὲ τὰ τρία μήκη ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ. Προσδιορίζομεν τὸ κέντρον κ τοῦ κύκλου, τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον αβγ· ἡ ἀκτὶς κα εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα ΚΑ τοῦ κύκλου Κ. Κατασκευάζομεν ἐπὶ τοῦ φύλλου τοῦ χάρτου ἕνα ὀρθ. τρίγωνον ακπ ἴσον μὲ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΚΠ. Πρὸς τοῦτο μὲ κέντρον τὸ σημεῖον α καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσην μὲ ΑΠ, δηλ. ἴσην μὲ ἕνα ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου ἴσον πρὸς ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἐχρησιμοποιήσαμεν διὰ νὰ γράψωμεν τὸν κύκλον Κ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, γράφομεν ἕνα τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει εἰς τὸ σημεῖον π, τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ακ εἰς τὸ σημεῖον κ. Φέρομεν ἔπειτα τὴν απ′ κάθετον ἐπὶ τὴν απ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς πκ εἰς τὸ σημεῖον π′. Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον παπ′ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΠΑΠ′, διότι ἔχουν τὰς καθέτους πλευρὰς πα καὶ ΠΑ ἴσας καὶ τὰς ὀξείας γωνίας π καὶ Π ἴσας, ἄρα θὰ ἔχουν καὶ τὰς πλευρὰς ππ′ καὶ ΠΠ′ ἴσας· συνεπῶς ἡ ππ′ εἶναι ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας Ο.



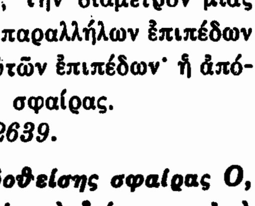
Σχ. 568.

Παρατήρησις. Διὰ νὰ εὕρωμεν πρακτικῶς, τὴν διάμετρον μιᾶς σφαίρας, τοποθετοῦμεν τὴν σφαῖραν μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων καὶ μετροῦμεν τὴν ἀπόστασιν τῶν παραλλήλων αὐτῶν ἐπιπέδων· ἡ ἀπόστασίς των αὐτὴ εἶναι ἴση μὲ τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας.

Ἀσκήσεις: 2635, 2636, 2637, 2638, 2639.

850. Πρόβλημα. ***Ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας δοθείσης σφαίρας Ο, νὰ γραφῇ περιφέρεια μεγίστου κύκλου, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα της Α καὶ Β.***

Ὑπολογίζομεν κατ' ἀρχὰς τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας Ο. Ἔπειτα μὲ πόλους τὰ σημεῖα Α καὶ Β γράφομεν δύο περιφερείας μεγίστων κύκλων, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς δύο σημεῖα Μ καὶ Ν. Μὲ πόλον τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν, ἔστω τὸ Μ, γράφομεν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου, ἡ ὁποία θὰ διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα



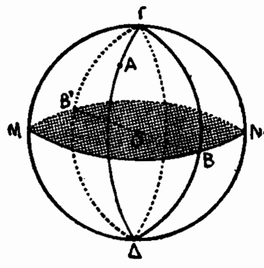
Σχ. 569.

Α καὶ Β· διότι αἱ ΜΑ καὶ ΜΒ εἶναι χορδαὶ τεταρτημορίου μεγίστου κύκλου.

Σημ. Ἐὰν τὰ δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β εἶναι τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου, οἱ μέγιστοι κύκλοι τῆς σφαίρας, οἱ ὁποῖοι γράφονται μὲ πόλους τὰ σημεῖα Α καὶ Β συμπίπτουν. Ἑπομένως, ἐὰν μὲ πόλον τυχὸν σημεῖον τῆς κοινῆς περιφερείας των γράψωμεν ἕνα μέγιστον κύκλον, ὁ κύκλος αὐτὸς θὰ περάσῃ ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β· ἑπομένως εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὑπάρχουν ἄπειροι μέγιστοι κύκλοι, τῶν ὁποίων αἱ περιφέρειαι διέρχονται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β.

851. Πρόβλημα. ***Ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας δοθείσης σφαίρας Ο νὰ γραφῇ περιφέρεια μεγίστου κύκλου, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον της Α καὶ νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον δοθέντος μεγίστου κύκλου της ΜΝ.***

Μὲ πόλον τὸ δοθὲν σημεῖον Α γράφομεν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας Ο ἡ περιφέρεια αὐτὴ τέμνει τὴν περιφέρειαν ΜΝ εἰς δύο σημεῖα Β καὶ Β′ Μὲ πόλον τὸ Β γράφομεν μίαν δευτέραν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου ΓΔ, ἡ ὁποία θὰ περάσῃ ἀπὸ τὸ σημεῖον Α. Ἡ περιφέρεια αὐτὴ ΓΑΔΓ εἶναι ἡ ζητουμένη περιφέρεια.



Σχ. 570.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ ἡ ΒΑ εἶναι χορδὴ τεταρτημορίου μεγίστου κύκλου σφαίρας, ἡ περιφέρεια ΓΑΔ θὰ περάσῃ ἀπὸ τὸ σημεῖον Α.

Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Β εἶναι πόλος τοῦ μεγίστου κύκλου ΓΑΔ, ἡ διάμετρος ΒΟΒ′ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου αὐτοῦ, καὶ ὁ κύκλος, ὁ ὁποῖος περιέχει τὴν διάμετρον αὐτήν, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΓΑΔ.

Σχετικαὶ θέσεις δύο σφαιρῶν

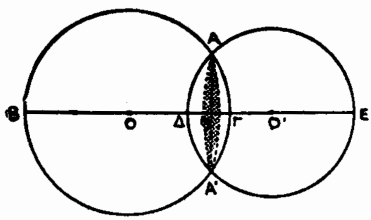
852. Σχετικαὶ θέσεις δύο σφαιρῶν. Ἔστωσαν δύο σφαῖραι Ο καὶ Ο′ *(Σχ. 571)* καὶ ΟΟ′ ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὰ κέντρα των. Φέρομεν ἕνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον νὰ διέρχεται διὰ τῆς εὐθείας ΟΟ′. Τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ τέμνει τὰς δύο σφαίρας κατὰ μεγίστους κύκλους. Εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ σχετικὴ θέσις τῶν δύο σφαιρῶν ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς σχετικῆς θέσεως τῶν περιφερειῶν τῶν δύο αὐτῶν μεγίστων κύκλων.

Ἐὰν οἱ δύο μέγιστοι κύκλοι κεῖνται ὁ ἕνας ἐκτὸς τοῦ ἄλλου, τότε

καὶ αἱ ***σφαῖραι κεῖνται ἡ μία ἐκτὸς τῆς ἄλλης.***

Ἐὰν οἱ μέγιστοι κύκλοι κεῖνται ὁ ἕνας ἐντὸς τοῦ ἄλλου, καὶ αἱ ***σφαῖραι κεῖνται ἡ μία ἐντὸς τῆς ἄλλης.***

Ἐὰν οἱ μέγιστοι κύκλοι ἐφάπτωνται ἐξωτερικῶς ἢ ἐσωτερικῶς, τότε καὶ αἱ ***σφαῖραι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς*** ἢ ***ἐσωτερικῶς,*** δηλ. *ἔχουν ἕνα μόνον κοινὸν σημεῖον.*



Σχ. 571.

Ἐὰν τέλος οἱ μέγιστοι κύκλοι τέμνωνται, καὶ αἱ ***σφαῖραι τέμνονται.***

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι αἱ διάφοροι θέσεις δύο σφαιρῶν εἶναι τόσαι, ὅσαι καὶ αἱ διάφοροι θέσεις, τὰς ὁποίας δύνανται νὰ ἔχουν δύο κύκλοι ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου. Ἐπὶ πλέον αἱ σχέσεις ἰσότητος ἢ ἀνισότητος, αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουν μεταξὺ τῆς ἀποστάσεως τῶν κέντρων καὶ τῶν ἀκτίνων τῶν δύο σφαιρῶν, εἶναι αἱ αὐταὶ μὲ ἐκείνας, αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τῶν δύο κύκλων.

853. Θεώρημα. ***Ἐὰν δύο σφαῖραι τέμνωνται, ἡ τομή των εἶναι ἕνας κύκλος, τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία συνδέει τὰ κέντρα των καὶ τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας αὐτῆς.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν Ο καὶ Ο' *(Σχ. 571)* δύο σφαῖραι, αἱ ὁποῖαι τέμνονται.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ τομή των εἶναι κύκλος.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΟΟ', ἡ ὁποία συνδέει τὰ κέντρα των καὶ ἕνα ἐπίπεδον Π, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὴν ΟΟ'. Τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ τέμνει τὰς σφαίρας αὐτὰς κατὰ δύο μεγίστους κύκλους, τῶν ὁποίων αἱ περιφέρειαι τέμνονται εἰς δύο σημεῖα Α καὶ Α', συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν ΟΟ'

Ἐὰν τώρα περιστρέψωμεν τὰ ἡμικύκλια ΒΑΓ καὶ ΔΑΕ περὶ τὴν ΟΟ' μέχρις, ὅτου ἐπανέλθουν εἰς τὴν ἀρχικὴν θέσιν των, αἱ ἡμιπεριφέρειαι τῶν ἡμικυκλίων αὐτῶν θὰ παραγάγουν τὰς ἐπιφανείας τῶν δύο σφαιρῶν Ο καὶ Ο' καὶ τὸ σημεῖον Α θὰ γράψῃ τὴν γραμμὴν τῆς τομῆς των. Ἐπειδή, κατὰ τὴν στροφὴν αὐτήν, ἡ ἀπόστασις ΑΜ τοῦ σημείου Α ἀπὸ τὸν ἄξονα στροφῆς μένει σταθερὰ κατὰ τὸ μέγεθος, τὸ δὲ σημεῖον Μ μένει ὡρισμένον, ἡ τομὴ τῶν δύο σφαιρῶν εἶναι μία περιφέρεια κύκλου, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τὸ σημεῖον Μ καὶ ἀκτῖνα τὴν

ΜΑ καὶ τῆς ὁποίας τὸ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΟΟ'.
Ἀσκήσεις: *2640, 2641, 2642, 2643.*

Ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας

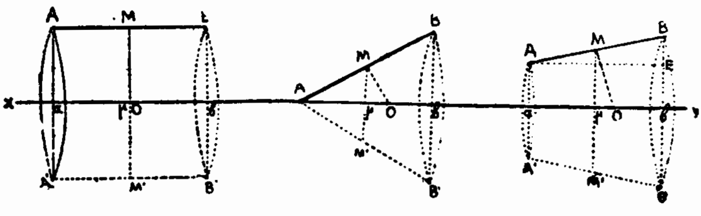
854. Θεώρημα. ***Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν παράγει ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα, τὸ ὁποῖον στρέφεται περὶ ἄξονα, ὁ ὁποῖος κεῖται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ ὁ ὁποῖος δὲν τέμνει τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα, εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς προβολῆς τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ τὸν ἄξονα, ἐπὶ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία ἔχει ὡς ἀκτῖνα τὴν κάθετον, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος μέχρι τοῦ ἄξονος.***

Ἔστω ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ καὶ ἕνας ἄξων xy.

Διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις:

1ον. Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ νὰ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα xy (Σχ. 572 α).

Ὑπόθεσις: Ἔστω ΑΒ ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα, τὸ ὁποῖον στρέφεται περὶ τὸν ἄξονα xy. Ἔστω αβ ἡ προβολὴ τοῦ ΑΒ ἐπὶ τὸν xy



α β γ

Σχ. 572.

καὶ ΜΟ ἡ κάθετος, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ μέσον Μ τοῦ ΑΒ μέχρι τοῦ ἄξονος xy.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν ὅτι:

$$\text{Ἐμβ. ἐπιφ. γραφ. ὑπὸ } AB = 2\pi MO \times \alpha\beta.$$

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β φέρομεν τὰς καθέτους Αα καὶ Ββ ἐπὶ τὴν xy. Τὸ τετράπλευρον ΑαβΒ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἐπομένως ἡ ΑΒ γράφει τὴν ἐπιφάνειαν ἑνὸς κυλίνδρου· ἐπομένως θὰ εἶναι

$$\text{Ἐμβ. ἐπιφ. } AB = 2\pi . A\alpha \times \alpha\beta \qquad (1)$$

Ἀπὸ τὸ μέσον Μ τῆς ΑΒ φέρομεν τὴν κάθετον ΜΟ ἐπὶ τὸν ἄξονα xy

Ἐπειδὴ Αα=ΜΟ, ἡ ἰσότης (1) γράφεται:

$$\text{Ἐμβ. ἐπιφ. } AB = 2\pi . MO \times \alpha\beta.$$

2ον. Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα AB εἶναι πλάγιον πρὸς τὸν ἄξονα xy καὶ συναντᾷ αὐτὸν εἰς τὸ σημεῖον A (Σχ. 572 β).

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὸ σημεῖον B φέρομεν τὴν κάθετον Bβ εἰς τὸν ἄξονα xy. Ἐὰν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον AβB στραφῇ περὶ τὸν ἄξονα xy, ἡ AB θὰ γράψῃ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν κώνου· ἑπομένως θὰ εἶναι:

$$\text{Ἐμβ. ἐπιφ. } AB = \pi . \beta B \times AB.$$

Ἀπὸ τὸ μέσον M τῆς AB φέρομεν τὴν κάθετον Mμ ἐπὶ τὸν ἄξονα xy καὶ τὴν MO κάθετον ἐπὶ τὴν AB, ἡ ὁποία συναντᾷ τὸν ἄξονα εἰς τὸ σημεῖον O.

Ἐπειδὴ βB=2.Mμ, ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται:

$$\text{Ἐμβ. ἐπιφ. } AB = 2\pi . M\mu \times AB \qquad (1)$$

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα AβB καὶ MμO εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους μίαν πρὸς μίαν· ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα αὐτῶν ἔχομεν:

$$\frac{AB}{MO} = \frac{A\beta}{M\mu} \quad \text{ἢ} \quad AB \times M\mu = A\beta \times MO.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὸ γινόμενον Mμ×AB μὲ τὸ ἴσον του Aβ×MO καὶ ἔχομεν:

$$\text{Ἐμβ. ἐπιφ. } AB = 2\pi . A\beta \times MO \quad \text{ἢ} \quad \text{ἐμβ. ἐπιφ. } AB = 2\pi . MO \times A\beta.$$

3ον. Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα AB δὲν συναντᾷ τὸν ἄξονα xy (Σχ. 572 γ).

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὰ σημεῖα A καὶ B φέρομεν τὰς καθέτους Aα καὶ Bβ ἐπὶ τὸν ἄξονα xy. Ἐπίσης ἀπὸ τὸ μέσον M τοῦ AB φέρομεν τὴν κάθετον Mμ ἐπὶ τὸν ἄξονα xy.

Τὸ τετράπλευρον AαβB εἶναι ἕνα ὀρθογώνιον τραπέζιον καὶ ἑπομένως, ἂν στραφῇ περὶ τὸν ἄξονα xy, ἡ πλευρά του AB θὰ γράψῃ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν ἑνὸς κολούρου κώνου.

Γνωρίζομεν (§ 830) ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τῆς περιφερείας τῆς μέσης τομῆς του ἐπὶ τὴν πλευράν του· δηλ θὰ εἶναι:

$$\text{Ἐμβ. ἐπιφ. } AB = 2\pi . M\mu \times AB \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὸ σημεῖον A φέρομεν μίαν παράλληλον AE πρὸς τὸν ἄξονα xy, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν Bβ εἰς τὸ E. Ἐπίσης ἀπὸ τὸ M φέρομεν τὴν κάθετον MO ἐπὶ τὴν AB, ἡ ὁποία συναντᾷ τὸν ἄξονα εἰς τὸ σημεῖον O. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα AEB καὶ MμO εἶναι ὅμοια, διότι αἱ πλευραί των εἶναι κάθετοι μία πρὸς μίαν. Ἀπὸ τὸν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων αὐτῶν θὰ ἔχωμεν: $\frac{AB}{MO} = \frac{AE}{M\mu}$ ἢ $AB \times M\mu = AE \times MO$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (2) τὸ γινόμενον ΑΒ×Μμ μὲ τὸ ἴσον του ΑΕ×ΜΟ καὶ ἔχομεν:

ἐμβ. ἐπιφ. ΑΒ=2π.ΑΕ×ΜΟ.

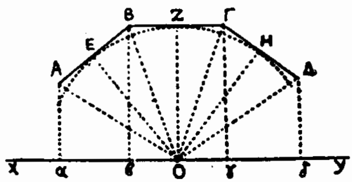
Ἐπειδὴ ΑΕ=αβ, ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται

ἐμβ. ἐπιφ. ΑΒ=2π.ΜΟ×αβ.

Ἐδείχθη λοιπὸν καὶ εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις, ὅτι: ***Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας....***

855. Θεώρημα. ***Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν παράγει μία κανονικὴ κυρτὴ τεθλασμένη γραμμή, ἡ ὁποία στρέφεται περὶ ἄξονα, ὁ ὁποῖος κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου της, καὶ ὁ ὁποῖος διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον της καὶ δὲν τέμνει αὐτήν, εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὴν τεθλασμένην αὐτὴν γραμμήν, ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς γραμμῆς αὐτῆς ἐπὶ τὸν ἄξονα.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω ἡ κανονικὴ κυρτὴ τεθλασμένη γραμμὴ ΑΒΓΔ (*Σχ. 573*), ἡ ὁ ὁποία στρέφεται περὶ τὸν ἄξονα xy, ὁ ὁποῖος διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον της Ο· ἀπὸ τὰ σημεῖα Α, Β. Γ, Δ φέρομεν τὰς καθέτους Αα, Ββ, Γγ, Δδ ἐπὶ τὸν ἄξονα xy· ἐπίσης φέρομεν τὰ ἀποστήματα ΟΕ, ΟΖ, ΟΗ τῶν πλευρῶν τῆς τεθλασμένης αὐτῆς γραμμῆς, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα, δηλ. εἶναι:



Σχ. 573.

ΟΕ=ΟΖ=ΟΗ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν ὅτι

ἐμβ. ἐπιφ. γραφ. ὑπὸ ΑΒΓΔ=2π.ΟΕ×αδ.

Ἀπόδειξις: Τὸ ἐμβαδόν, τὸ ὁποῖον παράγει ἡ τεθλασμένη γραμμὴ ΑΒΓΔ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν, ποὺ παράγουν αἱ πλευραί της ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ· δηλ. θὰ εἶναι:

Ἐμβ. παραγ. ὑπὸ ΑΒΓΔ=ἐμβ.ΑΒ+ἐμβ. ΒΓ+ἐμβ. ΓΔ (1)

Ἀλλά, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, θὰ εἶναι:

Ἐμβ. ΑΒ=2πΟΕ×αβ

Ἐμβ. ΒΓ=2πΟΕ×βγ

Ἐμβ. ΓΔ=2πΟΕ×γδ.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὰ ἐμβ. ΑΒ,.... μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν:

ἐμβ. παραγ. ὑπὸ ΑΒΓΔ$=2\pi$.ΟΕ$\times$αβ$+2\pi$ΟΕ$\times$βγ$+2\pi$ΟΕ$\times$γδ

ἢ ἐμβ. παραγ. ὑπὸ ΑΒΓΔ$=2\pi$.ΟΕ$\times$(αβ$+$βγ$+$γδ)

ἢ ἐμβ. παραγ. ὑπὸ ΑΒΓΔ$=2\pi$.ΟΕ$\times$αδ.

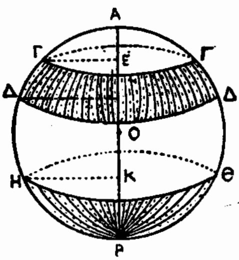
Ἀλλὰ 2π.ΟΕ εἶναι τὸ μῆκος τῆς περιφερείας, τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὴν κανονικὴν τεθλασμένην γραμμὴν καὶ αδ ἡ προβολὴ τῆς τεθλασμένης αὐτῆς γραμμῆς ἐπὶ τὸν ἄξονα xy.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας....***

856. Σφαιρικὴ ζώνη. Ἔστω μία σφαῖρα Ο καὶ ΓΓ', ΔΔ αἱ τομαὶ τῆς σφαίρας αὐτῆς ὑπὸ δύο ἐπιπέδων παραλλήλων. Τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν δύο αὐτῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, λέγεται ***σφαιρικὴ ζώνη.***

Γενικῶς: ***Σφαιρικὴ ζώνη*** *λέγεται τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων.*

Τὰ δύο αὐτὰ παράλληλα ἐπίπεδα τέμνουν τὴν σφαῖραν κατὰ δύο κύκλους ΓΓ' καὶ ΔΔ' *(Σχ. 574)*, τῶν ὁποίων τὰ κέντρα Ε καὶ Ζ κεῖνται ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΑΒ, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰ τέμνοντα ἐπίπεδα καὶ τῶν ὁποίων αἱ ἀκτῖνες εἶναι ἡ ΕΓ καὶ ΖΔ.



Σχ. 574.

Αἱ περιφέρειαι τῶν δύο αὐτῶν κύκλων λέγονται ***βάσεις τῆς σφαιρικῆς ζώνης.***

Μία σφαιρικὴ ζώνη δύναται νὰ παραχθῇ καὶ ἀπὸ ἕνα τόξον τοῦ ἡμικυκλίου, ποὺ παράγει τὴν σφαῖραν, π.χ. τὸ ΓΔ, ἂν τοῦτο στραφῇ περὶ τὴν διάμετρον ΑΒ. Κατὰ τὴν στροφὴν τὸ ἡμικύκλιον ΑΓΔΒ παράγει μίαν σφαῖραν, ἡ ἡμιπεριφέρεια ΑΓΔΒ παράγει τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, τὸ τόξον ΓΔ παράγει τὴν σφαιρικὴν ζώνην καὶ τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ παράγουν τὰς βάσεις τῆς ζώνης.

Ὕψος μιᾶς σφαιρικῆς ζώνης *λέγεται ἡ ἀπόστασις τῶν δύο ἐπιπέδων τῶν βάσεων.*

Π.χ. ὕψος τῆς ζώνης ΓΔΔ'Γ' εἶναι ἡ ἀπόστασις ΕΖ.

Ἐὰν τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα ἐφάπτεται τῆς σφαίρας, ἡ σφαιρικὴ ζώνη ἔχει μίαν μόνον βάσιν· π.χ. ἡ ζώνη ΒΗΘ ἔχει μίαν μόνον βάσιν, τὴν ΗΘ.

Ἡ ζώνη αὐτὴ παράγεται ἀπὸ τὸ τόξον ΒΗ, τὸ ὁποῖον στρέφεται περὶ τὴν διάμετρον ΑΒ.

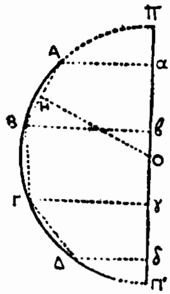
Ὕψος τῆς ζώνης ΒΗΘ εἶναι ἡ ἀπόστασις ΒΚ.

Ἕνα τυχὸν ἐπίπεδον ΓΓ' ὁρίζει δύο σφαιρικὰς ζώνας μὲ μίαν βάσιν: τὴν σφαιρικὴν ζώνην ΑΓΓ' καὶ τὴν σφαιρικὴν ζώνην ΒΓΓ'.

857. Ἐμβαδὸν σφαιρικῆς ζώνης. ***Ἐμβαδὸν μιᾶς σφαιρικῆς ζώνης*** *ὀνομάζομεν τὸ ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν γράφει κανονικὴ κυρτὴ τεθλασμένη γραμμή, ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον γράφει τὴν ζώνην, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς τεθλασμένης αὐτῆς γραμμῆς διπλασιάζεται ἀπεριορίστως.*

858. Πρόβλημα. ***Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς σφαιρικῆς ζώνης, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ὕψος της καὶ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει.***

Ἔστω ΑΔ τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον παράγει μίαν ζώνην. Εἰς τὸ τόξον ΑΔ ἐγγράφομεν μίαν κανονικὴν τεθλασμένην γραμμὴν ΑΒΓΔ.



Σχ. 575.

Γνωρίζομεν, ὅτι τὸ ἐμβαδόν, τὸ ὁποῖον παράγει ἡ τεθλασμένη γραμμὴ ΑΒΓΔ, στρεφομένη περὶ τὴν διάμετρον ΠΠ', εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τῆς περιφερείας, τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὴν γραμμὴν αὐτήν, ἐπὶ τὴν προβολήν της αδ ἐπὶ τὸν ἄξονα· δηλ. εἶναι:

Ἐμβ. παραγ. ὑπὸ ΑΒΓΔ$=2\pi.$ΟΗ$\times$αδ.

Ἐὰν διπλασιάζωμεν ἀπεριορίστως τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τῆς τεθλασμένης γραμμῆς ΑΒΓΔ τότε: τὸ ἀπόστημα ΟΗ ἔχει ὅριον τὴν ἀκτῖνα R τοῦ τόξου, τὸ ὁποῖον παράγει τὴν ζώνην καὶ ἑπομένως τὸ μῆκος $2\pi.$ΟΗ τῆς περιφερείας, τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὴν τεθλασμένην γραμμήν, ἔχει ὅριον τὸ μῆκος $2\pi R$ τῆς περιφερείας ἀκτῖνος R· ἡ προβολὴ αδ τῆς κανονικῆς τεθλασμένης γραμμῆς μένει σταθερὰ καὶ ἴση μὲ τὸ ὕψος τῆς ζώνης· ἑπομένως τὸ ἐμβαδόν, τὸ ὁ ὁποῖον παράγει ἡ τεθλασμένη αὐτὴ γραμμή, ἔχει ὅριον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ $2\pi R\times$υ.

Ἀλλὰ τὸ ὅριον αὐτὸ εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ, τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ζώνης· δηλ. εἶναι: **Ἐμβ. σφαιρ. ζώνης$=2\pi R\times$υ**

Ὥστε: ***Τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς σφαιρικῆς ζώνης εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τῆς περιφερείας ἑνὸς μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει, ἐπὶ τὸ ὕψος τῆς ζώνης.***

859. Πόρισμα I. ***Δύο ἰσοϋψεῖς ζῶναι τῆς αὐτῆς σφαίρας, ἢ ἴσων σφαιρῶν, εἶναι ἰσοδύναμοι.***

Διότι ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν.

860. Πόρισμα II. ***Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ζωνῶν τῆς αὐτῆς σφαίρας, ἢ ἴσων σφαιρῶν, εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν ὑψῶν των.***

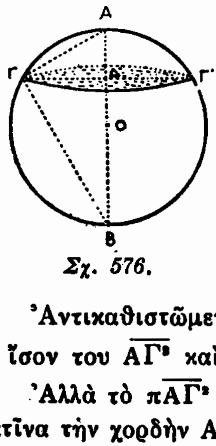
Ἀπόδειξις: Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ E καὶ E′ τὰ ἐμβαδὰ δύο ζωνῶν τῆς αὐτῆς σφαίρας ἀκτῖνος R καὶ μὲ υ καὶ υ′ τὰ ὕψη των, ἀντιστοίχως, θὰ ἔχωμεν : $E=2\pi R\upsilon$ καὶ $E'=2\pi R\upsilon'$.

Διαιροῦμεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν :

$$\frac{E}{E'}=\frac{2\pi R\upsilon}{2\pi R\upsilon'} \quad ἢ \quad \frac{E}{E'}=\frac{\upsilon}{\upsilon'}.$$

861. Πόρισμα III. ***Μία σφαιρικὴ ζώνη μὲ μίαν βάσιν εἶναι ἰσοδύναμος μὲ κύκλον, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα τὴν χορδὴν τοῦ τόξου, τὸ ὁποῖον παράγει τὴν ζώνην.***

Ἔστω ΑΓΓ′ μία ζώνη, μὲ μίαν βάσιν, τὴν ὁποίαν παράγει τόξον ΑΓ, ἂν τοῦτο στραφῇ περὶ τὴν διάμετρον ΑΒ τῆς σφαίρας Ο, ἀκτῖνος R. Τὸ ὕψος τῆς ζώνης αὐτῆς εἶναι τὸ ΑΔ. Θὰ εἶναι λοιπὸν



Σχ. 576.

$$ἐμβ.\ ζών.\ ΑΓΓ'=2\pi R\times ΑΔ.$$

Ἐπειδὴ 2R=ΑΒ, ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται $ἐμβ.ζών.ΑΓΓ'=\pi\times ΑΒ\times ΑΔ$ (1)

Ἐὰν φέρωμεν τὰς χορδὰς ΑΓ καὶ ΓΒ σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΓΔ ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἔχομεν : $\overline{ΑΓ}^2=ΑΒ\times ΑΔ$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὸ γινόμενον ΑΒ×ΑΔ μὲ τὸ ἴσον του $\overline{ΑΓ}^2$ καὶ ἔχομεν: $ἐμβ.\ ζών.\ ΑΓΓ'=\pi\overline{ΑΓ}^2$.

Ἀλλὰ τὸ $\pi\overline{ΑΓ}^2$ παριστάνει τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα τὴν χορδὴν ΑΓ.

Ἀσκήσεις: *2644 2645, 2646, 2647, 2648, 2649, 2650, 2651, 2652, 2653, 2654.*

862. Ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας σφαίρας. Ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς σφαίρας δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μία ζώνη, τῆς ὁποίας τὸ ὕψος εἶναι ἴσον μὲ τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας. Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$Ἐμβ.ἐπιφ.σφαίρ.=2\pi R\times 2R \quad ἢ \quad \boxed{\textbf{Ἐμβ. ἐπιφ. σφαίρ.}=4\pi R^2}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι:

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς μεγίστου κύκλου της.

863. Πόρισμα. ***Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἐπιφανειῶν δύο σφαιρῶν εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ἀκτίνων των.***

Ἀπόδειξις: Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ E καὶ E′ τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἐπιφανειῶν δύο σφαιρῶν, ἀκτίνων R καὶ R′, θὰ ἔχωμεν:

$$E=4\pi R^2 \quad \text{καὶ} \quad E'=4\pi R'^2.$$

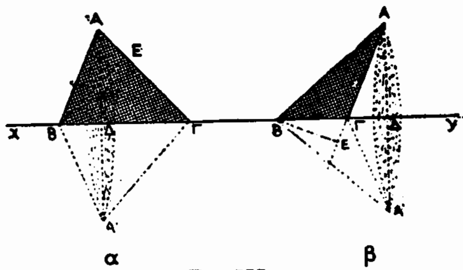
Διαιροῦμεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν:

$$\frac{E}{E'}=\frac{4\pi R^2}{4\pi R'^2} \quad \text{ἢ} \quad \frac{E}{E'}=\frac{R^2}{R'^2}.$$

Ἀσκήσεις: *2655, 2656, 2657, 2658, 2659, 2660, 2661, 2662, 2663, 2664, 2665, 2666, 2667, 2668, 2669, 2670, 2671, 2672.*

Ὄγκος σφαίρας

864. Θεώρημα. ***Ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, τὸ ὁποῖον παράγει ἕνα τρίγωνον, τὸ ὁποῖον στρέφεται περὶ ἄξονα, ὁ ὁποῖος κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου, διέρχεται ἀπὸ μίαν κορυφήν του καὶ δὲν τέμνει αὐτό, εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν παράγει ἡ πλευρὰ τοῦ τριγώνου, ἡ ὁποία εὑρίσκεται ἀπέναντι τῆς κορυφῆς, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸν ἄξονα, ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ἀντιστοίχου, πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτήν, ὕψους τοῦ τριγώνου.***



Σχ. 577.

Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον στρέφεται περὶ ἄξονα xy, ὁ ὁποῖος κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου καὶ διέρχεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν τοῦ Β. Φέρομεν τὸ ὕψος ΒΕ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\text{ὄγκ. παραγ. τρ.} \, AB\Gamma = \text{ἐμβ. ἐπιφ. γραφ.} \, A\Gamma \times \frac{BE}{3}.$$

Διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις:

1ον. Μία πλευρὰ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, π.χ. ἡ ΒΓ, κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος xy. (Σχ. 577).

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὰ ὕψη ΑΔ καὶ ΒΕ τοῦ τριγώνου. Ἐὰν αἱ γωνίαι Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου εἶναι ὀξεῖαι *(Σχ. 577 α)*, ὁ ὄγκος τὸν ὁποῖον παράγει τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, στρεφόμενον περὶ τὸν ἄξονα xy, εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν κώνων, ποὺ παράγουν τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ. Ἐὰν ὅμως μία ἀπὸ τὰς γωνίας Β καὶ Γ εἶναι ἀμβλεῖα, π.χ. ἡ Γ, *(Σχ. 577 β)*, τότε ὁ ὄγκος, τὸν ὁποῖον παράγει τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἴσος μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ὄγκων τῶν δύο αὐτῶν κώνων.

Ἐὰν λοιπὸν αἱ γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι ὀξεῖαι θὰ εἶναι:

$$\text{ὄγκ. παραγ. τριγ.} \, ΑΒΓ = \text{ὄγκ. κών.} \, ΒΑΑ' + \text{ὄγκ. κών.} \, ΓΑΑ' \quad (1)$$

Ἐπειδὴ $\text{ὄγκ. κών.} \, ΒΑΑ' = \frac{1}{3}\pi \overline{ΑΔ}^2 \times ΒΔ$

$\text{ὄγκ. κών.} \, ΓΑΑ' = \frac{1}{3}\pi \overline{ΑΔ}^2 \times ΓΔ$

ἡ ἰσότης (1) γράφεται:

$$\text{ὄγκος παραγ. τριγ.} \, ΑΒΓ = \frac{1}{3}\pi \overline{ΑΔ}^2 \times ΒΔ + \frac{1}{3}\pi \overline{ΑΔ}^2 \times ΓΔ$$

ἢ $\text{ὄγκος παραγ. τριγ.} \, ΑΒΓ = \frac{1}{3}\pi \overline{ΑΔ}^2 (ΒΔ + ΓΔ)$

ἢ $\text{ὄγκος παραγ. τριγ.} \, ΑΒΓ = \frac{1}{3}\pi \overline{ΑΔ}^2 \times ΒΓ.$

Ἐὰν ἡ γωνία Γ εἶναι ἀμβλεῖα, θὰ εἶναι:

$$\begin{aligned} \text{ὄγκος παραγ. τριγ.} \, ΑΒΓ &= \text{ὄγκ. κών.} \, ΒΑΑ' - \text{ὄγκ. κών.} \, ΓΑΑ' \\ &= \frac{1}{3}\pi \overline{ΑΔ}^2 \times ΒΔ - \frac{1}{3}\pi \overline{ΑΔ}^2 \times ΓΔ \\ &= \frac{1}{3}\pi \overline{ΑΔ}^2 (ΒΔ - ΓΔ) \\ &= \frac{1}{3}\pi \overline{ΑΔ}^2 \times ΒΓ. \end{aligned}$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις εὑρίσκομεν, ὅτι:

$$\text{ὄγκ. παραγ. τριγ.} \, ΑΒΓ = \frac{1}{3}\pi \overline{ΑΔ}^2 \times ΒΓ \quad (2)$$

Ἀλλὰ τὰ γινόμενα ΒΓ×ΑΔ καὶ ΑΓ×ΒΕ εἶναι ἴσα, διότι παριστάνουν τὸ διπλάσιον ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ἀντικαθιστῶμεν λοιπὸν εἰς τὴν ἰσότητα (2) τὸ γινόμενον ΒΓ×ΑΔ μὲ τὸ ἴσον του ΑΓ×ΑΕ καὶ ἔχομεν:

$$\text{ὄγκ. παραγ. τριγ.} \, ΑΒΓ = \frac{1}{3}\pi ΑΔ \times ΑΓ \times ΒΕ \quad (3)$$

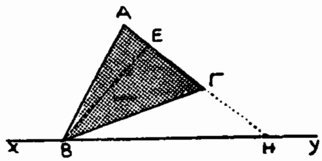
Ἀλλὰ τὸ γινόμενον πΑΔ×ΑΓ παριστάνει τὸ ἐμβαδόν, τὸ ὁποῖον γράφει ἡ πλευρὰ ΑΓ ἑνὸς κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα τὴν ΑΔ καὶ πλευρὰν τὴν ΑΓ, δηλ. εἶναι:

$$\text{ἐμβ. ἐπιφ. γραφ. ΑΓ} = \pi\text{ΑΔ}\times\text{ΑΓ}.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (3) τὸ γινόμενον πΑΔ×ΑΓ μὲ τὸ ἴσον του: ἐμβ. ἐπιφ. γραφ. ΑΓ, καὶ ἔχομεν:

$$\text{ὄγκ. παραγ. τριγ. ΑΒΓ} = \text{ἐμβ. ἐπιφ. γραφ. ΑΓ}\times\frac{\text{ΒΕ}}{3}.$$

2ον. Ἡ πλευρὰ ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, προεκτεινομένη, συναντᾷ τὸν ἄξονα εἰς ἕνα σημεῖον Η. (Σχ. 578).



Σχ. 578.

Ὁ ὄγκος τὸν ὁποῖον παράγει τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, στρεφόμενον περὶ τὸν ἄξονα xy, εἶναι ἴσος μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ὄγκων, ποὺ παράγουν τὰ τρίγωνα ΑΒΗ καὶ ΓΒΗ, δηλ. εἶναι:

$$\text{ὄγκ. παραγ. τριγ. ΑΒΓ} = \text{ὄγκ. παραγ. τρ. ΑΒΗ} - \text{ὄγκ. παραγ. τρ. ΓΒΗ} \qquad (4)$$

Ἐπειδή, κατὰ τὴν προηγουμένην περίπτωσιν, εἶναι:

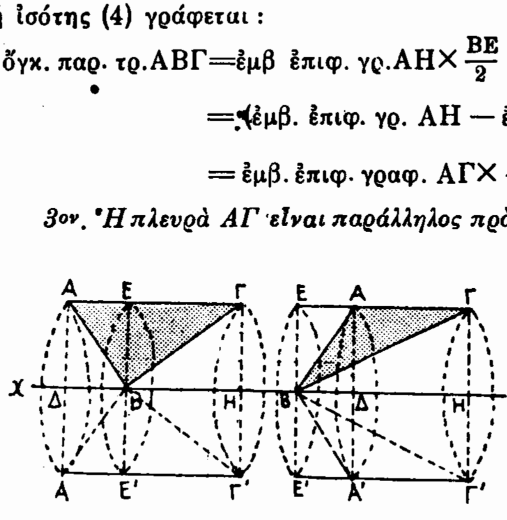
$$\text{ὄγκ. παραγ. τριγ. ΑΒΗ} = \text{ἐμβ. ἐπιφ. γραφ. ΑΗ}\times\frac{\text{ΒΕ}}{3}$$

καὶ
$$\text{ὄγκ. παραγ. τριγ. ΓΒΗ} = \text{ἐμβ. ἐπιφ γραφ. ΓΗ}\times\frac{\text{ΒΕ}}{3},$$

ἡ ἰσότης (4) γράφεται:

$$\text{ὄγκ. παρ. τρ. ΑΒΓ} = \text{ἐμβ ἐπιφ. γρ. ΑΗ}\times\frac{\text{ΒΕ}}{2} - \text{ἐμβ. ἐπιφ. γρ. ΓΗ}\times\frac{\text{ΒΕ}}{3}$$
$$= (\text{ἐμβ. ἐπιφ. γρ. ΑΗ} - \text{ἐμβ. ἐπιφ. γρ. ΓΗ})\times\frac{\text{ΒΕ}}{3}$$
$$= \text{ἐμβ. ἐπιφ. γραφ. ΑΓ}\times\frac{\text{ΒΕ}}{3}.$$

3ον. Ἡ πλευρὰ ΑΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα xy (Σχ. 575).



Σχ. 579.

Φέρομεν τὸ ὕψος ΒΕ καὶ τὰς καθέτους ΑΔ, ΓΗ ἐπὶ τὸν ἄξονα xy. Ὁ ὄγκος τὸν ὁποῖον παράγει τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, στρεφόμενον περὶ τὸν ἄξονα xy, εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα *(Σχ. 579α)* ἢ μὲ τὴν διαφορὰν *(Σχ. 579β)* τῶν ὄγκων, ποὺ

παράγουν τὰ τρίγωνα ΒΕΓ καὶ ΒΕΑ, καθόσον τὸ σημεῖον Ε πίπτει ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΓ ἢ ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς της.

Θὰ εἶναι λοιπὸν *(Σχ. 579α)*

ὄγκ. παραγ. τριγ.ΑΒΓ=ὄγκ. παρ. τριγ. ΒΕΓ+ὄγκ. παρ. τρ. ΒΕΑ (5).

Ἐπειδὴ ὄγκ. παρ. τρ ΒΕΓ=ὄγκ.κυλίνδ.ΕΓΓ'Ε'—ὄγκ.κών.ΒΓΒ'

$$= \pi\overline{\mathrm{BE}}^2\times \mathrm{E\Gamma} - \frac{1}{3}\pi\overline{\mathrm{BE}}^2\times \mathrm{E\Gamma}$$

$$= \frac{2}{3}\pi\overline{\mathrm{BE}}^2\times \mathrm{E\Gamma}$$

καὶ ὄγκ. παρ. τριγ. ΒΕΑ=ὄγκ.κυλίνδ.ΑΕΕ'Α'—ὄγκ.κών.ΒΑΑ'

$$= \pi\overline{\mathrm{BE}}^2\times \mathrm{AE} - \frac{1}{3}\pi\overline{\mathrm{BE}}^2\times \mathrm{AE}$$

$$= \frac{2}{3}\pi\overline{\mathrm{BE}}^2\times \mathrm{AE},$$

ἡ ἰσότης (5) γράφεται:

$$\text{ὄγκ. παραγ. τριγ. ΑΒΓ} = \frac{2}{3}\pi\overline{\mathrm{BE}}^2\times \mathrm{E\Gamma} + \frac{2}{3}\pi\overline{\mathrm{BE}}^2\times \mathrm{AE}$$

$$= \frac{2}{3}\pi\overline{\mathrm{BE}}^2\times (\mathrm{E\Gamma}+\mathrm{AE})$$

$$= \frac{2}{3}\pi\overline{\mathrm{BE}}^2\times \mathrm{A\Gamma}.$$

Ἐὰν τὸ σημεῖον Ε κεῖται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΓ *(Σχ. 578β)* εὑρίσκομεν, ὅτι:

$$\text{ὄγκ. παραγ. τριγ.ΑΒΓ} = \frac{2}{3}\pi\overline{\mathrm{BE}}^2\times (\mathrm{E\Gamma}-\mathrm{AE})$$

$$= \frac{2}{3}\pi\overline{\mathrm{BE}}^2\times \mathrm{A\Gamma}.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις εὑρίσκομεν, ὅτι:

$$\text{ὄγκ. παραγ. τριγ.ΑΒΓ} = \frac{2}{3}\pi\overline{\mathrm{BE}}^2\times \mathrm{A\Gamma}$$

ἢ
$$\text{ὄγκ. παραγ. τριγ.ΑΒΓ} = 2\pi \mathrm{BE}\times \mathrm{A\Gamma}\times \frac{\mathrm{BE}}{3} \qquad (6)$$

Ἀλλὰ τὸ γινόμενον 2π.ΒΕ×ΑΓ παριστάνει τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα τὴν ΒΕ καὶ ὕψος τὸ ΑΓ καὶ τὸ ὁποῖον ἐμβαδὸν γράφει ἡ πλευρὰ ΑΓ, κατὰ τὴν στροφήν της, δηλ. εἶναι: 2π.ΒΕ×ΑΓ=ἐμβ. ἐπιφ. ΑΓ.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (6) τὸ γινόμενον 2π.ΒΕ×ΑΓ μὲ τὸ ἴσον του καὶ ἔχομεν:

$$\text{ὄγκ. παραγ. τριγ. ΑΒΓ=ἐμβ. ἐπιφ. γραφ. ΑΓ}\times \frac{\mathrm{BE}}{3}.$$

Ἐδείχθη λοιπὸν καὶ εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις, ὅτι: ***Ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ. . . .***

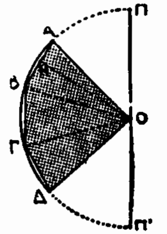
865. Πολυγωνικὸς τομεύς. *Πολυγωνικὸς τομεὺς λέγεται μία ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία περιέχεται μεταξὺ μιᾶς πολυγωνικῆς γραμμῆς ἐγγεγραμμένης εἰς ἕνα κύκλον καὶ τῶν ἀκτίνων τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, αἱ ὁποῖαι καταλήγουν εἰς τὰ ἄκρα τῆς γραμμῆς αὐτῆς.*

Π.χ. τὸ σχῆμα ΟΑΒΓΔΟ *(Σχ. 580)* εἶναι ἕνας πολυγωνικὸς τομεύς.

Ὁ ***πολυγωνικὸς τομεὺς λέγεται κανονικός***, *ἐὰν ἡ τεθλασμένη γραμμή, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ τὴν βάσιν του εἶναι κανονική.*

866. Θεώρημα. ***Ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, τὸ ὁποῖον παράγει ἕνας κανονικὸς πολυγωνικὸς τομεύς, ὁ ὁποῖος στρέφεται περὶ μίαν διάμετρον, ἡ ὁποία δὲν τέμνει αὐτόν, εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν γράφει ἡ πολυγωνικὴ γραμμή, ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ἀποστήματός της.***

Ὑπόθεσις: Ἔστω ὁ κανονικὸς πολυγωνικὸς τομεὺς ΟΑΒΓΔΟ *(Σχ. 580)*, ὁ ὁποῖος στρέφεται περὶ τὴν διάμετρον ΠΟΠ'. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΟΒ καὶ ΟΓ καὶ χωρίζεται ὁ πολυγωνικὸς τομεὺς εἰς τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΔ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα καὶ ἑπομένως τὰ ὕψη των εἶναι ἴσα μὲ τὸ ἀπόστημα ΟΗ τοῦ πολυγωνικοῦ τομέως.



Σχ. 580.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν ὅτι:

$$\text{ὄγκ. παρ. ΟΑΒΓΔΟ} = \text{ἐπιφ. γρ. ΑΒΓΔ} \times \frac{ΟΗ}{3}.$$

Ἀπόδειξις: Ὁ ὄγκος, τὸν ὁποῖον παράγει ὁ πολυγωνικὸς αὐτὸς τομεύς, ἂν στραφῇ περὶ τὴν διάμετρον ΠΟΠ', εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων, ποὺ παράγουν τὰ τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΔ· δηλ. εἶναι:

$$\text{ὄγκ. παρ. ΟΑΒΓΔΟ} = \text{ὄγκ. παρ. τρ.ΟΑΒ} + \text{ὄγκ. παρ. τρ.ΟΒΓ} + \text{ὄγκ. παρ.τρ.ΟΓΔ} \quad (1)$$

Ἐπειδὴ

$$\text{ὄγκ. παραγ. τριγ. ΟΑΒ} = \text{ἐπιφ. γρ. ΑΒ} \times \frac{ΟΗ}{3}$$

$$\text{ὄγκ. παραγ. τριγ. ΟΒΓ} = \text{ἐπιφ. γρ. ΒΓ} \times \frac{ΟΗ}{3}$$

$$\text{ὄγκ. παραγ. τριγ. ΟΓΔ} = \text{ἐπιφ. γρ. ΓΔ} \times \frac{ΟΗ}{3}$$

ἡ ἰσότης (1) γράφεται:

$$\text{ὄγκ.παρ.ΟΑΒΓΔΟ} = \text{ἐπιφ.γρ.ΑΒ} \times \frac{ΟΗ}{3} + \text{ἐπιφ.γρ.ΒΓ} \times \frac{ΟΗ}{3} + \text{ἐπιφ.γρ.ΓΔ} \times \frac{ΟΗ}{3}$$

$$= (\text{ἐπιφ. γρ. ΑΒ} + \text{ἐπιφ. γρ. ΒΓ} + \text{ἐπιφ. γρ. ΓΔ}) \times \frac{ΟΗ}{3}$$

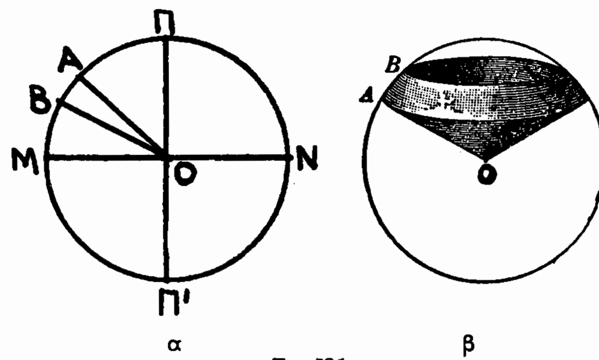
$$= \text{ἐπιφ. γραφ. ΑΒΓΔ} \times \frac{ΟΗ}{3}.$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, τὸ ὁποῖον παράγει...***

867. Σφαιρικὸς τομεύς. Ἔστω τὸ ἡμικύκλιον ΠΑΠ′ *(Σχ. 581)* καὶ ΟΑΒΟ ἕνας κυκλικὸς τομεύς. Ἐὰν τὸ ἡμικύκλιον στραφῇ περὶ τὴν διάμετρον ΠΟΠ′ κατὰ ὁλόκληρον στροφήν, ὁ κυκλικὸς τομεὺς παράγει ἕνα στερεόν, τὸ ὁποῖον λέγεται ***σφαιρικὸς τομεύς.***

Γενικῶς: ***Σφαιρικὸς τομεὺς*** *λέγεται τὸ στερεόν, τὸ ὁποῖον παράγεται ἀπὸ ἕνα κυκλικὸν τομέα, ὁ ὁποῖος στρέφεται, κατὰ ὁλόκληρον στροφήν, περὶ μίαν διάμετρον, ἡ ὁποία δὲν τέμνει αὐτόν.*

Ὁ σφαιρικὸς αὐτὸς τομεὺς περιέχεται μεταξὺ τῶν κώνων, τοὺς ὁποίους παράγουν αἱ ἀκτῖνες ΟΑ καὶ ΟΒ *(Σχ. 581)*, καὶ τῆς σφαι-



Σχ. 581.

ρικῆς ζώνης τὴν ὁποίαν παράγει τὸν τόξον ΑΒ. *Ἡ ζώνη αὐτὴ λέγεται* ***βάσις τοῦ σφαιρικοῦ τομέως.***

868. Ὄγκος σφαιρικοῦ τομέως. ***Ὄγκον σφαιρικοῦ τομέως,*** *τὸν ὁποῖον παράγει ἕνας κυκλικὸς τομεύς, στρεφόμενος περὶ μίαν διάμετρον, ὀνομάζομεν τὸ ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ὁ ὄγκος, τὸν ὁποῖον παράγει ἕνας κανονικὸς πολυγωνικὸς τομεύς, ἐγγεγραμμένος εἰς τὸν κυκλικὸν τομέα καὶ ὁ ὁποῖος στρέφεται περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς κανονικῆς τεθλασμένης γραμμῆς τοῦ πολυγωνικοῦ τομέως διπλασιάζεται ἀπεριορίστως.*

869. Πρόβλημα. ***Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος ἑνὸς σφαιρικοῦ τομέως.***

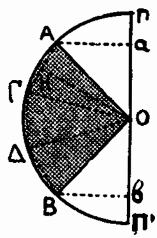
Ἔστω ΟΑΒΟ ἕνας κυκλικὸς τομεύς, ὁ ὁποῖος, στρεφόμενος περὶ τὴν διάμετρον ΠΟΠ′, παράγει ἕνα σφαιρικὸν τομέα *(Σχ. 582)*. Ἐγγράφομεν εἰς τὸ τόξον ΑΒ τοῦ κυκλικοῦ τομέως μίαν κανονικὴν τεθλασμένην γραμμὴν ΑΓΔΒ καὶ ἔστω ΟΗ τὸ ἀπόστημά της.

Ἐὰν ὁ πολυγωνικὸς τομεὺς ΟΑΓΔΒΟ στραφῇ περὶ τὴν διάμε-

τρον ΠΟΠ', θὰ παραγάγῃ ἕνα στερεόν, τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν γράφει ἡ τεθλασμένη γραμμὴ ΑΓΔΒ ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ἀποστήματος ΟΗ· δηλ. εἶναι

$$\text{ὄγκ. πολυγ. τομ. ΟΑΓΔΒΟ} = \text{ἐμβ. ἐπιφ. ΑΓΔΒ} \times \frac{\text{ΟΗ}}{3}.$$

Ἐὰν διπλασιάζωμεν ἀπεριορίστως τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τῆς κανονικῆς τεθλασμένης γραμμῆς ΑΓΔΒ, τότε ἡ πολυγωνικὴ αὐτὴ γραμμὴ ἔχει ὅριον τὸ τόξον ΑΒ, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένη καὶ ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν γράφει, ἔχει ὅριον τὸ ἐμβαδὸν τῆς ζώνης, τὴν ὁποίαν παράγει τὸ τόξον ΑΒ Ἐξ ἄλλου τὸ ἀπόστημα ΟΗ ἔχει ὅριον τὴν ἀκτῖνα R τῆς σφαίρας. Ὥστε ὁ ὄγκ. πολυγ. τομ. ΟΑΓΔΒΟ ἔχει ὅριον τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ζώνης ΑΒ ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος. Ἀλλὰ αὐτὸ τὸ ὅριον εἶναι, ἐξ ὁρισμοῦ, ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τομέως καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι:



Σχ. 582.

$$\text{Ὄγκ. σφαιρ. τομ.} = \text{ἐμβ. ζών. ΑΒ} \times \frac{R}{3}.$$

Ἐπειδὴ τὸ ἐμβαδὸν ζώνης ΑΒ παριστάνει τὴν βάσιν τοῦ σφαιρικοῦ τομέως, συνάγομεν, ὅτι:

Ὁ ὄγκος ἑνὸς σφαιρικοῦ τομέως εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ R τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας καὶ μὲ υ τὸ ὕψος τῆς ζώνης ΑΒ, ἡ ὁποία λαμβάνεται, ὡς βάσις τοῦ σφαιρικοῦ τομέως, θὰ εἶναι: $\text{Ἐμβ. ζών. ΑΒ} = 2\pi R\upsilon$

καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι:

$$\text{Ὄγκ. σφαιρ. τομ.} = 2\pi R\upsilon \times \frac{R}{3} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\text{ὄγκ. σφαιρ. τομ.} = \frac{2}{3}\pi R^2\upsilon}.$$

870. Ὄγκος σφαίρας. ***Ὁ ὄγκος σφαίρας ἀκτῖνος R εἶναι ἴσος μὲ $\frac{4}{3}\pi R^3$.***

Ἀπόδειξις: Ἡ σφαῖρα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἕνας σφαιρικὸς τομεύς, ὁ ὁποῖος ἔχει, ὡς ἀντίστοιχον κυκλικὸν τομέα, ἕνα ἡμικύκλιον, τὸ ὁποῖον στρέφεται περὶ τὴν διάμετρόν του. Ἀλλὰ τότε τὸ ἡμικύκλιον παράγει τὴν σφαῖραν. Ἑπομένως, ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον μιᾶς σφαίρας, πρέπει νὰ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸν τύπον, ὁ ὁποῖος δίδει τὸν ὄγκον ἑνὸς σφαιρικοῦ τομέως, τὸ ὕψος υ μὲ 2R καὶ ἑπομένως θὰ ἔχωμεν:

$$\text{Ὄγκ. σφαίρας} = \frac{2}{3}\pi R^2 . 2R \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\text{ὄγκ. σφαίρας} = \frac{4}{3}\pi R^3}.$$

871. Πόρισμα I. ***Ὁ ὄγκος σφαίρας διαμέτρου Δ εἶναι ἴσος μὲ $\frac{1}{6}\pi\Delta^3$.***

Ἀπόδειξις: Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸν προηγούμενον τύπον, ὁ ὁποῖος δίδει τὸν ὄγκον μιᾶς σφαίρας, τὴν ἀκτῖνα R μὲ $\frac{\Delta}{2}$, θὰ ἔχωμεν:

$$\text{Ὄγκ. σφαίρας} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\Delta}{2}\right)^3 \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\text{ὄγκ. σφαίρας} = \frac{1}{6}\pi\Delta^3}.$$

872. Πόρισμα II. ***Ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο σφαιρῶν εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν κύβων τῶν ἀκτίνων των*** *(ἢ τῶν διαμέτρων των).*

Ἀπόδειξις: Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ R καὶ R′ τὰς ἀκτῖνας δύο σφαιρῶν καὶ μὲ V καὶ V′ τοὺς ὄγκους των, θὰ ἔχωμεν:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{καὶ} \quad V = \frac{4}{3}\pi R'^3.$$

Διαιροῦμεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν:

$$\frac{V}{V'} = \frac{\pi R^3}{\pi R'^3} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\frac{V}{V'} = \frac{R^3}{R'^3}}.$$

Ἀσκήσεις: 2673, 2674, 2675, 2676, 2677, 2678, 2679, 2680.

Σφαιρικὸς δακτύλιος

873. Σφαιρικὸς δακτύλιος. Ἔστω ἕνα ἡμικύκλιον ΠΑΠ′ *(Σχ. 583)* καὶ ΑΜΒΑ ἕνα κυκλικὸν τμῆμα. Ἂν τὸ ἡμικύκλιον αὐτὸ στραφῇ περὶ τὴν διάμετρον ΠΟΠ′ κατὰ ὁλόκληρον στροφήν, τὸ κυκλικὸν τμῆμα θὰ παραγάγῃ ἕνα στερεόν, τὸ ὁποῖον λέγεται ***σφαιρικὸς δακτύλιος.*** Τὸ στερεὸν αὐτὸ ἔχει ὡς ἐξωτερικὴν ἐπιφάνειαν τὴν σφαιρικὴν ζώνην, ποὺ γράφει τὸ τόξον ΑΜΒ, καὶ ὡς ἐσωτερικὴν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κολούρου κώνου, ποὺ γράφει τὸ τραπέζιον ΑΒβα.

Γενικῶς: ***Σφαιρικὸς δακτύλιος λέγεται*** *τὸ στερεόν, ποὺ παράγεται ἀπὸ ἕνα κυκλικὸν τμῆμα, τὸ ὁποῖον στρέφεται περὶ μίαν διάμετρον τοῦ κύκλου εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει καὶ ἡ ὁποία δὲν τέμνει αὐτό.*

874. Πρόβλημα. ***Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος ἑνὸς σφαιρικοῦ δακτυλίου.***

Ἔστω τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΑΜΒΑ *(Σχ. 583)* τὸ ὁποῖον στρεφό-

μενον περὶ τὴν διάμετρον ΠΠ′ παράγει ἕνα σφαιρικὸν δακτύλιον. Ἐὰν φέρωμεν τὰς ἀκτῖνας ΟΑ καὶ ΟΒ παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ δακτυλίου θὰ εὑρεθῇ, ἐὰν ἀπὸ τὸν ὄγκον τοῦ σφαιρικοῦ τομέως, ποὺ παράγει ὁ κυκλικὸς τομεὺς ΟΑΜΒΟ, ἀφαιρέσωμεν τὸν ὄγκον τοῦ στερεοῦ, ποὺ παράγει τὸ τρίγωνον ΟΑΒ· δηλ. εἶναι:

Ὄγκ.σφ.δακτ.ΑΜΒΑ=ὄγκ.σφ.τομ.ΟΑΜΒΟ—ὄγκ.παρ.τριγ.ΟΑΒ (1)

Ἐὰν αβ εἶναι ἡ προβολὴ τῆς χορδῆς ΑΒ ἐπὶ τὴν διάμετρον ΠΠ′, θὰ εἶναι (869)

ὄγκ. σφαιρ. τομ.ΟΑΜΒΟ$=\frac{2}{3}\pi R^2\times\alpha\beta$.

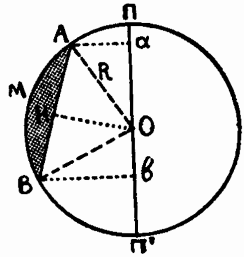
Ἐὰν φέρωμεν τὴν κάθετον ΟΗ ἐπὶ τὴν χορδὴν ΑΒ, θὰ εἶναι (§ 864)

ὄγκ. παραγ. τριγ.ΟΑΒ=ἐμβ. ἐπιφ.ΑΒ$\times\frac{OH}{3}$

καὶ ἐπειδὴ (§ 854)

ἐμβ. ἐπιφ.ΑΒ$=2\pi.OH\times\alpha\beta$

θὰ εἶναι:



Σχ. 583.

ὄγκ. παραγ. τριγ. ΟΑΒ$=2\pi.OH\times\alpha\beta\times\frac{OH}{3}$

$=\frac{2}{3}\pi\overline{OH}^2\times\alpha\beta$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τά: ὄγκ. σφ. τομ.ΟΑΜΒΟ καὶ ὄγκ. παρ. τριγ. ΟΑΒ, μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν:

ὄγκ. σφαιρ. δακτ.ΑΜΒΑ$=\frac{2}{3}\pi R^2\times\alpha\beta-\frac{2}{3}\pi\overline{OH}^2\times\alpha\beta$

$=\frac{2}{3}\pi\times\alpha\beta\times(R^2-\overline{OH}^2)$ (2)

Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΗΑ ἔχομεν:

$R^2-\overline{OH}^2=\overline{HA}^2$ ἢ $R^2-\overline{OH}^2=\frac{\overline{AB}^2}{4}$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (2) τὴν διαφορὰν $R^2-\overline{OH}^2$ μὲ τὸ ἴσον της καὶ ἔχομεν:

Ὄγκ. σφαιρ. δακτ. ΑΜΒΑ$=\frac{2}{3}\pi\times\alpha\beta\times\frac{\overline{AB}^2}{4}$

ἢ **ὄγκ. σφαιρ. δακτ.ΑΜΒΑ$=\frac{1}{6}\pi\overline{AB}^2\times\alpha\beta$**.

Ἐπειδὴ τὸ $\pi\overline{AB}^2\times\alpha\beta$ παριστάνει τὸν ὄγκον ἑνὸς κυλίνδρου, ποὺ ἔχει ἀκτῖνα τὴν χορδὴν ΑΒ καὶ ὕψος τὴν προβολὴν αβ τῆς χορδῆς αὐτῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον ΠΠ′, συνάγομεν, ὅτι:

Ὁ ὄγκος ἑνὸς σφαιρικοῦ δακτυλίου εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἕκτον τοῦ ὄγκου τοῦ κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα τὴν χορδὴν τοῦ κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον παράγει τὸν σφαιρικὸν δακτύλιον καὶ ὕψος τὴν προβολὴν τῆς χορδῆς αὐτῆς ἐπὶ τὸν ἄξονα στροφῆς.

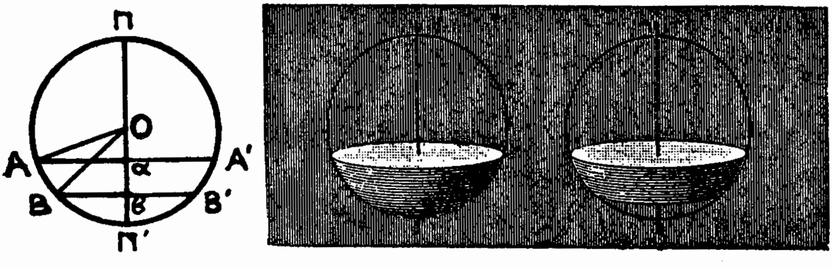
Ἀσκήσεις: 2681, 2682, 2683, 2684, 2685, 2686.

Σφαιρικὸν τμῆμα

875. Σφαιρικὸν τμῆμα. ***Σφαιρικὸν τμῆμα*** *λέγεται τὸ μέρος τῆς σφαίρας, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων, τὰ ὁποῖα τέμνουν τὴν σφαῖραν.*

Οἱ δύο κύκλοι τομῆς τῆς σφαίρας ὑπὸ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων λέγονται ***βάσεις τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος.***

Ἡ ἀπόστασις τῶν βάσεων τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος λέγεται ***ὕψος*** *αὐτοῦ.*



Σχ. 584.

Π.χ. τὸ τμῆμα ΑΒΒ'Α' τῆς σφαίρας Ο *(Σχ. 584)* εἶναι ἕνα σφαιρικὸν τμῆμα.

Αἱ βάσεις του εἶναι οἱ κύκλοι ΑΑ' καὶ ΒΒ' καὶ ὕψος του εἶναι ἡ ἀπόστασις αβ τῶν δύο αὐτῶν βάσεων.

Ἐὰν τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα τέμνουν τὴν σφαῖραν, ἐφάπτεται τῆς σφαίρας, ὁ ἕνας κύκλος τῆς τομῆς περιορίζεται εἰς ἕνα σημεῖον καὶ ἔχομεν ἕνα σφαιρικὸν τμῆμα, τὸ ὁποῖον ἔχει μίαν μόνον βάσιν.

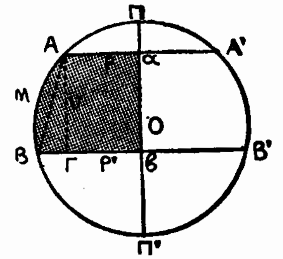
Π.χ. τὸ σφαιρικὸν τμῆμα Π'ΒΒ' *(Σχ. 584)* ἔχει μίαν μόνον βάσιν, τὴν ΒΒ'. Ὕψος αὐτοῦ εἶναι ἡ ἀπόστασις Π'β.

Τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ΑΒΒ'Α' *(Σχ. 585)* δύναται νὰ παραχθῇ καὶ ἀπὸ τὸ μικτόγραμμον σχῆμα ΑΒβαΑ, ἂν τοῦτο στραφῇ περὶ τὴν διάμετρον ΠΠ', κατὰ ὁλόκληρον στροφήν. . . .

876. Πρόβλημα. ***Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος ἑνὸς σφαιρικοῦ***

τμήματος, συναρτήσει τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεών του καὶ τοῦ ὕψους του.

Ἔστω ΑΜΒβα τὸ μικτόγραμμον τραπέζιον, τὸ ὁποῖον, στρεφόμενον περὶ τὴν διάμετρον ΠΠ′, παράγει τὸ σφαιρικὸν τμῆμα ΑΜΒΒ′Α′. Φέρομεν τὴν χορδὴν ΑΒ.



Σχ. 585.

Ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ αὐτοῦ τμήματος εἶναι ἄθροισμα τῶν ὄγκων τοῦ δακτυλίου, ποὺ παράγει τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΑΜΒΑ καὶ τοῦ κολούρου κώνου, ποὺ παράγει τὸ τραπέζιον ΑΒβα· δηλ. εἶναι :

$$\text{ὄγκ. σφαιρ. τμήμ.} = \text{ὄγκ.}ΑΜΒΑ + \text{ὄγκ.}ΑΒβα \qquad (1)$$

Γνωρίζομεν (§ 874) ὅτι $\quad \text{ὄγκ.}ΑΜΒΑ = \frac{1}{6}\pi\overline{ΑΒ}^2 \times αβ \qquad (2)$

Φέρομεν τὴν κάθετον ΑΓ ἐπὶ τὴν Ββ. Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΓΒ ἔχομεν: $\quad \overline{ΑΒ}^2 = \overline{ΑΓ}^2 + \overline{ΒΓ}^2 \qquad (3)$

Ἐπειδὴ $ΑΓ = αβ$ καὶ $ΒΓ = Ββ - Αα$, ὁπότε:

$$\overline{ΒΓ}^2 = (Ββ - Αα)^2 = \overline{Ββ}^2 - 2Ββ \times Αα + \overline{Αα}^2,$$

ἡ ἰσότης (3) γράφεται : $\quad \overline{ΑΒ}^2 = \overline{αβ}^2 + \overline{Ββ}^2 - 2Ββ \times Αα + \overline{Αα}^2.$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (2) τὸ $\overline{ΑΒ}^2$ μὲ τὸ ἴσον του καὶ ἔχομεν :

$$\text{ὄγκ.}ΑΜΒΑ = \frac{1}{6}\pi(\overline{αβ}^2 + \overline{Ββ}^2 - 2Ββ \times Αα + \overline{Αα}^2) \times αβ$$

$$= \frac{1}{6}\pi\overline{αβ}^3 + \frac{1}{6}\pi \times αβ(\overline{Ββ}^2 - 2Ββ \times Αα + \overline{Αα}^2).$$

Ἐπίσης γνωρίζομεν (§ 833), ὅτι

$$\text{ὄγκ.}ΑΒβα = \frac{1}{3}\pi \times αβ \times [\overline{Ββ}^2 + \overline{Αα}^2 + Ββ \times Αα]$$

ἢ $\quad \text{ὄγκ.}ΑΒβα = \frac{1}{6}\pi \times αβ \times [2\overline{Ββ}^2 + 2\overline{Αα}^2 + 2Ββ \times Αα].$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὸν ὄγκ. ΑΜΒΑ καὶ ὄγκ. ΑΒβα μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν :

$$\text{Ὄγκ. σφαιρ. τμήμ.} = \frac{1}{6}\pi\overline{αβ}^3 + \frac{1}{6}\pi \times αβ \times (\overline{Ββ}^2 - 2Ββ \times Αα + \overline{Αα}^2) +$$

$$+ \frac{1}{6}\pi \times αβ \times (2\overline{Ββ}^2 + 2\overline{Αα}^2 + 2Ββ \times Αα)$$

$$= \frac{1}{6}\pi\overline{αβ}^3 + \frac{1}{6}\pi \times αβ \times (3\overline{Ββ}^2 + 3\overline{Αα}^2)$$

$$= \frac{1}{6}\pi\overline{αβ}^3 + \frac{1}{2}\pi\overline{Αα}^2 \times αβ + \frac{1}{2}\pi\overline{Ββ}^2 \times αβ.$$

Ἐπειδὴ τὸ $\frac{1}{2}\pi\alpha\beta^3$ παριστάνει τὸν ὄγκον σφαίρας διαμέτρου αβ καὶ τὰ $\pi\overline{A\alpha}^2 \times \alpha\beta$ καὶ $\pi\overline{B\beta}^2 \times \alpha\beta$ παριστάνουν τοὺς ὄγκους τῶν κυλίνδρων, ποὺ ἔχουν ὡς ὕψη τὸ κοινὸν ὕψος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος καὶ ὡς βάσεις τὰς βάσεις, ἀντιστοίχως, τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος συνάγομεν, ὅτι:

Ὁ ὄγκος ἑνὸς σφαιρικοῦ τμήματος εἶναι ἴσος μὲ τὸν ὄγκον μιᾶς σφαίρας, ἡ ὁποία ἔχει ὡς διάμετρον τὸ ὕψος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος, ηὐξημένον κατὰ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ὄγκων δύο κυλίνδρων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ὡς ὕψος τὸ κοινὸν ὕψος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος καὶ ὡς βάσεις, ἀντιστοίχως, τὰς βάσεις τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος.

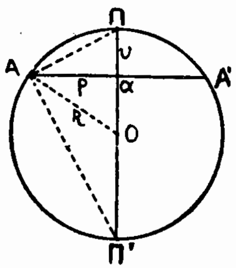
Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ ρ καὶ ρ′ τὰς ἀκτῖνας τῶν βάσεων ἑνὸς σφαιρικοῦ τμήματος καὶ μὲ υ τὸ ὕψος του, ὁ ὄγκος του θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$\text{ὄγκ. σφαιρ. τμήμ.} = \frac{1}{6}\pi\upsilon^3 + \frac{1}{2}\pi(\rho^2+\rho'^2)\upsilon$$

877. Ὄγκος σφαιρικοῦ τμήματος μὲ μίαν βάσιν. Ἐὰν ἕνα σφαιρικὸν τμῆμα ἔχῃ μίαν βάσιν, ἡ μία ἀπὸ τὰς ἀκτῖνας ρ καὶ ρ′ τῶν βάσεών του, ἔστω ἡ ρ′, εἶναι ἴση μὲ μηδὲν καὶ ἑπομένως ὁ προηγούμενος τύπος γίνεται:

$$\text{ὄγκ. σφαιρ. τμήματος} = \frac{1}{6}\pi\upsilon^3 + \frac{1}{2}\pi\rho^2\upsilon$$

878. Παρατήρησις. Ὁ ὄγκος ἑνὸς σφαιρικοῦ τμήματος μὲ μίαν βάσιν δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ συναρτήσει τοῦ ὕψους του καὶ τῆς ἀκτῖνος R τῆς σφαίρας, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει.



Σχ. 586.

Πράγματι· ἔστω ΠΑΑ′ ἕνα σφαιρικὸν τμῆμα μὲ μίαν βάσιν ΑΑ′. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ υ τὸ ὕψος του, θὰ ἔχωμεν (§ 877).

$$\text{ὄγκ. σφ. τμημ.}\Pi AA' = \frac{1}{6}\pi\upsilon^3 + \frac{1}{2}\pi\upsilon.\overline{A\alpha}^2$$

$$= \frac{1}{6}\pi\upsilon(\upsilon^2 + 3\overline{A\alpha}^2) \quad (1)$$

Ἐὰν φέρωμεν τὰς χορδὰς ΑΠ καὶ ΑΠ′ θὰ ἔχωμεν, ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΠΑΠ′,

$$\overline{A\alpha}^2 = \Pi\alpha \times \Pi'\alpha = \upsilon(2R - \upsilon).$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὸ $\overline{A\alpha}^2$ μὲ τὸ ἴσον του καὶ ἔχομεν

$$\text{ὄγκ. σφ. τμημ. ΠΑΑ'} = \frac{1}{6}\pi\upsilon[\upsilon^2 + 3\upsilon(2R - \upsilon)]$$

ἢ

$$\boxed{\textbf{ὄγκ. σφ. τμημ.ΠΑΑ'} = \frac{1}{3}\pi\upsilon^2(3R - \upsilon)}.$$

Ἀσκήσεις: 2687, 2688, 2689, 2690, 2691, 2692.

Ἀσκήσεις

2629. (2664). Εἰς σφαῖραν ἀκτῖνος 30 ἑκ. φέρομεν ἕνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον της 10 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς καὶ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας της.

2630. (2665). Εἰς σφαῖραν ἀκτῖνος 2 μ. φέρομεν ἕνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον τέμνει αὐτὴν κατὰ ἕνα κύκλον, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 9,42 τμ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ ἐπιπέδου ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας.

2631. (2666). Μία ἐπίπεδος τομὴ μιᾶς σφαίρας ἔχει ἐμβαδὸν 72π τετρ. ἑκ. καὶ ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον της 16 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας.

2632. (2667). Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἑνὸς μικροῦ κύκλου μιᾶς σφαίρας εἶναι 25,132 ἑκ. Τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ἀπέχει ἀπὸ τὸν κύκλον αὐτὸν 3 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας αὐτῆς.

2633. (2668). Ἡ διάμετρος μιᾶς σφαίρας εἶναι 4 μέτρ. Διαιροῦμεν τὴν διάμετρον αὐτὴν εἰς πέντε ἴσα μέρη καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως φέρομεν ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὴν διάμετρον αὐτήν. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἐμβαδὰ τῶν κύκλων τομῆς.

2634. (2669). Αἱ ἀκτῖνες δύο παραλλήλων τομῶν μιᾶς σφαίρας εἶναι α καὶ β καὶ ἡ ἀπόστασις τῶν τομῶν αὐτῶν εἶναι δ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας.

2635. (2670). Οἱ πόλοι Π καὶ Π' ἑνὸς κύκλου ἀπέχουν 60 ἑκ. καὶ 80 ἑκ. ἀπὸ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου αὐτοῦ. Ἐὰν εἶναι ΠΠ'=1 μέτρον, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου αὐτοῦ κατὰ προσέγγισιν 0,01 μ.

2636. (2671). Ἡ ἀκτὶς μιᾶς σφαίρας εἶναι 50 ἑκ. Μὲ πόλον τυχὸν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας της καὶ μὲ πολικὴν ἀπόστασιν ἴσην μὲ 30 ἑκ. γράφομεν ἕνα κύκλον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου αὐτοῦ.

2637. (2672). Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ πολικὴ ἀπόστασις διὰ νὰ γράψωμεν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας ἀκτῖνος 1 μ. μίαν περιφέρειαν μήκους 2 μέτρ.

2638. (2673). Ἡ πολικὴ ἀπόστασις τῶν μεγίστων κύκλων σφαίρας εἶναι 8 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας αὐτῆς.

2639. (2674). Ἡ σφαιρικὴ ἀκτὶς ἑνὸς μεγίστου κύκλου σφαίρας εἶναι 9,42 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας αὐτῆς.

2640. (2675). Δύο σφαῖραι ἀκτίνων R καὶ R', (R<R) εἶναι ὁμόκεντροι. Φέρομεν ἕνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ἐφάπτεται τῆς μικροτέρας σφαίρας. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς τῆς μεγαλυτέρας σφαίρας ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ.

2641. (2676). Ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων δύο σφαιρῶν εἶναι 10 μέτρ. καὶ αἱ ἀκτῖνες των 8 μέτρ. καὶ 6 μέτρ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς τῶν σφαιρῶν αὐτῶν.

2642. (2677). Δύο σημεῖα Α καὶ Β ἀπέχουν 5 μέτρ. Ποῖος εἶναι ὁ γεωμε-

τρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν 4 μέτρα ἀπὸ τὸ Α καὶ 3 μέτρα ἀπὸ τὸ Β;

2643. (2678). Δύο σφαῖραι ἔχουν ἀκτῖνας 10 ἑκ. καὶ 8 ἑκ. καὶ τὰ κέντρα των ἀπέχουν 12 ἑκ. Νὰ ἐξετασθῇ, ἐὰν αἱ σφαῖραι αὐταὶ τέμνωνται ἢ ὄχι. Ἐὰν τέμνωνται νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς των.

2644. (2679). Ἡ ἀκτὶς μιᾶς σφαίρας εἶναι 2 μέτρ. καὶ τὸ ὕψος μιᾶς ζώνης εἶναι 1,20 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ζώνης αὐτῆς.

2645. (2680). Ἕνα ἐπίπεδον ἀπέχει 6 ἑκ. ἀπὸ τὸ κέντρον σφαίρας ἀκτῖνος 12 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο ζωνῶν εἰς τὰς ὁποίας διαιρεῖται ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ.

2646. (2681). Ἡ διάμετρος μιᾶς σφαίρας εἶναι 6 μέτρ. Διαιροῦμεν τὴν διάμετρον αὐτὴν εἰς πέντε ἴσα μέρη καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως φέρομεν ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὴν διάμετρον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῶν διαφόρων ζωνῶν, τὰς ὁποίας ὁρίζουν τὰ ἐπίπεδα αὐτὰ ἐπὶ τῆς σφαίρας.

2647. (2682). Τὸ ὕψος μιᾶς σφαιρικῆς ζώνης εἶναι 0,32 ἑκ. καὶ τὸ ἐμβαδόν της 5 τ.μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει ἡ ζώνη.

2648. (2683). Εἰς μίαν σφαῖραν ἀκτῖνος 0,38 μ., μία ζώνη της ἔχει ἐμβαδὸν 1,20 τ.μ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος της.

2649. (2684). Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος μιᾶς σφαιρικῆς ζώνης, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἐμβαδόν της εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει.

2650. (2685). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως μιᾶς σφαιρικῆς ζώνης, μὲ μίαν βάσιν, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἐμβαδόν της εἶναι 1,60 τ.μ. καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας εἶναι 2 μέτρ.

2651. (2686). Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ζώνη, τὴν ὁποίαν ὁρίζουν δύο δοθεῖσαι ὁμόκεντροι σφαῖραι ἐπὶ μιᾶς τυχούσης σφαίρας, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον των, ἔχει σταθερὸν ἐμβαδόν.

2652. (2687). Σφαῖρα ἀκτῖνος R τέμνεται ὑπὸ ἐπιπέδου ΑΒ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις ΟΓ=x τοῦ ἐπιπέδου ἀπὸ τὸ κέντρον Ο τῆς σφαίρας, ἵνα τὸ ἐμβαδὸν τῆς μικροτέρας ζώνης εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει κορυφὴν τὸ κέντρον τῆς σφαίρας καὶ βάσιν τὴν τομὴν τῆς σφαίρας ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου.

2653. (2688). Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ζώνης μιᾶς σφαίρας ἀκτῖνος R, ἡ ὁποία φωτίζεται ἀπὸ φωτεινὴν πηγήν, ἡ ὁποία, ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ἀπόστασιν α.

2654. (2689). Δίδεται περιφέρεια διαμέτρου ΑΒ=2R. Νὰ προσδιορισθῇ μία χορδὴ ΓΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ τοιαύτη, ὥστε, ἐὰν στραφῇ τὸ σχῆμα περὶ τὴν διάμετρον ΑΒ, ἡ διαφορὰ τῶν ἐμβαδῶν τῶν σφαιρικῶν ζωνῶν, αἱ ὁποῖαι παράγονται ἀπὸ τὰ τόξα ΑΓ καὶ ΓΒ νὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου διαμέτρου ΓΔ.

2655. (2690). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς σφαίρας ἀκτῖνος 3 μέτρ.

2656. (2691). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς σφαίρας διαμέτρου 5 μέτρ.

2657. (2692). Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας εἶναι 28 τ.μ. Πόση εἶναι ἡ ἀκτίς της;

2658. (2693). Τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς σφαίρας εἶναι 7,85 τ.μ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἑνὸς μεγίστου κύκλου της;

2659. (2694). Ἐὰν διπλασιάσωμεν τὴν ἀκτῖνα μιᾶς σφαίρας, τί γίνεται τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας της.

2660. (2695). Ἡ ἀκτὶς μιᾶς σφαίρας εἶναι 2 μέτρ. Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς μιᾶς σφαίρας μὲ διπλασίαν ἐπιφάνειαν;

2661. (2696). Νὰ ἐκφρασθῇ τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς σφαίρας, συναρτήσει τι μήκους μιᾶς περιφερείας μεγίστου κύκλου της.

2662. (2697). Ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς σφαίρας εἶναι διπλασία τῆς ἐπιφανείας μιᾶς ἄλλης σφαίρας. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἀκτίνων των.

2663. (2698). Ἡ ἀκτὶς μιᾶς σφαίρας εἶναι R. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος μιᾶς ζώνης, μὲ μίαν βάσιν, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι, ἂν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ζώνης αὐτῆς αὐξηθῇ κατὰ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς της, θὰ εἶναι ἴσον μὲ τὰ 7/16 τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς σφαίρας.

2664. (2699). Νὰ διαιρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς σφαίρας εἰς δύο ζώνας τοιαύτας, ὥστε ἡ μεγαλυτέρα νὰ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς ἐπιφανείας ὁλοκλήρου τῆς σφαίρας καὶ τῆς μικρᾶς ζώνης.

2665. 2700) Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια, τὴν ὁποίαν παράγει ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ, στρεφόμενον περὶ ἄξονα, ὁ ὁποῖος κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου του καὶ δὲν τέμνει τὸ τρίγωνον, εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου αὐτοῦ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν, τὴν ὁποίαν γράφει τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου.

2666. (2701). Δίδονται δύο κύκλοι Ο καὶ Ο′, οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς καὶ μία κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη ΑΑ′. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν τὸ σχῆμα στραφῇ περὶ τὴν διάκεντρον ΟΟ′, τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν παράγει ἡ ΑΑ′, εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῶν ἐμβαδῶν τῶν σφαιρῶν, ποὺ παράγουν οἱ δύο κύκλοι Ο καὶ Ο′.

2667. (2702). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ λόγος τῶν τετραγώνων διαμετρου σφαίρας καὶ τῆς ἀκμῆς κύβου, ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτήν, εἶναι 3 : 1.

2668. (2703). Ἡ ἀκμὴ κύβου εἶναι α. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαφορὰ τῶν ἐπιφανειῶν περιγεγραμμένης καὶ ἐγγεγραμμένης σφαίρας εἰς τὸν κύβον αὐτόν.

2669. (2704). Ἕνας κύλινδρος καὶ μία σφαῖρα ἔχουν ἰσοδυνάμους κυρτὰς ἐπιφανείας καὶ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας πρὸς τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου.

2670. (2705). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς μιάς σφαίρας, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ ἐπιφάνειά της εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν ἑνὸς κυλίνδρου καὶ ἑνὸς κώνου οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος 2 μέτρ. καὶ ὡς κοινὴν βάσιν ἕνα κύκλον ἀκτῖνος 1 μέτρ.;

2671. (2706). Δίδεται κῶνος, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα $R=3$ τῆς βάσεως. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κυλίνδρου, ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κῶνον καὶ τοιούτου, ὥστε ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνειά του νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐπιφάνειαν σφαίρας ἀκτῖνος 2 μέτρων.

2672. (2707). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος μιᾶς σφαιρικῆς ζώνης μὲ μίαν βάσιν, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ἀκτῖνα R τῆς σφαίρας καὶ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῆς ἐπιφανείας της καὶ τῆς βάσεώς της εἶναι πa^2. Ἐφαρμογὴ $R=0{,}15$, $\pi a^2=1$ τ.μ.

2673. (2708). Ἡ ἀκτὶς μιᾶς σφαίρας εἶναι 30 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδόν της καὶ ὁ ὄγκος της.

2674. (2709). Ἡ διάμετρος μιᾶς σφαίρας εἶναι 25 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος της.

2675. (2710). Ἕνα τόξον 50° μεγίστου κύκλου μιᾶς σφαίρας ἔχει μῆκος 30 ἑκ. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας.

2676. (2711). Ὁ ὄγκος μιᾶς σφαίρας εἶναι 4,20 τ.μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς της.

2677. (2712). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς μιᾶς σφαίρας, ἐὰν ὁ ὄγκος της καὶ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἑνὸς μεγίστου κύκλου της ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀριθμητικὴν τιμήν.

2678. (2713). Ἕνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον τέμνει μίαν σφαῖραν ἀπέχει 1,20 μέτρα, ἀπὸ τὸ κέντρον της. Ἐὰν τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς εἶναι 3 τ.μ., νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας.

2679. (2714). Ὁ ὄγκος μιᾶς σφαίρας εἶναι 2 κ.μ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς τῆς σφαίρας ὑπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον ἀπέχει 0,50 μ. ἀπὸ τὸ κέντρον της.

2680. (2715). Αἱ ἀκτῖνες τῆς Γῆς, τῆς Σελήνης καὶ τοῦ Ἡλίου εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 1, 3/11 καὶ 112. Ἐὰν λάβωμεν ὡς μονάδα ὄγκου τὸν ὄγκον τῆς Γῆς, νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ὄγκοι τῆς Σελήνης καὶ τοῦ Ἡλίου.

2681. (2716). Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος, τὸν ὁποῖον παράγει ἕνα κυκλικὸν τμῆμα, τοῦ ὁποίου ἡ χορδὴ εἶναι ἴση μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου, τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς ἕνα κύκλον ἀκτῖνος 2 μέτρων, ἂν τὸ τμῆμα αὐτὸ στραφῇ περὶ τὴν διάμετρον, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ ἕνα ἄκρον τῆς χορδῆς.

2682. (2717). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν ἡ χορδὴ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου.

2683. (2718). Ἐὰν ἡ χορδὴ εἶναι πλευρὰ κανονικοῦ ἑξαγώνου.

2684. (2719). Ἐὰν ἡ χορδὴ εἶναι πλευρὰ κανονικοῦ δεκαγώνου.

2685. (2720). Ὁ ὄγκος ἑνὸς σφαιρικοῦ δακτυλίου εἶναι 2,5 κ.μ. Ἡ προβολὴ τῆς χορδῆς τοῦ κυκλικοῦ τμήματος, ποὺ παράγει τὸν σφαιρικὸν δακτύλιον, εἶναι 1 μέτρον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῆς χορδῆς.

2686. (2721). Δίδονται δύο ὁμόκεντροι κύκλοι· εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν φέρομεν χορδὰς ἴσας μεταξύ των καὶ παραλλήλους πρὸς μίαν κοινὴν διάμετρον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι οἱ σφαιρικοὶ δακτύλιοι, οἱ ὁποῖοι παράγονται ἀπὸ τὰ προκύπτοντα οὕτω κυκλικὰ τμήματα, στρεφόμενα περὶ μίαν διάμετρον, ἡ ὁποία δὲν τέμνει αὐτά, εἶναι ἰσοδύναμοι.

2687. (2722). Αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων ἑνὸς σφαιρικοῦ τμήματος εἶναι 60 ἑκ. καὶ 80 ἑκ. καὶ τὸ ὕψος του 30 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος του.

2688. (2723). Μία σφαῖρα ἀκτῖνος 3 μέτρων τέμνεται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἀπὸ τὸ κέντρον της 1 μέτρον καὶ 2 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τῶν σφαιρικῶν τμημάτων :

1ον. ἂν τὰ ἐπίπεδα κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ κέντρου.

2ον. ἂν κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ κέντρου.

2689. (2724). Μία σφαῖρα ἀκτῖνος 2 μέτρων τέμνεται ὑπὸ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον ἀπέχει 1 μέτρον ἀπὸ τὸ κέντρον της. Νὰ ὑπολογισθῇ χωριστὰ ὁ ὄγκος τῶν δύο σφαιρικῶν τμημάτων, ποὺ προκύπτουν.

2690. (2725). Τέσσαρα ἐπίπεδα εἶναι κάθετα ἐπὶ μίαν διάμετρον μιᾶς σφαίρας καὶ χωρίζουν αὐτὴν εἰς 5 ἴσα μέρη. Νὰ ὑπολογισθῇ χωριστὰ ὁ ὄγκος τῶν πέντε σφαιρικῶν τμημάτων, ποὺ προκύπτουν.

2691. (2726). Νὰ ἐκφρασθῇ ὁ ὄγκος ἑνὸς σφαιρικοῦ τμήματος, διὰ τοῦ

ὕψους του καὶ τῆς διαμέτρου τῆς μέσης τομῆς του (παραλλήλου καὶ ἡ ὁποία ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς βάσεις).

2692. (2727). Εἰς ἕνα κύκλον Ο ἀκτῖνος R φέρομεν μίαν χορδὴν ΓΔ παράλληλον πρὸς μίαν διάμετρόν του ΑΒ. Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΓ καὶ ΟΔ καὶ στρέφομεν τὸ σχῆμα περὶ τὴν διάμετρον ΑΒ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῆς χορδῆς ΓΔ, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ ὄγκος, τὸν ὁποῖον παράγει τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΓΜΔ εἶναι ἴσος μὲ τὸν ὄγκον, ποὺ παράγει τὸ τρίγωνον ΓΟΔ.

Ἀσκήσεις πρὸς γενικὴν ἐπανάληψιν

Α' Ὁμάς. **2693.** (2728). Διὰ νὰ κεῖνται δύο κύκλοι εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ, ἐὰν Α καὶ Β εἶναι δύο σημεῖα τῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων των, κάθε σημεῖον νὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν δύναμιν ὡς πρὸς τοὺς δύο αὐτοὺς κύκλους, ἢ ὅταν τὰ ἐπίπεδα αὐτὰ εἶναι παράλληλα, οἱ δύο αὐτοὶ κύκλοι νὰ ἔχουν τὸν αὐτὸν ἄξονα.

2694. (2729). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς σφαίρας, τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς ἰσοπλεύρου κυλίνδρου περιγεγραμμένου περὶ τὴν σφαῖραν καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς ἰσοπλεύρου κώνου περιγεγραμμένου, εἶναι ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 4, 6 καὶ 9. (Ἕνας κύλινδρος λέγεται ἰσόπλευρος, ὅταν ἡ τομή του ὑπὸ ἐπιπέδον, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὸν ἄξονά του εἶναι ἕνα τετράγωνον· ἕνας κῶνος λέγεται ἰσόπλευρος, ὅταν ἡ τομή του ὑπὸ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὸν ἄξονά του, εἶναι ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον).

2695. (2730). Δίδονται δύο κανονικαὶ τεθλασμέναι γραμμαί, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι παράλληλοι καὶ ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία εἶναι ἐγγεγραμμένη καὶ ἡ ἄλλη περιγεγραμμένη περὶ μίαν ἡμιπεριφέρειαν. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ σφαιρικὴ ἐπιφάνεια, τὴν ὁποίαν παράγει ἡ ἡμιπεριφέρεια, ἡ ὁποία στρέφεται περὶ τὴν διάμετρον, ἡ ὁποία συνδέει τὰ ἄκρα της, εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν ἐπιφανειῶν, πού παράγουν αἱ δύο τεθλασμέναι γραμμαί.

2696. (2731). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ ὄγκος V ἑνὸς σφαιρικοῦ τμήματος δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $V=\frac{υ}{6}(β+β'+4β'')$, ὅπου υ εἶναι τὸ ὕψος του, β καὶ β' τὰ ἐμβαδὰ τῶν βάσεών του καὶ β'' τὸ ἐμβαδὸν τῆς μέσης τομῆς του.

2697. (2732). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ ὄγκος ἑνὸς σφαιρικοῦ δακτυλίου εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο τρίτων τοῦ ὕψους του ἐπὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς του ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ καθέτου ἐπὶ τὸ ὕψος του εἰς τὸ μέσον.

2698. (2733). Ὁ ὄγκος ἑνὸς σφαιρικοῦ τμήματος εἶναι ἴσος μὲ τὴν διαφορὰν μεταξὺ τοῦ ὄγκου τοῦ κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος ἔχει τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βάσιν τὴν τομὴν τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς βάσεις του καὶ τοῦ ἡμίσεος τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὸ ὕψος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος.

2699. (2734). Περὶ ποίαν πλευρὰν πρέπει νὰ στραφῇ ἕνα τρίγωνον διὰ νὰ δώσῃ τὸν μεγαλύτερον ὄγκον.

2700. (2735). Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ μ τὸ πάχος τοῦ φακοειδοῦς ἀμφικύρτου κοινοῦ μέρους δύο τεμνομένων σφαιρῶν, μὲ Ε τὸ ἐμβαδόν του καὶ μὲ V τὸν ὄγκον του, θὰ εἶναι $12V=3μE-πμ^3$.

2701. (2736). Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ φακοειδοῦς ἀμφικύρτου κοινοῦ μέρους δύο τεμνομένων σφαιρῶν ἀκτίνων ρ καὶ ρ' καὶ τῶν ὁποίων τὸ πάχος εἶναι μ.

2702. (2737). Ἐὰν γνωρίζωμεν τὸν λόγον k τῶν ἐμβαδῶν τῶν ζωνῶν, τὰς ὁποίας ὁρίζει ἐπὶ μιᾶς σφαίρας ἕνα ἐπίπεδον Π, τὸ ὁποῖον τέμνει αὐτήν:

1ον. νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος k' τῶν ὄγκων τῶν σφαιρικῶν τμημάτων, τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου Π.

2ον. νὰ συγκριθοῦν οἱ k καὶ k'.

Β' Ὁμάς. **2703.** (2738). Ἕνας κυλινδρικὸς λέβης καταλήλει εἰς δύο ἡμισφαίρια. Ἐὰν ὁ ἄξων του ἔχει μῆκος λ, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις τοῦ κυλινδρικοῦ μέρους οὕτως, ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ λέβητος νὰ εἶναι ἴσον μὲ $4\pi\alpha^2$.

2704. (2739). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως καὶ τὸ ὕψος ἑνὸς κώνου, περιγεγραμμένου περὶ σφαῖραν ἀκτῖνος R, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ἐπαφῆς εἶναι ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἐμβαδῶν τῶν ζωνῶν, ποὺ ὁρίζει.

2705. (2740). Ἐὰν εἰς ἕνα κύλινδρον, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶναι ἴσον μὲ τὴν διάμετρον τῆς βάσεώς του, ἐγγράψωμεν μίαν σφαῖραν καὶ ἕνα κῶνον, οἱ ὄγκοι τῶν τριῶν αὐτῶν στερεῶν εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 3 : 2 : 1.

2706. (2741). Ἐὰν εἰς ἕνα κῶνον ἐγγραφῇ σφαῖρα, οἱ ὄγκοι των ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἐπιφανειῶν των.

2707. (2742). Εἰς μίαν σφαῖραν ἀκτῖνος R ἐγγράφομεν ἕνα ἰσόπλευρον κῶνον. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας πρέπει νὰ φέρωμεν ἕνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κώνου, ἵνα ἡ διαφορὰ τῶν ἐμβαδῶν τῶν τομῶν τῆς σφαίρας καὶ τοῦ κώνου εἶναι:

1ον. ἴση μὲ τὰ τρία τέταρτα τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς κύκλου ἀκτῖνος R.

2ον. ἰσοδύναμος μὲ τὴν βάσιν τοῦ κώνου.

2708. (2743). Δίδεται ἕνα ἡμισφαίριον ἀκτῖνος R καὶ ὁ ἐγγεγραμμένος εἰς αὐτὸ κῶνος, ὁ ὁποῖος ἔχει βάσιν τὴν βάσιν ΑΒ τοῦ ἡμισφαιρίου καὶ κορυφὴν τὸ σημεῖον Σ, ὅπου ἡ κάθετος, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ κέντρον Ο τοῦ ἡμισφαιρίου ἐπὶ τὴν βάσιν του ΑΒ, τέμνει τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἡμισφαιρίου. Νὰ ἀχθῇ ἕνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΑΒ οὕτως, ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τῆς στεφάνης, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν δύο περιφερειῶν, κατὰ τὰς ὁποίας τὸ ἐπίπεδον τέμνει τὸ ἡμισφαίριον καὶ τὸν κῶνον, νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου ἀκτῖνος α. Μέγιστον τοῦ α.

2709. (2744). Εἰς ἕνα κοῖλον κῶνον, τοῦ ὁποίου ἄξων εἶναι κατακόρυφος καὶ σχηματίζει γωνίαν 30° μὲ τὴν γενέτειράν του, εἰσάγομεν μίαν σφαῖραν ἀκτῖνος 2 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῇ:

1ον. ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας ἐπαφῆς τῆς σφαίρας καὶ τοῦ κώνου.

2ον. τὸ ἐμβαδὸν τῆς ζώνης, ἡ ὁποία εἶναι ὁρατὴ ἀπὸ τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου.

3ον. ἡ ἀκτὶς μιᾶς ἄλλης σφαίρας, ἡ ὁποία εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ κώνου καὶ ἐφάπτεται τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου καὶ τῆς πρώτης σφαίρας.

2710. (2745). Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ μιᾶς σφαίρας ἕνας κύκλος τοιοῦτος, ὥστε ὁ ὄγκος τοῦ κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει βάσιν τὸν κύκλον αὐτὸν καὶ κορυφὴν τὸν ἕνα ἀπὸ τοὺς πόλους του νὰ ἔχῃ λόγον k πρὸς τὸν ὄγκον τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν τὸν αὐτὸν κύκλον καὶ περιέχει τὸν κῶνον.

2711. (2746). Δίδεται κῶνος ΣΑΒ ἀκτῖνος R καὶ ὕψους υ. Εἰς τὸν κῶνον

αὐτὸν ἐγγράφομεν σφαῖραν Ο, ἡ ὁποία ἐφάπτεται τῆς βάσεως τοῦ κώνου εἰς τὸ σημεῖον Η.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας.

2ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς τοῦ κώνου ὑπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κώνου καὶ ἐφαπτομένου τῆς σφαίρας.

3ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ προκύπτοντος κολούρου κώνου.

2712. (2747). Τέμνομεν μίαν σφαῖραν ἀκτῖνος R ὑπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου Π, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον της x. Κατὰ τὴν τομὴν τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ἐπιπέδου περιγράφομεν περὶ τὴν σφαῖραν, ἕνα κῶνον, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις, ἡ παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π, ἐφάπτεται τῆς σφαίρας. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου συναρτήσει τοῦ x.

2713. (2748). Μία σφαῖρα ἀκτῖνος R στηρίζεται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου Π. Ἕνας κῶνος ἔχει τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα R καὶ ὕψος υ καὶ στηρίζεται, διὰ τῆς βάσεώς του, ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου Π. Τέμνομεν τὰ δύο αὐτὰ στερεὰ δι' ἑνὸς ἐπιπέδου Ρ παραλλήλου πρὸς τὸ Π, τὸ ὁποῖον ἀπέχει τοῦ Π ἀπόστασιν ἴσην μὲ x.

1ον. Νὰ ἐκφρασθοῦν, συναρτήσει τῶν R, υ, x, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τομῶν τῶν δύο στερεῶν ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου Ρ. Νὰ ἐξετασθῇ, ἐὰν ὁ τύπος αὐτὸς συμφωνῇ ἀκόμη, ὅταν $x > υ$.

2ον. Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ υ καὶ R, ἵνα τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ x.

2714. (2749). Δίδεται ἡ σφαῖρα Ο ἀκτῖνος R, περιγεγραμμένη περὶ τὸν κόλουρον κῶνον ΑΒΓΔ καὶ ἡ σφαῖρα Σ ἀκτῖνος ρ, ἐγγεγραμμένη εἰς τὸν αὐτὸν κόλουρον κῶνον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶυ ἀκτίνων τῶν βάσεων τοῦ κολούρου κώνου, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν τῶν δύο σφαιρῶν εἶναι 6.

2715. (2750). Ὁ ὄγκος μιᾶς σφαίρας, ὁ ὄγκος τοῦ ἰσοπλεύρου κυλίνδρου, τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὴν σφαῖραν καὶ ὁ ὄγκος τοῦ ἰσοπλεύρου κώνου, τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὴν σφαῖραν, εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 4, 6 καὶ 9.

2716. (2751). Μὲ βάσιν δοθέντα κύκλον κατασκευάζομεν κύλινδρον, ἡμισφαίριον καὶ κῶνον οὕτως, ὥστε τὰ τρία στερεὰ νὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὄγκοι των εἶναι μεταξύ των, ὡς οἱ ἀριθμοὶ 3 : 2 : 1.

2717. (2752). Ὁ ὄγκος τοῦ ἰσοπλεύρου κυλίνδρου, τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς μίαν σφαῖραν, εἶναι μέσος ἀνάλογος μεταξὺ τοῦ ὄγκου τοῦ ἰσοπλεύρου κώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας.

2718. (2753). Περὶ ἕνα κύκλον ἀκτῖνος R περιγράφομεν ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ ἕνα τετράγωνον, τοῦ ὁποίου μία πλευρὰ κεῖται ἐπὶ μιᾶς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου. Στρέφομεν τὸ σχῆμα περὶ τὸν ἄξονα συμμετρίας του. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ παραγομένου κυλίνδρου εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ παραγομένου κώνου καὶ τῆς παραγομένης σφαίρας. Νὰ ἀποδειχθῇ τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τοὺς ὄγκους των.

2719. (2754). Ὁ ὄγκος ἑνὸς κυλίνδρου, ἑνὸς κώνου ἢ ἑνὸς κολούρου κώνου, περιγεγραμμένων περὶ μίαν σφαῖραν εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος σφαίρας.

2720. (2755). Δίδεται μία σφαῖρα, ἕνας κύλινδρος, περιγεγραμμένος περὶ τὴν σφαῖραν αὐτὴν καὶ οἱ δύο κῶνοι, οἱ ὁποῖοι ἔχουν κορυφὴν τὸ κέντρον

τῆς σφαίρας καὶ βάσεις τὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου:

1ον. Ἐὰν φέρωμεν ἕνα τυχὸν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα τοῦ σχήματος, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ τομὴ τῆς σφαίρας εἶναι ἴση μὲ τὴν διαφορὰν τῶν τομῶν τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ κώνου.

3ον. Ἐὰν φέρωμεν δύο ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὸν ἄξονα του σχήματος, ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν δύο ἐπιπέδων εἶναι ἴσος μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ὄγκων τῶν ἀντιστοίχων κυλινδρικῶν καὶ κωνικῶν τμημάτων.

Γ' Ὁμάς. **2721**. (2756). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ λόγος τῶν ὄγκων σφαίρας καὶ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτὴν κύβου εἶναι ἴσος μὲ $\pi : 6$.

2722. (2757). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν καὶ ὁ ὄγκος μιᾶς σφαίρας, περιγεγραμμένης περὶ ἕνα κύβον ἀκμῆς α.

2723. (2758). Νὰ ἐκφρασθῇ, συναρτήσει τῆς ἀκμῆς α ἑνὸς κύβου, τὸ ἐμβαδὸν καὶ ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κύβον καὶ τῆς περιγεγραμμένης περὶ αὐτόν.

2724. (2759). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν καὶ ὁ ὄγκος μιᾶς σφαίρας περιγεγραμμένης περὶ ἕνα κανονικὸν τετράεδρον ἀκμῆς α.

2725. (2760). Ἐὰν Ε καὶ V παριστάνουν τὸ ἐμβαδὸν καὶ τὸν ὄγκον ἑνὸς πολυέδρου, περιγεγραμμένου περὶ σφαῖραν ἀκτῖνος R, θὰ εἶναι $V = \frac{1}{3} R \times E$.

2726. (2761). Μία κανονικὴ πυραμὶς ΑΒΓ ἔχει βάσιν ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ πλευρᾶς α καὶ ὕψος ΣΟ=α.

1ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παράπλευροι ἀκμαί της ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ καὶ αἱ γωνίαι τῶν τριγώνων ΣΟΑ, ΣΟΒ, ΣΟΓ.

2ον. Λαμβάνομεν ἕνα τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ ὕψους ΣΟ· νὰ προσδιορισθῇ ὁ λόγος, ὁ ὁποῖος ὑπάρχει μεταξὺ ΜΣ καὶ ἑκάστης τῶν ἀποστάσεων τοῦ Μ ἀπὸ τὰς ἀκμὰς ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ.

3ον. Ἐκλέγομεν τὸ σημεῖον Μ οὕτως, ὥστε $MO = \frac{\alpha}{3}(\sqrt{3} - 1)$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ σημεῖον Μ ἀπέχει ἰσάκις ἀπὸ τὰς ἓξ ἀκμὰς τῆς πυραμίδος, δηλ. τὸ Μ εἶναι τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, ἡ ὁποία ἐφάπτεται τῶν ἓξ ἀκμῶν.

4ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἐμβαδὰ τῶν ζωνῶν, αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται εἰς τὴν σφαῖραν αὐτήν, ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως ΑΒΓ.

2727. (2762). Αἱ βάσεις μιᾶς κανονικῆς κολούρου πυραμίδος εἶναι κανονικὰ ἑξάγωνα πλευρῶν α καὶ α/2. Ὅλαι αἱ κορυφαὶ κεῖνται ἐπὶ μιᾶς σφαίρας Σ, τῆς ὁποίας τὸ κέντρον κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς μεγάλης βάσεως. Νὰ εὑρεθῇ:

1ον. τὸ ὕψος, ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ.

2ον. ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου, τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι οἱ κύκλοι, οἱ περιγεγραμμένοι εἰς τὰ δύο αὐτὰ ἑξάγωνα.

3ον. ἡ ἐπιφάνεια τῆς ζώνης τῆς σφαίρας Σ, τῆς περιλαμβανομένης μεταξὺ τῶν δύο κύκλων καὶ ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος τοῦ περιλαμβανομένου μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων τῶν κύκλων τούτων.

2728. (2763). Δίδεται μία τετραγωνικὴ πυραμὶς ΣΑΒΓΔ, τῆς ὁποίας ἡ βάσις ΑΒΓΔ εἶναι ἕνα τετράγωνον πλευρᾶς α, ἡ ἕδρα ΣΑΔ ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ αἱ ἕδραι ΣΑΒ καὶ ΣΔΓ ὀρθογώνια τρίγωνα εἰς τὰ Α καὶ Δ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ δίεδρος γωνία ἀκμῆς ΑΔ εἶναι ὀρθή.

2ον. Ἀπὸ τὸ Α φέρομεν τὴν κάθετον ΑΒ' ἐπὶ τὴν ΣΒ καὶ ἀπὸ τὸ Β' ἕνα

ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ΣΑ εἰς τὸ Α', τὴν ΣΓ εἰς τὸ Γ' καὶ τὴν ΣΔ εἰς τὸ Δ'. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τῆς κολούρου πυραμίδος Α'Β'Γ'Δ'ΑΒΓΔ.

3ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ πυραμὶς ΣΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμος εἰς μίαν σφαῖραν· νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας αὐτῆς.

4ον. Ἔστωσαν Μ καὶ Ν τὰ μέσα τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ· διὰ τῆς ΜΝ φέρομεν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΣΑΔ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ΣΒ εἰς τὸ Β'' καὶ τὴν ΣΓ εἰς τὸ Γ''. Ἐπίσης διὰ τῆς Β''Γ'' φέρομεν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ΣΑ εἰς τὸ Α'' καὶ τὴν ΣΔ εἰς τὸ Δ''. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ὄγκοι τῶν στερεῶν ΜΝΒΓΒ''Γ'', ΜΝΑΔΒ''Γ'' καὶ ΜΝΣΒΒ''Γ''.

Δ' Ὁμάς. 2729. (2764). Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται σφαίρας καὶ ἄγονται ἀπὸ ἕνα σημεῖον ἐκτὸς αὐτῆς, εἶναι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς κώνου.

2730. (2765). Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν κέντρων ἴσων μικρῶν κύκλων σφαίρας.

2731. (2766). Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἄγονται ἴσαι ἐφαπτόμεναι πρὸς δοθεῖσαν σφαῖραν.

2732. (2767). Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα εἶναι ἴσον μὲ k^2.

2733. (2768). Δίδονται τρία σημεῖα Α, Β, Γ τοῦ χώρου καὶ ἕνα μεταβλητὸν σημεῖον Σ καὶ ἔστω ΚΛΜΝ ἕνα παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ στρεβλοῦ τετρεπλεύρου ΒΑΓΣ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου Σ:

1ον. ὅταν τὸ ΚΛΜΝ εἶναι ἕνας ρόμβος.

2ον. ὅταν ὁ λόγος τῶν διαγωνίων τοῦ ΚΛΜΝ ἔχει τὴν αὐτὴν δοθεῖσαν τιμὴν k.

2734. (2769). Δίδεται ἕνας κῶνος κορυφῆς Σ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν ΑΒ εἶναι διάμετρος τῆς βάσεώς του, ἡ ὁποία μεταβάλλει διεύθυνσιν, τὸ ἄθροισμα $\overline{ΣΑ}^2+\overline{ΣΒ}^2$ μένει σταθερὸν καὶ ὅτι αἱ γωνίαι ΑΣΒ εἶναι ὅλαι ὀξεῖαι, ἢ ὅλαι ἀμβλεῖαι ἢ ὅλαι ὀρθαί.

2ον. Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον ΣΑΒ.

2735. (2770). Ἐπὶ τῶν ἀκμῶν ΟΧ, ΟΥ, ΟΖ μιᾶς τρισορθογωνίου τριέδρου κινοῦνται τρία σημεῖα Α, Β, Γ εἰς τρόπον, ὥστε νὰ εἶναι ΟΑ+ΟΒ+ΟΓ=λ. Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τετράεδρον ΟΑΒΓ; Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ σφαῖρα αὐτὴ διέρχεται ἀπὸ ἕνα δεύτερον ὡρισμένον σημεῖον, ἐκτὸς τοῦ Ο.

Ε' Ὁμάς. 2736. (2771). Ἔστω Β'Γ' ἡ προβολὴ τῆς διαμέτρου ΒΓ ἑνὸς κύκλου ἀκτῖνος ΟΑ=R ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης ΤΤ' εἰς τὸ σημεῖον Α. Νὰ εὑρεθῇ διὰ ποίαν θέσιν τῆς διαμέτρου ΒΓ, ὁ λόγος τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου, ποὺ παράγει τὸ τραπέζιον ΒΓΒ'Γ', ἂν στραφῇ περὶ τὴν ΤΤ' κατὰ ὁλόκληρον στροφήν, πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, εἶναι ἴσος μὲ 2λ. Διερεύνησις.

2737. (2772). Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ· ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΓΔ λαμβάνομεν τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν καὶ φέρομεν τὰς εὐθείας ΜΒ καὶ ΝΒ, αἱ ὁποῖαι διαιροῦν τὸ ὀρθογώνιον εἰς τρία μέρη. Νὰ καθορισθῇ ἡ θέσις τῶν σημείων Μ καὶ Ν

ἐπὶ τῆς ΓΔ εἰς τρόπον, ὥστε τὰ τρία μέρη νὰ παράγουν ἰσοδύναμα στερεά, ὅταν τὸ ὀρθογώνιον στρέφεται περὶ τὴν ΑΔ. (Θέσατε ΑΘ=υ, ΓΔ=R, ΔΜ=x, ΔΝ=y).

2738. (2773). Τὸ ὕψος ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι υ. Εἰς ἀπόστασιν υ′ ἀπὸ τὴν βάσιν του ΒΓ φέρομεν μίαν παράλληλον xy, ἡ ὁποία τέμνῃ τὰς δύο πλευρὰς του εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε. Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν υ καὶ υ′, ἵνα εἶναι ἰσοδύναμα τὰ στερεά, τὰ ὁποῖα παράγουν τὸ τρίγωνον ΑΔΕ καὶ τὸ τραπέζιον ΔΒΓΕ, ἂν στραφοῦν περὶ τὴν xy. (Πολυτεχνεῖον).

2739. (2774) Νὰ εὑρεθῇ ἕνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον τέμνει μίαν σφαῖραν εἰς τρόπον, ὥστε ὁ ὄγκος ἑνὸς ἐκ τῶν σφαιρικῶν τμημάτων, τὰ ὁποῖα ὁρίζει, νὰ ἔχῃ λόγον k μὲ τὸν ὄγκον τοῦ σφαιρικοῦ τομέως, ὁ ὁποῖος περιέχεται εἰς τὸ αὐτὸ σφαιρικὸν τμῆμα.

2740. (2775). Εἰς μίαν περιφέρειαν ἀκτῖνος ΟΑ=R φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΒ κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΑ. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΒ ἕνα σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε, ἐὰν ἐξετάσωμεν τοὺς ὄγκους V καὶ V′ τῶν στερεῶν, ποὺ παράγουν τὰ κυκλικὰ τμήματα ΑΓΜΑ καὶ ΜΔΒΜ, στρεφόμενα περὶ τὴν ΟΑ καὶ τὸν ὄγκον V″ τῆς σφαίρας ἀκτῖνος R, νὰ ἔχωμεν $\frac{V}{2}+V'=\frac{V''}{8}$.

2741. (2776). Δίδεται ἕνα τεταρτοκύκλιον ΟΑΒ ἀκτῖνος ΟΑ=R. Νὰ προσδιορισθῇ ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΒ ἕνα σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε, ἂν φέρωμεν τὴν κάθετον ΜΓ ἐπὶ τὴν ΟΑ καὶ τὴν κάθετον ΜΔ ἐπὶ τὴν ΟΒ, οἱ ὄγκοι τῶν στερεῶν, ποὺ παράγουν τὸ μικτόγραμμον σχῆμα ΜΔΒ καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΜΓΟΔ, στρεφόμενα περὶ τὴν ΟΒ, νὰ εἶναι ἴσοι.

2742. (2777). Τρία σημεῖα Α, Β, Γ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καὶ εἶναι ΑΒ=α, ΒΓ=β. Μὲ διάμετρον τὴν ΒΓ γράφομεν ἕνα ἡμικύκλιον καὶ φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΑΔ πρὸς αὐτό. Νὰ ὁρισθῇ ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΔ ἕνα σημεῖον Μ εἰς τρόπον, ὥστε, ὅταν τὸ σχῆμα στραφῇ περὶ τὴν ΑΓ, ὁ ὄγκος, ὁ παραγόμενος ὑπὸ τοῦ τριγώνου ΜΑΓ, νὰ διαιρῆται εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη ὑπὸ τῆς ζώνης, τὴν ὁποίαν παράγει τὸ τόξον ΜΒ. (Ἐὰν ΜΕ εἶναι ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ λάβετε, ὡς ἄγνωστον τὸ ΓΕ=x). Διερεύνησις.

ΣΤ′ Ὁμάς. **2743.** (2778). Δίδεται περιφέρεια Ο διαμέτρου ΑΒ=2R. Νὰ προσδιορισθῇ μία χορδὴ ΓΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ τοιαύτη, ὥστε, ἐὰν στραφῇ τὸ σχῆμα περὶ τὴν ΑΒ, τὸ ἐμβαδόν, τὸ παραγόμενον ἀπὸ τὸ τόξον ΑΓ, νὰ εἶναι ἴσον ἴσον μὲ τὸ ἐμβαδόν, τὸ ὁποῖον παράγει ἡ χορδὴ ΒΓ.

2744. (2779). Ἕνα ὀρθογώνιον τραπέζιον ΑΒΓΔ ἔχει ὕψος ΑΔ=υ καὶ ἐμβαδὸν μυ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ βάσεις ΑΒ καὶ ΓΔ τοῦ τραπεζίου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ λόγος τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν παράγει ἡ πλευρὰ ΒΓ, ὅταν τὸ τραπέζιον στραφῇ περὶ τὴν ΑΔ, πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τραπεζίου, εἶναι ἴσος μὲ $\frac{4\pi}{\sqrt{3}}$. Διερεύνησις.

2745. (2780). Δύο κύκλοι Ο καὶ Ο′ ἀκτίνων R καὶ ρ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον Α. Φέρομεν τὴν κοινὴν ἐφαπτομένην αὐτῶν ΒΓ καὶ στρέφομεν τοὺς δύο κύκλους περὶ τὴν διάκεντρόν των ΟΟ′. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν παράγει ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη ΒΓ.

2746. (2781). Δίδεται μία ἡμιπεριφέρεια διαμέτρου ΑΒ=2R καὶ ζητεῖται νὰ ὁρισθῇ ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας αὐτῆς ἕνα σημεῖον Δ τοιοῦτον, ὥστε τὰ ἐμβαδά, τὰ ὁποῖα παράγονται ἀπὸ τὸ τόξον ΔΑ καὶ ἀπὸ τὴν χορδὴν ΔΒ, ὅταν τὸ

σχῆμα στραφῇ περὶ τὴν ΑΒ, νὰ εἶναι ἴσα. (Λάβετε ἄγνωστον τὴν ἀπόστασιν ΑΓ=x, ὅπου Γ εἶναι ἡ προβολὴ τοῦ Δ ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ὑπολογίσατε τὴν ἀπόστασιν αὐτὴν κατὰ προσέγγισιν 0,001, ἂν ὑποθέσετε, ὅτι R=1 μέτρ.

2747. (2782). Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς κύκλου Ο, φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΑΒ πρὸς τὸν κύκλον αὐτόν. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀπόστασις ΑΟ, ἵνα, ὅταν τὸ σχῆμα στραφῇ περὶ τὴν ΑΟ, τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν παράγει ἡ ΑΒ, νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ, ποὺ παράγει ἡ περιφέρεια Ο.

2748. (2783). Ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α στρέφεται περὶ μίαν παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν του, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὴν ἀπέναντι κορυφήν του. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ.

2749. (2784). Ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ στρέφεται περὶ ἄξονα, ὁ ὁποῖος εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν του ΒΓ καὶ διέρχεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν του Α. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ΒΓ=6 μέτρα καὶ ΑΒ=ΑΓ=10 μέτρα.

2750. (2785). Αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ΑΒ=4 μέτρα, ΑΓ=6 μέτρα καὶ ΒΓ=8 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος, τοῦ παραγομένου στερεοῦ, ἂν τὸ τρίγωνον στραφῇ περὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ.

2751. (2786). Αἱ πλευραὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου ἔχουν μήκη α καὶ β. Στρέφομεν τὸ ὀρθογώνιον αὐτὸ περὶ ἄξονα, ὁ ὁποῖος διέρχεται ἀπὸ μίαν κορυφήν του καὶ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀντίστοιχον διαγώνιόν του. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ.

2752. (2787). Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι οἱ ὄγκοι τῶν στερεῶν, ποὺ παράγει τὸ τρίγωνον αὐτό, ὅταν στραφῇ διαδοχικῶς περὶ τὰς τρεῖς πλευράς του α, β, γ, εἶναι ἰσοδύναμοι μὲ τοὺς ὄγκους τριῶν σφαιρῶν ἀκτίνων ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3.

2753. (2788). Περὶ ποίαν πλευρὰν πρέπει νὰ στραφῇ ἕνα τρίγωνον διὰ νὰ δώσῃ τὸν μεγαλύτερον ὄγκον.

2754. (2789). Ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, ποὺ παράγει ἕνα τρίγωνον, τὸ ὁποῖον στρέφεται περὶ ἄξονα, ὁ ὁποῖος κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου καὶ δὲν τέμνει αὐτό, εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ἐπὶ τὴν περιφέρειαν, τὴν ὁποίαν γράφει τὸ κέντρον τοῦ βάρους του.

2755. (2790). Δίδεται ἕνα ἡμικύκλιον διαμέτρου ΑΒ=2R. Εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β φέρομεν ἐφαπτομένας Αx καὶ Βy τοῦ ἡμικυκλίου καὶ ἔπειτα μίαν τρίτην ἐφαπτομένην αὐτοῦ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Αx εἰς τὸ Γ καὶ τὴν Αy εἰς τὸ Δ. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἐφαπτομένη ΓΔ, οὕτως ὥστε ὁ ὄγκος, τὸν ὁποῖον παράγει τὸ τραπέζιον ΑΒΔΓ στρεφόμενον περὶ τὴν ΑΒ, νὰ εἶναι μ φορὰς μεγαλύτερος τοῦ ὄγκου σφαίρας ἀκτῖνος R. Ἐφαρμογή: μ=3/2.

2756. (2791). Ἕνα κυρτὸν πολύγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει ἕνα κέντρον συμμετρίας, στρέφεται περὶ μίαν εὐθεῖαν xy, ἡ ὁποία κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πολυγώνου καὶ δὲν τέμνει αὐτό. Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν παράγουν αἱ πλευραί του, εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου τοῦ πολυγώνου ἐπὶ τὴν περιφέρειαν, τὴν ὁποίαν γράφει τὸ κέντρον συμμετρίας.

2ον. ὁ ὄγκος, τὸν ὁποῖον παράγει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυγώνου, εἶναι ἴσος

μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ πολυγώνου ἐπὶ τὴν περιφέρειαν, τὴν ὁποίαν γράφει τὸ κέντρον συμμετρίας.

2757. (2792). Δύο κύκλοι Ο καὶ Ο' ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον Α. Φέρομεν τὴν κοινὴν ἐξωτερικὴν ἐφαπτομένην αὐτῶν ΒΒ'. Ἐὰν στρέψωμεν τὸ σχῆμα αὐτὸ περὶ τὴν διάκεντρον ΟΟ', νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ ὄγκος, ὁ ὁποῖος περιέχεται μεταξὺ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου, ποὺ παράγει ἡ ΒΒ' καὶ τῆς σφαίρας, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκουν οἱ κύκλοι τῶν βάσεων τοῦ κολούρου αὐτοῦ κώνου, εἶναι διπλάσιος τοῦ μέρους τοῦ κολούρου κώνου, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τῶν σφαιρῶν, ποὺ παράγουν οἱ κύκλοι Ο καὶ Ο'.

2758. (2793). Δύο κύκλοι Ο καὶ Ο' ἀκτίνων α καὶ β ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον Α. Φέρομεν τὴν κοινὴν ἐξωτερικὴν ἐφαπτομένην ΒΒ'.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος, τὸν ὁποῖον παράγει τὸ τρίγωνον ΑΒΒ', ἂν τὸ σχῆμα στραφῇ περὶ τὴν διάκεντρον ΟΟ'.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΒ'. Ἐφαρμογή:

$$\alpha=\sqrt{5}, \qquad \beta=\sqrt{3}.$$

2759. (2794). Δίδονται δύο περιφέρεια Ο καὶ Ο' ἀκτίνων α καὶ β, αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον Δ. Φέρομεν τὴν κοινὴν ἐξωτερικὴν ἐφαπτομένην ΑΒ καὶ τὴν κοινὴν ἐσωτερικὴν ἐφαπτομένην ΔΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Γ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ Γ εἶναι μέσον τῆς ΑΒ.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου ΟΟ'ΒΑ καὶ ἐξ αὐτοῦ, τοῦ τριγώνου ΟΓΟ'.

3ον. Νὰ εὑρεθῇ ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν α καὶ β, ἵνα τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν στερεῶν, τῶν παραγομένων ὑπὸ τῶν τριγώνων ΟΑΒ καὶ Ο'ΑΒ, στρεφομένων ἀντιστοίχως περὶ τὴν ΟΑ καὶ Ο'Β, εἶναι ἴσον μὲ τὸ τέταρτον τοῦ ὄγκου σφαίρας ἀκτῖνος (α+β).

2760. (2795). Δίδεται κύκλος Ο καὶ μία χορδή του ΑΒ· περιγράφομεν περὶ τὸν κύκλον αὐτὸν τὸ τρίγωνον ΣΓΔ, τὸ ὁποῖον σχηματίζουν αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ ἡ ἐφαπτομένη ΓΗΔ, ἡ ὁποία εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις ΟΕ=x τοῦ κέντρου Ο ἀπὸ τὴν χορδὴν ΑΒ εἰς τρόπον, ὥστε ὁ ὄγκος τοῦ κώνου, τὸν ὁποῖον παράγει τὸ τρίγωνον ΣΓΗ, στρεφόμενον περὶ τὴν ΣΟΗ, εἶναι διπλάσιος τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας, τὴν ὁποίαν παράγει ὁ κύκλος Ο.

2761. (2796). Νὰ χωρισθῇ ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ ὑπὸ μιᾶς τεμνούσης ΑΔ οὕτως, ὥστε οἱ ὄγκοι, οἱ παραγόμενοι ἀπὸ τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΓΔ, στρεφόμενα περὶ ἕνα ἄξονα xy, ὁ ὁποῖος κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου καὶ δὲν τέμνει τὸ τρίγωνον, νὰ εἶναι ἴσοι.

2762. (2797). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος ΑΕ εἶναι ἴσον μὲ υ· τέμνομεν τὸ τρίγωνον αὐτὸ μὲ μίαν παράλληλον Β'Γ' πρὸς τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία ἀπέχει ἀπὸ τὸ Α ἀπόστασιν υ'. Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις μιᾶς εὐθείας xy, ἡ ὁποία εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ καὶ κεῖται ἐκτὸς τοῦ τριγώνου καὶ τοιαύτη, ὥστε, ὅταν τὸ σχῆμα στραφῇ περὶ τὴν xy, οἱ ὄγκοι, οἱ παραγόμενοι ὑπὸ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ τοῦ τραπεζίου ΒΒΓ'Β', νὰ εἶναι ἴσοι.

2763. (2798). Δίδεται ἕνα ἡμικύκλιον διαμέτρου ΑΑ', ἡ ἐφαπτομένη εἰς ἕνα σημεῖον Μ, ἡ ὁποία συναντᾷ εἰς τὸ σημεῖον Β τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἡμιπεριφερείας εἰς τὸ Α· φέρομεν τὴν ΜΓ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΑ'. Νὰ ὑπολογισθῇ

ἡ ΑΓ=x εἰς τρόπον, ὥστε, ὅταν τὸ σχῆμα στραφῇ περὶ τὴν ΑΑ', ὁ λόγος τῶν ὄγκων, ποὺ παράγουν τὰ μικτόγραμμα σχήματα ΑΒΜΝΑ καὶ ΑΓΜΝΑ νὰ εἶναι ἴσοι μὲ k. Ἐφαρμογή: k=1/2.

2764. (2799). Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Σ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς κύκλου Ο, φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ΣΑ καὶ ΣΒ πρὸς τὸν κύκλον. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Β φέρομεν τὴν κάθετον ΒΓ ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΟΑ'. Στρέφομεν τὸ σχῆμα περὶ τὴν διάμετρον αὐτήν· νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ ὄγκος ὁ παραγόμενος ὑπὸ τοῦ μικτογράμμου τριγώνου ΣΑΜΒ εἶναι ἴσος μὲ τὸν ὄγκον, ποὺ παράγει τὸ τρίγωνον ΣΑΓ.

2765. (2800). Δίδεται ἡμιπεριφέρεια Ο διαμέτρου ΑΒ=2R. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας αὐτῆς ἕνα σημεῖον Γ τοιοῦτον, ὥστε, ἂν φέρωμεν τὴν ἐφαπτομένην ΓΔ τῆς ἡμιπεριφερείας αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον Γ, νὰ τέμνῃ τὴν διάμετρον ΑΒ, προεκτεινομένην, εἰς ἕνα σημεῖον Δ τοιοῦτον, ὥστε ΑΓ=ΓΔ. Ὅταν προσδιορισθῇ τὸ σημεῖον Γ:

1ον. νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος, τὸν ὁποῖον παράγει τὸν κυκλικὸν τμῆμα ΑΜΓΑ, στρεφόμενον περὶ τὴν ΑΒ.

2ον. ὁ ὄγκος, τὸν ὁποῖον παράγει τὸ μικρόγραμμον τρίγωνον ΒΓΔ, στρεφόμενον περὶ τὴν ΑΒ.

2766. (2801). Δίδεται ἕνα ὀρθογωνιον τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία Β=30°. Μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Β καὶ ἀκτῖνα τὴν ΒΑ γράφομεν ἕνα τόξον κύκλου, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ εἰς τὸ Ε. Μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΓΑ γράφομεν ἕνα ἄλλο τόξον ΑΔ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Δ.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν καὶ ἡ περίμετρος τοῦ μικτογράμμου σχήματος ΑΔΕΑ.

2ον. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν παράγουν τὰ τόξα ΑΔ καὶ ΑΕ, στρεφόμενα περὶ τὴν ΒΓ.

3ον. Ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, ποὺ παράγει τὸ μικτόγραμμον σχῆμα ΑΔΕΑ.

2767. (2802). Δίδεται ἕνα ἡμικύκλιον Ο διαμέτρου ΑΒ=2 . Φέρομεν τὴν χορδὴν ΑΓ ἴσην μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον Ο καὶ τὴν χορδὴν ΑΔ ἴσην μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου καὶ στρέφομεν ἔπειτα τὸ ἡμικύκλιον περὶ τὴν ΑΒ κατὰ ὁλόκληρον στροφήν. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν καὶ ὁ ὄγκος, τὸν ὁποῖον παράγει τὸ μικτόγραμμον τρίγωνον ΑΔΓ. Ἐφαρμογή: R=25 ἑκ.

***Ζ' Ὁμάς.* 2768.** (2804). Μία τρισορθογώνιος στερεὰ γωνία στρέφεται περὶ τὴν κορυφήν της, ἡ ὁποία εἶναι ὡρισμένη. Αἱ ἀκμαί της συναντοῦν μίαν δοθεῖσαν σφαῖραν. Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον. ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν χορδῶν, τὰς ὁποίας τέμνουν ἐπὶ τῆς σφαίρας αἱ τρεῖς ἀκμαὶ τῆς τριέδρου, εἶναι σταθερόν. 2ον. τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν 6 εὐθυγράμμων τμημάτων, τὰ ὁποῖα περιέχονται μεταξὺ τῆς κορυφῆς τῆς τριέδρου καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας εἶναι σταθερόν. 3ον. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν κύκλων τῆς τομῆς τῆς σφαίρας ὑπὸ τῶν τριῶν ἑδρῶν τῆς τριέδρου εἶναι σταθερόν.

2769. (2805). Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀκτῖνες τῶν σφαιρῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι περιγεγραμμέναι καὶ ἐγγεγραμμέναι εἰς μίαν κανονικὴν πυραμίδα, ἡ ὁποία ἔχει ὕψος υ καὶ βάσιν ἕνα τετράγωνον πλευρᾶς α.

2770. (2807). Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων καὶ τὸ ὕψος ἑνὸς κολούρου κώνου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι αἱ ἀκτῖνες αὐταὶ ἔχουν λόγον ἴσον μὲ 4

πρὸς 3, ὅτι ἡ πλευρά του εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεών του καὶ ὅτι ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνειά του εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν ἐπιφάνειαν μιᾶς σφαίρας ἀκτῖνος 6 ἑκ.

2771. (2808). Σφαῖρα Ο ἀκτῖνος R τέμνεται ὑπὸ ἐπιπέδου ΑΒ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις ΟΕ=x τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ ἀπὸ τὸ κέντρον Ο, ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος ΑΓΒ εἶναι ἴσος: 1ον. μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ ὄγκου τοῦ κώνου ΑΔΒ. 2ον. μὲ τὸν ὄγκον τοῦ κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα ΟΕ καὶ ὕψος ΕΓ. (ΑΒ εἶναι ἡ τομὴ τῆς σφαίρας καὶ ΓΔ ἡ διάμετρος ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν τομὴν ΑΒ).

2772. (2809). Δίδεται ἕνα τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς 2α καὶ ἕνα σημεῖον Μ ἐντὸς αὐτοῦ. Στρέφομεν τὰ τρίγωνα ΜΑΒ, ΜΒΓ, ΜΓΔ, ΜΔΑ ἀντιστοίχως περὶ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων, ποὺ παράγουν τὰ τρίγωνα αὐτὰ καὶ νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου Μ οὕτως, ὥστε τὸ ἄθροισμα αὐτὸ νὰ ἔχῃ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν δοθεῖσαν τιμὴν $\frac{4}{3}\pi\alpha^2\beta$.

2773. (2810). Δίδεται ὁ ρόμβος ΑΒΓΔ, ὅπου ΑΒ=α καὶ γων.Α=60°. 1ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαγώνιοί του ΒΔ καὶ ΑΓ καὶ τὸ ἐμβαδόν του. 2ον. Φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν xΑy, ἡ ὁποία δὲν τέμνει τὸν ρόμβον· ἀπὸ τὰ σημεῖα Γ, Δ, Β φέρομεν τὰς καθέτους ΓΖ, ΔΕ, ΒΗ ἐπὶ τὴν xΑy. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΓΖ=ΔΕ+ΒΗ. 3ον. Στρέφομεν τὸν ρόμβον περὶ τὴν ΑΓ κατὰ ὁλόκληρον στροφήν. Τί στερεὸν νὰ παραχθῇ; Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος καὶ ἡ ἐπιφάνειά του. 4ον. Στρέφομεν τὸν ρόμβον περὶ τὴν ΑΒ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ.

2774. (2811). Εἰς τὸ τραπέζιον ΑΒΔΓ αἱ γωνίαι Α καὶ Β εἶναι ὀρθαὶ καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΓΔ ἕνα σημεῖον Ε τοιοῦτον, ὥστε ΓΕ=ΓΑ καὶ ΔΕ=ΔΒ: 1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία ΑΕΒ εἶναι ὀρθὴ καὶ ὅτι ἡ ΓΔ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας διαμέτρου ΑΒ· 2ον. Ἐὰν Ο εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΒ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι $\Gamma A \times \Delta B = \overline{OA}^2$. 3ον. Θέτομεν ΓΑ=α, ΒΔ=β καὶ ΑΒ=2R. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια Ε καὶ ὁ ὄγκος V τοῦ στερεοῦ, τοῦ παραγομένου ὑπὸ τοῦ τραπεζίου, στρεφομένου περὶ τὴν ΑΒ 4ον. Νὰ ἐπαληθευθῇ, ὅτι $V = \frac{1}{2} R \times E$.

2775. (2813). Δίδεται ἕνα ὀρθ. τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου αἱ κάθετοι πλευραὶ εἶναι ΑΒ=48 ἑκ. καὶ ΑΓ=20 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ στερεοῦ, τὸ ὁποῖον παράγει τὸ τρίγωνον αὐτό, ἂν στραφῇ: 1ον. περὶ τὴν πλευρὰν ΑΒ. 2ον. περὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ. 3ον. περὶ τὴν εὐθεῖαν xy, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ καὶ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.

2776. (2814). Δίδεται μία σφαῖρα ἀκτῖνος R· ἐπὶ μιᾶς διαμέτρου ΑΒ λαμβάνομεν ἕνα μῆκος ΑΕ=x καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον Ε φέρομεν τὴν κάθετον ΓΕΔ ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ. Νὰ ἐκφρασθῇ συναρτήσει τῶν R καὶ x: 1ον. ὁ λόγος τοῦ ὄγκου τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος ΓΑΔΓ πρὸς τὸν ὄγκον τῆς σφαίρας, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὸ x. 2ον. ὁ λόγος τοῦ ἄλλου σφαιρικοῦ τμήματος ΓΒΔΓ πρὸς τὸν ὄγκον τῆς σφαίρας, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὸ ὕψος αὐτοῦ τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος. 3ον. Νὰ ὁρισθῇ ὁ x εἰς τρόπον, ὥστε ὁ πρῶτος λόγος νὰ εἶναι τριπλάσιος τοῦ δευτέρου.

2777. (2815). Δίδεται ἡμικύκλιον διαμέτρου ΑΒ=2R· προεκτείνομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΒ κατὰ μῆκος ΒΓ=R καὶ φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΓΜ τῆς ἡμιπεριφερείας. 1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος ΓΜ τῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς, ἂν τὸ Μ εἶναι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς. 2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν, τὰ ὁποῖα παράγουν τὸ τόξον ΑΝΜ καὶ τὸ εὐθ τμῆμα ΓΜ, ὅταν τὸ σχῆμα στραφῇ περὶ τὴν ΑΓ. 3ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, τὸ ὁποῖον παράγει τὸ μικρόγραμμον σχῆμα ΓΜΝΑΓ, στρεφόμενον περὶ τὴν ΑΓ. Ἐφαρμογὴ R=2 μέτρ.

2778. (2816). Δίδεται ἕνα ἡμικύκλιον διαμέτρου ΑΒ=2R· ἀπὸ τὸ κέντρον του Ο φέρομεν μίαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὸ Γ καὶ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ Α εἰς τὸ σημεῖον Δ. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ διεύθυνσις τῆς τεμνούσης ΟΓΔ εἰς τρόπον, ὥστε, ὅταν τὸ σχῆμα στραφῇ περὶ τὴν ΑΒ, ὁ λόγος τοῦ ὄγκου, τὸν ὁποῖον παράγει ὁ κυκλικὸς τομεὺς ΟΑΓΟ πρὸς τὸν ὄγκον, τὸν ὁποῖον παράγει τὸ τρίγωνον ΟΑΔ νὰ εἶναι ἴσος μὲ μ. Ἐφαρμογή: μ=1/6.

2779. (2817). Δίδεται μία ὀρθὴ γωνία ΧΟΥ καὶ ἐπὶ τῆς ΟΧ ἕνα σημεῖον Α τοιοῦτον, ὥστε ΟΑ=α· ἀπὸ ἕνα σημεῖον Μ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς τῆς γωνίας φέρομεν τὴν ΜΒ κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΥ, τὴν εὐθεῖαν ΜΑ καὶ τὸ τόξον ΟΓΜ τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία ἐφάπτεται τῆς ΟΧ καὶ διέρχεται ἀπὸ τὸ Μ. Ἐὰν τὸ σχῆμα στραφῇ περὶ τὴν ΟΥ, νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ Μ, ἂν γνωρίζωμεν ὅτι οἱ ὄγκοι οἱ παραγόμενοι ὑπὸ τοῦ τριγώνου ΟΑΒ καὶ τοῦ μικτογράμμου τριγώνου ΟΑΜΓ εἶναι ἰσοδύναμοι.

2780. (2818). Δίδεται ἡμιπεριφέρεια Ο διαμέτρου ΑΒ=2R· ἀπὸ ἕνα σημεῖον Δ τῆς ΑΒ φέρομεν κάθετον ΔΓ ἐπ' αὐτήν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς ἕνα σημεῖον Γ καὶ στρέφομεν τὸ ἡμικύκλιον περὶ τὴν διάμετρον ΑΒ κατὰ ὁλόκληρον στροφήν. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ΑΔ=x, ἵνα: 1ον. ὁ ὄγκος, ὁ παραγόμενος ὑπὸ τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΑΜΓΑ εἶναι ἴσος μὲ τὸν ὄγκον τοῦ κώνου, τὸν ὁποῖον παράγει τὸ τρίγωνον ΓΔΟ. 2ον. τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν παραγομένων ὑπὸ τῶν κυκλικῶν τμημάτων ΑΜΓΑ καὶ ΓΝΒΓ ἰσοῦται μὲ τὰ 5/8 τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας, τὴν ὁποίαν παράγει τὸ ἡμικύκλιον ΑΓΒ 3ον. τὸ ἄθροισμα τῶν αὐτῶν ὄγκων εἶναι διπλάσιον τοῦ ὄγκου, τὸν ὁποῖον παράγει τὸ τρίγωνον ΑΓΒ.

2781. (2819). Δίδεται ἡμιπεριφέρεια ΑΜΒ, διαμέδρου ΑΟΒ=2R. Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΓ οὕτως, ὥστε νὰ σχηματίζῃ μὲ τὴν ΟΒ γωνίαν 45° καὶ μίαν ἐφαπτομένην ΓΔ τῆς περιφερείας εἰς τὸ Γ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΟΒ εἰς τὸ Δ. Νὰ ὑπολογισθῇ: 1ον. τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΟΔΓ. 2ον. τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μικτογράμμου μέρους ΔΒΓ. 3ον. τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς παραγομένης ὑπὸ τοῦ τόξου ΑΜΓ, στρεφομένου περὶ τὴν ΑΒ.

Η' Ὁμάς. **2782.** (2820). Διὰ δοθείσης εὐθείας νὰ ἀχθῇ ἕνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον νὰ ἐφάπτεται δοθείσης σφαίρας.

2783. (2821). Διὰ δοθείσης εὐθείας νὰ ἀχθῇ ἕνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον νὰ τέμνῃ δοθεῖσαν σφαῖραν οὕτως, ὥστε ἡ τομή της νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν ἀκτῖνα.

2784. (2822). Ἐπὶ δοθείσης σφαίρας νὰ γραφῇ περιφέρεια κύκλου, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν ἀκτῖνα.

2785. (2823). Νὰ κατασκευασθῇ μία σφαῖρα, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν ἀκτῖνα καὶ νὰ διέρχεται ἀπὸ τρία σημεῖα.

2786. (2824). Νὰ κατασκευασθῇ μία σφαῖρα, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν

ἀκτῖνα καὶ νὰ διέρχεται ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα καὶ νὰ ἐφάπτεται εἰς ἕνα ἐπίπεδον.

2787. (2825). Νὰ κατασκευασθῇ μία σφαῖρα, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν ἀκτῖνα καὶ νὰ διέρχεται ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα καὶ νὰ ἐφάπτεται δοθείσης σφαίρας.

2788. (2826). Νὰ κατασκευασθῇ μία σφαῖρα, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν ἀκτῖνα καὶ νὰ διέρχεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον καὶ νὰ ἐφάπτεται δύο δοθέντων ἐπιπέδων.

2789. (2827). Νὰ κατασκευασθῇ μία σφαῖρα, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν ἀκτῖνα καὶ νὰ διέρχεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον καὶ νὰ ἐφάπτεται δύο δοθεισῶν σφαιρῶν.

2790. (2828). Νὰ κατασκευασθῇ μία σφαῖρα, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν ἀκτῖνα καὶ νὰ διέρχεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον καὶ νὰ ἐφάπτεται δοθέντος ἐπιπέδου καὶ δοθείσης σφαίρας.

2791. (2829). Νὰ κατασκευασθῇ μία σφαῖρα, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν ἀκτῖνα καὶ νὰ ἐφάπτεται τριῶν ἐπιπέδων.

2792. (2830). Νὰ κατασκευασθῇ μία σφαῖρα, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν ἀκτῖνα καὶ νὰ ἐφάπτεται τριῶν σφαιρῶν.

2793. (2831). Νὰ κατασκευασθῇ μία σφαῖρα, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν ἀκτῖνα καὶ νὰ ἐφάπτεται δύο ἐπιπέδων καὶ μιᾶς σφαίρας.

2794. (2832). Νὰ κατασκευασθῇ μία σφαῖρα, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν ἀκτῖνα καὶ νὰ ἐφάπτεται ἑνὸς ἐπιπέδου καὶ δύο σφαιρῶν.

2795. (2833). Νὰ διαιρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς σφαίρας εἰς ἰσοδύναμα μέρη ὑπὸ ἐπιπέδων, τὰ ὁποῖα διέρχονται ἀπὸ δοθεῖσαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία κεῖται ἐκτὸς τῆς σφαίρας.

2796. (2834). Νὰ προσδιορισθῇ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας μία ζώνη μὲ μίαν βάσιν οὕτως, ὥστε τὸ ἐμβαδόν της νὰ ἔχῃ λόγον k πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς της.

2797. (2835). Νὰ τμηθῇ μία σφαῖρα ὑπὸ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων, τὰ ὁποῖα νὰ ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας εἰς τρόπον, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τομῶν νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ζώνης, ἡ ὁποία περιέχεται μεταξὺ τῶν δύο ἐπιπέδων.

Θ' Ὁμάς. **2798.** (2836). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς ἕνα τετράεδρον δυνάμεθα πάντοτε νὰ ἐγγράψωμεν μίαν σφαῖραν (νὰ ἐφάπτεται τῶν ἑδρῶν του).

2799. (2837). Περὶ δοθὲν τετράεδρον δυνάμεθα νὰ περιγράψωμεν σφαῖραν.

2800. (2838). Νὰ ἐγγραφῇ εἰς μίαν σφαῖραν τὸ μέγιστον παραλληλεπίπεδον.

2801. (2839). Νὰ ἐγγραφῇ εἰς μίαν σφαῖραν ὁ μέγιστος κῶνος.

2802. (2840). Νὰ ἐγγραφῇ εἰς μίαν σφαῖραν ὁ μέγιστος κύλινδρος.

2803. (2841). Νὰ περιγραφῇ περὶ δοθεῖσαν σφαῖραν ὁ ἐλάχιστος κῶνος.

2804. (2342). Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ἀχθῇ μία εὐθεῖα xAy, ἡ ὁποία νὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου καὶ νὰ μὴ τέμνῃ αὐτὸ καὶ τοιαύτη, ὥστε ὁ ὄγκος τὸν ὁποῖον παράγει τὸ τρίγωνον αὐτό, στρεφόμενον περὶ τὴν xy, νὰ εἶναι μέγιστος.

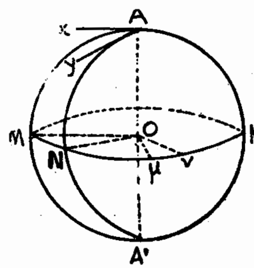
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΣΦΑΙΡΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ ΚΑΙ ΤΡΙΓΩΝΑ

Ὁρισμοὶ καὶ ἰδιότητες σφαιρικῶν τριγώνων

879. Γωνία δύο καμπύλων γραμμῶν. ***Γωνία δύο τεμνομένων καμπύλων*** *λέγεται ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν καμπύλων αὐτῶν εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς των.*

Π.χ. ἔστωσαν δύο τόξα ΑΜΑ′ καὶ ΑΝΑ′ *(Σχ. 587)* τὰ ὁποῖα τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Α′. Ἔστω Αx ἡ ἐφαπτομένη τοῦ τόξου ΑΜΑ′ εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ Αy ἡ ἐφαπτομένη τοῦ τόξου ΑΝΑ′ εἰς τὸ σημεῖον Α. Ἡ γωνία xΑy εἶναι ἡ γωνία τῶν δύο αὐτῶν τεμνομένων τόξων.



Σχ. 587.

Ἐὰν τὰ τόξα ΑΜΑ′ καὶ ΑΝΑ′ εἶναι τόξα περιφερειῶν μεγίστων κύκλων σφαίρας, τότε ἡ γωνία xΑy λέγεται ***σφαιρικὴ γωνία.***

Τὸ σημεῖον Α λέγεται ***κορυφὴ τῆς γωνίας*** *καὶ τὰ τόξα ΑΜΑ′ καὶ ΑΝΑ′ λέγονται* ***πλευραὶ τῆς γωνίας.***

880. Θεώρημα. ***Ἡ γωνία δύο τόξων μεγίστων κύκλων μιᾶς σφαίρας:***

1ον. Εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀντίστοιχον ἐπίπεδον γωνίαν τῆς διέδρου γωνίας, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν τὰ ἐπίπεδα τῶν τόξων.

2ον. Ἔχει μέτρον, τὸ μέτρον τοῦ τόξου τοῦ μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας, ὁ ὁποῖος γράφεται μὲ πόλον τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας, καὶ τὸ ὁποῖον τόξον περιέχεται μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας.

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν τὰ δύο τόξα ΑΜΑ′ καὶ ΑΝΑ′ *(Σχ. 587)* μεγίστων κύκλων τῆς σφαίρας Ο καὶ xΑy ἡ γωνία τῶν δύο αὐτῶν τόξων.

1ον. Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ γωνία xΑy εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐπίπεδον γωνίαν τῆς διέδρου Μ-ΑΑ′-Ν.

Ἀπόδειξις: Τὰ ἐπίπεδα τῶν τόξων ΑΜΑ′ καὶ ΑΝΑ′, τεμνόμενα κατὰ τὴν διάμετρον ΑΑ′, σχηματίζουν τὴν δίεδρον γωνίαν Μ-ΑΑ′-Ν.

Ἡ xA ὡς ἐφαπτομένη τοῦ τόξου ΑΜΑ' εἰς τὸ σημεῖον Α, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΑ' καὶ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΜΑ'· ὁμοίως καὶ ἡ yA εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΑ', ὡς ἐφαπτομένη τοῦ τόξου ΑΝΑ' εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΝΑ'. Ἡ γωνία xAy εἶναι (§ 679) ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος γωνία τῆς διέδρου Μ - ΑΑ' - Ν.

2ον. Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν ὅτι μέτρ.$\widehat{xAy}$=μέτρ.$\widehat{MN}$.

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὸ κέντρον Ο τῆς σφαίρας φέρομεν ἕνα ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν κοινὴν διάμετρον ΑΑ' τῶν δύο τόξων. Τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ ἕνα μέγιστον κύκλον ΜΜ' καὶ τὰ ἐπίπεδα ΑΑ'Μ καὶ ΑΑ'Ν κατὰ τὰς εὐθείας ΟΜ καὶ ΟΝ. Αἱ εὐθεῖαι ΟΜ καὶ ΟΝ σχηματίζουν μίαν γωνίαν ΜΟΝ, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος τῆς διέδρου γωνίας Μ - ΑΑ' - Ν· ἐπειδὴ καὶ ἡ γωνία xAy εἶναι ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος γωνία τῆς αὐτῆς διέδρου γωνίας, θὰ εἶναι

$$\widehat{xAy}=\widehat{MON}.$$

Ἀλλὰ ἡ γωνία ΜΟΝ, ὡς ἐπίκεντρος γωνία, ἔχει μέτρον ἴσον μὲ τὸ μέτρον τοῦ τόξου ΜΝ τοῦ μεγίστου κύκλου ΜΜ' καὶ ἑπομένως καὶ ἡ ἴση της γωνία xAy ἔχει μέτρον ἴσον μὲ τὸ μέτρον τοῦ τόξου ΜΝ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: ***Ἡ γωνία δύο τόξων....***

881. Πόρισμα Ι. ***Ἡ γωνία δύο μεγίστων κύκλων ἔχει μέτρον ἴσον μὲ τὸ μέτρον τοῦ μεγίστου κύκλου, ὁ ὁποῖος συνδέει τοὺς πόλους των.***

Ἀπόδειξις: Εἰς τὸ ἐπίπεδον ΝΜΜ' *(Σχ. 587)* φέρομεν τὴν Ομ κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΜ καὶ τὴν Ον κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΝ. Αἱ γωνίαι ΜΟΝ καὶ μΟν εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους καὶ ἑπομένως τὸ τόξον $\widehat{MN}$ θὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τόξον $\widehat{μν}$. Ἐξ ἄλλου τὸ σημεῖον μ εἶναι πόλος τοῦ κύκλου ΑΜΑ' καὶ τὸ σημεῖον ν εἶναι πόλος τοῦ κύκλου ΑΝΑ'. Ὥστε ἡ δίεδρος γωνία Μ - ΑΑ' - Ν καὶ ἑπομένως καὶ ἡ γωνία xAy ἔχει τὸ αὐτὸ μέτρον μὲ τὸ τόξον $\widehat{μν}$, ποὺ συνδέει τοὺς πόλους μ καὶ ν τῶν δύο κύκλων.

882. Πόρισμα ΙΙ. ***Διὰ νὰ εἶναι δύο μέγιστοι κύκλοι κάθετοι μεταξύ των, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἕκαστος ἐξ αὐτῶν νὰ περιέχῃ τὸν πόλον τοῦ ἄλλου.***

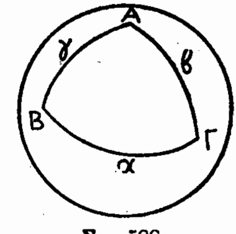
Τοῦτο εἶναι προφανές.

883. Σφαιρικὸν τρίγωνον. ***Σφαιρικὸν τρίγωνον*** *λέγεται τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ*

τριῶν τόξων μεγίστων κύκλων, *τὰ ὁποῖα ὅμως τόξα εἶναι μικρότερα ἡμιπεριφερείας.*

Π.χ. τὸ σχῆμα ΑΒΓ *(Σχ. 588)* εἶναι ἕνα σφαιρικὸν τρίγωνον.

Τὰ τόξα $\widehat{AB}$, $\widehat{B\Gamma}$, $\widehat{\Gamma A}$, *τὰ ὁποῖα εἶναι ἀντιστοίχως μικρότερα ἡμιπεριφερείας, λέγονται* ***πλευραὶ τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου.***

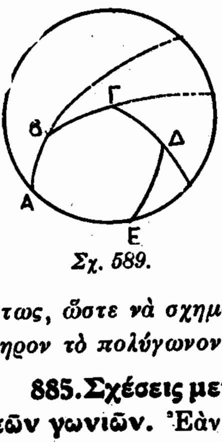


Σχ. 588.

Τὰ σημεῖα Α, Β, Γ λέγονται ***κορυφαὶ τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου.***

Αἱ γωνίαι ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ, τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ πλευραὶ τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου λέγονται ***γωνίαι τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου.*** Παριστάνομεν συνήθως μὲ Α, Β, Γ τὰς γωνίας ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου καὶ μὲ α, β, γ τὰς ἀπέναντι αὐτῶν πλευράς.

884. Σφαιρικὸν πολύγωνον. ***Σφαιρικὸν πολύγωνον*** *λέγεται τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ πολλῶν τόξων μεγίστων κύκλων, τὰ ὁποῖα ὅμως τόξα πρέπει νὰ εἶναι μικρότερα ἡμιπεριφερείας.*



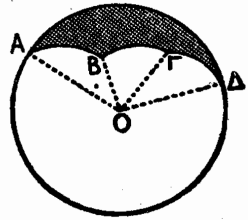
Σχ. 589.

Π.χ. τὸ σχῆμα ΑΒΓΔΕ *(Σχ. 589)* εἶναι ἕνα σφαιρικὸν πολύγωνον.

Τὰ τόξα $\widehat{AB}$, $\widehat{B\Gamma}$, $\widehat{\Gamma\Delta}$, $\widehat{\Delta E}$, $\widehat{EA}$ *εἶναι αἱ* ***πλευραί*** *του. Αἱ γωνίαι ΑΒΓ, ΒΓΔ.... εἶναι αἱ* ***γωνίαι*** *του καὶ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ.... εἶναι αἱ* ***κορυφαί*** *του.*

Ἕνα σφαιρικὸν πολύγωνον λέγεται ***κυρτόν,*** *ἐὰν κάθε πλευρά του, προεκτεινομένη οὕτως, ὥστε νὰ σχηματίζῃ ἕνα ὁλόκληρον μέγιστον κύκλον, ἀφίνῃ ὁλόκληρον τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ αὐτὸ ἡμισφαίριον.*

885. Σχέσεις μεταξὺ τῶν σφαιρικῶν πολυγώνων καὶ τῶν στερεῶν γωνιῶν. Ἐὰν συνδέσωμεν μὲ εὐθείας τὸ κέντρον Ο μιᾶς σφαίρας *(Σχ. 590)* μὲ τὰς κορυφὰς Α, Β, Γ, Δ ἑνὸς σφαιρικοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΑ, σχηματίζομεν μίαν στερεὰν γωνίαν Ο.ΑΒΓΔ, *τῆς ὁποίας αἱ* $A\widehat{O}B$, $B\widehat{O}\Gamma$, ... *ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον μὲ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ,.... τοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου*, διότι αἱ γωνίαι $A\widehat{O}B$, $B\widehat{O}\Gamma$,...

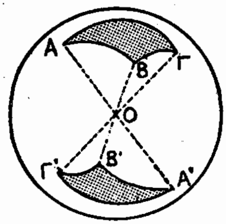


Σχ. 590.

εἶναι ἐπίκεντροι γωνίοι, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ τόξα (πλευρὰς) ΑΒ, ΒΓ, ...

Ἐπίσης *αἱ δίεδροι γωνίαι τῆς στερεᾶς γωνίας Ο.ΑΒΓΔ ἔχουν, κατὰ τὸ θεώρημα τῆς § 880, τὰς ἐπιπέδους γωνίας των ἴσας μὲ τὰς γωνίας τοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου.*

Καὶ ἀντιστρόφως, *κάθε στερεὰ γωνία, ἡ ὁποία ἔχει τὴν κορυφήν της εἰς τὸ κέντρον μιᾶς σφαίρας, τέμνει τὴν ἐπιφάνειάν της κατὰ ἕνα σφαιρικὸν πολύγωνον.*



Σχ. 591.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι: ***Εἰς κάθε ἰδιότητα τῶν στερεῶν γωνιῶν ἀντιστοιχεῖ μία ἀνάλογος ἰδιότης τῶν σφαιρικῶν πολυγώνων.***

Διὰ νὰ ἐκφράσωμεν αὐτὴν τὴν ἰδιότητα, ἀρκεῖ νὰ ἀντικαταστάσωμεν, ἀντιστοίχως, τὰς λέξεις *ἕδρα* καὶ *δίεδρος γωνία* μὲ τὰς λέξεις *πλευρὰ* καὶ *γωνία.*

Εἶναι φανερόν, ὅτι τὰ ἀνωτέρω ἐπεκτείνονται καὶ εἰς τὰς *τριέδρους γωνίας* καὶ εἰς τὰ *σφαιρικὰ τρίγωνα.*

886. Συμμετρικὰ σφαιρικὰ πολύγωνα. ***Δύο σφαιρικὰ πολύγωνα ἢ τρίγωνα λέγονται συμμετρικά,*** *ὅταν αἱ κορυφαὶ τοῦ ἑνὸς εἶναι συμμετρικαὶ τῶν κορυφῶν τοῦ ἄλλου, πρὸς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας.*

Π.χ. τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' *(Σχ. 591)* εἶναι συμμετρικά.

Εἰς δύο συμμετρικὰ σφαιρικὰ πολύγωνα ἀντιστοιχοῦν δύο συμμετρικαὶ στερεαὶ γωνίαι (§ 885) ἑπομένως:

Δύο συμμετρικὰ σφαιρικὰ πολύγωνα ἔχουν τὰ ὁμόλογα στοιχεῖα των ἴσα, ἀλλὰ δὲν ἐφαρμόζουν γενικῶς.

887. Ἰδιότητες τῶν σφαιρικῶν τριγώνων καὶ σφαιρικῶν πολυγώνων. Ἀπὸ τὰς γνωστὰς ἰδιότητας τῶν τριέδρων καὶ τῶν πολυέδρων γωνιῶν συνάγομεν τὰς κάτωθι ἰδιότητας τῶν σφαιρικῶν τριγώνων καὶ τῶν σφαιρικῶν πολυγώνων:

I. ***Εἰς κάθε κυρτὸν σφαιρικὸν πολύγωνον, τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν του εἶναι μικρότερον τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου*** (§ 702).

II. ***Κάθε πλευρὰ σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων*** (§ 701).

III. ***Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι μεγαλύτερον τῶν δύο ὀρθῶν καὶ μικρότερον τῶν 6 ὀρθῶν*** (§ 716).

Ἐξ αὐτοῦ συνάγομεν, ὅτι ἕνα σφαιρικὸν τρίγωνον δύναται νὰ ἔχῃ μίαν, δύο ἢ τρεῖς ὀρθὰς γωνίας. *Τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον, ποὺ ἔχει τρεῖς ὀρθὰς γωνίας λέγεται* ***τρισορθογώνιον.***

IV. ***Εἰς κάθε ἰσοσκελὲς σφαιρικὸν τρίγωνον αἱ γωνίαι, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν, εἶναι ἴσαι*** (§ 707) ***καὶ ἀντιστρόφως*** (§ 712).

888 Ἰσότης σφαιρικῶν τριγώνων. Ἐὰν δύο σφαιρικὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα, θὰ εἶναι ἴσαι καὶ αἱ τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς αὐτά, καὶ ἀντιστρόφως. Αἱ περιπτώσεις λοιπὸν τῆς ἰσότητος τῶν σφαιρικῶν τριγώνων συνάγονται ἀπὸ τὰς περιπτώσεις τῆς ἰσότητος τῶν τριέδρων γωνιῶν· οὕτω:

Δύο σφαιρικὰ τρίγωνα τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἴσων σφαιρῶν εἶναι ἴσα, δηλ. ἔχουν ὅλα τὰ ὁμόλογα στοιχεῖα των ἴσα:

1ον. Ὅταν ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας ἴσας μίαν πρὸς μίαν (§ 718).

2ον. Ὅταν ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν σχηματιζομένας γωνίας ἴσας (§ 719).

3ον. Ὅταν ἔχουν καὶ τὰς τρεῖς πλευράς των ἴσας, μίαν πρὸς μίαν (§ 720).

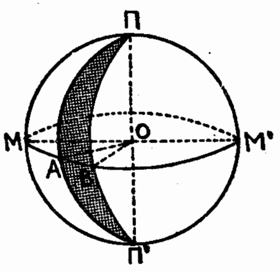
4ον. Ὅταν ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν (§ 721).

Εἰς ὅλας τὰς ἄνω περιπτώσεις τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα ἢ συμμετρικά, καθόσον ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμὸν ἢ ὄχι.

Ἄτρακτοι καὶ σφαιρικοὶ ὄνυχες

889. Ἄτρακτος. ***Ἄτρακτος*** *λέγεται τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ δύο ἡμιπεριφερειῶν μεγίστων κύκλων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν κοινὴν διάμετρον.*

Π.χ. τὸ μέρος ΠΑΠ'ΒΠ *(Σχ. 593)* τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας Ο εἶναι ἕνας ἄτρακτος.



Σχ. 592.

Τὰ ἡμικύκλια ΠΑΠ καὶ ΠΒΠ' μεγίστων κύκλων, τεμνόμενα κατὰ τὴν διάμετρον ΠΠ', ὁρίζουν μίαν δίεδρον γωνίαν Α-ΠΠ'-Β, τῆς ὁποίας ἀκμὴ εἶναι ἡ διάμετρος ΠΠ'.

Ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ ἡμιπεριφέρειαι ΠΑΠ' καὶ ΠΒΠ' μεγίστων κύκλων, λέγεται ***γωνία τοῦ ἀτράκτου.***

Εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ γωνία τοῦ ἀτράκτου ἔχει τὸ αὐτὸ μέτρον μὲ τὸ μέτρον τῆς διέδρου γωνίας, τὴν ὁποίαν ὁρίζουν τὰ ἡμικύκλια, τὰ ὁποῖα σχηματίζουν τὸν ἄτρακτον.

890. Σφαιρικὸς ὄνυξ. ***Σφαιρικὸς ὄνυξ*** *λέγεται τὸ μέρος τῆς σφαίρας, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ δύο ἡμικυκλίων μεγίστων κύκλων, τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὴν διάμετρον.*

Π.χ. τὸ μέρος ΠΑΠ'ΟΠΒΠ' *(Σχ. 593)* τῆς σφαίρας Ο εἶναι ἕνας σφαιρικὸς ὄνυξ.

Βάσις σφαιρικοῦ ὄνυχος *λέγεται ὁ ἄτρακτος, ὁ ὁποῖος περιέχεται μεταξὺ τῶν δύο ἡμικυκλίων, ποὺ σχηματίζουν τὸν σφαιρικὸν ὄνυχα.*

Γωνία σφαιρικοῦ ὄνυχος *εἶναι ἡ γωνία τῆς βάσεώς του.*

Ὁ ἄτρακτος ἢ καὶ ὁ σφαιρικὸς ὄνυξ λέγεται ***ὀρθογώνιος, ὀξυγώνιος*** *ἢ* ***ἀμβλυγώνιος,*** *ἐὰν ἡ γωνία των εἶναι ὀρθή, ὀξεῖα ἢ ἀμβλεῖα.*

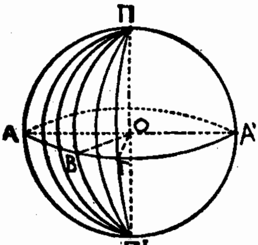
Κάθε ὀρθογώνιος ἄτρακτος εἶναι τὸ ἥμισυ ἡμισφαιρίου καὶ διπλάσιος ἑνὸς τρισορθογωνίου σφαιρικοῦ τριγώνου.

891. Θεώρημα. ***Δύο ἄτρακτοι τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἴσων σφαιρῶν, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἴσας γωνίας, εἶναι ἴσοι.***

Ἀπόδειξις: Ἀφοῦ οἱ ἄτρακτοι εἶναι ἴσοι, θὰ εἶναι ἴσαι καὶ αἱ δίεδροι γωνίαι, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς αὐτούς· ὅταν λοιπὸν ἐφαρμόσουν αἱ ἴσαι αὐταὶ δίεδροι γωνίαι, θὰ ἐφαρμόσουν καὶ οἱ ἄτρακτοι τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ τῶν ἴσων σφαιρῶν.

892. Θεώρημα. ***Ὁ λόγος δύο ἀτράκτων τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἴσων σφαιρῶν, εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν γωνιῶν των.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν οἱ δύο ἄτρακτοι ΠΑΠ'ΒΠ καὶ ΠΒΠ'ΓΠ, *(Σχ. 593)*· ἀπὸ τὸ κέντρον Ο τῆς σφαίρας φέρομεν ἕνα ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν διάμετρον ΠΠ', ἡ ὁποία συνδέει τὰ ἄκρα. Αἱ γωνίαι τῶν ἀτράκτων αὐτῶν ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον, ποὺ ἔχουν αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι ΑΟΒ καὶ ΒΟΓ ἢ τὰ ἀντίστοιχα τόξα των $\widehat{AB}$ καὶ $\widehat{B\Gamma}$.



Σχ. 593.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\frac{\text{ἀτρ.}\Pi A\Pi'B\Pi}{\text{ἀτρ.}\Pi B\Pi'\Gamma\Pi} = \frac{\widehat{AOB}}{\widehat{BO\Gamma}}.$$

Ἀπόδειξις: Ὑποθέτομεν, ὅτι τὰ δύο αὐτὰ τόξα ἔχουν ἕνα κοινὸν μέτρον, τὸ ὁποῖον περιέχεται 3 φορὰς εἰς τὸ $\widehat{AB}$ καὶ 2 φορὰς εἰς τὸ $\widehat{B\Gamma}$· ἄρα θὰ εἶναι:

$$\frac{\widehat{AOB}}{\widehat{BO\Gamma}}=\frac{\widehat{AB}}{\widehat{B\Gamma}}=\frac{3}{2} \qquad (1)$$

Ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως τῶν τόξων $\widehat{AB}$ καὶ $\widehat{B\Gamma}$ φέρομεν περιφερείας μεγίστων κύκλων, αἱ ὁποῖαι νὰ ἔχουν κοινὴν διάμετρον τὴν ΠΠ′. Αἱ ἡμιπεριφέρειαι αὐταὶ διαιροῦν τὸν ἄτρακτον ΠΑΠ′ΒΠ εἰς τρεῖς ἀτράκτους καὶ τὸν ἄτρακτον ΠΒΠ′ΓΠ εἰς δύο ἀτράκτους. Ὅλοι αὐτοὶ οἱ ἄτρακτοι εἶναι ἴσοι μεταξύ των, διότι καὶ αἱ ἀντίστοιχοι γωνίαι των εἶναι ἴσαι (§ 891)· θὰ εἶναι λοιπὸν

$$\frac{\text{ἄτρ.ΠΑΠ'ΒΠ}}{\text{ἄτρ.ΠΒΠ'ΓΠ}}=\frac{3}{2} \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι

$$\frac{\text{ἄτρ.ΠΑΠ'ΒΠ}}{\text{ἄτρ.ΠΒΠ'ΓΠ}}=\frac{\widehat{AOB}}{\widehat{BO\Gamma}}.$$

Τὸ θεώρημα εἶναι ἀληθὲς καὶ ὅταν τὰ τόξα $\widehat{AB}$ καὶ $\widehat{B\Gamma}$ δὲν ἔχουν ἕνα κοινὸν μέτρον· ἀποδεικνύεται δὲ κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 681).

893. Πόρισμα Ι. ***Τὸ μέτρον ἑνὸς ἀτράκτου εἶναι ἴσον μὲ τὸ μέτρον τῆς γωνίας του,*** *(ἐὰν ληφθῇ ὡς μονὰς τῶν ἀτράκτων ὁ ὀρθογώνιος ἄτρακτος καὶ ὡς μονὰς τῶν γωνιῶν ἡ ὀρθὴ γωνία).*

Ἡ πρότασις αὐτὴ εἶναι ἄμεσος συνέπεια τῆς προηγουμένης προτάσεως.

894. Πόρισμα ΙΙ. ***Τὸ μέτρον ἑνὸς ἀτράκτου εἶναι ἴσον μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ μέτρου τῆς γωνίας του,*** *(ἐὰν ληφθῇ ὡς μονὰς τῶν ἀτράκτων τὸ τρισορθογώνιον σφαιρικὸν τρίγωνον καὶ ὡς μονὰς γωνιῶν ἡ ὀρθὴ γωνία).*

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν Α καὶ Α′ δύο ἄτρακτοι καὶ Γ, Γ′ αἱ ἀντίστοιχοι γωνίαι των.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν ὅτι: μέτρ. ἀτρ. Α=2 μέτρ. $\widehat{\Gamma}$.

Ἀπόδειξις: Γνωρίζομεν (§ 892) ὅτι

$$\frac{\text{ἄτρ.Α}}{\text{ἄτρ.Α'}}=\frac{\widehat{\Gamma}}{\widehat{\Gamma'}} \quad \text{ἄρα} \quad \frac{\text{μέτρ. ἀτρ. Α}}{\text{μέτρ. ἀτρ.Α'}}=\frac{\text{μετρ.}\widehat{\Gamma}}{\text{μετρ }\widehat{\Gamma'}} \qquad (1)$$

Ἐὰν λάβωμεν ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν γωνιῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν καὶ ὑποθέσωμεν, ὅτι μετρ.Γ′=1, ὁ ἀντίστοιχος ἄτρακτος θὰ εἶναι ὀρθογώνιος καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι διπλάσιος τοῦ τρισορθογωνίου τριγώνου, δηλ. θὰ εἶναι μέτρ.ἀτρ.Α′=2 μονάδες μετρήσεως.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὰ μετρ.ἀτρ.Α′ καὶ μετρ.$\widehat{\Gamma'}$ μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν

$$\frac{\text{μέτρ.ἀτρ.Α}}{2} = \frac{\text{μετρ.}\widehat{\Gamma}}{1} \quad \text{ἢ} \quad \text{μέτρ.ἀτρ.Α}=2.\text{μέτρ.}\widehat{\Gamma}.$$

895. Πόρισμα III. ***Ὁ λόγος τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς ἀτράκτου πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαίρας εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει, εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῆς γωνίας του πρὸς 4 ὀρθὰς γωνίας.***

Ἔστω Α ἕνας ἄτρακτος καὶ Γ ἡ γωνία του.

Ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας ὡς ἕνα ἄτρακτον, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι ἴση μὲ 4 ὀρθάς, θὰ ἔχωμεν (§ 892)

$$\frac{\text{ἄτρ.Α}}{\text{σφαῖρ.}} = \frac{\widehat{\Gamma}}{4\,\text{ὀρθ.}} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\text{ἐμβ. ἀτρ. Α}}{\text{ἐμβ. σφαίρ.}} = \frac{\widehat{\Gamma}}{4\,\text{ὀρθ.}} \qquad (1)$$

896. Παρατήρησις. Ἐὰν ἡ γωνία τοῦ ἀτράκτου εἶναι ἴση μὲ μ μοίρας καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας R, τότε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας θὰ εἶναι $4\pi R^2$ καὶ ἑπομένως ἀπὸ τὴν σχέσιν (1) θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\text{ἐμβ.ἀτρ.Α}}{4\pi R^2} = \frac{\mu}{360^\circ} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\textbf{ἐμβ ἀτρ. Α}=\pi R^2 . \frac{\mu}{90}}$$

Ἀσκήσεις

2805. (2843). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ἀτράκτου 63°, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει ὁ ἄτρακτος, εἶναι 1 μ.

2806. (2844). Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ἀτράκτου εἶναι 1 τ.μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία του, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαίρας, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει ὁ ἄτρακτος, εἶναι 9 τ.μ.

897. Παρατήρησις. Ἐὰν δύο ἄτρακτοι τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἴσων σφαιρῶν εἶναι ἴσοι, θὰ εἶναι ἴσοι καὶ αἱ ἀντίστοιχοι σφαιρικοὶ ὄνυχες. Ἑπομένως αἱ ἀνωτέρω ἰδιότητες τῶν ἀτράκτων ἰσχύουν καὶ διὰ τοὺς σφαιρικοὺς ὄνυχας.

Πόρισμα. ***Δύο σφαιρικοὶ ὄνυχες ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν βάσεών των.***

898. Ὄγκος σφαιρικοῦ ὄνυχος. Ἡ σφαῖρα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἕνας σφαιρικὸς ὄνυξ, τοῦ ὁποίου βάσις εἶναι ὅλη ἡ ἐπιφάνειά της. Ἐὰν λοιπὸν ἡ γωνία τῆς βάσεως τοῦ σφαιρικοῦ ὄνυχος, δηλ. τοῦ ἀτράκτου, εἶναι 360°, ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ ὄνυχος θὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν ὄγκον τῆς σφαίρας ἀκτῖνος R, δηλ. μὲ $\frac{4}{3}\pi R^3$· ἑπομένως, ἐὰν ἡ γωνία τῆς βάσεως τοῦ σφαιρικοῦ ὄνυχος εἶναι μ°, ὁ ὄγκος του θὰ εἶναι ἴσος μὲ $\frac{4}{3}\pi R^3 . \frac{\mu}{360}$ ἢ $\frac{\pi R^3}{270}\mu$.

Ὥστε $$\boxed{\textbf{ὄγκ. σφαιρ.ὀνυχ.}= \frac{\mu \times \pi R^3}{270}\ \textbf{κυβ.μέτρα}}$$

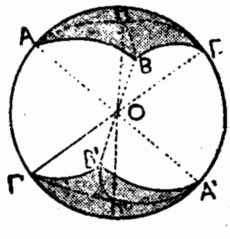
Ἐμβαδὸν σφαιρικοῦ τριγώνου

899. Θεώρημα. ***Δύο συμμετρικὰ σφαιρικὰ τρίγωνα εἶναι ἰσοδύναμα.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν τὰ συμμετρικὰ σφαιρικὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ'.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ σφαιρικὰ αὐτὰ τρίγωνα εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἀπόδειξις: Ἔστω Π ὁ πόλος τοῦ μικροῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ· ἂν φέρωμεν τὰ ΠΑ, ΠΒ, ΠΓ τῶν μεγίστων κύκλων, θὰ εἶναι $\widehat{ΠΑ}=\widehat{ΠΒ}=\widehat{ΠΓ}$. Φέρομεν τὴν διάμετρον ΠΟΠ' καὶ τὰ τόξα Π'Α', Π'Β', Π'Γ' μεγίστων κύκλων. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΠΟΑ καὶ Π'ΟΑ' εἶναι ἴσαι, θὰ εἶναι ἴσα καὶ τὰ τόξα



Σχ. 594.

ΠΑ καὶ Π'Α'. Ὁμοίως εἶναι $\widehat{ΠΒ}=\widehat{Π'Β'}$ καὶ $\widehat{ΠΓ}=\widehat{Π'Γ'}$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\widehat{ΠΑ}=\widehat{ΠΒ}=\widehat{ΠΓ}$ θὰ εἶναι καὶ $\widehat{Π'Α'}=\widehat{Π'Β'}=\widehat{Π'Γ'}$.

Τὰ σφαιρικὰ λοιπὸν τρίγωνα ΠΑΒ καὶ Π'Α'Β' εἶναι συμμετρικὰ καὶ ἰσοσκελῆ καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσα. Ὁμοίως εἶναι ἴσα καὶ τὰ τρίγωνα ΠΑΓ καὶ Π'Α'Γ', καθὼς καὶ τὰ τρίγωνα ΠΒΓ καὶ Π'Β'Γ' διὰ τὸν αὐτὸν λόγον.

Ἀλλὰ τότε τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ, ὡς ἄθροισμα τῶν σφαιρικῶν τριγώνων ΠΑΒ, ΠΑΓ καὶ ΠΒΓ, εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον Α'Β'Γ', τὸ ὁποῖον εἶναι ἄθροισμα τῶν σφαιρικῶν τριγώνων Π'Α'Β', Π'Α'Γ' καὶ Π'Β'Γ', τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα, ἕνα πρὸς ἕνα, πρὸς τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα ΠΑΒ, ΠΑΓ καὶ ΠΒΓ.

900. Παρατήρησις. Ἐὰν ὁ πόλος δὲν ἔκειτο εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἀλλ' ἐκτὸς αὐτοῦ, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 595, θὰ εἶναι

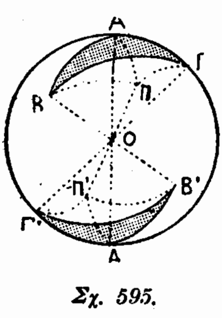
τριγ.ΑΒΓ=τρ.ΠΑΒ+τρ.ΠΑΓ—τρ.ΠΒΓ (1)

Ὁμοίως θὰ εἶναι

τρ.Α'Β'Γ'=τρ.Π'Α'Β'+τρ.Π'Α'Γ'—τρ.Π'Β'Γ' (2)

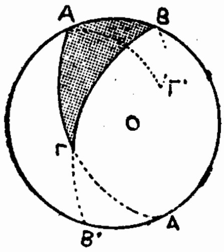
Ἐπειδὴ τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΠΑΒ, ΠΑΓ, ΠΒΓ εἶναι ἴσα ἀντιστοίχως μὲ τὰ τρίγωνα Π'Α'Β', Π'Α'Γ', Π'Β'Γ' συνάγομεν ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2), ὅτι

τριγ.ΑΒΓ=τριγ.Α'Β'Γ'.



Σχ. 595.

901. Θεώρημα. ***Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν γωνιῶν του ἠλαττωμένον κατὰ 2,*** *(ἐὰν λάβωμεν ὡς μονάδα γωνιῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν καὶ ὡς μονάδα ἐμβαδῶν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τρισορθογωνίου τριγώνου).*



Σχ. 596.

Ὑπόθεσις: Ἔστω ἕνα σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ *(Σχ. 596).*

Συμπέρασμα: Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Α, Β, Γ τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν του, εἰς ὀρθὰς γωνίας, θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\text{ἐμβ. σφ. τρ. ΑΒΓ} = Α + Β + Γ - 2.$$

Ἀπόδειξις: Συμπληρώνομεν τὸν μέγιστον κύκλον ΑΒ καὶ προεκτείνομεν τὰς πλευρὰς ΑΓ καὶ ΒΓ μέχρις, ὅτου συναντήσουν τὸν μέγιστον κύκλον ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Β′ καὶ Γ′. Τὰ τόξα ΑΓΑ′, ΒΓΒ′ εἶναι ἡμιπεριφέρειαι μεγίστων κύκλων. Ἔστω ἐπίσης Γ′ τὸ ἄλλο ἄκρον τῆς διαμέτρου ΓΟΓ′.

Ἐπίσης προεκτείνομεν τὰς πλευρὰς ΓΑ καὶ ΓΒ μέχρις ὅτου τμηθοῦν εἰς τὸ σημεῖον Γ′ τὸ ὁποῖον εἶναι ἐκ διαμέτρου ἀντίθετον τοῦ Γ.

Ὁ ἄτρακτος, ὁ ὁποῖος ἔχει γωνίαν τὴν γωνίαν $\widehat{Α}$ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΒΓΑ′, δηλ. εἶναι

$$\text{ἄτρ.}\widehat{Α} = \text{τριγ.ΑΒΓ} + \text{τριγ.ΒΓΑ}' \qquad (1)$$

Ὁμοίως εἶναι

$$\text{ἄτρ.}\widehat{Β} = \text{τριγ.ΑΒΓ} + \text{τριγ.ΑΓΒ}' \qquad (2)$$

$$\text{ἄτρ.}\widehat{Γ} = \text{τριγ.ΑΒΓ} + \text{τριγ.ΑΒΓ}'.$$

Ἀλλά, εἰς τὴν τελευταίαν ἰσότητα, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ′, δύναται νὰ ἀντικατασταθῇ μὲ τὸ τρίγωνον Α′Β′Γ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ′ ὡς συμμετρικὸν αὐτοῦ· ἑπομένως ἡ τελευταία αὐτὴ ἰσότης γράφεται

$$\text{ἄτρ.}\widehat{Γ} = \text{τριγ.ΑΒΓ} + \text{τριγ.Α}'\text{Β}'\text{Γ} \qquad (3)$$

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (1), (2), (3) κατὰ μέλη καὶ ἔχοντες ὑπ᾿ ὄψει, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΒΓΑ′, ΓΑΒ′ καὶ Α′Β′Γ ἀποτελοῦν ἕνα ἀπὸ τὰ δύο ἡμισφαίρια, τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ἀπὸ τὸν μέγιστον κύκλον ΑΒ, ἔχομεν

$$\text{ἄτρ.Α} + \text{ἄτρ.Β} + \text{ἄτρ.Γ} = \text{ἡμισφ.ΑΒ} + 2\ \text{τριγ.ΑΒΓ} \qquad (4)$$

Ἐπειδὴ ἐλήφθη ὡς μονὰς τῶν γωνιῶν ἡ ὀρθὴ γωνία καὶ ὡς μονὰς τῶν ἐμβαδῶν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τρισορθογωνίου τριγώνου, θὰ εἶναι $\text{ἄτρ.}\widehat{Α} = 2\widehat{Α}$, $\text{ἄτρ.}\widehat{Β} = 2\widehat{Β}$, $\text{ἄτρ.}\widehat{Γ} = 2\widehat{Γ}$ καὶ ἡμισφαίρ.ΑΒ=4 τρισορθο-

γώνια σφαιρ. τρίγωνα, δηλ. μὲ 4 μονάδας καὶ ἡ ἰσότης (4) γράφεται

$$2\widehat{A}+2\widehat{B}+2\widehat{\Gamma}=4+2\ \text{τρ.}AB\Gamma \quad \text{ἢ} \quad \text{τριγ.}AB\Gamma=\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}-2$$

ἢ

$$\textbf{ἐμβ. τριγ.}AB\Gamma=\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}-2$$

902. Σφαιρικὴ ὑπεροχή. *Ἡ διαφορὰ $(\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}-2)$ ὀρθαὶ γωνίαι λέγεται* ***σφαιρικὴ ὑπεροχὴ*** *τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου.*

Ἐκ αὐτοῦ συνάγομεν, ὅτι:

Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὴν σφαιρικήν ὑπεροχήν του, ἐὰν ὡς μονὰς ἐμβαδῶν ληφθῇ τὸ τρισορθογώνιον τρίγωνον.

903. Πόρισμα. Ἐπειδὴ τὸ τρισορθογώνιον τρίγωνον, τὸ ὁποῖον λαμβάνεται ὡς μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν τῶν σφαιρικῶν τριγώνων, εἶναι τὸ ὄγδοον τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει τὸ τρίγωνον, συνάγομεν, ὅτι:

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου, εἰς τετραγωνικὰ μέτρα, εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς σφαιρικῆς ὑπεροχῆς του ἐπὶ τὸ ἕνα ὄγδοον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

Ἂν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ R τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας καὶ μὲ A, B, Γ τὰς γωνίας του, εἰς ὀρθὰς γωνίας, θὰ εἶναι:

$$\textbf{ἐμβ. σφαιρ. τριγ.}=(\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}-2)\times\frac{1}{8}4\pi R^2$$

ἢ

$$\textbf{ἐμβ. σφαιρ. τριγ.}=\textbf{σφαιρ. ὑπεροχὴ}\times\frac{1}{2}\pi R^2$$

Παράδειγμα 1ον. Ἐὰν αἱ γωνίαι ἑνὸς σφαιρ. τριγ. ΑΒΓ εἶναι $\widehat{A}=\frac{4}{5}$ ὀρθ., $\widehat{B}=1$ ὀρθ., $\widehat{\Gamma}=\frac{9}{10}$ ὀρθ., ἡ σφαιρικὴ ὑπεροχή του εἶναι

$$\frac{4}{5}+1+\frac{9}{10}-2=\frac{7}{10}.$$

Ἐὰν ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει τὸ τρίγωνον, εἶναι R=1 μ., τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι:

$$\text{ἐμβ. σφαιρ. τριγ.}AB\Gamma=\text{σφαιρ. ὑπεροχ.}\times\frac{1}{2}\pi R^2$$

$$=\frac{7}{10}\times\frac{1}{2}\pi.1^2=\frac{7}{20}\pi=1{,}055\ \text{τετ. μ.}$$

Παράδειγμα 2ον. Αἱ γωνίαι ἑνὸς σφαιρ. τριγώνου ΑΒΓ εἶναι $\widehat{A}=109^\circ$, $\widehat{B}=146^\circ$, $\widehat{\Gamma}=65^\circ$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδόν του, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει, εἶναι 2 μ.

Ἐπειδὴ ἡ 1° εἶναι τὸ $\frac{1}{90}$ τῆς ὀρθῆς γωνίας, θὰ εἶναι:

$$\widehat{A}=\frac{109}{90}\text{ ὀρθ.},\quad \widehat{B}=\frac{146}{90}\text{ ὀρθ.},\quad \widehat{\Gamma}=\frac{65}{90}\text{ ὀρθ.}$$

καὶ ἑπομένως ἡ σφαιρικὴ ὑπεροχή του θὰ εἶναι:

$$\frac{109}{90}+\frac{146}{90}+\frac{65}{90}-2=\frac{140}{90}=\frac{14}{9}.$$

Ἄρα θὰ εἶναι:

$$\text{ἐμβ. σφ. τριγ.}AB\Gamma=\text{σφαιρ. ὑπεροχ.}\times\frac{1}{2}\pi R^2$$

$$=\frac{14}{9}\times\frac{1}{2}\pi 2^2=\frac{28}{9}\pi=9{,}7424\text{ τετρ. μετρ.}$$

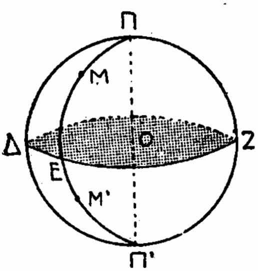
904. Πόρισμα. ***Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς σφαιρικοῦ πολυγώνου μὲ ν πλευρὰς εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του ἠλαττωμένον κατὰ 2(ν—2) ὀρθάς.***

Ἀπόδειξις: Ἐὰν ἀπὸ μίαν κορυφὴν τοῦ πολυγώνου φέρωμεν τὰς διαγωνίους του, χωρίζεται τὸ πολύγωνον εἰς ν—2 σφαιρικὰ τρίγωνα καὶ ἑπομένως τὸ ἐμβαδόν του εἶναι ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ν—2 αὐτῶν τριγώνων.

Ἄσκησις. 2807. (2845). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι εἶναι 85°, 70° καὶ 78° καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας ἴση μὲ 2 μέτρ.

Πολικὰ τρίγωνα

905. Πολικὰ τρίγωνα. Διὰ νὰ κατανοήσωμεν τὸν ὁρισμὸν τῶν πολικῶν τριγώνων καὶ τὰς ἰδιότητας αὐτῶν πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψει μας τὰ κάτωθι:

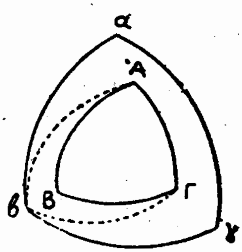


Σχ. 597.

Ἔστω ΔΕΖ ἕνας μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας Ο *(Σχ. 597)*, Π ὁ ἕνας ἐκ τῶν πόλων του καὶ Μ ἕνα τυχὸν σημεῖον τῆς σφαίρας. Ἐὰν τὰ σημεῖα Π καὶ Μ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ μεγίστου κύκλου ΔΕΖ, τὸ μικρότερον τόξον τῆς περιφερείας τοῦ μεγίστου κύκλου, τὸ ὁποῖον συνδέει τὰ σημεῖα Π καὶ Μ εἶναι μικρότερον τοῦ τεταρτημορίου ΠΕ. Ἐὰν τὰ σημεῖα Π καὶ Μ' κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ μεγίστου κύκλου ΔΕΖ, τὸ μικρότερον τόξον τῆς περιφερείας τοῦ μεγίστου κύκλου, τὸ ὁποῖον συνδέει τὰ σημεῖα Π καὶ Μ' εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τεταρτημορίου ΠΕ.

Ἔστω ἕνα σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ *(Σχ. 598)*. Μὲ πόλους τὰς

κορυφάς του Α, Β, Γ γράφομεν περιφερείας μεγίστων κύκλων ἐπὶ τῆς σφαίρας εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Αἱ τρεῖς αὗται περιφέρειαι διαιροῦν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας εἰς ὀκτὼ σφαιρικὰ τρίγωνα, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἕνα ἐξ αὐτῶν τὸ αβγ λέγεται ***πολικὸν*** τοῦ ΑΒΓ· ὡς πολικὸν τρίγωνον θὰ λάβωμεν ἐκεῖνο, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι μικρότεραι ἡμιπεριφερείας.



Σχ. 598.

Αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου αβγ, τὸ ὁποῖον εἶναι πολικὸν τοῦ ΑΒΓ, ἔχουν πόλους τὰς κορυφὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ αἱ κορυφαὶ Α καὶ α κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΒΓ, αἱ κορυφαὶ Β καὶ β κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΓ καὶ αἱ κορυφαὶ Γ καὶ γ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΒ.

906. Θεώρημα. ***Ἐὰν ἕνα τρίγωνον αβγ εἶναι πολικὸν ἑνὸς ἄλλου τριγώνου ΑΒΓ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι πολικὸν τοῦ αβγ.***

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον αβγ εἶναι πολικὸν τοῦ ΑΒΓ, αἱ κορυφαὶ Α, Β, Γ εἶναι πόλοι τοῦ αβγ.

Ἐπειδὴ ἡ κορυφὴ Α εἶναι ἐκ κατασκευῆς πόλος τοῦ τόξου βγ, ἡ ἀπόστασις Αβ, δηλ. τὸ τόξον Αβ τοῦ μεγίστου κύκλου, ὁ ὁποῖος συνδέει τὸ Α μὲ τὸ σημεῖον β, εἶναι ἕνα τεταρτημόριον. Ὁμοίως ἐπειδὴ τὸ Γ εἶναι πόλος τοῦ τόξου αβ, τὸ τόξον Γβ τοῦ μεγίστου κύκλου, ὁ ὁποῖος συνδέει τὸ Γ μὲ τὸ β, εἶναι τεταρτημόριον. Ἐπειδὴ τὰ τόξα βΑ καὶ βΓ εἶναι τεταρτημόρια μεγίστων κύκλων ἕπεται, ὅτι τὸ σημεῖον β εἶναι πόλος τοῦ τόξου ΑΓ.

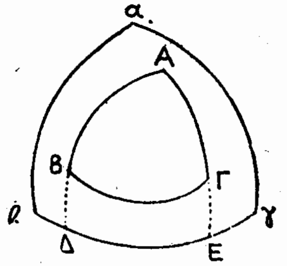
Ἐπὶ πλέον, ἐπειδὴ τὸ β εἶναι ὁ πόλος τοῦ τόξου ΑΓ, ὁ ὁποῖος κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς πλευρᾶς ΑΓ, πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται καὶ ἡ κορυφὴ Β, τὸ μικρότερον τόξον τοῦ μεγίστου κύκλου, ὁ ὁποῖος συνδέει τὰ σημεῖα β καὶ Β εἶναι μικρότερον τεταρτημορίου. Συνεπῶς τὸ σημεῖον β εἶναι ὁ πόλος τοῦ τόξου ΑΓ καὶ ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται πρὸς τὸ μέρος τοῦ ΑΓ, πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ κορυφὴ Β.

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι τὸ σημεῖον γ εἶναι πόλος τοῦ τόξου ΑΒ καὶ κεῖται πρὸς τὸ μέρος τοῦ τόξου ΑΒ πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ Γ καὶ τέλος ὅτι τὸ σημεῖον α εἶναι πόλος τοῦ τόξου ΒΓ καὶ κεῖται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ τόξου ΒΓ πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ Α.

Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΑΒΓ εἶναι πολικὸν τοῦ αβγ.

907. Θεώρημα. ***Ἐὰν δύο τρίγωνα εἶναι πολικὰ μεταξύ των, κάθε γωνία τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν καὶ ἡ ἐπίκεντρος γωνία, ἡ ὁποία βαίνει ἐπὶ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς τοῦ ἄλλου, εἶναι παραπληρωματικαί.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ *(Σχ. 599)*, τὰ ὁποῖα εἶναι πολικὰ μεταξύ των.



Σχ. 599.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ γωνία Α καὶ ἡ ἐπίκεντρος γωνία, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν πλευρὰν βγ εἶναι παραπληρωματικαί.

Ἀπόδειξις: Προεκτείνομεν τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ μέχρις ὅτου συναντήσουν τὸ τόξον βγ, ἔστω εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε. Ἐπειδὴ ἡ κορυφὴ Α εἶναι πόλος τοῦ τόξου βγ, ἡ γωνία Α ἔχει ὡς μέτρον τὸ τόξον ΔΕ.

Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα ἔχομεν

$$\Delta E = \beta E + \Delta\gamma - \beta\gamma \quad \text{ἢ} \quad \Delta E + \beta\gamma = \beta E + \Delta\gamma \qquad (1)$$

Ἀλλὰ τὸ τόξον βΕ εἶναι τεταρτημόριον περιφερείας, διότι τὸ β εἶναι πόλος τοῦ τόξου ΑΓΕ. Ὁμοίως τὸ τόξον γΔ εἶναι τεταρτημόριον περιφερείας, διότι τὸ γ εἶναι πόλος τοῦ τόξου ΑΒ καὶ ἑπομένως ἡ ἰσότης (1) γίνεται:

$$\Delta E + \beta\gamma = 1 \text{ τεταρτημ.} + 1 \text{ τεταρτημ.}$$

$$\text{ἢ} \quad \Delta E + \beta\gamma = 2 \text{ τεταρτημ.}$$

$$\text{ἢ} \quad \Delta E + \beta\gamma = \text{ἡμιπεριφέρ.} \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ τὸ τόξον ΔΕ εἶναι τὸ μέτρον τῆς γωνίας Α καὶ τὸ τόξον βγ εἶναι τὸ μέτρον τῆς ἐπικέντρου γωνίας, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ τόξον βγ συνάγομεν ἀπὸ τὴν ἰσότητα (2), ὅτι αἱ δύο αὗται γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί.

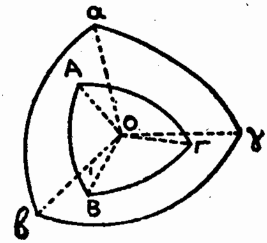
Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὰς ἄλλας γωνίας.

908. Θεώρημα. ***Αἱ τρίεδροι γωνίαι, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς δύο πολικὰ τρίγωνα, εἶναι παραπληρωματικαί.***

Ὑπόθεσις: Ἔστωσαν ΑΒΓ καὶ αβγ *(Σχ. 600)* δύο πολικὰ τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἀνήκουν εἰς τὴν σφαῖραν Ο καὶ ΟΑΒΓ, Οαβγ αἱ τρίεδροι γωνίαι, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ πολικὰ αὐτὰ τρίγωνα.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ στερεαὶ αὗται γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ τὸ α εἶναι πόλος τοῦ τόξου ΒΓ, τὰ τόξα αΒ καὶ αΓ εἶναι τεταρτημόρια μεγίστων κύκλων καὶ ἑπομένως αἱ γωνίαι αΟΒ καὶ αΟΓ εἶναι ὀρθαί. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι αΟΒ καὶ αΟΓ εἶναι ὀρθαί, ἡ αΟ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς ΟΒ καὶ ΟΓ καὶ ἑπομένως ἡ αΟ εἶναι καὶ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν ΒΟΓ· κεῖται δὲ ἡ Οα πρὸς τὸ μέρος τῆς ἀκμῆς ΟΑ, διότι ἡ γωνία αΟΑ εἶναι ὀξεῖα, διότι τὸ τόξον αΑ εἶναι μικρότερον τεταρτημορίου,



Σχ. 600.

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι ἡ Οβ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΟΓ καὶ κεῖται πρὸς τὸ μέρος πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ ΟΒ καὶ τέλος ἡ Ογ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΟΒ καὶ φέρεται πρὸς τὸ μέρος πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ ΟΓ.

Αἱ τρίεδροι λοιπὸν ΟΑΒΓ καὶ Οαβγ εἶναι παραπληρωματικαὶ (§ 907).

ΔΙΟΡΘΩΤΕΑ

Σελίς	Στίχος	Ἀντί	Νὰ γραφῇ
375	18	παραλληλογράμμου	ὀρθογ. παραλληλογράμμου
500	8	δύο χορδὰς	δύο καθέτους χορδὰς
608	27	δύο εὐθύγραμμα	δύο ἴσα εὐθύγραμμα
646	33	μιᾶς τριέδρου	μιᾶς τρισορθογωνίου τριέδρου

10